O‘ZBEKISTON RESPUBLIKASI OLIY VA O‘RTA
MAXSUS TA’LIM VAZIRLIGI

Farxod Rajabov., Sultanposhsho Masharipova

OLIY MATEMATIKA ASOSLARI

O‘zbekiston Respublikasi Oliy va o‘rta maxsus ta’lim vazirligi Oliy o‘quv yurtlarini 5141600-«Boshlang‘ich ta’lim va tarbiyaviy ish» bakalavr yo‘nalishi talabalari uchun o‘quv qo‘llanma sifatida tasdiqlagan

Toshkent - 2008

Taqrizchilar: A.O.Otarov.–Berdaq nomli Qoraqalpoqistan Davlat universiteti "Informatika va amaliy matematika" kafedrasi professori.
B.Abdullayev - UrDU «Boshlang'ich ta'lim nazariyasi va metodikasi» kafedrasi mudiri, f-m.f.n., dotsent.
A.Xalillayev – p.f.n., katta o'qituvchi.
B. Sultanov – f.m.f.n. XVPKQTMOI rektori

O'quv qo'llanma bakalavriat yo'nalishi 5141600 – "Boshlang'ich ta'lim va tarbiyaviy ish" talabalari uchun mo'ljallangan bo'lib, davlat ta'lim standartiga to'la mos keladi.

Qo'llanma matematikaning umumiy tushunchalar, nomanfiy butun sonlar, son tushunchasini kengaytirish, funktsiya, hosila, integral, algebra va analitik geometriya elementlari, elementar geometriya elementlari, miqdorlar va ularni o'lchash, ehtimollar nazariyasi va metematik statistika elementlari bo'limlarini o'z ichiga oladi. Bo'limlardagi mavzularning nazariy mazmunining ma'nosini ochib berish uchun ko'p miqdorda xar xil misol va masalalar keltirilgan xamda o'z-o'zini nazorat qilish savollari bilan ta'minlangan.

MUNDARIJA

SO‘Z BOSHI

Ta’lim sohasida islohotlar amalga oshirilayotgan va lotin grafikasiga asoslangan yangi o‘zbek tiliga o‘tilgan bir paytda hamda boshlang‘ich sinflar uchun yangi «Matematika» o‘quv darsliklari yaratilayotgan bir vaqtda yangi ta’lim standartlarida ko‘rsatilgan fanlar bo‘yicha o‘quv adabiyotlarini yangi avlodini yaratish zarurligi tug‘ilmoqda. Hozirgacha bor bo‘lgan adabiyotlarni ayrimlari standart talablariga javob bermaydi.

Shu jumladan «Boshlang‘ich ta’lim va tarbiyaviy ish» yo‘nalishi bo‘yicha «Oliy matematika asoslari» fanidan standartga to‘la mos keluvchi o‘quv darsligi yoki o‘quv qo‘llanmasi yo‘q. Shu nuqtai nazardan biz «Boshlang‘ich ta’lim va tarbiyaviy ish» yo‘nalishi namunaviy dasturiga to‘la mos keluvchi o‘quv qo‘llanmasi yozishni o‘z oldimizga maqsad qilib qo‘ydik.

O‘quv qo‘llanma namunaviy fan dasturiga mos bo‘lib, VIII bobni o‘z ichiga oladi:

I. Umumiy tushunchalar.
II. Nomanfiy butun sonlar.
III. Son tushunchasini kengaytirish.
IV. Funksiya, hosila, integral.
V. Algebra va analitik geometriya elementlari.
VI. Elementar geometriya elementlari.
VII. Miqdorlar va ularni o‘lchash.
VIII. Ehtimollar nazariyasi va matematik statistika elementlari.

«Umumiy tushunchalar» bobida “To‘plamlar va ular ustida operatsiyalar”, «Moslik», «Kombinatorika elementlari», «Matematik mulohazalar va ularning strukturasi», Algoritmlar», «Algebrik operatsiya» mavzulari keltirilgan. Bular “Nomanfiy butun sonlar” bo‘limini o‘rganishda asos bo‘lib xizmat qiladi.

To‘plam, cheksiz to‘plam tushunchalari ta’rifsiz boshlang‘ich tushuncha sifatida kiritilgan. To‘plamlar ustidagi operatsiyalar qonunlari geometrik nuqtai nazardan Eyler doiralari yordamida ko‘rsatilgan. Sonli to‘plamlar koordinata to‘g‘ri chizig‘ida tasvirlangan.

Munosabatlar haqida tushuncha berilib ularga tegishli misollar chizmalarda tasvirlab berilgan. Kombinatorika elementlari mavzusi asosan to‘plamlar nazariyasi asosida bayon qilingan.

Matematik mantiq elementlari va binar algebrik operatsiyalar bo‘limida matematikaning algebra bo‘limi uchun zarur bo‘lgan umumiy tushunchalar – fikrlar, predikatlar va ular ustidagi mantiq operatsiyalari, ularning to‘plamlar nazariyasi bilan bog‘liqligi, algebraning umumiy ta’rifi, ayrim strukturalari haqida umumiy matematik ma’lumotlar berilgan.

«Nomanfiy – butun sonlar bobida boshlang‘ich sinf o‘qituvchisi uchun eng muhim bo‘lgan boshlang‘ich sinf matematikasining asosiy ob’ekti hisoblangan nomanfiy butun sonlar to‘plamini qurishning: to‘plamlar nazariyasi asosida, aksiomatika asosida va miqdorlarni o‘lchash asosida qurish ko‘rsatilgan. «Sanoq sistemalari» mavzusini o‘rganishda asosiy e’tibor o‘nli sanoq sistemasida amallar bajarish algoritmiga qaratilgan.

«Son tushunchasini kengaytirish» bo‘limida son tushunchasi bo‘yicha ega bo‘lingan bilimlar umumlashtirilgan, butun sonlar, ratsional sonlar va haqiqiy sonlar haqidagi bilimlar nazariy jihatdan chuqurlashtirilgan, kompleks son tushunchasi, kompleks sonlarini turli ko‘rinishlari bilan tanishtirilib, ular ustida amallar bajarish qoidalari berilgan

«Funksiya» bobida matematik tahlil elementlari: funksiya tushunchasi ta’rifi va berilish usullari, funktsiya grafigi, elementar funksiyalar ularning xossalari va grafiklari, funksiyaning limiti, uzluksizligi, differensiali va integrali tushunchalari kiritilgan va ularga doir misollar ko‘rsatilgan.

«Algebra va analitik geometriya elementlari» bobida sonli va algebrik ifodalar, sonli tenglik va tengsizliklar, bir va ikki o‘zgaruvchili tenglama va tengsizliklar ularning xossalari qaralgan. Shuningdek, vektor, ular ustida amallar vektor va nuqtaning koordinatalari ham kiritilgan. Shularga bog‘liq ravishda analitik geometriya elementlari berilgan, tekislikda to‘g‘ri chiziq tenglamasi, to‘g‘ri chiziqlarning o‘zaro joylashuvi, fazoda to‘g‘ri chiziq, tekislik tenglamalari, shuningdek, ikki va uch o‘zgaruvchili tenglamalar sistemalarini echishning qo‘shish, o‘rniga qo‘shish va grafik usullari keltirilgan. Matritsa va determinant tushunchalari bilan tanishtirilgan.

Determinantlari hisoblash, Kramer qoidasi yordamida tenglamalar sistemasini echish usuli berilgan.

«Geometriya elementlari» bobida elementar geometriya bo‘limidan olingan geometrik bilim va ko‘nikmalarni umumlashtirib, uni sistemalashtirib ular to‘g‘risidagi bilim va malakalar takomillashtirilgan «Miqdorlar va ularni o‘lchash» bobi asosan boshlang‘ich matematika kursi asosida berilgan. Bo‘limda uzunlik, massa, hajm, vaqt, yo‘l, tezlik kabi tushunchalar beriladi.

«Ehtimollar nazariyasi va matematik statistika elementlari» bobida, ehtimollar nazariyasining boshlang‘ich tushunchalari, ehtimollikni qo‘shish va ko‘paytirish, ehtimollikni asosiy turlari, Bayes formulasi, Diskret tasodifiy miqdorlar va uning taqsimot qonuni. Matematik kutilish, dispersiya, poligon, gistogramma haqida, shuningdek, eksperiment natijalariga statistik ishlov berish bo‘yicha misollar keltirilgan. Qo‘llanmning V-VI boblari dotsent Masharipova Sultonposhsha tomonidan yozilgan.

Kitob qo‘lyozmasini o‘qib chiqib o‘zlarining fikr va mulohazalarini bildirgan UrDU matematika fakulteti dekani professor O.Hasanov, «Boshlang‘ich ta’lim nazariyasi va metodikasi» kafedrasi dotsentlari B.Abdullaev, B.Sultanov, O.Xalillaev Toshkent Davlat pedagogika universiteti dotsenti, pedagogika fanlari nomzodi, M. Jumaevlarga mualliflar o‘zlarining chuqur minnatdorchiligini bildiradilar.

Mualliflar qo‘llanma haqida bildirgan fikr va mulohazalarni minnatdorchilik bilan qabul qiladilar.

Mualliflar

I. BOB. UMUMIY TUSHUNCHALAR.
I.1. To‘plamlar va ular ustida amallar
I.1.1. To‘plam tushunchasi. To‘plamning elementi. Bo‘sh to‘plam. To‘plamning berilish usullari. To‘plam osti. Universal to‘plam.

To‘plam deganda narsalar, buyumlar, ob’ektlarni biror xossasiga ko‘ra birgalikda (bitta butun deb) qarashga tushuniladi.
Masalan, hamma natural sonlarni birgalikda qarasak, natural sonlar to‘plami hosil bo‘ladi. Bir talabalar uyida yashovchi talablarni birgalikda qarash bilan shu talabalar uyidagi talabalar to‘plamini hosil qilamiz. To‘g‘ri chiziqda yotuvchi hamma nuqtalarni bitta butun deb qarash shu to‘g‘ri chiziqdagi nuqtalar to‘plamini, maktabdagi o‘quvchilarni birgalikda qarash o‘quvchilar to‘plamini beradi va h.k.

1-ta’rif: To‘plamni tashkil etuvchi narsalar, buyumlar, ob’ektlar – bu to‘plamning elementlari deb ataladi. Masalan, yuqoridagi misollardagi o‘quvchilar, talabalar, natural sonlar mos to‘plamlarining elementlari hisoblanadi. To‘plamlar odatda, lotin yoki grek alfavitining katta harflari bilan, ularning elementlari esa alfavitning kichik harflari bilan belgilanadi. A to‘plam $a, b, s, d, ..., \alpha, \beta$ elementlaridan tuzilganligi $A = \{a, b, s, d, ..., \alpha, \beta\}$ ko‘rinishda yoziladi.

2-ta’rif: Bitta ham elementga ega bo‘lmagan to‘plam bo‘sh to‘plam deb ataladi va $\varnothing$ bilan belgilanadi.
a element A to‘plamning elementi ekanligi $a \in A$ ko‘rinishda belgilanadi va «a element A to‘plamning elementi», «a element A to‘plamga tegishli», «a element A to‘plamda mavjud» yoki «a element A to‘plamga kiradi» deb aytiladi.
a element A to‘plamning elementi emasligi $a \notin A$ belgi bilan ko‘rsatiladi. Masalan, $A = \{a, b, s\}$ to‘plam uchun $a \in A$ $b, s, \in A$ lekin $l \notin A$.

To‘plamni tashkil etuvchi elementlar soni chekli yoki cheksiz bo‘lishi mumkin. Birinchi holda chekli to‘plamga, ikkinchi holda esa cheksiz to‘plamga ega bo‘lamiz. Masalan: $A = \{a\}$, $B = \{a, b\}$, $C = \{a, b, s\}$ to‘plamlar chekli bo‘lib, ular mos ravishda bitta, ikkita va uchta elementlardan tuzilgan. Quyidagi $A = \{1, 2 3, ..., n, ...\}$, $B = \{2, 4, 6, ... 2n, ...\}$ to‘plamlar cheksiz to‘plam.

Izoh. A to‘plamda faqat har bir a elementi o‘z-o‘ziga teng, lekin har qanday ikkita boshqa-boshqa a va b elementni tengmas deb hisoblaymiz, bundan A to‘plamning har bir elementi bu to‘plamda bir martagina olinganligi (bir martagina uchraganligi) ma’lum bo‘ladi. a elementning o‘z-o‘ziga tengligi $a = a$ ko‘rinishda, a va b elementlarining har xilligi $a \neq b$ ko‘rinishda belgilanadi.

Agar A to‘plamning a elementi B to‘plamning b elementiga teng, ya’ni $a = b$ desak, bundan bitta element ikkala to‘plamda har xil harflar bilan belgilanganligini tushunamiz.

3-ta’rif: A to‘plamning har bir elementi B to‘plamda ham mavjud bo‘lsa, A va B to‘plamlarni teng (bir xil) deb atab buni $A = B$ yoki $B = A$ ko‘rinishda belgilaymiz.

Ta’rifdan ma’lumki ikki to‘plamning tengligi ularning aslida bitta to‘plam elementlari ekanligini bildiradi. Shunga o‘xshash bir qancha to‘plamlarning tengligi haqida gapirish mumkin.

To‘plamlar ikki xil usulda beriladi:

a) agar to‘plamlar chekli to‘plam bo‘lib, elementlar soni ko‘p bo‘lmasa, to‘plam elementlarini bevosita sanash orqali beriladi;

b) to‘plam elementlarini xarakteristik xossalari orqali ham beriladi. **Masalan:** 12 sonidan kichik natural sonlar to‘plami. $M=\{x \mid x\in N, \ \ x<12\}$ Bu esa tubandagicha o‘qiladi «M to‘plami shunday x elementlardan tashkil topgan bo‘lib, u natural sonlar to‘plamidagi 12 sonidan kichik sonlardan tashkil topgan».

4-ta’rif: B to‘plamning har bir elementi A to‘plamda ham mavjud bo‘lsa B ni A to‘plamning to‘plam osti, (qismi, qism to‘plami) deymiz, buni quyidagicha belgilaymiz:

$$B\subset A \text{ yoki } A\supset B$$

Izoh: Bu ta’rifdan ko‘rinadiki, B to‘plamning hamma elementlari A da mavjud bo‘lgan holda, A da Bga kirmagan boshqa elementlar bo‘lmasa, $A=B$, $B=A$ tenglikka kelamiz.

Shuning bilan birga 4-ta’rifdan bo‘sh to‘plam va har bir to‘plam o‘zining to‘plam osti (qism-to‘plami) ekanligi ko‘rinadi.

Masalan, $A=\{a,b,s,d,e,f,g\}$ to‘plam uchun $B=\{a\}$, $C=\{b,d,f\}$, $D=\{a,g\}$ to‘plamlarning har qaysisi to‘plam osti (qism to‘plam)dir.

Agar A to‘plamning har bir elementiga B to‘plamning yagona bir elementi mos kelsa, A va B to‘plamlar orasida o‘zaro bir qiymatli moslik o‘rnatiladi deyiladi. Agar A va B to‘plamlar orasida o‘zaro bir qiymatli moslik o‘rnatilgan bo‘lsa, ular ekvivalent deyiladi va $A\sim B$ ko‘rinishda belgilanadi. Masalan, natural sonlar to‘plami N, barcha juft sonlar to‘plami M bilan ekvivalent.

Haqiqatan ham natural sonlar to‘plami N bilan barcha juft sonlar to‘plami M orasida o‘zaro bir qiymatli moslikni o‘rnatish mumkin, chunki har bir natural son $n\in N$ ga $2n\in N$ juft soni mos keladi va aksincha.

Ikkita chekli to‘plam orasida ekvivalentlikni o‘rnatishni ikkita yo‘li bor:

1. To‘plamlar elementlari orasida bevosita o‘zaro bir qiymatli moslik o‘rnatish orqali;
2. To‘plamlar elementlarini sanash va ularni har biridagi elementlar sonini taqqoslash yo‘li bilan.

Masalan, Agar $A=\{1,2,3\}$ va $B=\{stol,\ stul,\ \ parta\}$ bo‘lsa, u holda bu to‘plamlar chekli ekvivvalent bo‘lib, har bir to‘plam uchta elementga ega. Agar n elementdan tashkil topgan chekli to‘plamning elementlarini biror tarzda $1,2,3,\ldots,p$ natural sonlar bilan nomerlash mumkin bo‘lsa, u tartiblangan deyiladi.

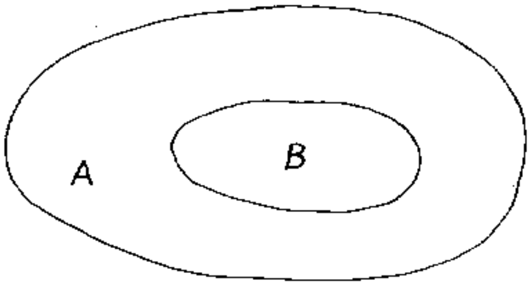
Masalan, guruhdagi talabalar to‘plami tartiblangan, chunki ularni otasining ismlarini guruh jurnalida natural sonlar yordamida tartiblash mumkin.

5-Ta’rif. B to‘plamning barcha elementlari A to‘plamda mavjud bo‘lib, shu bilan birga A da B ga tegishli bo‘lmagan elementlar ham mavjud bo‘lsa B to‘plam A to‘plamning xos qism to‘plami deyiladi.

6-Ta'rif. A to'plamning o'zi va $\varnothing$ to'plam shu A to'plamning xosmas qism to'plami deyiladi.

7-Ta'rif. Har qanday to'plamning xos qism to'plami deb qaralmagan to'plam universal to'plam deyiladi va u U bilan belgilanadi. U universal to'plamning barcha qism to'plamlari orasida ikkita xosmas qism to'plam mavjud bo'lib, ulardan biri U ning o'zi, ikkinchisi esa bo'sh to'plam, qolganlari esa xos qism to'plamlar bo'ladi.

To'plamlarni geometrik nuqtai nazardan yaqqol ko'z oldiga keltirish uchun, ular doiracha ko'rinishida belgilanadi. Masalan: B to'plam A to'plamning xususiy to'plam osti ekanligi quyidagi ko'rinishda tasvirlanadi. (1-chizma)



1-chizma

To'plamlarning bunday tasvirlanishi Eyler-Venn diagrammalari deyiladi.

O'z-o'zini tekshirish uchun savollar.

1. To'plam deganda nimani tushunasiz?
2. Bo'sh, chekli, cheksiz to'plamlarga misollar keltiring.
3. To'plamlar necha xil usulda beriladi?
4. Teng to'plamlarga ta'rif bering.
5. To'plam osti tushunchasiga ta'rif bering va misollar keltiring.
6. Qanday to'plamlar ekvivalent to'plamlar deyiladi va qanday qilib ikki to'plam orasida ekvivalentlikni o'rnatish mumkin.
7. Universal to'plam deganda qanday to'plamni tushunasiz? Misollar keltiring.

I. 1.2. To'plamlar va ular ustida amallar.

Ta'rif. $a,b,s,d,...$ elementlar A va B to'plamlarning har birida mavjud bo'lsa, ular bu to'plamlarning umumiy elementlari deyiladi. Masalan: $A=\{a,b,s,d,e,f\}$, $B=\{a,b,d\}$ to'plamlar uchun a,b,d – umumiy elementlar.

1) ***To'plamlar kesishmasi.*** A va B to'plamlarning hamma umumiy elementlaridangina tuzilgan C to'plam A va B to'plamlarning kesishmasi (ko'paytmasi) deyiladi va quyidagicha belgilanadi:

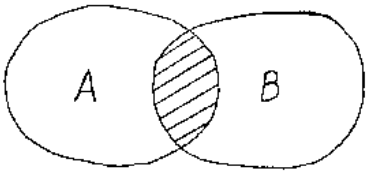
$C = A * B$ yoki $C = A \cap B$ bu erda $\cap$ belgi to'plamlarning kesishmasini bildiradi.

Bitta ham umumiy elementga ega bo'lmagan to'plamlarning kesishmasi $\varnothing$ bo'sh to'plamga teng.

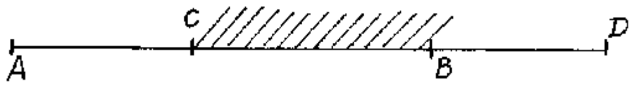
Masalan,

1. $A=\{a,b,s,d,e\}$ va $B=\{a,s,d,e,f\}$ to‘plamlar uchun: $A\bigcap B=\{a,s,d,e\}$ ga teng.
2. $A=\{1,2,3,4,5,6\}$, $B=\{5,6,7,8\}$ va $C=\{5,6,9,10,11\}$ to‘plamlarning kesishmasi ushbuga teng: $A\bigcap B\bigcap C=\{5,6\}$
3. $A=\{2,3,4\}$ va $B=\{7,8,9\}$ to‘plamlarning kesishmasi ushbuga teng: $A\bigcap B\neq\varnothing$

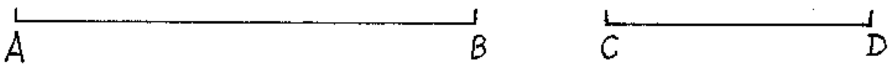
To‘plamlarning kesishmasi geometrik nuqtai nazardan figuralarning kesishmasiga mos keladi.



2-chizma



3-chizma



4-chizma

2-chizmada shtrixlangan qism A va B to‘plamlar kesishmasini, 3-chizmada [CB] kesma [AB] va [CD] kesmalar kesishmasini ifodalaydi.
4-chizmada [AB] va [CD] kesmalar kesishmaydi, demak kesishma bo‘sh to‘plam.
To‘plamlar kesishmasi uchun quyidagilar o`rinli:

$A\bigcap A\bigcap A...=A$

$A\bigcap\varnothing=\varnothing$

$\varnothing\bigcap\varnothing=\varnothing$

Agar $B\subset A$ bo‘lsa, u holda $A\bigcap B=B$

Yuqoridagi xulosalar to‘plamlar soni ikkitadan ortiq bo‘lgan hol uchun ham to‘g‘ri.

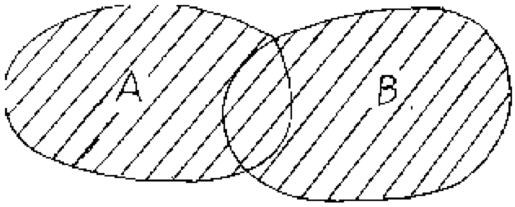
2) ***To‘plam birlashmasi (yig’indisi)*** Berilgan A va B to‘plamlarning birlashmasi (yig‘indisi) deb shu A va B to‘plamlarning har biridagi barcha elementlardan tuzilgan C to‘plamga aytamiz. Birlashma $C=A+B$ yoki $C=A\bigcup B$ ko‘rinishda belgilanadi.

To‘plamlar birlashmasida har bir element bir martagina olinishi lozim bo‘lgani uchun, to‘plamlardan har ikkalasining umumiy elementlari C yig‘indida bir martagina olinadi.

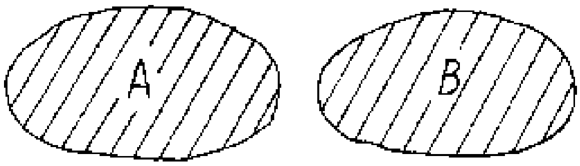
Misollar:

1. $A=\{a,b,s,d\}$, $B=\{a,b,s,d,e,f\}$ to‘plamlarning birlashmasi: $A\bigcup B=\{a,b,s,d,e,f\}$ ga teng
2. $A=\{3,4,5,6\}$ va $B=\{6,7,8,9,10\}$ to‘plamlar uchun $A\bigcup B=\{3,4,5,6,7,8,9,10\}$ ga teng.

To‘plamlarning birlashmasi geometrik nuqtai nazardan figuralarning barcha nuqtalaridan tashkil topgan to‘plamni bildiradi.



5-chizma



6-chizma

5,6-chizmalarda shtrixlangan yuza A va B to‘plamlarning birlashmasini bildiradi. To‘plamlar birlashmasi uchun quyidagilar o‘rinli:

$A \bigcup A \bigcup A \ldots = A$

$A \bigcup \varnothing = A$

$\varnothing \bigcup \varnothing = \varnothing$

Agar $B \subset A$ bo‘lsa, u holda $A \bigcup B = A$ bo‘ladi.

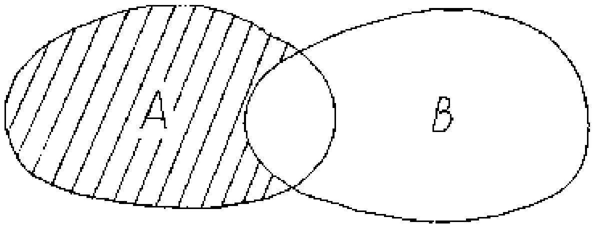
To‘plamlar soni ikkitadan ortiq bo‘lganda ham yig‘indi uchun chiqarilgan xulosalar to‘g‘ri bo‘ladi.

3) ***To‘plamlar ayirmasi.*** A va B to‘plamlarning ayirmasi deb shunday to‘plamga aytiladiki, u A ning B da mavjud bo‘lmagan hamma elementlaridangina tuziladi va quyidagicha belgilanadi:

$$C = A - B \text{ yoki } C = A \setminus B$$

Misollar:

1. $A = \{1,2,3,4\}$ va $B = \{3,4,5,6,7,8\}$ uchun $R = A \setminus B = \{1,2\}$
2. $A = \{1,2,3,4,5\}$ va $B = \{6,7,8\}$ uchun $R = A \setminus B = \{1,2,3,4,5\}$
3. $A = \{1,2,3\}$ va $B = \{1,2,3,4,5\}$ uchun $R = A \setminus B = \varnothing$



7-chizma

To‘plamlarning ayirmasi geometrik nuqtai nazardan yuqoridagi 7-chizmada ko‘rsatilgan shtrixlangan yuzani bildiradi.

To‘plamlar ayirmasi uchun quyidagilar o‘rinli:

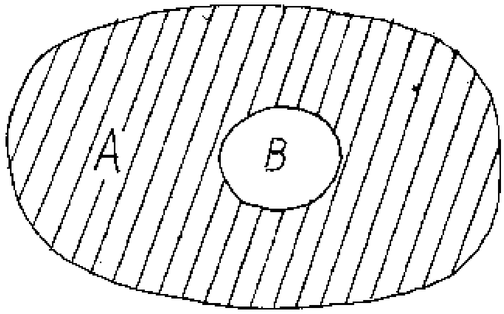
$$A \setminus A = \varnothing$$

$$A \setminus \varnothing = A$$

$$\varnothing \setminus A = \varnothing$$

4) ***To‘plamga to‘ldiruvchi:*** A to‘plam va uning B qismi berilgan bo‘lsin. A dagi B ga kirmay qolgan hamma elementlardangina tuzilgan qism, B ning

to‘ldiruvchisi deb ataladi va $\overline{B}$ ko‘rinishda belgilanadi. Bunda $\overline{B}$ qism to‘plam B ni A gacha to‘ldiradi, ya’ni B va $\overline{B}$ ning birlashmasi xuddi $\overline{B}$ ga teng bo‘ladi.
Masalan, $A = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ va $B = \{2,5,6,9\}$ bo‘lsa, $B = \{1,3,4,7,8\}$ bo‘ladi.
Agar A to‘plam biror boshqa to‘plamning qismi deb qaralmasa, u holda A to‘plamning to‘ldiruvchisi $\varnothing$ bo‘sh to‘plam bo‘lib, $\varnothing$ ning to‘ldiruvchisi esa A bo‘ladi, ya’ni: $\overline{A} = \varnothing$ va $\overline{\varnothing} = A$.
Agar $A \supset B$ bo‘lsa, u holda $A \setminus B$ ayirma, B to‘plamni B to‘plamga to‘ldiruvchisi deyiladi.
Bu 8-chizmada quyidagicha ifodalanadi.



8-chizma

Ushbu tengliklarga egamiz:

$$B \cap \overline{B} = \varnothing$$
$$B \cup \overline{B} = A$$
$$B \setminus \overline{B} = B$$
$$\overline{B} \setminus B = \overline{B}$$

1-Eslatma. A va B to‘plamlarning aqalli bittasida ikkinchisiga kirmaydigan elementlar mavjud bo‘lsa, A va B ni tengmas to‘plamlar deymiz, uni quyidagicha belgilaymiz:

$$A \neq B$$

5) To‘plamlarning dekart (to‘g‘ri) ko‘paytmasi. A va B to‘plamlarning to‘g‘ri ko‘paytmasi deb shunday to‘plamga aytiladiki, u to‘plam elementlari tartiblangan (x, y) juftliklardan iborat bo‘lib, bu juftni birinchisi A to‘plamdan, ikkinchisi esa B to‘plamdan olinadi. To‘g‘ri ko‘paytma $A * B$ ko‘rinishda belgilanadi.
Misol: $A = \{4,5,7\}$ va $B = \{-1,2,3,4\}$ to‘plamlar berilgan bo‘lsin. U holda A va B to‘plamlarning to‘g‘ri ko‘paytmasi quyidagicha bo‘ladi:

$$A * B = \{(4;-1),(4;2),(4;3),(4;4),(5;-1),(5;2),(5;3),(5;4),(7;-1),(7;2),(7;3),(7;4)\}$$

Agar biz to‘g‘ri ko‘paytma elementi (x, y) dagi x ni biror nuqtani abssissasi, y ni esa ordinatasi desak, u holda bu to‘g‘ri ko‘paytma tekislikdagi nuqtalar to‘plamini ifodalaydi.
Boshqacha aytganda haqiqiy sonlar to‘plami R ni R ga to‘g‘ri ko‘paytmasi $R \times R$ ni tasvirlaydi.
6) To‘plamlar ustida amallar xossalari.
To‘plamlar ustidagi amallar quyidagi xossalarga ega:
To‘plamlar kesishmasi uchun

1) $A \cap B = B \cap A$ (kommutativlik xossasi)
2) $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ (assotsiativlik xossasi)
To‘plamlar birlashmasi uchun:
1) $A \cup B = B \cup A$ (kommutativlik xossasi)
2) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ (assotsiativlik xossasi)
Ixtiyoriy A, B, C to‘plamlar uchun quyidagi munosabatlar o‘rinli:
1) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ (kesishmaning birlashmaga nisbatan distributivligi)
2) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ (birlashmaning kesishmaga nisbatan distributivligi)
3) $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$
4) $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$
Bu xossalarni (munosabatlarni) to‘g‘riligi Eyler-Venn diagrammalari orqali ko‘zga tashlanadi.

O‘z-o‘zini tekshirish uchun savollar.

1. To‘plamlar birlashmasi, kesishmasi, ayirmasiga ta’rif bering va misollar keltiring.
2. To‘plamga to‘ldiruvchi deganda nimani tushunasiz, izohlang.
3. To‘plamlar ustida amallar qanday xossalarga ega.
4. To‘plamlarni dekart ko‘paytmasini misollar yordamida tushuntiring va ko‘paytma kommutativlik xossasiga ega bo‘lmasligini izohlang.

I.1.3.To‘plamlarni sinflarga ajratish.

Ta’rif: A to‘plam quyidagi 2 shartni qanoatlantirsa u $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ sinflarga ajratilgan deyiladi.
1) $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ qism to‘plamlar jufti-jufti bilan o‘zaro kesishmasa, ya’ni $A_i \cap A_j = \varnothing$, bu yerda $i, j = 1, 2, \ldots, n, \ldots$ va $i \neq j$;
2) $A_1, A_2, \ldots\ldots, A_n, \ldots\ldots$qism to‘plamlarning birlashmasi A to‘plam bilan mos tushsa ya’ni $A = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n \cap \ldots$

To‘plamlarni sinflarga ajratish masalasi klassifikatsiya deyiladi. Klassifikatsiya – bu sinf ichida ob’ektlarning o‘xshashligi va ularning boshqa sinflardagi ob’ektlardan farq qilishi asosida sinflar bo‘yicha ob’ektlarni ajratish amalidir.
Agar yuqoridagi shartlardan aqalli bittasi bajarilmasa, klassifikatsiya noto‘g‘ri hisoblanadi.

Masalan: uchburchaklarning A to‘plamini uchta sinfga ajratish mumkin: o‘tkir burchakli, to‘g‘ri burchakli, o‘tmas burchakli uchburchaklar. Haqiqatan ham, ajratilgan to‘plam ostilari jufti-jufti bilan kesishmaydi. Boshqacha aytganda, birinchidan, o‘tkir burchakli uchburchaklar ichida o‘tmas va to‘g‘ri burchakli uchburchaklar yo‘q, to‘g‘ri burchakli uchburchaklar ichida o‘tkir va o‘tmas burchakli uchburchaklar yo‘q, shuningdek o‘tmas burchakli uchburchaklar ichida o‘tkir va to‘g‘ri burchakli uchburchaklar yo‘q.

Ikkinchidan, o‘tkir, to‘g‘ri va o‘tmas burchakli uchburchaklar birlashmasi uchburchaklar to‘plami A to‘plam bilan mos tushadi.

To‘plamlarni sinflarga ajratishda sinflar soni chekli yoki cheksiz bo‘lishi mumkin.

Masalan: Natural sonlar to‘plamini bir necha usul bilan sinflarga ajratish mumkin.
1. toq va juft sonlar sinfi;
2. tub va murakkab sonlar sinfi;
3. bir xonali, ikki xonali, uch xonali,…,xonali sonlar sinfi:
Bunda 1. va 2. holda sinflar soni chekli; 3.- holda sinflar soni cheksiz.
Shuning bilan birga berilgan to‘plamning har qanday qism to‘plamlari sistemasi ham to‘plamni sinflarga ajratishni ifodalayvermasligini qayd qilish kerak.

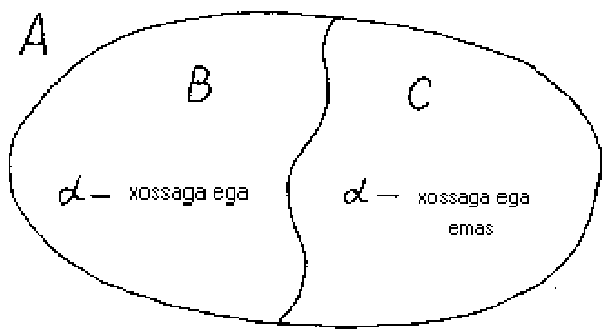
Masalan: A uchburchaklar to‘plamidan, teng yonli, teng tomonli, turli tomonli uchburchaklar to‘plam ostilarini olsak, u holda u A to‘plamni sinflarga ajrata olmaydi, chunki birinchi shart bajarilmaydi. Chunki teng yonli va teng tomonli uchburchaklar to‘plami ostilari kesishadi, ya’ni hamma teng tomonli uchburchaklar teng yonli uchburchaklardir.

To‘plamlarni qism to‘plamlarga ajratish uchun, qism to‘plam elementlarini xarakteristik xossalarini ko‘rsatish kerak. To‘plamlarni bitta, ikkita, uchta xossasiga ko‘ra sinflarga ajratishni qaraymiz.

Aytaylik, A to‘plam va biror α xossa berilgan bo‘lsin. A to‘plam elementlari α xossaga ega bo‘lishi ham, bo‘lmasligi ham mumkin. Bu holda A to‘plam o‘zaro kesishmaydigan ikkita B va C to‘plam ostilarga ajraladi.
B to‘plam A to‘plamning α xossasiga ega bo‘lgan elementlari to‘plami, C to‘plam A to‘plamning α xossasiga ega bo‘lmagan elementlari to‘plami $B \cup C = A$ va $B \cap C \neq \varnothing$

Agar A to‘plamning hamma elementlari α xossaga ega bo‘lsa, u holda $C = \varnothing$ bo‘ladi, agar A to‘plamning hamma elementlari α xossaga ega bo‘lmasa $B = \varnothing$ bo‘ladi.

Agar B va C to‘plamlar bo‘sh bo‘lmasa, u holda A to‘plamni Eyler Venn diagrammasi yordamida quyidagicha tasvirlash mumkin. (9-chizma)



9-chizma

Masalan: A – auditoriyadagi talabalar to‘plami, α-sinovlarni topshirganlik xossasi bo‘lsa, B-sinovlarni topshirgan, C esa sinovlarni topshirmagan talabalar to‘plami bo‘ladi.

Endi to‘plamni ikkita xossaga ko‘ra sinflarga ajratishni qaraymiz.

A to‘plam va α,β xossalar berilgan bo‘lsin. A to‘plam elementlari α,β xossalarga ega bo‘lishi, bo‘lmasligi ham mumkin.

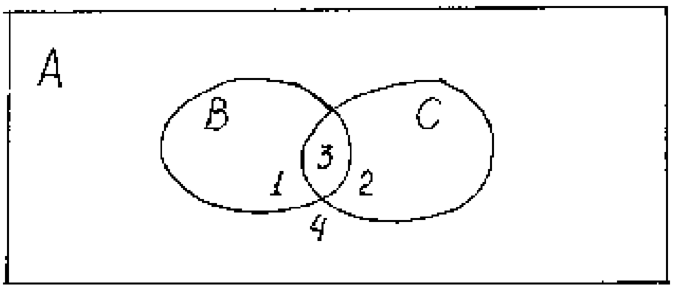
a) α xossaga ega bo‘lgan va β xossaga ega bo‘lmagan elementlar to‘plami – 1 sinf;

b) α xossaga ega bo‘lmagan va β xossaga ega bo‘lgan elementlar to‘plami – 2 sinf;

v) α va β xossalarga ega bo‘lgan elementlar to‘plami – 3 sinf;

g) α va β xossalarga ega bo‘lmagan elementlar to‘plami – 4 sinf.

Bu sinflardan ayrimlari bo‘sh to‘plam ham bo‘lishi mumkin. Bu 4 ta sinf Eyler-Venn diagrammasi yordamida quyidagicha tasvirlanadi. (10-chizma)



10-chizma

To‘plamni 3 ta xossaga ko‘ra sinflarga ajratishni qaraymiz.

A to‘plam va α,β,γ xossalar berilgan bo‘lsin. A to‘plam α,β,γ xossalarga ega bo‘lishi ham bo‘lmasligi ham mumkin. Bu uchta xossa A to‘plamni sakkizta sinfga ajratishi mumkin.

a) α xossaga ega bo‘lgan va β,γ xossalarga ega bo‘lmagan to‘plam – 1 sinf;

b) α va β xossalarga ega bo‘lgan va γ xossaga ega bo‘lmagan to‘plam – 2 sinf;

v) β xossaga ega bo‘lgan va α,γ xossalarga ega bo‘lmagan to‘plam – 3 sinf;

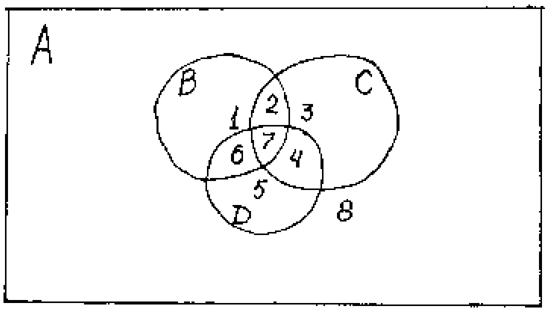
g) β,γ xossalarga ega bo‘lgan va α xossaga ega bo‘lmagan to‘plam – 4 sinf;

d) γ xossaga ega bo‘lgan va α,β xossalarga ega bo‘lmagan to‘plam – 5 sinf;

e) α,γ xossalarga ega bo‘lgan va β xossaga ega bo‘lmagan to‘plam – 6 sinf;

j) α, β va γ xossalarga ega bo‘lgan to‘plam – 7 sinf;

z) a, β va γ xossalarga ega bo‘lmagan to‘plam – 8 sinf.



11-chizma

Bu sinflardan ayrimlari bo‘sh to‘plam ham bo‘lishi mumkin. Bu 8 ta sinf 11-chizmada tasvirlangan.

O‘z-o‘zini tekshirish uchun savollar.

1. To‘plamlarni sinflarga ajratishni ta’riflang.
2. To‘plamlarni sinflarga ajratishga misollar keltiring.
3. To‘plamlarni bitta, ikkita, uchta xossaga ko‘ra sinflarga ajrating.
4. Ajratishni misollar yordamida Eyler Venn diagrammasi orqali tushuntirib bering.

I.2. Moslik va munosabatlar.

I.2.1.Ikki to‘plam elementlari orasidagi moslik.

Ikki to‘plam elementlari orasidagi moslikni ko‘rishdan oldin, ikki to‘plam dekart ko‘paytmasi va uning qism to‘plamlarini misollar yordamida eslaylik. Aytaylik bizga $X=\{a,b,c\}$ va $Y=\{m,n\}$ to‘plamlari berilgan bo‘lsin. Y holda

$$X\times Y=\{(a;m),(a;n),(b;m),(b;n),(c;m),(c;n)\}$$

ga ega bo‘lamiz.

Bu dekart ko‘paytma 64 ta qism to‘plamga ega.

1-Ta’rif $X\times Y$ dekart ko‘paytmaning istalgan G_f qism to‘plami X va Y to‘plamlar orasidagi binar moslik deyiladi. Binar so‘zi lotincha **bis** so‘zidan olingan bo‘lib, ikki to‘plam elementlari orasida so‘z borishini bildiradi.

Moslik lotin alifbosining f,d,t,s kabi harflari bilan belgilanadi.

Bizga ma’lum bo‘lgan funksiyalarning hammasi moslik tushunchasiga misol bo‘la oladi.

X to‘plam moslikning birinchi to‘plami deyiladi. X to‘plamning moslikda ishtirok etuvchi elementlari to‘plami moslikning aniqlanish sohasi deyiladi.

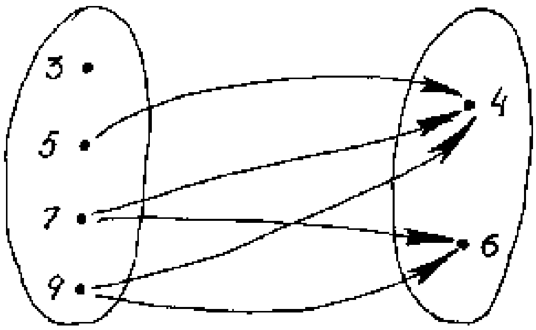
Y to‘plam moslikning ikkinchi to‘plami deyiladi. Y to‘plamning moslikda qatnashgan elementlari to‘plami moslikning qiymatlar to‘plami deyiladi.

$G_f\subset X\times Y$ to‘plam moslikning grafigi deyiladi. G_f grafik biror R moslikdagi (x,y) juftliklar to‘plami ya’ni xRy, bu yerda $x\in X,\ y\in Y$

Ikki to‘plam orasidagi moslikni nuqtalar va yo‘nalishli kesmalar (strelkalar) yordamida tasvirlovchi rasmlar moslikning grafi deyiladi.

Chekli to‘plamlar orasidagi moslik graflar yordamida ko‘rgazmali tasvirlanadi.

Misollar: 1. $X = \{3,5,7,9\}$ va $Y = \{4,6\}$ to‘plamlar orasidagi «katta» mosligining grafigini yasaymiz. Buning uchun berilgan to‘plamlar elementlarini nuqtalar bilan belgilaymiz va X to‘plam elementlarini tasvirlovchi nuqtalardan Y to‘plam elementlarini tasvirlovchi nuqtalarga strelkalar o‘tkazamiz (12-chizma)

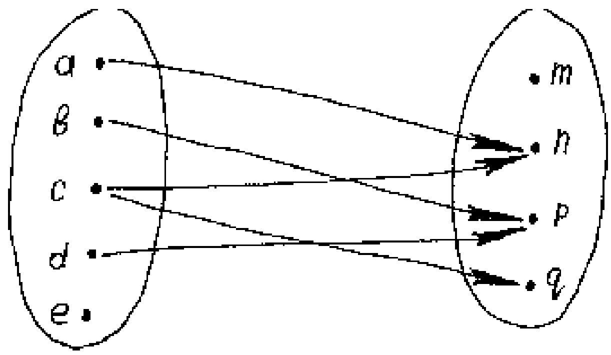


12-chizma

Natijada biz X va Y to‘plamlar elementlari orasidagi «katta» mosligiga ega bo‘lamiz **.**

2. $X = \{a,b,c,d,e\}$, $Y = \{m,n,p,q\}$

$G_{f=}G_f = \{(a;n),(b;p),(c;n),(c;q),(d;p)\}$ grafini chizaylik (13-chizma)



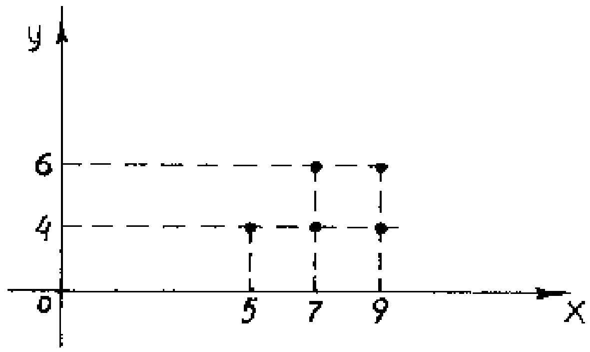
13-chizma

Bunda aniqlanish sohasi $\{a,b,c,d\}$

Qiymatlar to‘plami $\{n,p,q\}$

X va Y sonli to‘plamlar elementlari orasidagi moslik koordinata tekisligidagi grafik yordamida tasvirlanadi.

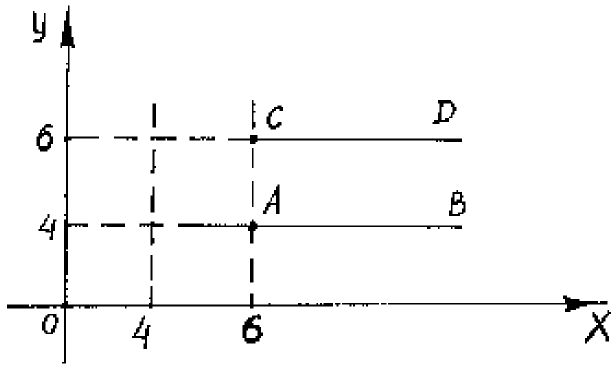
Buning uchun R moslikda bo‘lgan barcha sonlar jufti koordinata tekisligida nuqtalar bilan tasvirlanadi. Buning natijasida hosil bo‘lgan figura R moslikning grafigi bo‘ladi. Yuqoridagi misolni grafigini chizamiz. (14-chizma)



14-chizma

Moslikni bunday tasvirlash ularni berilgan moslikda cheksiz ko‘p sonlar jufti bo‘lganda ko‘rgazmali tasvirlash imkonini beradi.

Masalan: $X = R$ va $Y = \{4,6\}$ to‘plamlar orasidagi «katta» mosligini qaraylik va grafigini yasaylik moslikni [AB) va [CD) nurlar ifodalaydi. (15-chizma)



15-chizma

2-Ta’rif: Agar f moslikning aniqlanish sohasi birinchi to‘plam bilan ustma-ust tushsa, f moslik hamma yerda aniqlangan deyiladi.

3-Ta’rif: Agar f-moslikning qiymatlar to‘plami ikkinchi to‘plam bilan ustma-ust tushsa, f moslik syur’ektiv deyiladi.

4-Ta’rif: Agar f moslikda birinchi to‘plamning har bir elementiga ikkinchi to‘plamning bittadan ortiq bo‘lmagan elementi mos kelsa, f moslik funksional deyiladi.

5-Ta’rif: Agar f moslikda ikkinchi to‘plamning har bir elementiga birinchi to‘plamning 1 tadan ortiq bo‘lmagan elementi mos qo‘yilgan bo‘lsa, f moslik in’ektiv deyiladi.

6-Ta’rif: Syur’ektiv va in’ektiv moslik bir so‘z bilan biektiv deyiladi.

7-Ta’rif: Hamma yerda aniqlangan funksional moslik akslantirish deyiladi.

8-Ta’rif: X va Y to‘plamlar orasidagi f moslik biektiv akslantirish bo‘lsa, X va Y to‘plamlar orasida o‘zaro bir qiymatli moslik o‘rnatilgan deyiladi.

Moslik turlariga misollar keltiramiz.

Misol: Aytaylik X - kiyim iladigan (veshalka) garderobdagi paltolar to‘plami, Y esa shu garderobdagi ilgaklar to‘plami bo‘lsin.

Agar har bir palto ilgakga ilinib turgan bo‘lsa (polda yotmasdan) u holda X to‘plam Y to‘plamga akslantirish bo‘ladi.

Agar bu akslantirishda har bir ilgakga bittadan ortiq palto ilinmagan bo‘lsa(bo‘sh ilgaklar ham bo‘lishi mumkin) bu akslantirish in’ektiv bo‘ladi.

Agar hamma ilgaklar band bo‘lsa (bunda ayrim ilgaklarda bittadan ortiq paltolar ilingan ham bo‘lishi mumkin) bu akslantirish syur’ektiv bo‘ladi.

Agar har bir ilgakda bittadan palto ilingan bo‘lsa (o‘zaro bir qiymatli) bu akslantirish biektiv bo‘ladi.

9-Ta’rif: X va Y to‘plamlar orasida o‘zaro bir qiymatli moslik o‘rnatilgan bo‘lsa, bu to‘plamlar teng quvvatli deyiladi va qisqacha $X \sim Y$ ko‘rinishda yoziladi.

Masalan: Agar $X\{a,b,c,d,e\}$, $Y\{x,y,z,t,p\}$ bo‘lsa, u holda $X \sim Y$ bo‘ladi, chunki, X va Y to‘plamlar orasida o‘zaro bir qiymatli moslik o‘rnatish mumkin.

10-Ta’rif: Barcha natural sonlar to‘plami N ga teng quvvatli to‘plamlar sanoqli to‘plam deyiladi.

Agar ikkita X va Y to‘plamlar orasidagi mosliklarning G_f grafigi $X \times Y$ dekart ko‘paytmasi bilan ustma-ust tushsa, bu moslik to‘la moslik deyiladi. Agar moslik grafigi G_f, bo‘sh bo‘lsa $(G_f = \varnothing)$ moslik bo‘sh moslik deyiladi.

Ixtiyoriy ikkita X va Y to‘plamlar orasida bo‘sh va to‘la mosliklar mavjud bo‘lishi mumkin.

X va Y dekart ko‘paytma to‘plam ostilari ustida turli xil amallarni bajarish mumkin.

Masalan, X va Y to‘plamlar orasida $x\mathrm{R}y$ va $x\mathrm{K}y$ mosliklar grafiklari bolashmasidan iborat bo‘ladi, boshqacha aytganda $x\mathrm{S}y$ moslik faqat va faqat $x\mathrm{R}y$ yoki $x\mathrm{K}y$ mavjud bo‘lsa bo‘ladi.

Shuningdek moslikka teskari moslik ham mavjud. $x\mathrm{R}y$ moslikka teskari $y\mathrm{R}^{-1}x$ ko‘rinishda yoziladi.

O‘z-ozini tekshirish uchun savollar:

1. $G_f \subset X \times Y$ nimani bildiradi.
2. Moslikning berilish usullarini aytib bering.
3. Moslik turlariga misollar keltiring va ular graflarining o‘ziga xos xususiyatlarini ko‘rsating.
4. Uchburchakning o‘rta chizig‘i bilan asosi orasida o‘zaro bir qiymatli moslik o‘rnatish mumkinmi?
5. Barcha toq sonlar to‘plami bilan barcha juft sonlar to‘plami orasida o‘zaro bir qiymatli moslik o‘rnatish mumkinmi?
6. Chekli to‘plamlarning teng quvvatli bo‘lish shartini ayting.
7. Cheksiz to‘plamlar uchun bu shart qanday?
8. Bo‘sh va to‘la mosliklar qanday bo‘ladi?

I.2.2.Binar munosabatlar va ularning xossalari.
Munosabat tushunchasi.

Biz to‘plamlarni o‘rganganda ularni taqqoslab, ular kesishadi yoki teng, yoki biri ikkinchisini qismi deb to‘plamlar orasidagi munosabatni qaradik. Natural sonlar to‘plamini qaraganda sonlar orasidagi turli - tuman bog‘lanishlarni ko‘ramiz. Masalan, 7 soni 6 sonidan katta, 12 soni 9 sonidan 3ta ko‘p, 3 soni 2 sonidan keyin keladi va hokazo.

Xuddi shunga o‘xshash, geometriyada figuralarning tengligi va o‘xshashligi, to‘g‘ri chiziqlarning parallelligi va perpendikulyarligi kabi munosabatlar qaraladi.
Bulardan ko‘rinadiki, matematikada asosan, ikki ob’ekt orasidagi munosabat qaraladi, bunga binar munosabatlar deyiladi. Yuqorida ko‘rib o‘tilgan munosabatlar orasida umumiylik bormi, yo‘qmi degan masalani qarasak, u yoki bu munosabatlarni qarashda biz berilgan to‘plamlar sonlaridan tashkil topgan tartiblangan juftliklar bilan amallar bajarishni ko‘ramiz.

Masalan: $X=\{4;5;6\}$ to‘plamda 1 ta ko‘p munosabatini qarasak, «5 soni 4 sonidan 1 ta ko‘p», «6 soni 5 sonidan 1 ta ko‘p». Shu to‘plamda katta munosabatni qarasak «5>4», «6>4», «6>5». Shunga o‘xshash kichik munosabatini qarasak «4 soni 5 sonidan 1 ta kam», «5 soni 6 sonidan 1 ta kam».

Keltirilgan misoldagi «1 ta ko‘p» munosabat uchun $\{(5;4), (6;5)\}$ to‘plam, «katta» munosabati uchun $\{(5;4), (6;4), (6;5)\}$ to‘plam, «kichik» munosabati uchun $\{(4;5), (5;6)\}$ to‘plamlarga ega bo‘lamiz. Bu to‘plamlar esa elementlari $X=\{4;5;6\}$ to‘plam elementlaridan hosil qilingan sonlar juftliklari to‘plami bilan aniqlanadi. Boshqacha aytganda, bu to‘plamlar $X=\{4;5;6\}$ to‘plam Dekart ko‘paytmasining elementlaridan tashkil topgan qism to‘plamlardir, ya’ni

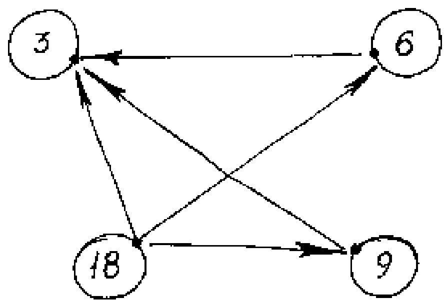
$$X\times X=\{(4;4),(4;5),(4;6),(5;4),(5;5),(5;6),(6;4),(6;5),(6;6)\}:$$

Bundan ko‘rinadiki, ko‘rib o‘tilgan munosabtlar $X\times X$ Dekart ko‘paytmaning qism to‘plami bilan aniqlanar ekan.

1-Ta’rif. $X\times X$ to‘plamning istalgan G qism to‘plami binar munosabat deyiladi. Binar munosabatlar lotin alfavitining bosh harflari P, K, R, S… bilan belgilanadi.

Matematikada binar munosabatlar $a=b,\ a<b,\ a>b, a\neq b, a\,||\,b,\ a\perp b$ kabi belgilar orqali berilgan.

Munosabatlarni graflar yordamida ko‘rgazmali tasvirlash mumkin. Masalan: $X=\{3;6;9;18\}$ to‘plam elementlari uchun «karrali» munosabatini ko‘ramiz va uning grafini chizamiz (16-chizma). 18 soni 3 ga karrali, 18 soni 6 ga karrali, 18 soni 9 ga karrali va hokazo. X to‘plamdagi ixtiyoriy son o‘z-o‘ziga karrali bo‘lgani uchun oxiri ustma-ust tushadigan strelkalar mavjud. Bunday strelkalar sirtmoqlar deyiladi.



16-chizma

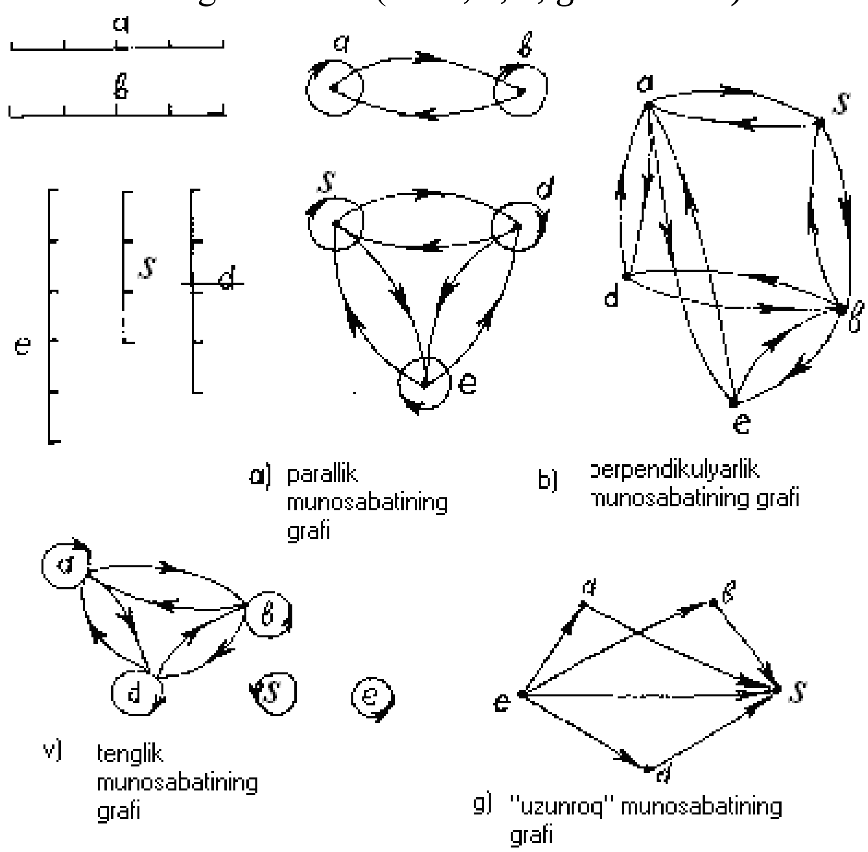
To‘plamlarni berilish usullari kabi munosabatlar ham berilish usullariga ega.

1) X to‘plamda berilgan R munosabat X to‘plamdan olingan va shu munosabat bilan bog‘langan barcha elementlar juftliklarini sanab ko‘rsatish bilan beriladi.

2) X to‘plamda bo‘lgan barcha elementlar juftliklarining xarakteristik xossasini ko‘rsatish bilan beriladi.

I.2.3.Munosabatlarning xossalari.

Munosabatlarni xossalarini ajratib ko‘rsatish uchun matematikada yuqorida aytib o‘tilgan munosabatlarni kesmalar to‘plamida graflar yordamida tasvirlaymiz. a, b, s, d, e kesmalar berilgan bo‘lsin (17- a, b, v, g chizmalar).



17-chizma

Graflardan ko‘rinadiki parallellik va tenglik munosabatlari refleksiv xossaga ega ekan.

1-Ta’rif. Agar X to‘plamning ixtiyoriy elementi haqida u o‘z-o‘zi bilan R munosabatda deyish mumkin bo‘lsa (ya’ni xRx bajarilsa) to‘plamdagi R munosabat refleksiv deyiladi.

Agar munosabat refleksiv bo‘lsa, grafning har bir uchida sirtmoq bo‘ladi.

2-Ta’rif. Agar X to‘plamning birorta ham elementi uchun xRx bajarilmasa, R munosabat X to‘plamda antirefleksiv deyiladi. «>», «<» (uzun, qisqa), «$\perp$» munosabatlari antirefleksivdir.

Kesmalarning parallellik, perpendikularlik va tenglik munosabatlari graflariga e’tibor bersak, ularning o‘ziga xos xususiyati, agar elementlar juftini tutashtiruvchi bitta strelka bor bo‘lsa u holda albatta shu elementlarni tutashtiruvchi qarama-qarshi yo‘nalgan boshqa strelka ham bo‘ladi.

Bundan esa parallellik, perpendikularlik va tenglik munosabatlari simmetriklik xossasiga ega ekanligi ko‘rinadi.

3-Ta’rif. Agar X to‘plamda R munosabat uchun xRy va yRx shartlar bir vaqtda bajarilsa, R munosabat simmetrik munosabat deyiladi.

Simmetriklik xususiyatiga ega bo‘lmagan munosabatlar ham mavjud. Masalan, graflardagi uzunroq munosabatini qaraylik. Bu grafni o‘ziga xos xususiyati strelkani ikkita uchi tutashtirilsa u yagona bo‘ladi. Bundan «uzunroq» munosabati antisimmetrik xossaga ega ekanligi ko‘rinadi.

4-Ta’rif. Agar X to‘plamning turli x va y elementlari uchun xRy shartdan yRx kelib chiqmasa, X to‘plamdagi R munosabat antisimmetrik munosabat deyiladi.

Parallellik, tenglik va uzunroq munosabatlari graflariga e’tibor bersak, strelka birinchi elementdan ikkinchi elementga, ikkinchi elementdan uchinchi elementga borsa, albatta birinchi elementdan uchinchi elementga ham boradi. Bu tranzitivlik xossasini ifodalaydi.

5-Ta’rif. Agar X to‘plamda R munosabat uchun xRy va yRz dan xRz kelib chiqsa, u holda X to‘plamda R munosabat tranzitiv munosabat deyiladi.

Kesmalarning parallelligi va tengligi munosabatlari refleksivlik, simmetriklik va tranzitivlik xossalarga ega. Perpendikularlik munosabati simmetriklik xossasiga, «uzunroq» munosabati antisimmetrik va tranzitivlik xossasiga ega.

6-Ta’rif. Agar X va Y to‘plam elementlari orasidagi R munosabatda X to‘plamning har bir elementiga Y to‘plamning bittadan ortiq bo‘lmagan elementi mos kelsa u holda R funksional munosabat yoki funksiya deyiladi.

7-Ta’rif. Agar R munosabat funksional bo‘lsa, u holda uning aniqlanish sohasi funksiyaning aniqlanish sohasi deyiladi, qiymatlar sohasi funksiyaning qiymatlar sohasi deyiladi.

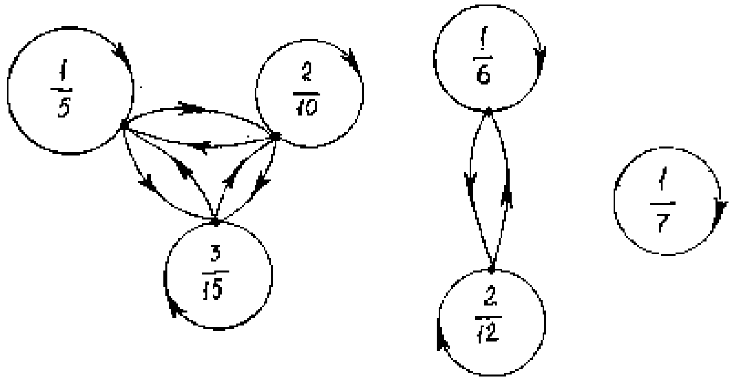
8-Ta’rif. Agar X va Y to‘plamlar elementlari orasidagi R munosabatda X ning har bir elementiga Y ning faqat bitta elementi mos kelsa, u holda R munosabat X ni Y ga syur’ektiv akslantirish deyiladi.

9-Ta’rif. Agar akslantirishning qiymatlar sohasi Y to‘plam bilan teng bo‘lsa, akslantirish in’ektiv deyiladi.

I.2.4.Ekvivalentlik va tartib munosabati

Ta’rif. Agar X to‘plamda berilgan R munosabat refleksiv, simmetrik va tranzitiv bo‘lsa, u holda u ekvivalentlik munosabati deyiladi.

Misol: $\left\{\frac{1}{5};\frac{1}{6};\frac{1}{7};\frac{2}{10};\frac{2}{12};\frac{3}{15}\right\}$ kasrlar to‘plamida tenglik munosabati berilgan. (18- chizma)



18-chizma

Bu munosabat:

1) refleksiv, chunki ixtiyoriy kasr o‘z-o‘ziga teng;
2) u simmetrik, chunki x kasrning y kasrga tengligidan y kasrni x kasrga tengligi ham kelib chiqadi;
3) U tranzitiv, chunki x kasrning y kasrga va y kasrning z kasrga tengligidan x kasrning z kasrga tengligi kelib chiqadi.

Agar X to‘plamda ekvivalentlik munosabati berilgan bo‘lsa, u holda bu munosabat X to‘plamni juft-jufti bilan kesishmaydigan qism to‘plamlariga ajratadi. Yuqoridagi misolimizda qism to‘plamlar

$$\left\{\frac{1}{5};\frac{2}{10};\frac{3}{15}\right\},\left\{\frac{1}{6};\frac{2}{12}\right\},\left\{\frac{1}{7}\right\}.$$

Bu qism to‘plamlar juft-jufti bilan kesishmaydi va qism to‘plamlarining birlashmasi birlamchi misolda berilgan to‘plam bilan ustma-ust tushadi. Endi tartib munosabatini qaraymiz.

«Tartib» so‘zi kundalik hayotimizda doimo uchraydi. Masalan, jismoniy tarbiya darslarida talabalarning bo‘y-bo‘yiga qarab joylashishi tartibi, o‘zbek alfavitida harflarning kelish tartibi va hokazo.

Ta’rif. Agar X to‘plamdagi R munosabat tranzitiv va antisimmetrik bo‘lsa, u holda bu munosabat tartib munosabati deyiladi. X to‘plam esa tartib munosabati bilan tartiblangan deb ataladi.

Masalan, $X=\{3,6,9,18\}$ to‘plamni «kichik» munosabati yordamida tartiblashtirish mumkin. Boshlang‘ich ta’limning birinchi sinfida o‘quvchilar «katta» va «kichik» munosabatlari bilan keyinchalik esa kesmalar uchun «uzun» va «qisqa» munosabatlari bilan tanishadilar. Bu munosabatlar yordamida sonlar va kesmalar to‘plamida tartib o‘rnatiladi.

O‘z-o‘zini tekshirish uchun savollar:

1. Munosabat moslikning xususiy holi ekanini, ya’ni $G \subset X x X$ ekanini izohlang.
2. Munosabat xossalarini graflarda tasvirlang.
3. Refleksiv, simmetrik, antisimmetriklik, tranzitiv munosabatlarni graflar yordamida tushuntiring.
4. Ekvivalentlik va tartib munosabatlarini misollar yordamida tushuntiring.

I.3.Algebraik amallar va algebralar

I.3.1.Algebraik amallar.

Maktab matematika kursida sonlar ustida bir qator qo‘shish, ko‘paytirish, bo‘lish, ayirish kabi amallar o‘rganiladi. Bu amallar bir qator xossalarga ega. Masalan: Musbat butun sonlar to‘plamida sonlarni qo‘shish va ko‘paytirish amali bajariladi,chunki bu amallarni bajarishdan chiqqan natija son musbat butun son bo‘ladi. Shuningdek qo‘shish va ko‘paytirishda sonlarni o‘rni almashishi bilan natija o‘zgarmaydi.

$$8+3=11, \quad 3+8=11, \quad 8+3=3+8$$
$$6\times 7=42, \quad 7\times 6=42, \quad 6\times 7=7\times 6$$

Musbat butun sonlar to‘plamida ayirish va bo‘lish amallari hamma vaqt bajarilmaydi, chunki sonlarni ayirish natijasida ba’zida manfiy, bo‘lish natijasida kasr son hosil bo‘ladi. Shuningdek ushbu to‘plamda sonlarni ayirish va bo‘lishda sonlarni o‘rnini almashtirish mumkin emas.

$$9-6=3; \quad 6-9=-3; \quad 3\neq -3$$
$$8:2=4; \quad 2:8=0{,}25; \quad 4\neq 0{,}25;$$

Demak musbat butun sonlar to‘plamida sonlarni qo‘shish va ko‘paytirish o‘rin almashtirish xossasiga bo‘ysunadi, ayirish va bo‘lish esa ushbu xossaga bo‘ysunmaydi.

Amallar va ularning xossalarini faqat sonlar to‘plami uchungina emas, balki boshqa matematik ob’ektlar uchun ham qarash mumkin. Masalan: To‘plamlar, mulohazalar, almashtirishlar. To‘plamlar ustida to‘plamlarning birlashmasi, kesishmasi amallari bajariladi va bu amallar o‘rin almashtirish xossasiga bo‘ysunadi .

$$A\bigcup B=B\bigcup A; \; A\bigcap B=B\bigcap A$$

Sonlar, to‘plamlar, mulohazalar va shu kabi matematik ob’ektlar ustida amallar bajarish jarayonida birorta to‘plamning ixtiyoriy ikkita elementiga shu to‘plamning uchinchi bir elementi mos qo‘yiladi. Sonlar va matematik ob’ektlar ustida bajariladigan amallarni algebraik amal deb atashni shartlashib unga ta’rif beraylik.

Ta’rif. Berilgan X to‘plamning ixtiyoriy elementlaridan tuzilgan tartiblangan (x,y) juftlikka, shu to‘plamning uchinchi bir z elementini mos qo‘yuvchi akslantirish $(x,y)\to z$ mavjud bo‘lsa X to‘plamda algebraik amal berilgan deyiladi.

X to‘plamida $X\times X$ dekart ko‘paytma berilgan bo‘lsa, (x,y) juftlik $X\times X$ dekart ko‘paytmadan z esa X to‘plamidan olingan bo‘lib, dekart ko‘paytmada $X\times X\to X$ akslanadi.

Demak, X to‘plamda berilgan $X\times X\to X$ dekart ko‘paytma algebrik amal bo‘lib, $x\in X$ element amalning birinchi, $y\in X$ element amalning ikkinchi komponenti z esa amal natijasi deyiladi.

Biz yuqorida $X\times X$ ko‘rinishdagi dekart ko‘paytmani X to‘plamga akslantirishni ko‘rdik, ya’ni $X\times X$ dan olingan juft (x,y) elementga bitta z elementni mos qo‘ydik. Bunday akslantirish vositasida berilgan algebraik amalga binar («bis»lotincha- «ikki»ma’nosini bildiradi) algebraik amal deyiladi. Matematikada ko‘p hollarda

$$X\times X\times X\to X;\quad \underbrace{X\times X\times\ldots\times X}_{n}\to X$$

ko‘rinishdagi dekart ko‘paytmani X to‘plamiga akslantirish bilan berilgan algebraik amallar bilan ish ko‘riladi va

$X\to X$ unar (lotincha «unus»-bir)

$X\times X\times X\to X$ ternar

$X\times X\times X\times X\to X$ 4-nar

$\underbrace{X\times X\times\ldots\times X}_{n}\to X$ n-nar deb yuritiladi

Algebraik amallarga misollar:

1-misol. Natural sonlar to‘plamida qo‘shish amali algebraik amaldir, chunki $x\in N,\ y\in N$ uchun $x+y=z,\ z\in N$ hamma vaqt topiladi.

2-misol. Natural sonlar to‘plamida ayirish amali algebraik amal bo‘la olmaydi, chunki ixtiyoriy ikkita sonni ayirishdan chiqqan natija hamma vaqt natural son bo‘lmaydi.

3-misol. Juft sonlar to‘plamida qo‘shish amali algebraik amaldir, chunki ikki juft sonning yig‘indisi yana juft son bo‘ladi. Toq sonlar to‘plamida qo‘shish amali algebraik amal bo‘la olmaydi, chunki natija juft son chiqadi.

$$13+13=26;\ 15+17=32.$$

$$(2n+1)+(2n+1)=4n+2=2(2n+1)\ \text{- juft son}$$

4-misol. Butun sonlar to‘plami Z da qo‘shish, ayirish, ko‘paytirish amali algebraik amaldir. Bo‘lish amali esa algebraik amal bo‘la olmaydi, chunki ba’zi bir hollarda bo‘lish natijasi kasr son chiqadi.

Natural sonlar to‘plamida ayirish amali $a,b\in N,\ a>b$ hollarda bajariladi $a-b>0;\ a-b$ ayirma musbat butun son bo‘ladi. Yuqoridagi shartlarga mos qo‘yilgan sonlar to‘plami natural sonlar to‘plamining to‘plam osti bo‘ladi,ya’ni $a>b$ shartga bo‘ysunuvchi a va b sonlar jufti akslantirilgan $a-b=c$ sonlardan iborat to‘plam natural sonlar to‘plamiga tegishli bo‘ladi. Natural sonlar to‘plamida bo‘lish amaliga nisbatan ham ushbu mulohazalarni yuritish mumkin.

Shunga qaramasdan natural sonlar to‘plamida ayirish va bo‘lish amali algebraik amal bo‘laolmaydi. Bunga o‘xshagan hollar uchun algebraik amal tushunchasiga kengroq nuqtai nazardan yondashamiz.

«Qismiy algebraik amal » tushunchasini kiritamiz.

Agar $X \times X$ dekart ko‘paytmasining Y to‘plam ostisi bo‘lgan $Y \subset X \times X$ to‘plamiga akslantirishi berilgan bo‘lsa, bu akslantirishga X to‘plamda qismiy algebraik amal deyiladi. Boshqacha aytganda $x \in X, y \in X$; (x, y) juftlikka z mos qo‘yilsa, bu akslanish qismiy algebraik amal bo‘ladi, $z \in X$ elementga mos keluvchi (x, y) juftlar to‘plami Y qismiy algebraik amalning aniqlanish sohasi deyiladi.

Demak, natural sonlar to‘plamida ayirish va bo‘lish, butun sonlar to‘plamida darajaga ko‘tarish qismiy algebraik amal hisoblanadi. Qismiy algebraik amal bo‘sh ham bo‘lishi mumkin, ya’ni (x, y) juftlikka bitta ham z element mos kelmasligi mumkin.

Biror X to‘plamda algebraik amal berilgan bo‘lsin va A to‘plam X ning to‘plam ostisi bo‘lsin. A to‘plam ostiga tegishli (x, y) juftlikni qaraylik. $(x, y) \in A \subset X$; (x, y) juftlikka X to‘plamidan z element mos kelsin. Umuman olganda bu element A to‘plam ostiga tegishli bo‘lishi ham tegishli bo‘lmasligi ham mumkin. Agar $(x, y) \in A$ juftlikka mos keluvchi z element ham A ga tegishli bo‘lsa, A to‘plam osti berilgan algebraik amalga nisbatan yopiq deyiladi.

Natural sonlar to‘plamining qismi bo‘lgan juft sonlar to‘plami qo‘shish va ko‘paytirish amaliga nisbatan yopiq to‘plamdir.

Agar A to‘plam osti birorta algebraik amalga nisbatan yopiq bo‘lsa, faqat shu to‘plam ostidagina amalni ko‘rish bilan, A to‘plamda algebraik amalni amalga oshiramiz yoki amal, shu amalga nisbatan yopiq bo‘lgan to‘plam ostidagina algebraik amal bo‘ladi.

Endi algebralarni qarab o‘tamiz.

Yuqorida ko‘rgan algebraik amallarning har biri alohida simvol bilan masalan: qo‘shish amali «+», ayirish amali «-». Bo‘lish amali «:», ko‘paytirish amali «×» , to‘plamlarning birlashmasi «$\bigcup$» , to‘plamlarning kesishmasi «$\bigcap$» va shu kabi belgilanadi va ikkita komponenta orasiga qo‘yiladi. $a+b$; $c \times d$; $A \bigcap B$; $A \bigcup B$; Bundan tashqari ikkita ob’ekt orasidagi munosabatlarni izohlovchi simvollar ham mavjud: $a \| b$ - ikki a va b to‘g‘ri chiziqlarning parallelligini, $a \perp b$ - ikki a va b to‘g‘ri chiziqlarning perpendikulyarligini va hokazolarni ifoda qiladi.

Ikki ob’ekt orasidagi munosabatlarni izohlovchi simvollar bilan bog‘lanish natijasida uchinchi element haqida so‘z yuritilmaydi, algebraik amal bilan bog‘langan ikkita elementdan amal natijasi sifatida uchinchi bir element hosil bo‘ladi. Algebraik amallar umumiy xossalarini o‘rganamiz.

Buning uchun yuqorida ma’lum bo‘lgan $"+", "-", "\bigcap", "\bigcup"$ simvollardan foydalanish biroz o‘ng‘aysizlik va tushunmovchiliklarni keltirib chiqaradi. Masalaga aniqlik kiritish maqsadida algebraik va qismiy algebraik amallarni quyidagi shartli belgilar $*, T, \circ$ bilan belgilaymiz. Boshqacha aytganda ikkita a va b komponentalarga uchinchi komponentani mos qo‘yish, bir algebraik amal uchun $a * b = c$, ikkinchi algebraik amal uchun $a \circ b = c$ ko‘rinishda bo‘ladi va hokazo.

Algebraik amal berilgan to‘plam algebra deyiladi. Agar natural sonlar to‘plami N da qo‘shish amali berilgan bo‘lsa, bu to‘plamda berilgan algebra

$(N,+)$ ko‘rinishda belgilanadi. $(N,-)$ ko‘rinishda berilgan algebra natural sonlar to‘plamida ayirish amali bilan berilgan, $(Z,:)$ butun sonlar to‘plamida bo‘lish amali vositasida berilgan algebralar bo‘ladi. Demak algebra berilishi uchun to‘plam va unda algebraik amal berilishi lozim ekan.

Agar X to‘plam berilib, unda $*$, $\circ$ algebraik amallar berilgan bo‘lsa, ular vositasida berilgan algebra $(X,*,\circ)$ ko‘rinishda bo‘ladi. $(X,T,\circ)$ algebra $(X,T,*)$ algebradan $\circ$ va $*$ algebraik amallari bilan farq qiladi. Ba’zi hollarda berilgan ikki algebra belgilanishi jihatidan bir xil bo‘lsa bunday alebralarga izomorf algebralar deyiladi. Misol keltiramiz. A to‘plam 3^n, $n\in N$ ko‘rinishdagi sonlardan iborat bo‘lsin.

$A=\{3,3^2,3^3,3^4,3^5,\ldots,3^n,\ldots\}$

$A=\{3,9,27,81,243,\ldots\}$

$3^2\cdot3^3=3^{2+3}=3^5$, ya’ni $3^n\cdot3^m=3^{n+m}$ natija 3^{n+m} ham A to‘plamga tegishli bo‘ladi, bu esa ko‘paytirish A to‘plamida algebraik amal ekanligini bildiradi. Ikkinchi tomondan natural sonlar to‘plamida qo‘shish amali algebraik amal, ya’ni $(N,+)$ algebra, N dagi har bir $n\in N$ songa 3^n sonini mos qo‘yish mumkin. Demak $(N,+)$ va $(A,\cdot)$ algebralar belgilanish jihatidan tubdan farq qilgani bilan, mohiyat jihatidan bir xildirlar. Shuning uchun $(N,+)$ va $(A,\cdot)$ izomorfdirlar.

Natural sonlar to‘plami N ni $A:\varphi(n)=3^n$ to‘plamga bir qiymatli akslantirish mumkin.

$$\varphi(n)=3^n,\ \varphi(m)=3^m$$
$$\varphi(n)\cdot\varphi(m)=3^n3^m=3^{n+m}=\varphi(n+m)$$

Endi izomorf algebralarga ta’rif beraylik.

Ta’rif: Agar bir qiymatli φ akslantirish X to‘plamni A to‘plamga bir qiymatli akslantirsa va φ akslantirish

$$\varphi(x*y)=\varphi(x)\circ\varphi(y)$$

shartga bo‘ysunsa, X va A to‘plam, $*$, $\circ$ amallar vositasida berilgan $\{X,\ *\}$ va $\{A,\ \circ\}$ algebralar izomorf algebralar deyiladi.

Berilgan φ akslantirish bir qiymatli bo‘lgani uchun φ^{-1} teskari akslantirish ham

$$\varphi^{-1}(a\circ b)=\varphi^{-1}(a)*\varphi^{-1}(b)$$

shartni qanoatlantiradi.

O‘z-o‘zini tekshirish uchun savollar.

1. Sonlar ustida bajarilgan amallar qanday xossalarga ega?
2. Sonlardan boshqa qanday matematik ob’ektlar ustida amallar bajarish mumkin?
3. Biror to‘plamda berilgan amal qachon algebraik amal bo‘ladi?
4. X to‘plamda berilgan dekart ko‘paytma $X\times X$ algebraik amalmi?
5. Unar, binar, ternar, n-nar algebraik amallarga misollar keltiring.
6. Qismiy algebraik amal deb nimaga aytiladi?

7. Amallar qanday simvollar bilan belgilanadi?
8. Biror to‘plamda qachon algebraik amal berilgan deyiladi?
9. Algebra deb nimaga aytiladi?
10. Algebralar qachon izomorf bo‘ladi?
11. Izomorf algebralarga misollar keltiring.

I.3.2.Algebraik amallarning xossalari.

Algebraik amallar kommutativlik, assotsiativlik, distributivlik, qisqaruvchanlik, teskaruvchanlik, neytral va yutuvchi elementlarning mavjudligi va simmetrik elementning mavjudlik xossalariga ega.

1) Assotsiativlik xossasi.

Algebraik amallar xossalari ayniy shakl almashtirish, ayniy almashtirishlar bilan bevosita bog‘liqdir. Ayniy almashtirishlarni bitta algebraik amalga nisbatan qarab chiqaylik va bu algebraik amalni (*) ko‘rinishida belgilaylik.

Ifodalar ustida ayniy shakl almashtirish bajarish jarayonida alebraik amallarning assotsiativlik xossasidan foydalaniladi. A to‘plamdan olingan a,b,c elementlar uchun bu xossa quyidagicha ifodalanadi

$$a*(b*c)=(a*b)*c \qquad (1)$$

Boshqacha qilib aytganda A to‘plamidan olingan ixtiyoriy ushbu a,b,c elementlar uchun $a*(b*c)=(a*b)*c$ (1) munosabat o‘rinli bo‘lsa “ * ” algebraik amal A to‘plamda assotsiativlik xossasiga bo‘ysunadi deyiladi.

Misollar ketiramiz.

a) Natural sonlar to‘plamida qo‘shish va ko‘paytirish amallari assotsiativlik xossasiga bo‘ysunadi.

$4+(8+7)=(4+8)+7$

$6\cdot(5\cdot 3)=(6\cdot 5)\cdot 3$

b) Qo‘shish va ko‘payritish amallari ixtiyoriy sonlar to‘plamida assotsiativlik xossasiga bo‘ysunadi.

v) To‘plamlarni kesishmasi va birlashmasi assotsiativlik xossasiga bo‘ysunadi.

$A\bigcup(B\bigcup C)=(A\bigcup B)\bigcup C$

$A\bigcap(B\bigcap C)=(A\bigcap B)\bigcap C$

g) Butun sonlar to‘plamida ayirish amali assotsiativlik xossasiga bo‘ysunmaydi.

$7-(8-5)\neq(7-8)-5$

d) Musbat butun sonlar to‘plamida bo‘lish amali assotsiativ emas.

$12:(6:3)\neq(12:6):2$

$c\neq 1 \quad a:(b:c)\neq(a:b):c$

Agar berilgan A to‘plamda *-algebraik amal uchun assotsiativlik xossasi o‘rinli bo‘lsa $x_1,x_2,x_3,...,x_n\in A$ uchun $(x_1;x_2;x_3;...;x_n)$ uzunligi n ga teng bo‘lgan kortej va * -algebraik amal vositasida qavslar qo‘yish orqali tuzilgan turli ifodalar bir xil son qiymatiga ega bo‘ladi. Shuning uchun bir qancha sonlarni qo‘shish va ko‘paytirish amallarini bajarish jarayonida qavslar ishlatilmaydi.

Assotsiativlik xossasi o‘rinli bo‘lgan amallar uchun element darajasi degan tushuncha kiritamiz.

a elementdan tuzilib uzunligi n ga teng bo‘lgan $\underbrace{a_j a_j a_j \dots a_j}_{n}$ kortejni qaraylik. Agar $a \in X$ bo‘lsa va X da * -algebraik amal o‘rinli bo‘lsa $(a, a, a, \dots a)$ kortejga X to‘plamidan $a * a * a * \dots * a$ element mos keladi. $a * a * a \dots a = a^n$ deb belgilanadi va a elementning n darajasi deyiladi.

Agar a da berilgan * amal ko‘paytirish bo‘lsa

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \dots a_j}_{n}$$

agar * amal qo‘shish bo‘lsa

$$a + a + a + \dots + a = n \cdot a$$

a elementning $n \cdot a$ karralisi deb yuritiladi.

*-algebraik amalni biz yuqorida assotsiativlik xossasiga bo‘ysunadi deganmiz, shuning uchun

$$(a^n) * (a^m) = a^{n+m}$$

$(a^n)^m = a^{n \cdot m}$ o‘rinli bo‘ladi.

haqiqatan ham

$a^n = \underbrace{a * a * a * \dots * a}_{n}$

$a^m = \underbrace{a * a * a * \dots * a}_{m}$

$a^n * a^m = \underbrace{a * a * a * \dots * a}_{n} * \underbrace{a * a * \dots * a}_{m} = a^{n+m}$

$a^n * a^m = a^{n+m}$

$(a^n)^m = \underbrace{a^n * a^n * a^n * \dots a^n}_{m}$

$(a^n)^m = a^{nm}$

* - algebraik amal qo‘shish amali bo‘lsa $na = \underbrace{a + a + a + \dots + a}_{n}$ va 2 xossalardan quyidagi 3 va 4 xossa kelib chiqadi.

3. $na + nb = n(a + b)$

4. $m(na) = (mn)a$

2) Kommutativlik xossasi.

Biz yuqorida assotsiativlik xossasi o‘rinli bo‘lgan *-algebraik amal vositasida hosil qilingan ifodalarda qavs ishlatmaslik mumkin ekanligini ko‘rdik.

Ammo bunday ifodalarda komponentalarning o‘rnini almashtirish umuman olganda mumkin emas, shuning uchun

$a * b$ ifoda bilan $b * a$ ifodalarni ayni bir xil ifodalar deb bo‘lmaydi.

Bu ifodalar ayniy ifodalar bo‘lishi uchun $*$-algebraik amal assotsiativlik va kommutativlik xossalariga bo‘ysunishi lozim

Ta’rif. Berilgan A to‘plamning ixtiyoriy ikkita a va b elementlari uchun *-algebraik amalda $a*b=b*a$ (2) tenglik bajarilsa *-algebraik amal kommutativ deyiladi.

Kommutativlik xossasiga ega bo‘lgan *-algebraik amal vositasida hosil bo‘lgan $a*b$ ifoda bilan $b*a$ ifoda bir xil natijaga ega bo‘ladi, bu yerda $a,b\in A$. natural sonlar to‘plamida qo‘shish amali uchun kommutativlik amali o‘rinli

$$a,b\in N \qquad a+b=b+a$$

Natural sonlar to‘plamida ko‘paytirish amali uchun kommutativlik xossasi o‘rinli

$$a,b\in N \qquad a\cdot b=b\cdot a$$

Haqiqiy sonlar to‘plami R da qo‘shish va ko‘paytirish amallari kommutativdir.

Butun sonlar to‘plami Z da ayirish amali kommutativlik xossasiga bo‘ysunmaydi.

$$\forall\ a,b\in Z \quad a\neq b; \quad a-b\neq b-a$$

Musbat ratsional sonlar to‘plami Q_+ da bo‘lish amali uchun kommutativlik xossasi o‘rinli emas

$$\forall\ a,b\in Q_+ \quad a\neq b; \quad a:b\neq b:a$$

Agar *- algebraik amal assotsiativlik va kommutativlik xossalariga bo‘ysunsa juft, jufti bilan har xil bo‘lgan $a_1,a_2,a_3,...,a_k$ komponetlar uchun *-algebraik amalni o‘zida saqlovchi har bir ifodani $a_1^{n_1}*a_2^{n_2}*a_3^{n_3}*...*a_k^{n_k}$ ko‘rinishda ifodalash mumkin.

Assotsiativlik va kommutativlik xossalari o‘rinli bo‘lgan *- algebraik amal darajaga ko‘tarish amali bo‘lsin

Quyidagi xossani isbot qilamiz

$$a^n*b^n=(a*b)^n$$

haqiqatan ham

$$(a*b)^n=\underbrace{(a*b);(a*b);...;(a*b)}_{n}$$

$$(a*b);(a*b);...;(a*b)=a*b*a*b\ ...\ a*b=$$

$$=\underbrace{a*a*a*...*a}_{n}*\underbrace{b*b*b*...*b}_{n}=a^n*b^n$$

Demak,

$$a^n*b^n=(a*b)^n$$

Agar *-algebraik amal sonlarni qo‘shish amali bo‘lsa

$$na+nb=n(a+b)$$

agar * ko‘paytirish amali bo‘lsa $a^n\cdot b^n=(ab)^n$ o‘rinli bo‘ladi.

3) Distributivlik xossasi.

Yuqorida biz bitta algebraik amalga nisbatan assotsiativlik va distributivlik xossalarini ko‘rdik, ushbu xossalar o‘rinli bo‘lgan algebraik amalni o‘zida saqlovchi ifodalarda shakl almashtirishlarni amalga oshirdik. Endi esa ikkita algebraik amal bilan bog‘langan ifodalarni ko‘ramiz.

Faraz qilaylik bizga X to‘plam va unda $*,\circ$ -algebraik amallar berilgan bo‘lsin.

Agar $*,\circ$ amallar biror munosabatlar bilan bog‘langan bo‘lsa $a,b,c,d \in X$ elementlardan tuzilgan $(a*b)\circ(c*d)$ ifodalar ustida shakl almashtirish mumkin bo‘ladi.

Ko‘p hollarda distributivlik xossasi bilan bog‘langan ikkita algebraik amal bilan ish ko‘radilar.

Ta’rif. X to‘plamidan olingan ixtiyoriy a,b,c elementlar uchun

$$\left.\begin{array}{l} a*(b\circ c)=(a*b)\circ(a*c) \\ a\circ(b*c)=(a\circ b)*(a\circ c) \end{array}\right\}$$

munosabatlar o‘rinli bo‘lsa * algebraik amal $\circ$ amalga nisbatan distributivlik xossasiga bo‘ysunadi deyiladi.

1-Misol. Natural sonlar to‘plamida ko‘paytirish amali qo‘shish amaliga nisbatan distributiv

$$a,b,c \in N \qquad a(b+c)=ab+ac$$

2-Misol. Natural sonlar to‘plamida $b>c$ shartni bajaruvchi sonlar uchun ko‘paytirish amali ayirish amaliga nisbatan distributivdir.

$$a(b-c)=ab-ac \qquad b>c \Rightarrow ab>ac$$

3-Misol. Qo‘shish amali ko‘paytirish amaliga nisbatan distributivlik xossasiga bo‘ysunmaydi.

$$a+bc \neq (a+b)\cdot(a+c)$$

$$3+4\cdot 7 \neq (3+4)\cdot(3+7)$$

4-Misol. To‘plamlar kesishmasi $\bigcap$ to‘plamlar birlashmasiga nisbatan distributivlik xossasiga bo‘ysunadi.

$$A\bigcap B\bigcup C=(A\bigcap B)\bigcup(A\bigcap C)$$

5-Misol. To‘plamlar birlashmasi $\bigcup$ to‘plamlar kesishmasiga nisbatan distributivlik xossasiga bo‘ysunadi

$$A\bigcup B\bigcap C=(A\bigcup B)\bigcap(A\bigcup C)$$

Ko‘paytirish amali qo‘shish amaliga nisbatan distributiv bo‘lganidan

$$(a+b)(c+d)=a(c+d)+b(c+d)$$

o‘rinli bo‘ladi.

Yana bir marta qo‘shishning distributivlik qonunidan foydalanish bilan

$$(a+b)(c+d)=ac+ad+bc+bd$$

kelib chiqadi

Agar berilgan $*,\circ$ ikkita algebraik amallardan biri * assotsiativlik xossasiga va $\circ$ - * amalga nisbatan distributivlik xossasiga bo‘ysunsa bu algebraik amallarga nisbatan quyidagi tenglik o‘rinli bo‘ladi.

$$(a*b)\circ(c*d)=(a\circ c)*(a\circ d)*(b\circ c)*(b\circ d)$$

4) Qisqaruvchanlik xossasi.

Bizga ma’lumki,

a) Natural sonlar to‘plami N da berilgan ixtiyoriy a,x,y elementlar uchun

$$\left.\begin{aligned} a+x&=a+y \\ ax&=ay \end{aligned}\right\}$$ munosabatlar o‘rinli bo‘lishidan $x=y$ ekani kelib chiqadi.

b) Butun sonlar to‘plami Z da $a=0$ bo‘lgan holda biz qat’iy tarzda $x=y$ deb ayta olamiz, chunki

$$\left.\begin{aligned} 0+x&=0+y \\ 0x&=0y \end{aligned}\right\}$$ munosabat x va y qat’iy son qiymatini aniqlash imkoniyatini bermaydi.

Ta’rif. Bo‘sh bo‘lmagan A to‘plamining ixtiyoriy ikkita x va y elementi uchun, shu to‘plamda aniqlangan * algebraik amalga nisbatan

$$a*x=a*y \qquad (1)$$

munosabat o‘rinliligidan $x=y$ kelib chiqsa A to‘plamida * algebraik amal qisqaruvchanlik xossasiga bo‘ysunadi deyiladi.

Agar $a*x=a*y$ (1) $\Rightarrow$ $x*a=y*a$ o‘rinli bo‘lsa A to‘plam elementlari uchun * amalga nisbatan chapdan (o‘ngdan) qisqaruvchanlik xossasi o‘rinli bo‘ladi.

Bir vaqtning o‘zida chapdan va o‘ngdan qisqaruvchanlik xossasi o‘rinli bo‘lsagina A to‘plamda qisqaruvchanlik xossasi o‘rinli deyiladi.

5) Teskaruvchanlik xossasi.

Bizga ma’lum ko‘paytirish amaliga bo‘lish, qo‘shish amaliga ayirish amallari teskari amallardir.

$a+x=b \Rightarrow x=b-a$

$a\cdot x=b \Rightarrow x=b:a$ kelib chiqadi.

Qo‘shish va ko‘paytirish amallari natural sonlar to‘plamida algebraik amal bo‘lsa ayirish va bo‘lish amallari qismiy algebraik amaldir, chunki ayirish faqat $a>b$ bo‘lgan hollarda, bo‘lish esa a soni b soniga qoldiqsiz bo‘lingan hollardagina bajariladi.

Endi esa qisqaruvchan va kommutativ bo‘lgan har qanday * algebraik amalga teskari bo‘lgan T qismiy algebraik amalni aniqlaymiz hamda ularning umumiy xossalarini keltirib chiqaramiz. Ana shu umumiy xossalardan esa amallarning xususiy holda ayirish va bo‘lish amalining xossalari kelib chiqadi.

Faraz qilaylik A to‘plami va unda qichqaruvchan va kommutativ bo‘lgan *algebraik amal berilgan bo‘lsin A to‘plamga tegishli va $b*x=a$ shartni qanoatlantiruvchi ixtiyoriy (a,b) juftliklarni Y bilan belgilaylik. Har bir (a,b) juftlikda x bir qiymatli aniqlangandir.

Faraz qilaylik x bir qiymatli aniqlanmagan, ya’ni $b*x=a$; $b*y=a$ bo‘lsin, u holda * algebraik amalning qisqaruvchanlik xossasidan $x=y$ ekanligi kelib chiqadi.

Demak biz Y dan olingan har bir (a,b) juftga A to‘plamidan bitta x ni mos qo‘yish orqali * algebraik amalga A to‘plamida teskari bo‘lgan T qismiy algebraik amalni aniqladik.

Agar $x \in A,\ (a;b) \in Y,\ Y \subset A$ uchun $x = a\,T\,b$ amal faqat va faqat $b * x = a$ o‘rinli bo‘lganda bajarilsa T amalga * amaliga teskari bo‘lgan algebraik amal deyiladi.

6) Neytral elementning mavjudlik xossasi.

Butun sonlar to‘plami Z da berilgan ixtiyoriy songa 0 sonini qo‘shish, ixtiyoriy sonni 1 soniga ko‘paytirish bilan natija o‘zgarmasligi bizga ma’lum.

Agar $a + 0 = a;\ \ a \cdot 1 = a$ tenglik o‘rinli bo‘lsa qo‘shish amaliga nisbatan 0 soni, ko‘paytirish amaliga nisbatan 1 soni neytral element hisoblanadi.

Ta’rif. A to‘plamda o‘rinli bo‘lgan * algebraik amalga nisbatan $a, e \in A$ lar uchun $a * e = e * a = a$ tenglik o‘rinli bo’lsa, shu to‘plamning e elementi neytral element deyiladi.

Berilgan A to‘plamda faqat bitta neytral element mavjud bo‘ladi.

Aytaylik A to‘plamda e dan tashqari e_1 ham neytral element bo‘lsin, u holda $a \in A$ uchun $a * e_1 = a$ munosabat bajarilishidan $e = e_1$ ekani kelib chiqadi.

7) Yutuvchi elementning mavjudlik xossasi.

Har qanday to‘plam ham neytral elementga ega bo‘lavermaydi. Natural sonlar to‘plamida neytral element mavjud emas chunki $a + e = a$ tenglikni o‘rinli qiladigan e soni N da mavjud emas;

Masalan;

$$\forall\ a_1,\, a \in N \qquad a_1 + a > a_1;\quad a_1 + a \neq a_1$$

Agar A to‘plamda * amaliga nisbatan neytral e element mavjud bo‘lsa, *algebraik amal bilan berilgan har qanday ifodada neytral e elementni *algebraik amal bilan birgalikda tashlab yuborish mumkin bo‘ladi.

$$21 * e * 16 * e * 3 = 21 + 0 + 16 + 0 + 3 = 21 + 16 + 3$$

Butun sonlar to‘plami Z da har qanday sonni 0 ga ko‘paytirish natijasida 0 soni hosil bo‘ladi. $a \cdot 0 = 0$;

Agar A to‘plamda $\forall a \in A$ uchun $a * x = x * a = 0$ tenglik bajarilsa berilgan * algebraik amalga nisbatan x element yutuvchi element deyiladi.

Demak ko‘paytirish amaliga nisbatan 0 element yutuvchi element hisoblanar ekan. Shuningdek x element * algebraik amalga nisbatan yutuvchi element bo‘lsa, shu amal bilan berilgan har qanday ifodani x element bilan almashtirish mumkin bo‘ladi.

8) Simmetrik elementning mavjudlik xossasi.

Ratsional sonlar to‘plamida quyidagi tengliklarni qaraylik

$$a - b = a + (-b)$$

$$a : b = a \cdot \frac{1}{b};\ b \neq 0$$

Birinchi tenglikda ayirish amali qo‘shish amali bilan b soni esa, unga qarama-qarshi $-b$ soniga, ikkinchi tenglikda bo‘lish amali ko‘paytirish amali bilan b soni esa unga teskari bo‘lgan $\frac{1}{b}$ soni bilan almashtiriladi.

Qarama-qarshi, teskari sonlar simmetrik elementning xususiy hollaridir.

Aytaylik bizga A to‘plam va * algebraik amal berilgan bo‘lsin, e A to‘plamining neytral elementi bo‘lsin.

Agar $\forall\, a \in A$ uchun

$$a * \tilde{a} = \tilde{a} * a = e \qquad (1)$$

o‘rinli bo‘lsa $\tilde{a}$ element simmetrik element deyiladi.

A da berilgan * algebraik amal assotsiativ bo‘lsa A ning har bir elementiga faqat bitta simmetrik element mos keladi.

Aytaylik, A to‘plamda a elementga ikkita $\tilde{a}_1$ va $\tilde{a}_2$ elementlar simmetrik bo‘lsin.

U holda (1) munosabatga asosan

$$\begin{matrix} a * \tilde{a}_1 = \tilde{a}_1 * a = e \\ a * \tilde{a}_2 = \tilde{a}_2 * a = e \end{matrix} \quad \Rightarrow \quad a * \tilde{a}_1 = a * \tilde{a}_2$$

* amal assotsiativ bo‘lganidan

$$(\tilde{a}_1 * a) * \tilde{a}_2 = \tilde{a}_1 * (a * \tilde{a}_2) \;\Rightarrow\; e * \tilde{a}_2 = \tilde{a}_1 * e \;\Rightarrow\; \tilde{a}_2 = \tilde{a}_1 \qquad (2)$$

(2) tenglikdan ko‘rinadiki A to‘plamning har bir elementi faqat bitta simmetrik elementga ega bo‘ladi.

Shunday to‘plamlar mavjudki ularning har bir elementiga bitta ham simmetrik element mos kelmaydi.

Masalan natural sonlar to‘plamida $a \in N$ ga simmetrik element $-a$ mavjud emas, $-a \notin N$;

Ma’lumki $a * \tilde{a} = \tilde{a} * a = e$ tenglik o‘rinli bo‘lsa $\tilde{a}$ element a ga teskari element bo‘ladi, bu tenglikdagi a element $\tilde{a}$ element uchun ham simmetrik element vazifasini bajaradi. a ga teskari $\frac{1}{a}$; $\frac{1}{a}$ ga teskari $\frac{1}{\frac{1}{a}} = a$; a ga qarama-qarshi $-a$; $(-a)$ ga qarama-qarshi $-(-a) = a$, ya’ni $\tilde{\tilde{a}} = a$ (2) o‘rinli bo‘ladi.

Agar to‘plamda berilgan * algebraik amal assotsiativ, hamda to‘plamning ixtiyoriy b va c elementlari $\tilde{b}$ va $\tilde{c}$ simmetrik elementga ega bo‘lsa

$$\widetilde{(b * c)} = \tilde{b} * \tilde{c} \qquad (3)$$

tenglik o‘rinli bo‘ladi.

Masalan $b = 5;\ c = 7$ bo‘lsa (3) ga asosan $(5+7) = 12$; $\tilde{12} = -12$; $\widetilde{(5+7)} = -12$; $5+7 = -5 + (-7) = -12$; $\widetilde{(5+7)} = \tilde{5} + \hat{7}$ tenglik bajariladi.

O‘z-o‘zini tekshirish uchun savollar:

1. Natural sonlar to‘plamida kommutativlik va assotsiativlik xossalariga qaysi amallar bo‘ysunadi

2. Quyidagi amallarning qaysi biri uchun butun sonlar to‘plami Z da assotsiativlik xossasi o‘rinli bo‘ladi.

3. Butun sonlar to‘plami Z da kommutativlik xossasi o‘rinli bo‘lgan amallarni ko‘rsating.

4. Butun sonlar to‘plami Z da ayirish amali qisqaruvchanlik xossasiga bo‘ysunadimi?

5. Natural sonlar to‘plami N da neytral element mavjudmi?

6. Berilgan amalga nisbatan teskari amal deb qanday amalga aytiladi.

7. Ratsional sonlar to‘plami Q da ko‘paytirish amaliga teskari amal mavjudmi?

8. Qachon amal teskarilanuvchanlik xossasiga ega bo‘ladi deyiladi.

I.3.3.Gruppa, halqa, maydon va ularning xossalari.

Agar A to‘plamda, to‘plamning ixtiyoriy (x, y) juftiga biror qonun, qoida bilan shu to‘plamning z elementini mos qo‘yish mumkin bo‘lsa, A to‘plamda algebraik amal (amalni * ko‘rinishda belgilasak) ya’ni A to‘plam va unda berilgan * algebraik amal vositasida $\{A, *\}$ algebra berilishini ko‘rib o‘tdik. Shu yo‘sinda to‘plam va unda aniqlangan algebraik amallar yordamida bir qator algebralarni, yoki algebraik sistemalarni hosil qilish mumkin bo‘ladi. «Algebra va sonlar nazariyasi» fani algebraik sistemalarning asosiy xossalarini o‘rganadi.

Gruppa, halqa, maydon ana shunday algebraik sistemalar qatoriga kiradi. Quyida biz gruppa, halqa va maydon kabi algebraik sistemalarning xossa va xususiyatlarini ko‘rib chiqamiz.

Gruppa. Aytaylik bizga, $A \neq \varnothing$ to‘plam va binar *, unar $\circ$ algebraik amallar berilgan bo‘lsin.

Ta’rif: Bo‘sh bo‘lmagan A to‘plamda quyidagi xossalar o‘rinli bo‘lsa $\{A, *, o\}$ algebra gruppa deyiladi:

a) A to‘plamning ixtiyoriy a, b, c elementlari uchun $a*(b*c)=(a*b)*c$ munosabat o‘rinli bo‘lsa, ya’ni binar * algebraik amal assotsiativ bo‘lsa;

b) A to‘plamning ixtiyoriy a elementi uchun shunday $e \in A$ element mavjud bo‘lib u $a*e=e*a=a$ shartni qanoatlantirsa, ya’ni A to‘plamda neytral element mavjud bo‘lsa;

v) A to‘plamning ixtiyoriy a elementi uchun shunday a^o element mavjud bo‘lib, u quyidagi $a*a^o=a^o*a=e$ shartni qanoatlantirsa, ya’ni A to‘plamning har bir elementiga simmetrik element mavjud bo‘lsa.

Ta’rifdan ko‘rinadiki, $\{A, *, o\}$ algebra gruppa bo‘lishi uchun: * algebraik amal, binar algebraik amal bo‘lib, u assotsiativ bo‘lishi, hamda A to‘plamda neytral, simmetrik elementlar mavjud bo‘lishi kerak ekan.

*algebraik amal binar bo‘lganligidan $(a, b) \in A$ juftga, shu to‘plamning c elementini mos qo‘yadi.

Xulosa qilib aytganda yuqorida keltirilgan shartlarga bo‘ysunuvchi * amal A to‘plamda gruppa hosil qiluvchi amal deb yuritiladi.

Agar A to‘plamda berilgan * algebraik amal kommutativ bo‘lsa, ya’ni ixtiyoriy $a,b \in A$ uchun $a * b = b * a$ o‘rinli bo‘lsa $\{A,*,o\}$ algebra, * binar algebraik amalga nisbatan kommutativ gruppa deb yuritiladi. Kommutativ gruppa ba’zi hollarda Abel gruppa deb ham ataladi.

Binar «*» algebraik amalni «+» qo‘shish amali bilan almashtiraylik. A to‘plamda + amali gruppa hosil qilishi uchun u quyidagi xossalarga bo‘ysunishi kerak:

a) $\forall a,b,c \in A$ uchun $(a+b)+c = a+(b+c)$ bajarilishi, ya’ni qo‘shish amali assotsiativ

b) $\forall a \in A$ uchun shunday $e = 0$ element bo‘lsinki $a + 0 = a$ bo‘lsin, ya’ni neytral 0 element mavjud bo‘lishi.

v) A to‘plamning ixtiyoriy a elementi uchun $a + (-a) = 0$ shartni qanoatlantiruvchi simmetrik $-a$ element mavjud bo‘lishi kerak.

Ma’lumki, qo‘shish amali kommutativdir shuning uchun $\{A,*,o\}$ algebra kommutativ ya’ni Abel gruppasidir.

Misol: Haqiqiy sonlar to‘plami R qo‘shish amaliga nisbatan kommutativ gruppa tashkil qiladi.

Haqiqatan ham, $\forall a,b,c \in R$ uchun

a) $(a+b)+c = a+(b+c)$ assotsiativlik xossasi o‘rinli

b) $\forall a \in R$ uchun $-a \in R$ topiladiki $a + (-a) = 0$

v) $\forall a \in R$ uchun $0 \in R$ mavjudki $a + 0 = a$

Qo‘shish amali haqiqiy sonlar to‘plamida kommutativ, assotsiativ bo‘lganidan va R da neytral va simmetrik element mavjudligidan $\{R,+,o\}$ kommutativ gruppadir.

Agar $\{A,*,o\}$ algebra gruppa bo‘lib A to‘plamning ixtiyoriy N qism to‘plami berilgan amallarga nisbatan gruppa tashkil qilsa N qism to‘plamga $\{A,*,o\}$ gruppaning qism gruppasi deyiladi.

Agar «*» algebraik amal sifatida «+» qo‘shish amali olinib $\{A,*,o\}$ gruppa qo‘shish amaliga nisbatan kommutativ gruppa bo‘lsa, bunday gruppalar additiv gruppalar deyiladi.

Halqa va uning xossalari.

Gruppa va uning xossalarini biz biror to‘plamda bitta binar va bitta unar algebraik amallarga nisbatan o‘rgandik. o-unar algebraik amal to‘plamning bitta elementga shu to‘plamning bitta va faqat bitta elementini mos qo‘yishini, binar amal esa to‘plamning ixtiyoriy ikki elementiga shu to‘plamning bitta elementini mos qo‘yuvchi akslantirish orqali berilishini ko‘rganmiz.

To‘plamning ixtiyoriy elementiga shu to‘plamning faqat bitta qarama-qarshi yoki teskari elementini mos qo‘yuvchi, har bir elementga bitta neytral elementni mos qo‘yuvchi amal unar algebraik amaldir.

Endi bo‘sh bo‘lmagan A to‘plamda ikkita binar algebraik, bitta unar algebraik amal berilgan bo‘lsin. Aniqlik uchun binar algebraik amallar uchun «qo‘shish» va «ko‘paytirish» amallarini, unar algebraik amal sifatida esa simmetrik (qarama-qarshi, teskari) elementning mavjudligini qabul qilaylik.

Ta'rif: Bo'sh bo'lmagan A to'plamda qo'shish va ko'paytirish binar algebraik amallari o'rinli bo'lib ular quyidagi xossalarga bo'ysunsalar, A to'plam va $+,\cdot$ amallari bilan berilgan $\{A,+,\cdot\}$ algebra yarim halqa deyiladi.

a) $\forall a,b,c \in A$ lar uchun $(a+b)+c=a+(b+c)$, ya'ni assotsiativlik xossasi

b) $\forall a,b \in A$ uchun $a+b=b+a$, ya'ni kommutativlik xossasi

v) $\forall a,b,x \in A$ uchun

$$a+x=b+x \ \Rightarrow \ a=b$$
$$x+a=x+b \ \Rightarrow \ a=b,$$

ya'ni qisqaruvchanlik xossasi;

g) $\forall a,b,c \in A$ uchun $(a\cdot b)\cdot c = a\cdot(b\cdot c)$ ko'paytirish amali assotsiativlik xossasiga bo'ysunsa;

d) $\forall a,b,c \in A$ uchun $(a+b)\cdot c = a\cdot c + b\cdot c$ yoki $c\cdot(a+b)=c\cdot a+c\cdot b$ ko'paytirish amaliga nisbatan distributivlik xossasi o'rinli bo'lsa.

Agar $\{A,+,\cdot\}$ yarim halqa bo'lib uning ixtiyoriy ikkita a,b elementini ko'paytirish amali kommutativ bo'lsa bunday yarim halqa yarim kommutativ halqa deb yuritiladi.

Ta'rif 2: Agar $\{A,+,\cdot\}$ algebraik sistema, qo'shish amaliga nisbatan additiv gruppa, va ko'paytirish amaliga nisbatan yarim gruppa, ya'ni

a) $\forall a,b \in A,\ a+b=b+a,\ \{A,+\}$ - addativ gruppa

b) $\{A,\cdot\}$ - yarim gruppa

v) $\forall a,b,c \in A$ uchun $c\cdot(a+b)=c\cdot a+c\cdot b$, $(a+b)\cdot c=a\cdot c+b\cdot c$, ya'ni ko'paytirish amali qo'shish amaliga nisbatan distributivlik xossasiga bo'ysunsa $\{A,+,\cdot\}$ algebraik sistemaga halqa deyiladi.

Agar $\forall a \in A$ uchun $a+0=a$ va $0+a=a$ munosabat o'rinli bo'lsa, $0 \in A$ element A to'plamning nol elementi, agar $\forall a \in A$ uchun $e \in A$ mavjud bo'lib $a\cdot e=e\cdot a=a$ munosabat bajarilsa e elementga A to'plamning birlik elementi deyiladi.

Misol: $N=\{1,2,3,\ldots,n,\ldots\}$ natural sonlar to'plamida qo'shish va ko'paytirish amallari vositasida tashkil qilingan $\{N,+,\cdot\}$ algebraik sistema yarim halqadir. Haqiqatan ham,

1) $4,6,7 \in N \quad 4+(6+7)=(4+6)+7$

2) $4+7=7+4$

3) $5+12=5+(5+7) \ \Rightarrow 12=5+7$

4) $5\cdot(6\cdot 7)=(5\cdot 6)\cdot 7$

$5\cdot 42=30\cdot 7$

$210=210$

5) $6\cdot(7+4)=6\cdot 7+6\cdot 4$

$6\cdot 11=66$

$6\cdot 7+6\cdot 4=42+24=66$

Demak $\{N,+,\cdot\}$ algebraik sistema yarim halqadir.

Agar A to‘plamda berilgan ko‘paytirish amali uchun kommutativlik xossasi o‘rinli bo‘lsa, $\{A,+,\cdot\}$ kommutativ halqa, agar ko‘paytirish amali uchun assotsiativlik xossasi o‘rinli bo‘lsa $\{A,+,\cdot\}$ assotsiativ halqa, agar ko‘paytirish amaliga nisbatan $a\cdot e=e\cdot a=a$ shartni bajaruvchi neytral element mavjud bo‘lsa $\{A,+,\cdot\}$ birlik elementli halqa (chunki $a\cdot 1=1\cdot a=a,\ e=1$) deb yuritiladi.

Agar $\{A,+,\cdot\}$ halqani tashkil qilayotgan A to‘plam elementlari sonlardan iborat bo‘lsa, $\{A,+,\cdot\}$ halqa sonli halqa deb yuritiladi. Endi ko‘rib chiqilgan halqa va uning xossalaridan foydalanib maydon tushunchasini kiritamiz.

Faraz qilaylik bizga kommutativ va birlik elementli assotsiativ halqa berilgan bo‘lsin.

Ta’rif: Agar $\{A,+,\cdot\}$ algebraik sistema kommutativ va birlik elementli assotsiativ halqa bo‘lib, $a\in A,\ a\neq 0$ uchun a elementga $a\cdot a^{-1}=e$ shartni qanoatlantiruvchi a^{-1} teskari element mavjud bo‘lsa $\{A,+,\cdot\}$ algebraik sistema maydon deyiladi.

Maydon ta’rifidan ko‘rinadiki:

a) har qanday maydonda uning nolga teng bo‘lmagan istalgan elementiga teskari element mavjud va yagonadir.

b) $\forall a\in A,\ a\neq 0$ uchun $a\cdot a^{-1}=a\cdot\dfrac{1}{a}=1$

v) har qanday maydonda birlik element mavjud va yagonadir.

g) $\forall a,b\in A$ uchun $a\cdot x=b$ tenglikni qanoatlantiruvchi $x\in A$ yagonadir. Bu $a\cdot a^{-1}=e$ shartni qanoatlantiruvchi a^{-1} ning yagonaligidan kelib chiqadi

$a\cdot x=b\Rightarrow x=b\cdot a^{-1}\quad b\cdot(a\cdot b^{-1})=(b\cdot b^{-1})\cdot a=a$.

d) maydon nolning bo‘luvchilariga ega emas.

Agar $\{A,+,\cdot\}$ maydonda A to‘plam elementlari sonlardan iborat bo‘lsa $\{A,+,\cdot\}$ maydon sonli maydon deyiladi.

Ratsional sonlar to‘plami Q da qo‘shish va ko‘paytirish amallari vositasida hosil qilingan algebraik $\{Q,+,\cdot\}$ sistema maydon tashkil etadi.

Butun sonlar to‘plamida qo‘shish va ko‘paytirish amallari vositasida hosil qilingan algebraik $\{Z,+,\cdot\}$sistema maydon hosil qilmaydi.

Bo‘sh bo‘lmagan P to‘plam qo‘shish va ko‘paytirish amallari vositasida $\{P,+,\cdot\}$ maydon hosil qilsin $M\subset P$ qism to‘plami maydonning kamida har xil ikkita elementidan tashkil topgan bo‘lsin. Agar M qism to‘plam qo‘shish va ko‘paytirish amallariga nisbatan maydon tashkil etsa M ga P maydonning qism maydoni deyiladi.

O‘z-o‘zini tekshirish uchun savollar.

1. Gruppa nechta amalga nisbatan qaraladi?
2. Gruppani tashkil qilayotgan binar algebraik amal assotsiativlik xossasiga bo‘ysunadimi?
3. Berilgan to‘plamda gruppa hosil qiluvchi amal qanday xossalarga bo‘ysunadi?

4. Berilgan to‘plamda gruppa hosil qiluvchi qo‘shish amalining xossalarini ayting.
5. Kommutativ gruppa qanday xossalarga ega?
6. Gruppadan qachon qism gruppa ajratish mumkin?
7. Bo‘sh bo‘lmagan to‘plamda ikkita binar va bitta unar amallarga nisbatan qanday algebraik sistema yarim halqa hosil qilishi mumkin?
8. Yarim halqani tashkil qilayotgan «+» va «·» amallari qanday xossalarga ega bo‘ladi?
9. Yarim kommutativ halqaga ta’rif bering.
10. Natural sonlar to‘plami ko‘paytirish va qo‘shish amaliga nisbatan qanday algebraik sistemani hosil qilishi mumkin?
11. Assotsiativ halqani izohlang
12. Maydon qanday xossalarga ega bo‘lgan algebraik sistema?
13. Kommutativ va birlik elementga ega bo‘lgan assotsiativ halqa qanday shartni qanoatlantirsa maydon hosil qiladi?

1.4.Kombinatorika elementlari.

1.4.1.Ikki to‘plamning Dekart ko‘paytmasi.

X va Y to‘plamlar dekart ko‘paytmasi deb elementlari $(x;y)$ juftlardan tashkil topgan $X\times Y$ to‘plamga aytiladi, bunda $x\in X$, $y\in Y$ ya’ni

$$X\times Y=\{(x:y) \quad x\in X\wedge y\in Y\};$$

Agar X va Y to‘plamlar ustma-ust tushsa, ya’ni $X=Y$ bo‘lsa u holda dekart ko‘paytma $X\times X$ bo‘lib, uning elementlari $(x;y)$ juftlardan iborat bo‘ladi va bunda $x\in X$, $y\in Y$;

Misol: $X=\{1;2;3\}$ bo‘lsin, u holda

$$X\times X=\{(1;1),(1;2),(1;3),(2;1),(2;;2),(2;3),(3;1),(3;2),(3;3)\}$$

bo‘ladi.

Ixtiyoriy X to‘plam uchun $X\times\varnothing=\varnothing\times X=\varnothing$ deb olinadi;

Umuman olganda dekart ko‘paytma kommutativlik, assotsiativlik xossalariga ega emas, ya’ni

a) agar $X\neq Y,$ bo‘lsa, $X\times Y\neq Y\times X$;

b) agar X,Y,Z to‘plamlardan bittasi bo‘sh to‘plam bo‘lmasa, $X\times(Y\times Z)\neq(X\times Y)\times Z$ munosabat o‘rinli.

Kommutativlik xossasiga ega emasligini ko‘rsataylik. Haqiqatan ham $X\times Y$ dekart ko‘paytma elementlari $(x;y)$ juftliklardan iborat, bunda $x\in X$, $y\in Y$

$Y\times X$ dekart ko‘paytmani elementlari esa $(y;x)$ juftdan iborat, bunda $y\in Y$ va $x\in X$.

Ammo $x\neq y$ bo‘lganda $(x;y)$ va $(y;x)$ juftliklar turli elementlar bo‘ladi, shuning uchun $X\neq Y$ bo‘lganda, $X\times Y$ va $Y\times X$ to‘plamlar har xil, ya’ni teng emas.

X va Y to‘plamlar chekli bo‘lsa, ularni dekart ko‘paytmasini jadval ko‘rinishida berish qulay bo‘lib, bunda gorizontal bo‘yicha Y to‘plam, vertikal bo‘yicha X to‘plam elementlari joylashtiriladi, yo‘llar va ustunlar kesishmasida, dekart ko‘paytma elementlari joylashadi.

Masalan: $X=\{3;4;5\}$, $Y=\{a;b\}$

Y / X	a	b
3	$(3;a)$	$(3;b)$
4	$(4;a)$	$(4;b)$
5	$(5;a)$	$(5;b)$

1.4.2. Kortejlar.

Aytaylik $X_1, X_2,...,X_n$ to‘plamlar berilgan bo‘lsin. X_1 to‘plamdan a_1, X_2 to‘plamdan a_2, … , X_n to‘plamdan a_n elementlarni olib, ularni $(a_1, a_2,...,a_n)$ tartibda joylashtiraylik. Bunda biz $X_1, X_2,...,X_n$ to‘plamlardan tanlangan «n ta tartiblangan» elementlarga ega bo‘lamiz. Bu yerda «n ta tartiblangan» degan so‘z o‘rniga qisqacha «kortej» so‘zini ishlatamiz (kortej frantsuzcha so‘z bo‘lib, “tantanali namoyish” ni bildiradi, masalan « to‘y korteji», «avtomashinalar korteji» va hokazo).

Bunda n – kortej uzunligi, $a_1, a_2,...,a_n$ elementlar kortejning komponentlari deyiladi.

Matematikada kortejga o‘nli sanoq sistemasida olingan sonlar to‘plami ham misol bo‘ladi. Bunday kortej 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9 sonlaridan tuzilgan bo‘lib, bunda sonlar takrorlanishi ham mumkin.

Misol: 234567 sonining korteji (2;3;4;5;6;7) ko‘rinishda bo‘ladi.

Agar ikkita kortej mos komponentlari va uzunliklari teng bo‘lsa ular teng deyiladi, ya’ni $(a_1, a_2,...,a_n)$ va $(b_1, b_2,...,b_m)$ kortejlar berilgan bo‘lib, bu kortejlarda $a_1=b_1;\ a_2=b_2;...;a_n=b_m$ va $n=m$ bo‘lsa ular teng deyiladi.

Misol: $(a;b;c)$ va $(a;b;c)$ lar teng,

$(a;b;c)$ va $(a;b;c)$ lar teng emas.

Bizga $A_1, A_2,...,A_n$ to‘plamlar berilgan bo‘lsin. Agar bu to‘plamlarning elementlaridan uzunligi n ga teng kortejni tubandagi usulda tuzsak, u holda unga $A_1, A_2,...,A_n$ to‘plamlarning Dekart ko‘paytmasi deyiladi:

Kortejni birinchi komponenti A_1 to‘plamdan ikkinchi komponenti A_2 to‘plamdan, … , n – chi komponenti An to‘plamdan olinib tuziladi. Dekart ko‘paytma $A_1 \times A_2 \times ... \times A_n$ ko‘rinishda belgilanadi.

Misol: $A_1=\{3;4\}$ $A_2=\{5;6\}$, $A_3=\{7;8\}$ to‘plamlar Dekart ko‘paytmasi quyidagicha bo‘ladi.

$$A_1 \times A_2 \times A_3 = \{(3;5;7),(3;5;8),(3;6;7),(3;6;8),(4;5;7),(4;5;8),(4;6;7),(4;6;8)\}:$$

1.4.3.Kombinatorika. Yig‘indi va ko‘paytma qoidasi

Elementlarning turli kombinatsiyalari, ularning soni haqidagi masalalar kombinatorika masalalari deyiladi. Ko‘pgina kombinatorika masalalarini yechish ikkita qoidaga, ya’ni yig‘indi va ko‘paytma qoidasiga asoslangan .

Kombinatorikada to‘plamlar birlashmasi elementlari sonini hisoblash masalalasi yig‘indi qoidasiga asoslanib topiladi:

1. Agar $X \cap Y = \varnothing$ bo‘lsa,

$$n(X \cup Y) = n(X) + n(Y) \qquad (1)$$

(1) formula bilan yechiladigan kombinatorika masalasi umumiy holda quyidagicha ifodalanadi: Agar X to‘plam n ta elementga Y to‘plam m elementga ega bo‘lsa va X, Y to‘plamlar kesishmasa, u holda $X \cup Y$ to‘plam $n+m$ ta elementga ega bo‘ladi.

Masalan: savatda 7 ta olma va 12 ta o‘rik bor bo‘lsa, 1 ta mevani 7+12=19 usul bilan tanlash mumkin.

Agar X va Y to‘plamlar kesishmasi bo‘sh to‘plam bo‘lmasa, ya’ni $X \cap Y \neq \varnothing$ u holda to‘plamlar birlashmasini elementlarni sonini hisoblash qiyin bo‘ladi, chunki ikkala to‘plam umumiy elementlarga ega bo‘ladi.

Masalan: $\{a;b;c;d;e;f\}$ va $\{e;f;k;l\}$ to‘plamlar birlashmasi 6+4=10 ta elementdan emas, balki 8 ta elementdan tashkil topgan, ya’ni $X \cup Y = \{a;b;c;d;e;f;k;l\}$. Buning sababi $e;f$ elementlari ikkala to‘plamda ham bor. Demak, birlashmadagi elementlar sonini topish uchun elementlar sonidan $X \cap Y$ kesishma elementlar sonini ayirish kerak. Boshqacha aytganda agar $X \cap Y = \varnothing$ bo‘lsa,

$$n(X \cup Y) = n(X) + n(Y) - n(X \cap Y) \qquad (2)$$

(2) formula bilan yechiladigan masala: 60 talabadan 45 tasi matematika imtihonini, 47 tasi chet tili imtihonini topshirdi. 3 talaba ikkala fandan «2» oldi. Nechta qarzdor talaba bor?

Yechish: A-matematika fanidan «2» olgan, B-chet tili fanidan «2» olgan talabalar to‘plami bo‘lsin.

$n(A) = 60 - 45 = 15$ $\qquad$ $n(A \cap B) = 3$

$n(B) = 60 - 47 = 13$ $\qquad$ $n(A \cup B) = 15 + 13 - 3 = 25$

Javob: 25 ta qarzdor talaba bor.

Uchta X, Y, Z to‘plamlar uchun $X \cup Y \cup Z \neq \varnothing$ bo‘lsa,

$$n(X \cup Y \cup Z) = n(X) + n(Y) + n(Z) -$$
$$- n(X \cap Y) - n(X \cap Z) - n(Y \cap Z) + n(X \cap Y \cap Z) \qquad (3)$$

(3) formulaga ega bo‘lamiz.

Kombinatorikaning ikkinchi qoidasi, chekli to‘plamlar berilganda ularning elementlaridan tuzilgan kortejlar sonini boshqacha aytganda, to‘plamlarning dekart ko‘paytmasi elementlari sonini topish imkonini beradi va bu qoida ko‘paytma qoidasi deyiladi.

$$n(A * B) = n(A) * n(B) \qquad (4)$$

Ko‘paytma qoidasiga oid kombinatorika masalasining umumiy ko‘rinishi:

Agar X to‘plamni x elementini n usul, Y to‘plamni y elementini m usul bilan tanlash mumkin bo‘lsa, (x, y) tartiblangan juftlikni mn usul bilan tanlash mumkin» (n ta to‘plam uchun $n > 2$)

$$n(A_1, A_2, \ldots, A_n) = n(A_1) * n(A_2) * \ldots * n(A_n) \qquad (5)$$

Masalan: A shahardan B shaharga 3 yo‘l bilan, B shahardan D shaharga 2 yo‘l bilan borish mumkin bo‘lsa, A shahardan D shaharga necha xil usul bilan borish mumkin?

Yo‘lning 1-qismini 3 xil, 2-qismini 2 xil yo‘l bilan o‘tish mumkin bo‘lsa, umumiy yo‘lni $3*2=6$ usul bilan o‘tish mumkin.

Umumlashgan ko‘paytma qoidasi:

Agar x elementni m usul bilan, y elementni x ni tanlab bo‘lgandan so‘ng, n usul bilan tanlash mumkin bo‘lsa, (x, y) juftlikni mn usul bilan tanlash mumkin.

Masala: Nechta (turli raqamlar bilan yozilgan) 2 xonali sonlar bor?

Yechish: 1-raqamni 9 usul bilan (1, 2, …, 9), 2-raqamni ham 9 usul bilan (noldan boshlab o‘nliklar raqamidan boshqa raqamlar) tanlash mumkin. hammasi bo‘lib $9*9=81$ ta shunday son bor ekan.

Masala: m-elementli X to‘plam elementlaridan tuzilgan k uzunlikdagi kortejlar soni topilsin.

Yechish: k o‘rinli kortej $X \times X \times ... \times X$ dekart ko‘paytmaning elementi bo‘lib, tartiblashgan k-likni bildiradi. Masalani yechish uchun $X * X * ... * X$ dekart ko‘paytma elementlari sonini topish kerak. Bu son $n(X)=m$ bo‘lgani uchun $n(X * X * ... * X) = m^k$ ga teng.

O‘z-o‘zini tekshirish uchun savollar.

1. Yig‘indi qoidasini to‘plamlar orasidagi munosabat bilan bog‘liq holda tushuntiring.
2. Ko‘paytma qoidasi bilan yechiladigan kombinatorik masalalardan namuna keltiring.
3. 1 dan 9 gacha bo‘lgan raqamlardan nechta 5 xonali son tuzish mumkin? Masala yechimi kombinatorikaning qaysi formulasi bilan ifodalanadi?
4. $n(A*B)=n(B*A)$ ekanini isbotlang.

1.4.4.Tartiblangan to‘plam. Orinalmashtirish, o‘rinlashtirish. Guruhlash.

1. Agar chekli X to‘plam elementlari biror usul bilan nomerlab chiqilgan bo‘lsa, X to‘plam tartiblangan deyiladi.

M: $X = \{X_1, X_2, ..., X_m\}$.

Bitta to‘plamni turli usul bilan tartiblash mumkin.

Masalan: sinf o‘quvchilarini yoshiga, bo‘yiga, og‘irligiga qarab yoki alfavit bo‘yicha tartiblash mumkin.

m-elementli X to‘plamni necha xil usul bilan tartiblash mumkin?

Tartiblash-bu elementlarni nomerlash demakdir. 1-elementni m usul bilan, 2-elementni m-1 usul bilan tanlash mumkin va hokazo, oxirgi elementni tanlash uchun faqat bitta usul qoladi xolos.

Tartiblashlarning umumiy soni $m\cdot(m-1)\cdot(m-2)\cdot\ldots\cdot2\cdot1=m!$ ga teng.

Birinchi m ta natural son ko‘paytmasi matematikada «m – faktorial» deyiladi va qisqacha $m!$ ko‘rinishda yoziladi. Masalan $5!=1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5=120$

Shunday qilib, m-elementli X to‘plamni turli tartiblashtirishlar soni $m!$ ga teng ekan. Bu tartiblashtirishlar bir xil elementlardan tashkil topib, ular bir-biridan tartiblashish o‘rni bilan farq qiladi, elementlar esa qayta takrorlanmaydi. Shuning uchun ularni takrorlashsiz o‘rin almashtirishlar deyiladi va $P_m=m!$ deb belgilanadi, (P_m – fransuzcha Permutation – so‘zidan olingan bo‘lib, bizningcha o‘rin almashtirish degan ma’noni beradi).

Masalan: a,b,c uchta harfdan 3! = 6 ta o‘rin almashtirish qilish mumkin

$$abc, acb, cab, cba, bac, bca;$$

Endi umumiyroq masalani qaraymiz.

m elementli X to‘plamdan nechta tartiblangan k to‘plamlar tuzish mumkin?

Bu masalaning oldingi masaladan farqi shundaki, tartiblash k elementda tugatiladi. Ularning umumiy soni.

$$m\cdot(m-1)\cdot(m-2)\cdot\ldots\cdot(m-k+1)=m!$$

ko‘paytmaga teng.

U A_m^k bilan belgilanadi va m elementdan k tadan takrorlanmaydigan o‘rinlashtirishlar soni deb ataladi.

$$A_m^k=m*(m-1)*\ldots*(m-n+1)=\frac{m!}{(m-k)!}$$

$A_m^m=P_m=m!,\ 0!=1$ deb olinadi.

Masala: Sinfdagi 26 o‘quvchidan guruh sardori va proforgini necha xil usul bilan tanlash mumkin?

$$A_{26}^2=\frac{26!}{24!}=25\cdot26=650 \text{ (usul bilan)}$$

Ta’rif: m elementli to‘plam elementlaridan tuzilgan k uzunlikdagi kortejlar m elementdan k tadan takrorli o‘rinlatishlar deyiladi va u $\overline{A}_m^k=m^k$ deb yoziladi. ($\overline{A}_m^k$-fransuzcha arrangrment o‘rinlatish so‘zini bosh harfi)

Kombinatorika masalalaridan yana birini ko‘raylik.

m elementli X to‘plamning nechta k elementli to‘plam ostilari bor?

Bunday to‘plam ostilariga m elementdan k tadan takrorlanmaydigan guruhlashlar soni deyiladi va u C_m^k - ko‘rinishda belgilanadi (C_m^k – fransuzcha combinasion so‘zidan olingan bo‘lib, bizningcha guruhlash ma’nosini beradi).

Buning formulasini keltirib chiqarishda C_m^k ni m va k lar orqali ifodalaymiz. Aytaylik m elementli X to‘plamning k ta elementli B to‘plam ostilari bo‘lsin.

B to‘plam ostilari k ta elementlarni saqlagani uchun uni $k!$ usulda tartiblashtirish mumkin.

Bunda X to‘plam elementlaridan tuzilgan k elementli tartiblangan to‘plamlarning soni X to‘plamdagi tartiblanmagan k-elementli to‘plam ostilar sonidan k! marta ko‘p.

Masalan: 4 elementli $A=\{a,b,c,d\}$ to‘plamning nechta 3 elementli qism to‘plami bor?

$$\{a,b,c\},\{a,b,d\},\ \{a,c,d\},\ \{b,c,d\}.$$

4 ta shunday qism to‘plam bor ekan.

Bu qism to‘plamlarni tartiblaganda 6 barobar ko‘proq 3 o‘nli kortejlarga ega bo‘lamiz.

Masalan: $\{a,b,c\}$ ni tartiblasak:

$$(a,b,c),(a,c,b),\ (b,a,c),\ (b,c,a),\ \ (c,a,b),\ (c,b,a)$$

ega bo‘lamiz.

Tartibli k elementli to‘plamlarining soni A_m^k, k elementli to‘plam ostilar sonini C_m^k bilan belgiladik. Bundan

$$A_m^k = k!\cdot C_m^{k;};\ \ A_m^k = \frac{m!}{(m-k)!}$$

bo‘lishidan

$$C_m^k = \frac{m!}{(m-k)!k!}$$

formulaga ega bo‘miz.

Misol: 20 kishilik guruhdan, 4 kishilik nomzodni necha usul bilan saylash mumkin.

$$C_{20}^4 = \frac{20!}{16!\cdot 4!} = \frac{17\cdot 18\cdot 19\cdot 20}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} = 4845 \text{ ta usul}$$

$C_m^{\ k}$ ko‘rinishdagi sonlarning quyidagi xossalari bor (bular $0\le k\le m$ bo‘lgan hol uchun o‘rinli)

1^0. $C_m^{\ k} = C_m^{\ m-k}$

2^0. $C_m^{\ k} = C_{m-1}^{\ k-1} + C_{m-1}^{\ k}$

3^0. $C_m^{\ 0} = C_m^{\ m} = 1$

$C_m^{\ k}$ ko‘rinishdagi sonlarni Paskal uchburchagi ko‘rinishida joylashtirish mumkin:

$$C_0^0$$
$$C_1^0 \quad C_1^1$$
$$C_2^0 \quad C_2^1 \quad C_2^2$$
$$C_3^0 \quad C_3^1 \quad C_3^2 \quad C_3^3$$
$$C_4^0 \quad C_4^1 \quad C_4^2 \quad C_4^3 \quad C_4^4$$

Har bir son o‘zining tepasidagi 2 ta son yig‘indisidan iborat.

Har bir qatordagi sonlar $(a+b)^m$ ko‘phadning yoyilmasidagi binomial koeffitsientlarga teng. Ularning yig‘indisi m elementli X to‘plamning barcha qism to‘plamlari sonini beradi.

Masalan: 1+2+1=4. Demak, 2 elementli to‘plamning hammasi bo‘lib 4 ta qism to‘plami bor ekan. Ular 1 ta bo‘sh 2 ta 1 elementli va 1 ta 2 elementli, ya’ni X to‘plamning o‘zidan iborat bo‘lgan qism to‘plamlardir.

Yana bir masalani ko‘raylik, ya’ni chekli m elementli X to‘plamning barcha qism to‘plamlari sonini topish masalasini ko‘raylik. Uni hal qilish uchun istalgan tarzda X to‘plamni tartiblaymiz. So‘ng har bir to‘plam ostini m o‘rinli kortej sifatida shifrlaymiz: to‘plam ostiga kirgan element o‘rniga 1, kirmagan element o‘rniga 0 yozamiz. Shunda qism to‘plamlar soni 2 ta {0;1} elementdan tuzilgan barcha m o‘rinli kortejlar soniga teng bo‘ladi.

$\overline{A}_2^{\,m} = 2^m$. Masalan: 2 elementli to‘plamning to‘plam ostilari soni $2^2 = 4$ ga, 3 elementli to‘plamning to‘plam ostilari soni $2^3 = 8$ ga teng. Shu bilan birga bu son Paskal uchburchagining 4 qatoridagi sonlar yig‘indisiga ham teng, ya’ni:

$$C_3^{\,0} + C_3^{\,1} + C_3^{\,2} + C_3^{\,3} = 1+3+3+1 = 8$$

Umuman olganda:

$$C_m^{\,0} + C_m^{\,1} + \ldots + C_m^{\,m-1} + C_m^{\,m} = 2^m.$$

O‘z-o‘zini tekshirish uchun savollar:

1. m elementli X to‘plamni necha usul bilan tartiblash mumkin?
2. m elementli X to‘plamning nechta k elementli tartiblangan qism to‘plami bor?
3. m elementli X to‘plamdan uzunligi k ga teng nechta kortej tuzish mumkin?
4. m elementli X to‘plamning barcha qism to‘plamlari nechta?
5. Paskal uchburchagining xususiyatini ayting.

I.5.Matematik tushuncha.

Bizni o‘rab olgan dunyo turli xil ob’ektlardan tashkil topgan. Bu ob’ektlarni o‘rganishda biz ularning ba’zi bir xossalari bilan qiziqamiz, masalan, ularni shakli, rangi, hidi, massasi va hokazo. Ayrim hollarda ular sonlar bilan ham ifodalanadi(masalan, 60 kg). Biz ob’ektlarni xossalari to‘g‘risida gapirib ular to‘g‘risida hukm chiqaramiz. Masalan: «Olma daraxtining bo‘yi 125 sm», «Sinf doskasi qizil» - bu chiqargan hukmlarimiz rost yoki yolg‘on bo‘lishi mumkin.

Ayrim hukmlarimiz bitta ob’ekt uchun emas, balki ob’ektlar sinfi uchun ham to‘g‘ri bo‘ladi. Ob’ektlarni sinflarga birlashishi ularning yaqinligini va ularning xossalarini bir xilligini ko‘rsatadi.

Ob’ektlarni sinflarga birlashishi ayrim nomlar bilan ataladi, masalan, «o‘simliklar», «sutemizuvchilar» va hokazo.

Kishilik jamiyati rivojlanishi bilan insonning fikrlashida dastlab kichik ob’ektlarni qamrovchi tushunchalar vujudga kelgan.

Masalan «daraxtlar» tushunchasiga dastlab- daraxtlarning ayrim turlarini ifodalovchi «qayrag‘och», «terak», «tol» kabi so‘zlardan kelingan.

Dunyoni bilish jarayonida bu tushunchalar orasidagi o‘zaro bog‘lanishni, ob’ektlarni xossalarini o‘rganish tushunchalarni yanada kengaytirishga olib kelgan.

Fan rivojlanishi natijasida abstrakt tushunchalar yuzaga kela boshladi. Bunday tushunchalar insoniyat to‘plagan katta tajribani umumlashtirish natijasida yuzaga keladi va moddiy dunyoning tub mohiyatini aks ettiradi, lekin real ob’ektlarning ko‘pgina xossalaridan ko‘z yumgan holda, ularni ideallashtirish natijasida hosil bo‘ladi.

Masalan, kubning xossalarini o‘rganishda biz uni sirtini juda silliq, qirralari esa bir-biriga teng bir xil deb qaraymiz, aslida esa kubni haqiqiy jism sifatida qarasak, u ideal silliq sirtga va qirralari ham bir xil uzunlikka ega emas.

Tushuncha o‘zi nima?

Tushuncha – bu predmetlar va hodisalarni ba’zi bir muhim alomatlariga ko‘ra farqlash yoki umumlashtirish natijasidir.

Alomatlar esa, predmet yoki hodisalarning bir-biriga o‘xshashligi yoki farqlanishini bildiruvchi xossalardir.

Muhim xossa deb, faqat shu ob’ektga tegishli va bu xossasiz ob’ekt mavjud bo‘laolmaydigan xossalarga aytiladi.Ob’ektning mavjudligiga ta’sir qilmaydigan xossalar muhim bo‘lmagan deb hisoblanadi.

Agar biror ob’ektning barcha muhim xossalari to‘plangan bo‘lsa, bu ob’ekt haqida tushuncha bor deyiladi. Tushuncha nomlanadi, mazmun va hajmga ega bo‘ladi.

Ob’ektning barcha muhim xossalari to‘plami tushunchaning mazmunini tashkil qiladi.

Bir xil muhim xossalarga ega ob’ektlar to‘plami tushuncha hajmini tashkil etadi.

Demak, tushuncha hajmi bitta tushuncha bilan nomlanishi mumkin bo‘lgan ob’ektlar to‘plami ham ekan.

Tushuncha hajmi va mazmuni orasida teskari bog‘lanish mavjud. Tushunchaning hajmi qancha «katta» bo‘lsa, mazmuni shuncha «kichik» va aksincha bo‘ladi.

Agar biror tushuncha hajmi ikkinchi tushuncha hajmini qismi bo‘lsa, u holda ikkinchi tushuncha birinchi tushunchaga nisbatan umumiy, birinchi tushuncha ikkinchi tushunchaga nisbatan xususiy deyiladi.

Masalan: «to‘rtburchak» parallellogramm tushunchasi uchun umumiy, parallellogramm tushunchasi esa «to‘rtburchak» tushunchasining xususiy holidir.

Ba’zan ikki xil berilgan ta’rif hajmi bir xil bo‘lgan tushunchani berishi mumkin.

Masalan: teng tomonli uchburchak va tengburchakli uchburchaklarga berilgan ta’riflar, birinchisida teng tomonlar to‘g‘risida so‘z yuritilsa, ikkinchisida teng burchaklar to‘g‘risida so‘z boradi. Bularda tushuncha hajmi bir xil, ammo tushunchalar mazmuni har xil.

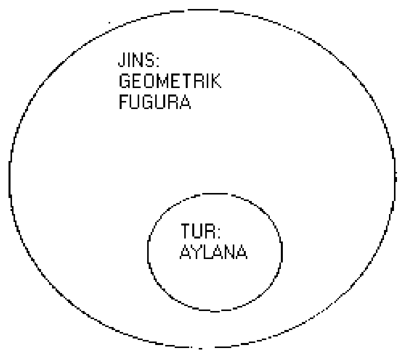
Har bir tushuncha uchun bir qancha xossalar alomatlar va boshqa tushunchalarga bog‘liq munosabatlar mavjud. Bular shu tushunchaning mazmunini tashkil qiladi.

Tushunchalarni o‘rganishda ularni umumiyroq bo‘lgan tushuncha orqali tushuntirish yoki boshqacha aytganda ta’riflashga harakat qilinadi. Shu umumiyroq tushuncha ham ilgariroq tushuntirilgan yoki ta’riflangan bo‘lishi kerak. Lekin har bir uchraydigan tushunchani ilgari ma’lum bo‘lgan tushunchani topib ta’rif beraverish murakkab va mumkin bo‘lmagan jarayondir. Shuning uchun ba’zi tushunchalar ta’riflanmaydi va boshlang‘ich tushuncha deb qabul qilinadi.

Tushunchaga ta’rif berishning bir necha usullari bor:

Oshkor ta’rif: tushunchada unga nisbatan umumiyroq tushunchani ko‘rsatib, shu umumiy tushuncha bilan nomlangan ob’ektlardan qanday xossa bilan ajralib turishini aytish orqali;

Bunday ta’rif odatda jins va tur orqali ta’riflash deyiladi. (19- chizma)



19-chizma

Oshkormas ta’rif: bunga aksiomatik ta’riflash kiradi va bunday ta’rifda ta’rif berilayotgan tushuncha ob’ekti aniq ko‘rsatilmaydi

Tushuncha ta’rifi quyidagi talablarni qanoatlantirishi kerak:

1) ta’riflanayotgan tushunchani bir qiymatli aniqlashga imkon berishi;
2) avval ma’lum bo‘lgan tushunchalarga asoslanishi;
3) tushunchaning o‘zi yoki shu tushuncha bilan ta’riflangan tushuncha bilan ta’riflashga yo‘l qo‘ymasligi;
4) ortiqcha xossalarni(qolganlaridan keltirib chiqarish mumkin bo‘lgan) ko‘rsatmasligi kerak.

Tushunchalar va ob’ektlar xossalari orasidagi munosabatlarni qaraylik. Agar biror a tushuncha hajmiga kiruvchi barcha ob’ektlar biror α xossaga ega bo‘lsa, α xossa shu tushunchaning zaruriy belgisi, muhim xossasi bo‘ladi. Masalan; kvadratning diagonallarini teng bo‘lish xossasi, uning zaruriy belgisi, muhim xossasi hisoblanadi. Berilgan tushunchaning muhim xossalari ichida uning ajralib turuvchi xarakteristik xossasi ham mavjud.

Bu xossa ob’ektlarning ma’lum sinfiga xos bo‘lib, boshqa ob’ektlarga xos emas. Masalan, dioganallar uzunliklarini tenglik xossasi parallellogramlar sinfidagi to‘rtburchaklar uchun xarakteristik xossa sanaladi.

To‘rtburchaklar sinfida bu xossa xarakteristik xossa emas, chunki dioganallari teng bo‘lgan to‘rtburchaklar to‘g‘ri to‘rtburchaklar emas.

Masalan, dioganallari teng bo‘lgan to‘rtburchak teng yonli trapetsiya ham bo‘lishi mumkin.

Agar berilgan sinf ob'ektlarining ba'zilari α xossaga ega bo'lib, bu

sinfga kirmaydigan ob'ektlarning hech bittasi bu xossaga ega bo'lmasa, u holda α - xossa tushuncha uchun yetarlik belgi hisoblanadi.

Masalan, to'rtburchak parallellogramm bo'lishi uchun uning dioganallari uzunliklarining teng bo'lishi yetarlik belgi hisoblanadi.

Tushuncha va xossalar orasida turli xil bog'lanishlar mavjud. Shuningdek xossalarning o'zlarining o'rtasida ham turli xil bog'lanishlar bor. Aytaylik, ikkita α va β xossalar berilgan bo'lsin.

Quyidagi hollar bo'lishi mumkin.

1) ob'ektlar ikkita α va β xossalarga ega bo'lishi, ob'ektlar faqat α xossaga ega bo'lishi, ob'ektlar faqat β xossaga ega bo'lishi, ob'ektlar ikkala α va β xossalarga ega bo'lmasligi mumkin. Bu xossalarga bog'lanmagan xossalar deyiladi.

Masalan: natural sonlarni 3 ga bo'linishi xossasi 5 ga bo'linishi xossasiga bog'lanmagan, natural sonlar bor 3 ga ham 5 ga ham bo'linadi, 3 ga bo'linadi, ammo 5 ga bo'linmaydi, 5 ga bo'linadi, ammo 3 ga bo'linmaydi, 3 ga ham 5 ga ham bo'linmaydi.

2) Ixtiyoriy ob'ekt α xossaga ega bo'lsa, β xossaga ham ega bo'ladi. Bu holda β xossa α xossaning natijasi deyiladi. Masalan, natural sonlarni 3 ga bo'linishi 9 ga bo'linishi xossasini natijasi desa bo'ladi. Shuningdek α xossa β xossani natijasi sifatida ham bo'lishi mumkin.

3) Ixtiyoriy α xossaga ega bo'lgan ob'ekt β xossaga ham ega, β xossaga ega bo'lgan ob'ekt α xossaga ham ega bu holda α va β xossalar teng kuchli deyiladi. Masalan, kvadratning tomonlari teng xossasi, uning diogannallari o'zaro perpendikulyar va teng degan xossasiga teng kuchli.

4) α xossaga ega bo'lgan bitta ob'ekt ham β xossaga ega emas, bu holda α va β xossalari birgalikda emas deyiladi.

5) Ixtiyoriy ob'ekt α va β xossalardan faqat bittasiga ega. Bu holda α va β xossalar qarama-qarshi deyiladi. Masalan: Natural sonlarni juftlik va toqlik xossalari qarama-qarshi xossalar. Haqiqatan ham istalgan natural son toq yoki juft bo'ladi.

O'z-o'zini tekshirish uchun savollar:

1. Tushunchaning hajmi va mazmuni orasida qanday bog'liqlik bor?
2. Ta'riflanadigan va ta'riflanmaydigan tushunchalarning qanday farqi bor?
3. Tushunchani ta'riflash usullarini ayting va misol keltiring.
4. Tushunchani ta'riflashga qanday talablar qo'yiladi?
5. Xossalar orasidagi bog'lanishlarga misollar keltiring.

I.6.Mulohazalar va ular ustida mantiqiy amallar.

I.6.1.Mulohazalar (jumla)

Maktabda o‘quvchilar taqqoslash, ob’ektlarni klassifikatsiyalash, faktlarni analiz qilish, ayrim sodda fikrlarni isbotlash, tenglama, tengsizliklarni yechish kabilar haqidagi jumlalar bilan ish ko‘radi. Har qanday matematik nazariya esa u yoki bu matematik jumlani chin yoki yolg‘onligini tekshirish bilan ish ko‘radi.

Ta’rif. Chin yoki yolg‘onligi haqida fikr yuritish mumkin bo‘lgan darak gaplarga mulohaza (jumla) deyiladi. So‘roq yoki his-hayajon gaplar mulohaza bo‘la olmaydi. Noma’lum qatnashgan gaplar ham mulohazaga kirmaydi. Mulohazalar bu matematik mantiq fanini boshlang‘ich tushunchasi hisoblanib u quyidagicha quriladi:

1) ob’ektlar to‘plami beriladi:
2) ob’ektlarning ba’zi bir xossalari va ular orasidagi munosabatlar bayon qilinadi:

Mulohazalar nazariyasining boshlang‘ich ob’ektlari sodda mulohazalardan tashkil topadi va ular alifboning kichik harflari $a, b, s, \ldots$lar bilan belgilanadi. Har bir sodda mulohaza chin yoki yolg‘on bo‘lishi mumkin. Chin mulohaza qiymati 1, yolg‘on mulohaza qiymati 0 bilan belgilanadi.

$a -$ "$4 > 3$" - chin mulohaza

$b -$ "$7 + 5 = 12$" - chin mulohaza

$s -$ "5-juft son" - yolg‘on mulohaza

$d -$ "7- toq son" - chin mulohaza

bu mulohazalarda a, b, d lar chin, s – yolg‘on. Matematikada har bir teorema mulohaza hisoblanadi. Teoremani isbotlash uchun oldin rostligi isbotlangan teoremalar, aksiomalar va boshlang‘ich tushunchalardan foydalaniladi. Bizga ma’lumki, sodda mulohazalardan bog‘lovchi so‘zlar yordamida murakkab mulohazalar hosil qilinadi. Bular «emas», «va» , «yoki», «… kelib chiqadi», «agar bo‘lsa, … u holda», «zarur va yetarli» kabi bog‘lovchi so‘zlar bo‘lib, bularni har bittasi bitta mantiqiy amalga mos keladi.

Endi mulohazalar ustida mantiqiy amallarni qaraymiz:

1) **Mulohaza inkori**. $a -$ biror mulohaza bo‘lsa, u mulohazani yolg‘on deb boshqa mulohazaga ega bo‘lamiz. Bu mulohaza a mulohazani inkori deyiladi va u $\bar{a}$ bilan belgilanadi. Chin mulohazani inkori yolg‘on, yolg‘on mulohazani inkori chin bo‘ladi.

Masalan: «$3^2 = 6$» -$\bar{b}$ -yolg‘on mulohazani «$3^2 \neq 6$» - b chin mulohaza bo‘ladi. Chin mulohazani – ch, yolg‘on mulohaza – yo bilan belgilaymiz. Bulardan tubandagi jadvalni tuzamiz:

a	$\bar{a}$	a
ch	yo	ch
yo	ch	yo

2) **Mulohazalar kon’yunksiyasi.**

Aytaylik a va b elementar mulohazalar bo‘lsin. a va b mulohazalarni «va» bog‘lovchi yordamida biriktirib yangi mulohaza hosil qilamiz va unga a va b mulohazalarni kon’yunksiyasi deyiladi, u $a \wedge b$ ko‘rinishida belgilanib «a va

b» deb o‘qiladi. a va b kon’yunksiyasi a va b larning ikkalasi chin bo‘lganda chin bitta yoki ikkalasi yolg‘on bo‘lganda yolg‘on. Chinlik jadvali quyidagicha:

a	b	$a \wedge b$
ch	ch	ch
ch	yo	yo
yo	ch	yo
yo	yo	yo

Masalan: «7-4=3» va «4-juft son» kon’yunksiyasi chin, «3<8», «8<11» mulohazalar «3<8», «8<11» kon’yunksiyalar chin ularni birlashtirib «3<8<11» deb yozish mumkin. Demak, qo‘sh tengsizlik ham mulohazalar kon’yunksiyasini ifodalar ekan. Mulohazalar kon’yunktsiyasi $a \wedge b = b \wedge a$ kommutativlik, $(a \wedge b) \wedge c = a \wedge (b \wedge c)$ - assotsiativlik xossalariga ega a mulohazani inkori $\bar{a}$ bilan kon’yunksiyasini qaraylik.

a	$\bar{a}$	$a \wedge \bar{a}$
ch	yo	yo
yo	ch	yo

Bunda $a \wedge \bar{a}$ - aynan yolg‘on deyiladi. $a \wedge \bar{a}$ - yo deb yoziladi.

3) **Mulohazalar diz’yunksiyasi.**

Ikkita mulohazani yoki bog‘lovchisi bilan birlashtirib yangi mulohaza hosil qilamiz. Bu mulohazaga mulohazalar diz’yunksiyasi deyiladi va $a \vee b$ ko‘rinishida belgilanib «a yoki b» deb o‘qiladi. Mulohazalar diz’yunksiyasi uni hosil qiluvchi ikkala mulohaza yolg‘on bo‘lgan paytda yolg‘on, qolgan hollarning barchasida chin, uning chinlik jadvali quyidagicha:

a	b	$a \vee b$
ch	ch	ch
ch	yo	ch
yo	ch	ch
yo	yo	yo

Ikkita elementar mulohazadan diz’yunksiya tuzamiz.

1-misol. «12>8», «12=8» mulohazalari berilgan «12>8» yoki «12=8» - bu mulohaza chin, chunki unga kiruvchi «$12 \geq 8$» kabi yoziladi. Bundan ko‘rinadiki, qat’iymas sonli tengsizlik, qat’iy tengsizlik va tenglikni diz’yunksiyasini tashkil qilar ekan.

2-misol. $2 \leq 2$, 2=3 mulohazalarini ikkalasi ham yolg‘on.

Ixtiyoriy a, b, c mulohazalar uchun quyidagilar o‘rinli:

$a \vee b = b \vee a$ (kommutativlik xossasi)

$(a \vee b) \vee c = a \vee (b \vee a)$ (assotsiativlik xossasi).

Odatda assotsiativlik xossasini yozishda qavslar tashlab yoziladi. Chinlik jadvali yordamida quyidagilarga ishonch hosil qilish mumkin.

$$(a \vee b) \wedge c = (a \wedge c) \vee (b \wedge c)$$

$$(a \wedge b) \vee c = (a \vee c) \wedge (b \vee c)$$

Birinchisiga diz'yunksiyaga nisbatan kon'yunksiyaning distributivligi deb aytiladi.

a mulohaza va uni inkori diz'yunksiyani tuzamiz.

a	$\bar{a}$	$a \vee \bar{a}$
ch	yo	ch
yo	ch	ch

Bu holda $a \vee \bar{a}$ aynan chin deyiladi va $a \vee \bar{a}$ - ch deb yoziladi. Shunday misolni qaraylik "$x^2 + 3 = 0$" tenglama haqiqiy idlizga egami yoki ega emas» - mulohazani a bilan belgilasak, «haqiqiy ildizga ega emas» - mulohazasi $\bar{a}$ bo'ladi.

Ikkalasini diz'yunksiyasi ixtiyoriy a da $a \vee \bar{a}$ - ch deb yoziladi. Chinlik jadvali yordamida kon'yunktsiya, diz'yunksiya va mulohaza inkori orasidagi quyidagi munosabatlarni o'rnatish mumkin.

a) $\overline{a \wedge b} = \bar{a} \vee \bar{b}$, b) $\overline{a \vee b} = \bar{a} \wedge \bar{b}$

Bu munosabatlar De Morgan qonunlari deyiladi.

4. Mulohazalar implikatsiyasi.

Agar a bo'lsa, u holda b mulohazasi bo'ladi mulohazani mulohazalar implikatsiyasi deyiladi. $a \Rightarrow b$ ko'rinishida belgilanadi. $a \Rightarrow b$ implikatsiyasiga kiruvchi a mulohaza implikatsiya sharti b-mulohaza esa implikatsiya natijasi deyiladi. $a \Rightarrow b$ implikatsiya faqat a mulohaza chin b mulohaza yolg'on holatdagina yolg'on bo'lib, qolgan barcha hollarda chin qiymatga ega. Chinlik jadvali quyidagicha:

a	b	$a \Rightarrow b$
ch	ch	ch
ch	yo	yo
yo	ch	ch
yo	yo	ch

Implikatsiya amalini mulohaza inkori va diz'yunksiya amali orqali ifodalash mumkin. $(a \Rightarrow b) = a \vee b$. Buni chinlik jadvali yordamida isbotlash mumkin.

a	b	$\bar{a}$	$a \Rightarrow b$	$\bar{a} \vee b$
ch	ch	yo	ch	ch
ch	yo	yo	yo	yo
yo	ch	ch	ch	ch
yo	yo	ch	ch	ch

$a \Rightarrow b$ implikatsiya berilgan bo'lsa, mulohazalar o'rnini almashtirib $b \Rightarrow a$ yangi implikatsiyaga ega bo'lamiz. Bu yozilgan implikatsiyaga teskari implikatsiya deyiladi. Masalan: «Agar 138 sonini raqamlar yig'indisi 3 ga karrali bo'lsa, u holda 138 soni 3 ga karrali». Teskari implikatsiya : «Agar 138 soni 3 ga karrali bo'lsa, u holda uning raqamlarini yig'indisi 3 ga karrali». Bu chin implikatsiya, ammo hamma vaqt ham teskari implikatsiya chin bo'lavermaydi. Masalan: «Agar 5>2 bo'lsa, u holda 5 juft son» yolg'on, teskarisi: «agar 5 juft son bo'lsa, u holda 5>2 bo'ladi», bu chin, chunki implikatsiya sharti yolg'on. a va b mulohazalarni ularni inkoriga almashtirsak $\bar{a} \Rightarrow \bar{b}$ implikatsiyaga ega bo‘lamiz. Bu implikatsiya $a \Rightarrow b$ implikatsiyaga qarama-qarshi deyiladi.

Chinlik jadvali yordamida $a \Rightarrow b$ va $\bar{b} \Rightarrow \bar{a}$ lar teng kuchli ekanini ko‘rish mumkin.Masalan: «Agar o‘nli sanoq sistemasida 130 sonini oxirgi raqami 0 bilan tugasa, u holda 130 soni 5 ga bo‘linadi». Unga teng kuchli implikatsiya «Agar 130 soni 5 ga bo‘linmasa, u holda uning o‘nli sanoq sistemasida yozilishida oxirgi raqami 0 bilan tugamaydi.

Bu holda ikkalasi ham chin. $b \Rightarrow a$ va $\bar{a} \Rightarrow \bar{b}$ implikatsiyalarni ham teng kuchli ekanini kuzatish mumkin.

5**) Mulohazalar ekvivalensiyasi**. Ikkita a va b mulohazalarning ikkalasi ham chin yoki ikkalasi ham yolg‘on bo‘lganda chin, qolgan hollarda yolg‘on bo‘ladigan yangi mulohazaga mulohazalarning ekvivalensiyasi deyiladi. Ekvivalensiya $a \Leftrightarrow b$ ko‘rinishida belgilanadi. Chinlik jadvali tubandagicha:

a	b	$a \Leftrightarrow b$
ch	ch	ch
yo	ch	yo
ch	yo	yo
yo	yo	ch

Masalan: «129 soni 3 ga bo‘linadi, faqat uning raqamlari yig‘indisi 3 ga bo‘linsa.»

a mulohaza – «129 soni 3 ga bo‘linadi».

b mulohaza – «129 sonini raqamlar yig‘indisi 3 ga bo‘linadi».

Ikki mulohaza ham chin bo‘lganligi uchun ekvivalensiya ham chin. Ikkala mulohaza yolg‘on bo‘lsa, u holda ham ekvivalensiya chin bo‘ladi. Masalan: «127 soni 3 ga bo‘linadi, faqat 127 sonining raqamlar yig‘indisi 3 ga bo‘linsa» - bu holda a va b lar ikkalasi ham yolg‘on.

O‘z-o‘zini tekshirish uchun savollar:

1. Mulohaza nima?
2. Mulohaza inkori nima?
3. Mulohaza kon’yunksiyasi va diz’yunksiyasi deb nimaga aytiladi?
4. Mulohazalar implikatsiyasi va ekvivalentsiyasi nima va unga misollar keltiring.
5. Mulohazalar ustidagi amallarni xossalarini isbotlab bering.

1.7.Predikatlar va kvantorlar.

Predikatlar ular ustida amallar.

Matematikada bir yoki bir necha o‘zgaruvchini o‘z ichiga oluvchi jumlalar ko‘p uchraydi. Masalan: $x > 7$, $x + y = 11$. Bu jumlalar o‘zgaruvchining qiymatlariga qarab chin yoki yolg‘on bo‘lishi mumkin, boshqacha aytganda mulohazaga aylanishi mumkin.

1-ta'rif. Tarkibida erkli o'zgaruvchilar qatnashib, bu o'zgaruvchilarning qabul qilishi mumkin bo'lgan qiymatlarida mulohazaga aylanadigan darak gapga predikat deyiladi va u $A(x)$, $B(x)$, $Q(x)$, $R(x)$, $K(x)$,... ko'rinishda belgilanadi.

Predikat tarkibiga kirgan o'zgaruvchi qabul qilishi mumkin bo'lgan barcha qiymatlar to'plami predikatning aniqlanish sohasi deyiladi.

O'zgaruvchi o'rniga qo'yganda, predikatni chin(rost) mulohazaga aylantiruvchi qiymatlari predikatning chinlik(rostlik) to'plami deyiladi.

Predikatlar tarkibidagi o'zgaruvchilar soniga qarab bir, ikki va hokazo o'rinli predikatlar deyiladi.

$R(x)$ – bir *o'rinli predikat bo'lib, x ob'ektning biror xossaga ega bo'lishini bildiradi.*

Misol. $R(x)$: «x- toq son» ko'rinishidagi predikat berilgan bo'lsin. $R(x)$ predikat bir o'rinli bo'lib, uning aniqlanish sohasi natural sonlar to'plami N dan, qiymatlar sohasi mulohazalar to'plamidan iborat bo'lib, har bir mulohazaning qiymati esa ikki elementli {0;1} to'plamdan iborat. Bu predikat qiymatlarining jadval ko'rinishi quyidagicha:

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$R(x)$	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1

Jadvaldan ko'rinadiki: 1) predikatlar mulohaza emas, lekin x ning biror to'plamga tegishli aniq qiymatlarida, u mulohaza bo'ladi.

2) A- biror ob'ektlar to'plami bo'lsa, bu to'plamdagi predikat-xossa deganda biz shu A to'plamda chin yoki yolg'on qiymatni qabul qiluvchi bir predmetli funktsiyani tushunamiz.

2-ta'rif: A to'plamning $R(x)$ predikatni chin mulohazaga aylantiruvchi B qism to'plamiga $R(x)$ predikatning chinlik sohasi deyiladi.

3-ta'rif: Agar $R(x)$ predikat A to'plamning barcha elementlarida chin(yolg'on) qiymatni qabul qilsa, $R(x)$ predikat A to'plamda aynan chin (yolg'on) deyiladi.

Misollar: 1) $R(x)$: «x-musbat son» - predikat N to'plamda aynan chin.

2) $R(x)$: «x – manfiy son» - predikat N to'plamda aynan yolg'on.

3) $E(x)$: «x – toq son» - predikat N to'plamda bajariluvchi predikat.

Bir, ikki, uch o'rinli predikatlar mos ravishda unar, binar, ternar predikatlar deyiladi.

Istalgan tenglama yoki tengsizlik predikat bo'ladi.

Predikatni mulohazaga aylantirishning yana bir usuli kvantorlardan foydalanishdir.

Quyidagi misolni qaraylik.

10,11,12,13,14,15,16,17,18,19,20 sonlari haqida quyidagilarni aytish mumkin:

a) berilgan barcha sonlar ikki xonali sonlardir.

b) berilgan sonlardan ba'zilari toq sonlardir.

Bu jumlalarga nisbatan ularning chin yoki yolg‘onligi to‘g‘risida fikr yuritish mumkinligidan ular mulohaza bo‘ladi.

Agar biz ulardan «barcha», «ba’zilari» so‘zlarini olib tashlasak, jumlalarni chinmi yoki yolg‘onmi savoliga javob berib bo‘lmaydi. Demak «barcha», «ba’zi» so‘zlarni qo‘shish bilan mulohaza hosil qilinadi.

Ta’rif: «Barcha» va «ba’zi» so‘zlari kvantorlar deb aytiladi. «Kvantor» so‘zi lotincha bo‘lib, «qancha» ma’nosini anglatadi, ya’ni kvantor u yoki bu mulohazada qancha (barcha yoki ba’zi) ob’ekt haqida gap borayotganini bildiradi. Umumiylik va mavjudlik kvantorlari bir-biridan farq qilinadi.

«Ixtiyoriy». «har qanday», «har bir», «barcha(hamma)» so‘zlari umumiylik kvantoridir. Umumiylik kvantori «$\forall$» belgisi bilan belgilanadi. U belgi inglizcha «All» so‘zining bosh harfidan olingan bo‘lib, bizningcha «hamma» ma’nosini beradi.

«Mavjud», «ba’zi (ayrim)», «topiladi», «kamida bitta» so‘zlari mavjudlik kvantoridir. Mavjudlik kvantori «$\exists$» belgisi bilan belgilanadi. U belgi inglizcha «Exist» so‘zining bosh harfidan olingan bo‘lib, bizningcha «mavjud», «bor», «topiladi» ma’nosini beradi.

Biror A to‘plamning «barcha x elementlari uchun» deganda mulohaza qisqacha $\forall x \in A$, «ba’zi bir x elementlar uchun» degan mulohaza esa $\exists x \in A$ orqali belgilanib, ular mos ravishda umumiylik va mavjudlik kvantorlari deb yuritiladi. Kvantorlar qatnashgan predikatlar quyidagicha yoziladi:

$$(\forall x \in A)P(x)$$

(qisqacha: $(\forall x \in A)P(x)$) belgi «A to‘plamning barcha x elementlari uchun $P(x)$ predikat chin,

$$(\exists x \in A)P(x)$$

(qisqacha: $(\exists x \in A)P(x)$) belgi «A to‘plamning shunday x elementi mavjudki, bu element uchun $P(x)$ predikat chin» deb o‘qiladi.

Masalan: $P(x)$: «x soni 3 ga karrali». $x \in \mathrm{N}$ bo‘lsin

«Ixtiyoriy x soni 3 ga karrali» - yolg‘on mulohaza

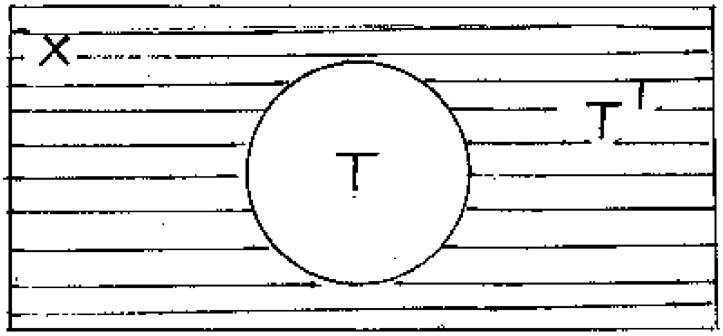
« 3 ga karrali x sonlar mavjud» - chin mulohaza

Mulohazalar ustida amallar bajarilganidek predikatlar ustida ham amallar bajariladi:

1) Predikat inkori.

Aytaylik X to‘plamda $A(x)$ predikat berilgan bo‘lsin. $A(x)$ chin bo‘lganda, yolg‘on, yolg‘on bo‘lganda, chin bo‘ladigan $\overline{A(X)}$ predikat $A(x)$ predikatning inkori deyiladi.

$A(x)$ predikatning chinlik to‘plami T bo‘lsa, $\overline{A(X)}$ ning chinlik to‘plami, T', ya’ni T to‘plamni to‘ldiruvchisi bo‘ladi (20- chizma).



20-chizma

Masalan: $A(x)$ «x soni 5 ga bo‘linadi»

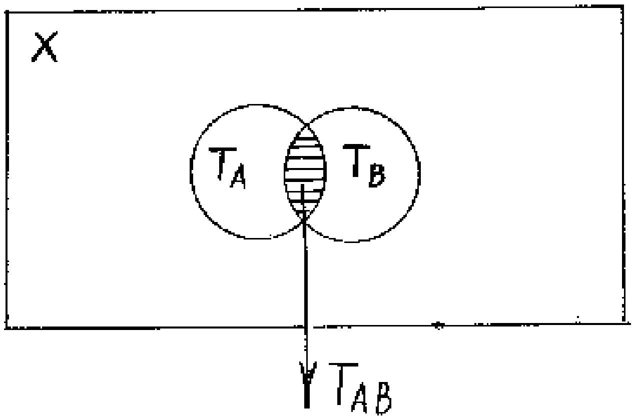
$\overline{A(x)}$ «x soni 5 ga bo‘linmaydi»

2. Predikatlar kon’yunksiyasi.

X to‘plamda $A(x)$ va $B(x)$ predikatlar berilgan bo‘lsin. Bu holda $A(x) \wedge B(x)$ predikat $A(x)$ va $B(x)$ predikatlar kon’yunksiyasi bo‘ladi.

$A(x) \wedge B(x)$ predikat $A(x)$ va $B(x)$ predikatlar chin bo‘lganda chin bo‘ladi.

$T_A - A(x)$ predikatning chinlik to‘plami, $T_B - B(x)$ predikatning chinlik to‘plami bo‘lsa, u holda $A(x) \wedge B(x)$ predikatning chinlik to‘plami $T_{A \wedge B} = T_A \bigcap T_B$ bo‘ladi (21- chizma).



21-chizma

Masalan: $X = \{6;10;15;20;24\}$ to‘plamda $A(x)$: «x juft son», $B(x)$: «x soni 3 ga karrali» predikatlari berilgan bo‘lsin.

U holda $A(x)$ va $B(x)$ predikatlar kon’yunksiyasi predikati $A(x) \wedge B(x)$ «x soni juft va 3 ga karrali». $A(x)$ predikatning chinlik sohasi {6; 10; 20; 24}

$B(x)$ predikatning chinlik sohasi {6; 15; 24} bo‘ladi.

$A(x) \wedge B(x)$ predikatning chinlik sohasi {6; 24} bo‘ladi.

{6; 24} – to‘plam esa $A(x)$ va $B(x)$ predikatlar chinlik kesishmasidan iborat bo‘ladi.

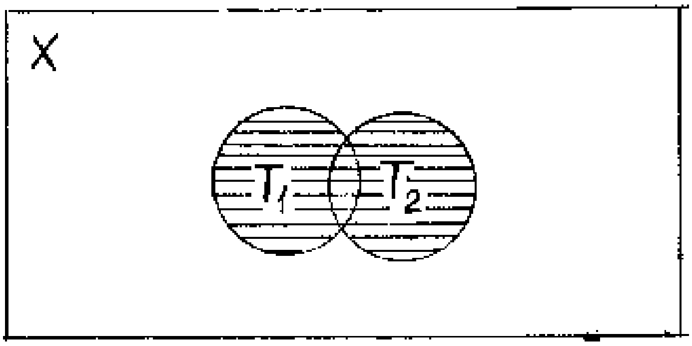
3) Predikatlar diz’yunksiyasi.

X to‘plamda $A(x)$ va $B(x)$ predikatlar berilgan bo‘lsin. $A(x) \vee B(x)$ predikat

$A(x)$ va $B(x)$ predikatlar diz’yunksiyasi deyiladi.

$A(x) \vee B(x)$ predikat $A(x)$ va $B(x)$ predikatlarning hech bo‘lmaganda biri chin bo‘lganda, chin bo‘ladi. Shu sababli $T_{A \vee B} = T_A \bigcup T_B$

Masalan: Yuqoridagi misolda «x juft son yoki 3 ga karrali». $A(x) \vee B(x)$ predikatning chinlik sohasi {6;10;15;20; 24} to‘plamdan iborat, boshqacha aytganda, {6;10;15;20;24} to‘plam $A(x)$ va $B(x)$ predikatlarning chinlik to‘plamlarining birlashmasidan iborat (22- chizma)



22-chizma

4) Predikatlar implikatsiyasi.

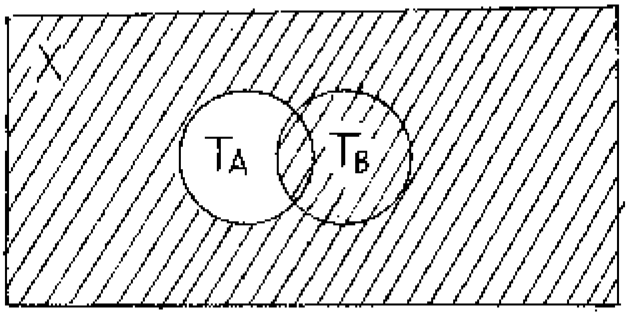
X to‘plamda $A(x)$ va $B(x)$ predikatlar berilgan bulsin. $A(x) \Rightarrow B(x)$ predikatga berilgan predikatlarning implikatsiyasi deyiladi.

Boshqacha aytganda «Agar $A(x)$ bo‘lsa, $B(x)$ bo‘ladi» predikatiga aytiladi.

Masalan: $A(x)$: «x natural soni 5 ga bo‘linadi», $B(x)$: «x natural soni 4 ga bo‘linadi» predikatlari berilgan. Bu predikatlardan $A(x) \Rightarrow B(x)$ predikatini tuzamiz.

$A(x) \Rightarrow B(x)$: «x natural soni 5 ga bo‘linsa, u holda u 4 ga ham bo‘linadi». Bu predikat x sonning ba’zi qiymatlarida chin, qolgan qiymatlarida yolg‘on.

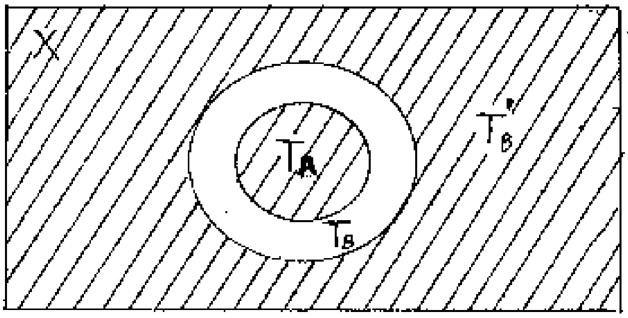
$A(x) \Rightarrow B(x)$ predikatning chinlik to‘plami, $B(x)$ predikatning chinlik to‘plami T_B bilan $A(x)$ predikatning chinlik to‘plami $T_A$ning to‘ldiruvchisi birlashmasidan iborat (23-chizma).



23-chizma

Ba’zi hollarda bir predikatning chinligidan ikkinchi predikatning chinligi kelib chiqadi. Masalan: «x 4 ga bo‘linadi», predikatidan « x 2 ga bo‘linadi» predikati kelib chiqadi.

Bu hol $T_A \subset T_B$ bo‘lganda o‘rinli (24-chizma)



24-chizma

Bu holda $A(x) \Rightarrow B(x)$ predikatga mantiqiy kelib chiqishlik deyiladi.

Bunda $B(x)$ predikatga $A(x)$ predikat uchun zaruriy shart, $A(x)$ esa $B(x)$ predikati uchun yetarlik shart deyiladi.

Agar $A(x)$ va $B(x)$ predikatlarni chinlik to‘plamlari $T_A = T_B$ bo‘lsa, u holda $A(x) \Rightarrow B(x)$ predikati tengkuchlilik (ekvivalentlik) munosabati deyiladi.

Masalan: $A(x)$: «x - natural son» $B(x)$: «x - butun son»

$A(x) \Rightarrow B(x)$: «x -natural son bo‘lsa, u butun son»

$A(x) \Rightarrow B(x)$ predikati ekvivalentlik munosabati bo‘lsa, u holda $A(x)$ va $B(x)$ larning har biri ikkinchisi uchun zarur va yetarli shart deyiladi.

5) Predikatlar ekvivalensiyasi.

Agar X to‘plamda berilgan $A(x)$ va $B(x)$ to‘plamlar ekvivalent bo‘lsalar, ya’ni bu to‘plamlarning chinlik to‘plamlari T_1 va T_2 lar ustma-ust tushsa $T_1 = T_2$ bo‘lsa, u holda barcha $x \in X$ lar uchun $A(x) \Leftrightarrow B(x)$ ekvivalensiya chin bo‘ladi. Masalan, $A(x)$: «Natural son x 10 ga bo‘linadi» va $B(x)$: «Natural sonni o‘nli yozuvi 0 bilan tugaydi» predikatlari berilgan bo‘lsa, u holda barcha natural sonlar uchun $A(x) \Leftrightarrow B(x)$ ekvivalensiya chin.

Masalan, $x = 130$ uchun ekvivalensiya chin, chunki 130 soni 10 ga bo‘linadi va bu sonni oxirgi raqami 0 bilan tugaydi. $x = 13$ bo‘lsa ham ekvivalensiya chin, chunki ikkala mulohaza ham yolg‘on (13 soni 10 ga bo‘linmaydi va 13 sonni oxirgi raqami 0 bilan tugamaydi)

Predikatlar tarkibiga kirgan o‘zgaruvchilar soniga qarab bir o‘rinli, ikki o‘rinli va hokazo bo‘ladi.

Ikki, uch,…, n o‘rinli predikatlar orqali ham kvantorli mulohazalar hosil qilish mumkin. Masalan, $(\forall x, \forall y)P(x; y)$ mulohaza biror to‘plamning «barcha x va barcha y elementlari uchun $P(x; y)$ chin» deb o‘qiladi.

O‘z-o‘zini tekshirish uchun savollar:

1) Predikat nima?
2) Predikatning aniqlanish sohasini ta’riflang.
3) Umumiylik va mavjudlik kvantorlari deb nimaga aytiladi?
4) Predikat inkori deganda nimani tushunasiz?
5) Predikatlar kon’yunksiyasi va diz’yunksiyasini chinlik to‘plamlarini ko‘rsating.
6) Predikatlar orasida kelib chiqishlik va tengkuchlilik munosabatlari uchun «zarur» va « yetarli» so‘zlarini ochib bering.

1.8.Teoremalar va ularni isbotlash.
1.8.1.Teoremaning tuzilishi va ularning turlari.

O‘rta maktab kursidan ma’lumki, matematikani o‘rganishda teoremalar deb ataluvchi so‘zlar bilan ishlashga to‘g‘ri keladi. Tushunchalarning asosiy bo‘lmagan va ta’riflarga kiritilmagan xossalari, odatda isbotlanadi. Tushunchalarning isbot qilinadigan xossalari teoremalar deb ataladi.

Ular har xil ko‘rinishda ifodalanishidan qat’iy nazar, isbotlashni talab qiladigan fikrlardir. Shunday qilib, teorema-bu A xossadan B xossaning kelib chiqishi haqidagi fikr. Bu fikrning chinligi isbotlash yo‘li bilan aniqlanadi.

Isbotlashni amalga oshirish uchun mulohaza, predikat va kvantorlarga asoslangan teoremalarni tuzilishini bilish lozim. Tubandagi teoremani qaraylik: “Agar nuqta kesmaning o‘rta perpendikularida yotsa, u holda nuqta kesmaning uchlaridan teng uzoqlikda yotadi.”

Bunda “ nuqta kesmaning o‘rta perpenikularida yotadi” gapi teoremaning sharti, “nuqta kesmaning uchlaridan teng uzoqlikda yotadi” gapi teoremaning xulosasi hisoblanadi.

Teoremaning sharti va xulosasi tekislikdagi barcha nuqtalarning R to‘plamida aniqlangan predikatdan iborat. Bu predikatlarni mos ravishda $A(x)$ va $B(x)$ deb belgilaymiz. U holda teorema $A(x) \Rightarrow B(x)$ implikatsiya ko‘rinishda belgilanib, umumiylik kvantorini qo‘llab quyidagi ko‘rinishda yoziladi:

$$(\forall x \in P)(A(x) \Rightarrow B(x))$$

bundan ko‘rinadiki, teorema tuzilishi uch qismdan iborat bo‘ladi: teorema sharti: $A(x)$ predikat tekislikdagi barcha nuqtalarning R to‘plamida berilgan; teoremaning xulosasi: $B(x)$ predikat tekislikdagi barcha nuqtalarning R to‘plamida berilgan; tushuntirish qismida teoremada so‘z yuritilayotgan ob’ektlar to‘plami tasvirlanadi. Bu qism simvolik tarzda $\forall x \in P$ ko‘rinishda yoziladi.

Tushuntirish qismini teorema mazmunidan ham bilib olish mumkin. Ixtiyoriy teoremani so‘zlar yordamida ifodalaganda “Agar …, u holda ….” so‘zlari ishlatiladi, formula quyidagi

$$(\forall x \in X)(A(x) \Rightarrow B(x)) \tag{1}$$

ko‘rinishda ifodalandi. Bu yerda X - $A(x)$ va $B(x)$ predikatlar berilgan to‘plam. Agar teorema (1) ko‘rinishda berilgan bo‘lsa, uning sharti va xulosasi implikatsiya tashkil etadi. Shu sababli teorema xulosasi $B(x)$ predikat teoremaning $A(x)$ sharti uchun yetarli sharti, $A(x)$ shart esa teoremaning $B(x)$ xulosasi uchun zaruriy shart deyiladi. Quyidagi teoremani qaraylik:

“Agar to‘rtburchak romb bo‘lsa, u holda uning diagonallari perpendikular bo‘ladi.”

Bu teoremaga (1) formulani tadbiq etamiz. X - tekislikdagi barcha to‘rtburchaklar to‘plami, x tekislikdagi ixtiyoriy to‘rtburchak, $A(x)$: “x to‘rtburchak –romb”, $B(x)$: “x to‘rtburchak diagonallari o‘zaro perpendikular”.

Zaruriy shart: “to‘rtburchak romb bo‘lishi uchun uning diagonallari perpendikular bo‘lishi zarur.”

Yetarli shart: “to‘rtburchak diagonallari perpendikulyar bo‘lishi uchun uning romb bo‘lishi yetarli.”

(1) teoremaga ko‘ra bir nechta yangi teoremalarni hosil qilish mumkin. (1) teoremaning sharti va xulosasi o‘rni almashsa, berilgan teoremaga teskari teorema hosil bo‘ladi.

$$(\forall x \in X)(B(x) \Rightarrow A(x)) \qquad (2)$$

Masalan:

Teorema: “ Agar natural son raqamlari yig‘indisi 3 ga bo‘linsa, shu sonning o‘zi ham 3 ga bo‘linadi.”

Teskari teorema: “ Agar natural son 3 ga bo‘linsa, uning raqamlarini yig‘indisi ham 3 ga bo‘linadi.”

Teskari teorema ham to‘g‘ri bo‘lgani uchun ikkita teoremani bittaga birlashtirish mumkin. “ Natural son 3 ga bo‘linishi uchun uning raqamlarini yig‘indisi 3 ga bo‘linishi zarur va yetarli.” Bu holda teoremani $(\forall x \in X)(A(x) \Leftrightarrow B(x))$ ko‘rinishda ifodalash mumkin.

Teskari teorema hamma vaqt ham to‘g‘ri bo‘lavermaydi.

Agar $(\forall x \in X)(A(x) \Rightarrow B(x))$ teoremaning sharti va xulosasi ularning inkorlari bilan almashtirilsa, berilgann teoremaga qarama-qarshi teorema hosil bo‘ladi.

$$(\forall x \in X)(\overline{A(x)} \Rightarrow \overline{B(x)}) \qquad (3)$$

(1)- teoremaga qarama-qarshi teorema: “Agar nuqta kesmaning o‘rta perpendikularida yotmasa, u holda nuqta kesmaning uchlaridan teng

uzoqlikda yotmaydi.” va bu teorema chindir.

$$(\forall x \in X)(\overline{B(x)} \Rightarrow \overline{A(x)}) \qquad (4)$$

ko‘rinishidagi teorema teskari teoremaga qarama-qarshi teorema deyiladi.

(2)teskari teoremaga qarama-qarshi teorema: “Agar natural son 3 ga bo‘linmasa, uning raqamlari yig‘indisi ham 3 ga bo‘linmaydi.” bu teorema chindir. Endi teoremalarni isbotlash usullarini ko‘rsatamiz.

1.8.2.Matematik isbotlar. Deduktiv mulohazalar.

$(\forall x)(A(x) \Rightarrow B(x))$ teoremani isbotlash- bu har doim A xossa bajarilganda, B xossa ham bajarilishini mantiqiy yo‘l bilan ko‘rsatishdir.

Matematikada isbotlash ko‘rgazmali va tajribalarga biror-bir yo‘naltirishsiz logika qoidalari bo‘yicha o‘tkaziladi.

Isbotlash asosida mulohaza-logik (mantiqiy) operatsiya yotadi. Bu operatsiya natijasida ma’nosiga ko‘ra o‘zaro bog‘langan yoki bir necha jumlalardan yangi (berilgan bilimlarga nisbatan) bilimlarni o‘z ichiga olgan jumla hosil bo‘ladi. Masalan: Boshlang‘ich sinf o‘quvchisining 6 va 7 sonlari orasidagi «kichik» munosabatini aniqlashdagi mulohazasini ko‘raylik. O‘quvchi bunday deydi: « 6<7 chunki , 6 sanoqda 7 dan oldin keladi.»

Hosil qilingan bu mulohazada xulosa qanday faktlarga asoslanganini aniqlaylik. Asoslar ikkita: agar a soni sanoqda b sonidan oldin aytilsa, u holda $a < b$ bo‘ladi (ixtiyoriy a va b natural sonlar uchun).

6 sanoqda 7 dan oldin keladi.

Birinchi jumla umumiy xarakterga ega, chunki unda jumla ixtiyoriy a va b natural sonlar uchun oʻrinli boʻlishini tasdiqlovchi umumiylik kvantori mavjud, shuning uchun umumiy asos deyiladi.

Ikkinchi jumla konkret 6 va 7 sonlariga tegishli, xususiy hollarni ifodalaydi, shunga koʻra u xususiy asos deyiladi.

Ikki asosdan esa yangi mulohaza (6<7) keltirib chiqariladi, u xulosa deb ataladi.

Umuman har qanday mulohazada ham asos, ham xulosa bor. Asos va xulosa orasida maʼlum bogʻlanish mavjud, bu bogʻlanish yordamida ular mulohazani tashkil etadi.

Asos bilan xulosa orasidagi kelib chiqishlik munosabati oʻrinli boʻladigan mulohaza deduktiv mulohaza deyiladi.

Boshqacha aytganda, agar mulohaza yordamida chin asosdan yolgʻon xulosa chiqarish mumkin boʻlmasa, u holda bu mulohaza deduktiv boʻladi. Aks holda deduktivmas hisoblanadi.

Mulohaza deduktiv boʻladigan shartlarni aniqlaymiz. Buning uchun misollarga murojaat qilamiz.

1-misol. Ushbu mulohaza berilgan, unda: umumiy asos: «agar natural son 6 ga karrali boʻlsa u 3 ga karrali boʻladi»; xulosa: «18 soni 3 ga karrali».

Bu mulohazada asos ham, xulosa ham chin. Uni deduktiv deb taxmin qilish mumkin.

2-misol. Ushbu mulohaza berilgan, unda:

umumiy asos: «Agar natural son 6 ga karrali boʻlsa, u holda u 3 ga karrali boʻladi»;

xususiy asos: «39 soni 3 ga karrali»;

xulosa: «39 soni 6 ga karrali»;

berilgan mulohazada asoslar chin, xulosa esa yolgʻon-39 soni 6 ga boʻlinmaydi. Demak, bu mulohaza deduktiv emas, bundan kelib chiqadiki, asoslarning chinligi mulohazaning deduktivligini taʼminlovchi yagona shart emas ekan.

Endi keltirilgan mulohazalarni solishtiramiz. Buning uchun ularni simvolik shaklda tasvirlaymiz. Agar A orqali « x natural son 6 ga karrali» jumlani, B orqali esa « natural son 3 ga karrali» jumlani belgilasak, u holda ikkala mulohaza uchun umumiy asos $A \Rightarrow B$ koʻrinishga ega boʻladi. 1-misolda ikkinchi asos xususiy asos, u A jumlada x oʻrniga 18 ni qoʻyish bilan hosil qilinadi. Uni $A(18)$ bilan belgilaymiz. U holda birinchi mulohazada xulosani $B(18)$ bilan belgilash mumkin. Ikkinchi misol uchun: ikkinchi asos $B(39)$ koʻrinishga, xulosa esa $A(39)$ koʻrinishga ega boʻladi.

Kiritilgan belgilashlarga koʻra berilgan mulohazalarni bunday koʻrinishda tasvirlash mumkin:

	1-misol.	2- misol.
1-asos:	$A \Rightarrow B$	$A \Rightarrow B$
2-asos:	$A(18)$	$B(39)$
xulosa:	$B(18)$	$A(39)$

Birinchi misolda mulohaza ($A \Rightarrow B$) va ($A(18) \Rightarrow B(18)$) sxema bo‘yicha. Ikkinchi misolda esa ($A \Rightarrow B$) va ($B(39) \Rightarrow A(39)$) sxema bo‘yicha o‘tkaziladi. Ko‘rib turibmizki, mulohazalar sxemalari turlicha. Birinchi holda foydalanilgan sxema chin xulosaga, ikkini mulohaza sxemasi esa yolg‘on xulosaga olib keladi. Mulohazalarni solishtirish ham asoslarning chinligi har doim ham xulosaning chin bo‘lishiga kafolat bera olmasligini tasdiqlaydi.

Endi deduktiv mulohazalarning eng sodda sxemalarini ko‘rib chiqamiz.

Har bir deduktiv mulohazaning asosida xulosa chiqarishning ma’lum qoidasi yotadi. Biz shunday qoidalardan faqat uchtasini qaraymiz, ularni isbotsiz qabul qilamiz.

xulosa qoidasi. (($A \Rightarrow B$ va $A(a)$)$\Rightarrow B(a)$, bu yerda $A \Rightarrow B$- umumiy asos, $A(a)$-xususiy asos, $B(a)$- xulosa.

Inkor qoidasi: ($A \Rightarrow B$ va $\overline{B(a)}$) $\Rightarrow \overline{A(a)}$.

Sillogizm qoidasi: ($A \Rightarrow B$ va $B \Rightarrow C$)$\Rightarrow (A \Rightarrow C)$.

Bu qoidalarni qo‘llanish mulohazaning deduktiv bo‘lishiga kafolat beradi, ya’ni chin asoslardan chin xulosalar chiqarishga imkon beradi.

Mulohazalarning to‘g‘riligini tekshirish uchun berilgan qoidalardan qanday foydalanishni ko‘rsatamiz.

Quyidagi mulohazalar deduktiv bo‘ladimi yoki yo‘qmi yuqoridagi sxemalarga asosan tekshiramiz.

1-misol. Agar natural son raqamlari yig‘indisi 9 ga bo‘linsa, shu sonning o‘zi ham 9 ga bo‘linadi; son 9 ga bo‘linmaydi, demak, son raqamlarining yig‘indisi ham 9 ga bo‘linmaydi:

2-misol. Agar natural son 8 ga karrali bo‘lsa, u holda u 4 ga karrali bo‘ladi, agar natural son 4 ga karrali bo‘lsa, u holda u 2 ga karrali bo‘ladi, demak son 8 ga karrali bo‘lsa, u holda u 2 ga karrali bo‘ladi.

3-misol. Agar sonning yozuvi nol bilan tugasa, u holda u 5 ga bo‘linadi; son nol bilan tugamasa, demak u 5 ga bo‘linmaydi.

Yechish: 1) Keltirilgan mulohazaning sxemasini aniqlaymiz.

Dastlab umumiy asosni «Agar natural son raqamlari yig‘indisi 9 ga bo‘linsa, shu sonning o‘zi ham 9 ga bo‘linadi» shartli jumla ko‘rinishida ifodalaymiz. A harfi bilan «Son raqamlari yig‘indisi 9 ga bo‘linadi» jumlani, B harfi bilan «Sonning o‘zi ham 9 ga bo‘linadi» jumlani belgilaymiz. U holda umumiy asos $A \Rightarrow B$ ko‘rinishida xususiy asos $\overline{B}$, xulosa $\overline{A}$ ko‘rinishga ega bo‘ladi, ya’ni ($A \Rightarrow B$ va $\overline{B}$) $\Rightarrow \overline{A}$ ko‘rinishdagi sxemaga ega bo‘lamiz. Bu qoida xulosaning chinligiga kafolat beruvchi inkor qoidasidir. Demak, mazkur mulohaza deduktivdir.

2) Agar «Natural son 8 ga karrali» jumlani A orqali, « Natural son 4 ga karrali» jumlani B orqali va «Natural son 2 ga karrali» jumlani C orqali belgilasak, u holda mazkur mulohazaning sxemasi ushbu ko‘rinishga ega bo‘ladi:

$$(A \Rightarrow B \text{ va } B \Rightarrow C) \Rightarrow (A \Rightarrow C).$$

Bunday sxema sillogizm qoidasidir, u asos chin bo‘lganda xulosaning ham chin bo‘lishiga kafolat beradi.

3) A harfi bilan «Sonning yozuvi nol bilan tugaydi» jumlani, B harfi bilan «Son 5 ga bo‘linadi» jumlani belgilaymiz. U holda berilgan mulohazaning sxemasi ($A \Rightarrow B$ va $\overline{A}$) $\Rightarrow \overline{B}$ ko‘rinishga ega bo‘ladi. U yolg‘on xulosaga olib keladi: masalan, 15 soni nol bilan tugamaydi, ammo u 5 ga bo‘linadi. Mulohazaning bu sxemasi xulosaning chin bo‘lishiga kafolat bera olmaydi, u chin xulosaga ham, yolg‘on xulosaga ham olib kelishi mumkin.

Ba’zi hollarda chin xulosaga, ba’zi hollarda yolg‘on xulosaga olib keluvchi sxema bo‘yicha mulohaza deduktivmas mulohaza hisoblanadi. Demak, berilgan mulohaza deduktivmas mulohaza ekan.

Deduktivmas mulohazalarning ushbu ikkita sxemasini yodda saqlash masadga muvofiq:

1) $(A \Rightarrow B$ va $B) \Rightarrow A$; 2) $(A \Rightarrow B$ va $\overline{A}) \Rightarrow \overline{B}$;

Bu sxemalar, asoslar chin bo‘lganda xulosalarning ham chin bo‘lishiga kafolat bera olmaydi.

Teoremalarni isbotlashda to‘liqsiz induktsiya usulidan ham foydalaniladi.

1.8.3.To‘liqsiz induksiya.

Biz 10 soni 5 ga bo‘linadi, 20 soni 5 ga bo‘linadi, 100 soni 5 ga bo‘linadi, 1000 soni 5 ga bo‘linadi degan mulohaza yordamida yozuvi 0 raqami bilan tugaydigan ixtiyoriy son 5 ga bo‘linadi deb, shuningdek 15 soni 5 ga bo‘linadi, 25 soni 5 ga bo‘linadi, 35 soni 5 ga bo‘linadi degan mulohaza yordamida yozuvi 5 raqami bilan tugaydigan ixtiyoriy son 5 ga bo‘linadi deb xulosa chiqaramiz. Bu mulohazalarni umumlashtirib yozuvi 0 va 5 raqamlari bilan tugaydigan ixtiyoriy son 5 ga bo‘linadi deb xulosa chiqaramiz.

Xuddi shuningdek, n^2+n+41 ifodada n o‘rniga 1,2,3,4 va hokazo sonlar qo‘yilsa, u holda $n=1$ da ifodaning qiymati tub son 43 ga teng, $n=2$ da ifodaning qiymati tub son 47 ga teng, $n=3$ da ifodaning qiymati tub son 53 ga teng ekanligini ko‘rish mumkin. n ning $n=3,4,\ldots$ qiymatlarida ham natija tub son bo‘ladi.

Bu natijalarga suyangan holda n ning ixtiyoriy natural qiymatlarida n^2+n+41 ifodaning qiymati tub son bo‘ladi deb xulosa chiqarish mumkin.

To‘liqsiz induksiya bu shunday mulohazalarki, bunda ob’ektlar to‘plamining ba’zi ob’ektlari ma’lum xossalarga ega bo‘lishdan bu to‘plam ning barcha ob’ektlari ham shu xossalarga ega deb xulosa chiqarishga asoslanadi.

To‘liqsiz induksiya natijasida olingan xulosalar chin ham, yolg‘on ham bo‘lishi mumkin. Masalan: yozuvi 5 raqami bilan tugaydigan sonning 5 ga bo‘linishi haqidagi xulosa chin. n ning ixtiyoriy natural qiymatida n^2+n+41 ifodaning qiymati tub son bo‘ladi» degan xulosa esa yolg‘on. Haqiqatan ham, agar $n=41$ bo‘lsa, biz $41^2+41+41=41^2+2\cdot 41=41(41+2)=41\cdot 43$ ga ega bo‘lamiz, bu esa n^2+n+41 ifodaning qiymati murakkab son ekanligini ko‘rsatadi.

Induktiv mulohazalar har doim to‘g‘ri xulosalaga olib kelavermasa ham , matematika va boshqa fanlarni o‘rganishda ularning roli juda katta. Induktiv mulohazalar yuritish davomida konkret xususiy hollarda umumiylikni ko‘ra bilish, o‘z taxminlarini ayta olish malakalari shakllanadi.

Boshlang‘ich sinflarda to‘liqsiz induktiv xulosadan tashqari analogiya bo‘yicha (taqqoslab) xulosa chiqarishdan keng foydalaniladi, bunda bilimlarni o‘rganilgan ob’ektlarga nisbatan kam o‘rganilgan ob’ektlarga ko‘chirish amalga oshiriladi. Ko‘chirish uchun bu ob’ektlarning o‘xshashlik va farq qilish alomatlari haqidagi bilimlar asos bo‘lib xizmat qiladi.

Analogiya bizni taxmin va farazlarga olib keladi, matematik induksiyani rivojlantirish imkonini beradi.

Shuning bilan birga analogiya natijasida hosil qilingan xulosalar chin bo‘lishi ham, yolg‘on bo‘lishi ham mumkin Analogiya natijasida hosil qilingan xulosalar deduktiv metod bilan isbot qilinishi lozim.

Fikrlarning chinligini isbotlash usullari.

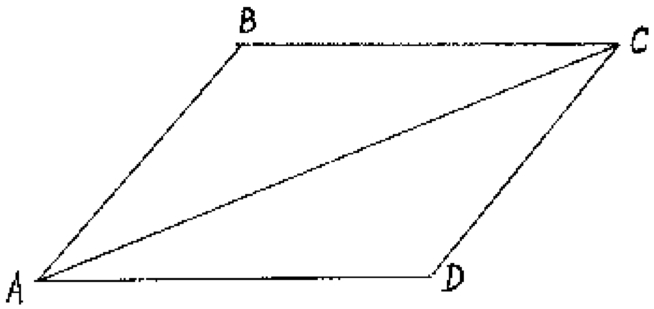
Deduktiv xulosa matematik isbotlashlarning asosiy usulidir. Bunda matematik isbot deduktiv mulohazalarning shunday zanjirini ifodalaydiki, ulardan har birining xulosasi, oxirgisidan tashqari, undan keyin keluvchi mulohazalardan biriga asos bo‘ladi.

6<7 da’voning chinligining isboti bitta qadamni o‘z ichiga olgan bitta mulohazadan tashkil topgan.

Ikki va undan ortiq qadamdan tashkil topgan mulohazaning isbotiga doir misollar ko‘rib chiqamiz.

Misol. Har bir diagonal parallelogramni ikkita teng uchburchakka ajratishini isbotlang.

Isboti: 1) ixtiyoriy parallelogramning qarama-qarshi tomonlari teng; $ABCD$-parallelogram (25-chizma), demak $AB = CD$, $BC = AD$. Mulohaza xulosa qoidasi asosida olib borildi, demak, olingan xulosa chin.



25-chizma

Agar bir uchburchakning uchta tomoni mos ravishda ikkinchi uchburchakning uchta tomoniga teng bo‘lsa, u holda bunday uchburchaklar teng bo‘ladi: $AB = CD$, $BC = AD$, AC tomon umumiy. Demak, ABC va ACD uchburchaklar teng.

Bu holda ham mulohaza xulosa qonuni asosida olib borildi, demak xulosa chin. Teorema isbotlandi.

Teoremaning isboti hamma asoslarni ko‘rsatish bilan to‘la mantiqiy formada olib borilgan mulohazalarning ikki qadamidan tashkil topganini eslatib o‘tamiz. Biroq bunday isbotlash uzundan-uzoq shuning uchun odatda ularni mulohazalar sxemasidagi alohida asoslarni tushirib qoldirish bilan ixchamlangan qisqartirilgan formada olib boriladi.

Masalan, biz o‘tkazgan isbotning ixchamlangan shakli bunday bo‘lishi mumkin: ABC va ACD uchburchaklarda AB va CD, AD va BC tomonlar teng, chunki ular $ABCD$ parallelogramning qarama-qarshi tomonlari, AC tomon ular uchun umumiy, demak, ABC va ACD uchburchaklar teng.

1.8.4.To‘la matematik induksiya.

To‘la matematik induksiya printsipining mohiyati quyidagicha: agar biror tasdiq (formula) $n=1$ da (yoki n ning bu tasdiq ma’noga ega bo‘ladigan boshqa qiymatida) o‘rinli bo‘lsa va uning biror $n=k$ natural qiymatida to‘g‘ri degan farazda navbatdagi natural qiymat $n=k+1$ uchun ham to‘g‘riligi kelib chiqsa, u holda tasdiq n ning barcha natural qiymatlari uchun ham to‘g‘ri bo‘ladi. Isbotlashning matematik induksiya printsipiga asoslangan metodi matematik induksiya metodi nomi bilan ataladi. Matematik induksiya metodi bilan isbotlash usuli quyidagidan iborat: tasdiq (formula)ning $n=1$ uchun to‘g‘ri ekani isbotlanadi yoki tekshirib ko‘riladi; tasdiqni birorta natural $n=k$ uchun to‘g‘ri deb faraz qilinadi. Bu farazdan kelib chiqib, tasdiqning $n=k+1$ uchun to‘g‘ri ekani isbotlanadi.

Bu metod faqat natural n ga bog‘liq bo‘lgan tasdiqlarni isbot qilishga tadbiq qilinadi va asosan quyidagi ko‘rinishdagi masalalarni yechishda foydalaniladi:

Xususiy kuzatishlardan foydalanib, qandaydir qonuniyat aniqlanadi, so`ngra uni to‘g‘riligi matematik induksiya yordamida isbotlanadi.

Misol: Natural qatorning dastlabki n ta toq sonlari yig‘indisini topish formulasini keltirib chiqaring.

Echish: $S(1)=1, S(2)=1+3=4, \; S(3)=1+3+5=9,$

$S(4)=16, S(5)=25,\ldots$

bulardan, natural qatorning dastlabki n ta toq sonlari yig‘indisi n^2 ga teng ekani ya’ni $S(n)=n^2$ ekani ko‘rinadi. Endi $S(n)=n^2$ ekanini matematik induksiya metodi yordamida isbotlaymiz: $n=1$ uchun $S(n)=n^2$ formula to‘g‘ri, chunki $S(1)=1$; formulani biror natural $n=k$ uchun to‘g‘ri, ya’ni $S(k)=k^2$ deb faraz qilamiz. U holda $n=k+1$ uchun ham to‘g‘ri, ya’ni $S(k+1)=(k+1)^2$ ekanini isbotlaymiz:

$$S(k+1)=1+3+5+\ldots+(2k-1)+(2k+1)=$$
$$=S(k)+(2k+1)=k^2+2k+1=(k+1)^2$$

demak, formula n ning barcha natural qiymatlari uchun to‘g‘ri, ya’ni $S(n)=n^2$.

1.8.5. Bevosta va bilvosita isbotlash usullsri.

Olib borish usuliga ko‘ra isbotlash bevosita va bilvosita isbotlashga bo‘linadi. Yuqorida ko‘rilgan barcha isbotlashlar bevosita isbotlashlar edi: ularda biror bir chin jumlaga asoslanib chin xulosaga olib keluvchi mulohazalarning deduktiv zanjiri ko‘rilar edi. Oldingi mavzuda so‘z borgan to‘la induksiya ham bevosita isbotlashga tegishlidir.

Bilvosta isbotlashga teskarisidan isbotlash usuli misol bo‘ladi. Shunday isbotlashga quyidagi teoremani qaraymiz. Teorema: «Agar ikkita turli a va b

to‘g‘ri chiziqlar uchinchi c to‘g‘ri chiziqqa parallel bo‘lsa, u holda ular o‘zaro parallel bo‘ladi» ni isbotlaymiz.

Isboti: Teskarisini faraz qilaylik, ya’ni a va b to‘g‘ri chiziqlar o‘zaro parallel bo‘lmasin. U holda ular c to‘g‘ri chiziqqa tegishli bo‘lmagan biror P nuqtada kesishadi. Shartga ko‘ra a to‘g‘ri chiziq c ga va b to‘g‘ri chiziq c ga parallel bo‘lgani uchun c to‘g‘ri chiziqdan tashqaridagi P nuqta orqali c to‘g‘ri chiziqqa ikkita parallel to‘g‘ri chiziq o‘tkazish mumkin degan xulosaga kelamiz. Bu fikr parallellik aksiomasiga zid. Demak, bizning farazimiz noto‘g‘ri va berilgan teorema chin (to‘g‘ri).

Umuman, $A \Rightarrow B$ teoremani teskarisidan isbotlash usulining mohiyati quyidagidan iborat. B teoremaning xulosasi yolg‘on, demak, uning inkori $\overline{B}$ chin deb faraz qilinadi. Bu jumlalarni isbotlash jarayonida qo‘llaniladigan asoslar to‘plamiga (ular orasida A shart ham bo‘ladi) qo‘shib, ulardan asoslardan biriga zid bo‘luvchi jumla chiqmaguncha natijalar chiqarilaveradi. Mulohazalar jarayonini tugatish bilan hosil bo‘lgan ziddiyat teoremani isbotlaydi deyiladi.

Bilvosita isbotlashning yana bir formasi kontrpozitsiya qonuniga asoslangan isbotlashdir. Uning mohiyati shundan iboratki, $A \Rightarrow B$ teoremani isbotlash o‘rniga unga teng kuchli bo‘lgan $\overline{B} \Rightarrow \overline{A}$ ko‘rinishdagi teorema isbotlanadi. Agar bu teorema chin bo‘lsa, u holda dastlabki teorema ham chin bo‘ladi.

Masalan: Teorema: « Agar $\frac{a-b}{a+b}$ qisqarmas kasr bo‘lsa, u holda $\frac{a}{b}$ ham qisqarmas kasr bo‘ladi».

Isboti: $\frac{a}{b}$ - qisqaruvchi kasr bo‘lsin deb faraz qilaylik. U holda uning sur’ati va maxraji ayni bir songa, masalan m ga , bo‘linadi, ya’ni $a = mq,\ b = mp$. Demak, $\frac{a-b}{a+b} = \frac{mq-mp}{mq+mp} = \frac{m(q-p)}{m(q+p)}$ bo‘ladi.

Shunday qilib, “agar $\frac{a}{b}$ qisqaruvchi kasr bo‘lsa, u holda $\frac{a-b}{a+b}$ ham qisqaruvchi kasr bo‘ladi” jumlaning chinligi isbotlandi. Bu jumla qarama-qarshisiga teskari teoremani ifodalaydi. Demak, kontrpozitsiya qonuniga ko‘ra dastlabki teorema ham chin bo‘ladi.

O‘z-o‘zini tekshirish uchun savollar.

1. Teorema nima? Teoremaga misollar keltiring
2. Ixtiyoriy teoremani olib, sharti, xulosasi va tushuntirish qismlarini ajratib ko‘rsating.
3. Ixtiyoriy teoremani tanlab, unga teskari, qarama-qarshi, teskariga qarama-qarshi teoremalarni tuzing, ularni chin yoki yolg‘onligini aniqlang.
4. Teoremalarni isbotlash usullarini ayting.
5. To‘liq induksiyadan foydalanib bitta teoremani isbotlab bering.

I.9.Algoritm tushunchasi va uning xossasi.

Inson biror masalani yechishda uni yechish usullarini va bu yechish usullaridan istagan kishilar foydalanishi uchun bu usullarni qanday qilib yozish lozimligini izlaydi. Ana shu yozish usulidan foydalanib masalani yechishni hisoblash mashinalariga ham topshirish mumkin bo‘lsin. Masalani yechish bosqichlarini yozishni birqancha usullari bor, shularning ichida so‘z bilan yozish ajralib turadi. Masalani yechishni so‘z bilan ifodalash usuli birinchi marta IX asrda yashab ijod qilgan O‘rta Osiyolik olim Al-Xorazmiy tomonidan o‘nli sanoq sistemasidagi sonlar ustida arifmetik amallarni bajarishda yozilgan. Bu so‘z bilan ifodalashni masalani yechishni algoritmi deb atalaboshlandi. (algoritm so‘zi Al-Xorazmiy nomini buzib aytilishi) Algoritm nima? Masalani yechishda bajariladigan amallarning ma’lum tartibda bajarilish qoidalari tuplamiga algoritm deyiladi. Boshqacha aytganda, algoritm – bu biror jarayonni aniq tasvirlash va uni bajarish uchun ko‘rsatmadir.

Al-Xorazmiy tomonidan ko‘rsatilgan algoritmlar hozirgi vaqtda ham maktablarda ishlatilib kelinmoqda. Algoritmlashtirishning vazifasi algoritmlarni tuzishga (yozishga) o‘rgatishdan iborat bo‘lib, bajaruvchi (odam, robot, EXM) algoritmlarni bajarish qoidasiga rioya qilgan holda yagona natijaga erishmog‘i lozim. Algoritmlarni yozish qoidasiga quyidagi xossalar ko‘rinishida talablar qo‘yiladi:

1) Aniqlik xossasi. Algoritm ko‘rsatmalari bir m’anoli bo‘lishi zarur. Algoritm bajariladigan amallarning zarur ketma-ketligini aniq belgilab beradi. Algoritm amalga oshish jarayoni konkret hisobchiga bog‘liq bo‘lmaydi.

2) Ommaviylik xossasi. Algoritm boshlang‘ich ma’lumotlarning ruxsat etilgan ixtiyoriy qiymatlarida bajarilishi zarur.

3) Natijaviylik xossasi. Izlanayotgan natijani boshlang‘ich ma’lumotlarning berilgan qiymati uchun chekli sondagi sodda qadamlardan so‘ng olish mumkin bo‘lishi kerak.

Misollar keltiraylik.

1) $y = 3x + 7$

№	Amallarni bajarish tavsifi
1.	x 3 ga ko‘paytiriladi
2.	(1) ning natijasiga 7 qo‘shiladi.

2) $y = \dfrac{3x+7}{2x-3}$. y ning qiymatini toping.

№	Amallarni bajarish tavsifi
1.	x 3 ga ko‘paytiriladi
2.	(1) ning natijasiga 7 qo‘shiladi.
3.	x 2 ga ko‘paytiriladi
4.	(3) ning natijasidan 3 ayiriladi.
5.	(2) ning natijasi (4) ning natijasiga bo‘linadi.

Kesmani teng ikkiga bo‘lish (sirkul va chizgi’ch yordamida)

№	Bajarilish tavsifi
1.	Sirqul ninasi A nuqtaga qo‘yiladi.
2.	Sirqul oyoqlari AB ga teng qilib ochiladi.
3.	Aylana o‘tkaziladi.
4.	Sirqul ninasi B nuqtaga qo‘yiladi.
5.	Aylana o‘tkaziladi.
6.	Aylanalarning kesishgan nuqtalaridan to‘g‘ri chiziq o‘tkaziladi
7.	To‘g‘ri chiziq va kesmaning kesishgan nuqtasi belgilanadi.

Yuqoridagi misollarni quyidagi ko‘rinishda ham ifodalash mumkin.

1) $y = 3x + 7$ ni hisoblash.

Amallarni bajarish tavsifi
$a := x * 3$
$b := a + 7$

2) $y = \dfrac{3x+7}{2x-3}$ ni hisoblang.

Amallarni bajarish tavsifi
$a := x * 3$
$b := a + 7$
$c := x * 2$
$d := c - 3$
$y = b : d$

3) $y = 3^n \quad n \in N$ ni hisoblang.

1.	Agar $n > 1$ bo‘lsa, (4) ga o‘tadi, aks holda (2) ga
2.	Agar $n = 1$ bo‘lsa, (5) ga o‘tadi, aks holda (3) ga
3.	Agar $n = 0$ bolsa, (6) ga o‘tadi, aks holda (7) ga
4.	$y = \underbrace{3 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 3}_{n\ марта}$, (8) ga o‘tadi
5.	$y = 3$, (8) ga o‘tadi.
6.	$y = 1$, (8) ga o‘tadi
7.	$y = \dfrac{1}{3 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 3}$
8.	Tamom

Boshlang‘ich sinf matematika darslarida sodda algoritmlar qo‘llaniladi. Masalan: qo‘shish algoritmi (o‘nli sanoq sistemasida)

Ikkinchi qo‘shiluvchini xona birliklari mos keladigan holda birinchi qo‘shiluvchi tagidan yoziladi.

Birliklar qo‘shiladi. Agar yig‘indi 10 dan kichik bo‘lsa, javobni birliklar xonasiga yozamiz va keyingi o‘nlik xonasiga o‘tamiz.

Agar yig‘indi 10 dan katta yoki teng bo‘lsa $10+S_0$ kabi tassavur qilib (S_0 – bir xonali son) S_0 ni birlar xonasiga yozamiz va birinchi qo‘shiluvchilarning o‘nliklariga 1 ni qo‘shamiz, so‘ng o‘nliklar xonasiga qo‘shishga o‘tamiz.

Yuqoridagi jarayonni o‘nliklar bilan, so‘ngra yuzliklar bilan va hokazo takrorlaymiz. Hamma xona birliklari qo‘shilgandan so‘ng tugatamiz. Xuddi shuning kabi ayirish, ko‘paytirish va bo‘lish algoritmlarini tuzib chiqishimiz mumkin.

Algoritmlarni hisoblash mashinalarida bajarish uchun unga mos mashina tilida programmalar va blok sxemalar tuziladi (bular «Hisoblash texnikasi» fanida o‘qitiladi).

O‘z-o‘zini tekshirish uchun savollar.

1. Algoritm so‘zining ma’nosini ayting.
2. Algoritmlarning qanday xossalari bor?
3. Algoritmlar qanday usulda yoziladi?
4. Boshlang‘ich sinflarda qo‘llaniladigan algoritmlarga misollar keltiring.

II-BOB. NOMANFIY BUTUN SONLAR

2.1. Natural son va nol tushunchasining vujudga kelishi haqida qisqacha tarixiy ma’lumot. Nomanfiy butun sonlar to‘plamini tuzishdagi yondoshishlar.

II.1.1.Nomanfiy butun sonlar to‘plamini to‘plamlar nazariyasi asosida qurish. Nomanfiy butun sonlarni qo’shish va ayirish

Natural son tushunchasi matematikaning asosiy tushunchalaridan biridir. U butun matematika fani singari kishilar amaliy faoliyatlaridagi ehtiyojlar natijasida vujudga kelgan. Turli-tuman chekli to‘plamlarni bir-biri bilan taqqoslash zaruriyati natural sonlarning vujudga kelishiga sabab bo‘lgan.

O‘zining rivojlanish davrida natural sonlar tushunchasi bir nechta bosqichni o‘tdi. Juda qadim zamonlarda chekli to‘plamlarni taqqoslash uchun berilgan to‘plamlar orasida yoki to‘plamlardan biri bilan ikkinchi to‘plamning qism to‘plami orasida o‘zaro bir qiymatli moslik o‘rnatishgan, ya’ni bu bosqichda kishilar buyumlar to‘plamining sanog‘ini ularni sanamasdan idrok qilganlar.

Vaqt o‘tishi bilan odamlar faqat sonlarni atashni emas, balki ularni belgilashni, shuningdek, ular ustida amallar bajarishni o‘rganib oldilar. Qadimgi Hindistonda sonlarni yozishning o‘nli sistemasi va nol tushunchasi yaratildi. Asta-sekin natural sonlarning cheksizligi haqidagi tasavvurlar hosil bo‘la boshladi.

Natural son tushunchasi shakllangandan so‘ng sonlar mustaqil ob’yektlar bo‘lib qoldi va ularni matematik ob’yektlar sifatida o‘rganish imkoniyati vujudga keldi. Sonni va sonlar ustidagi amallarni o‘rgana boshlagan fan «Arifmetika» nomini oldi.

Arifmetika sonlar va sonlar ustidagi amallar haqidagi fandir.

Arifmetika qadimgi Sharq mamlakatlari: Vavilon, Xitoy, Hindiston, Misrda vujudga keldi. Bu mamlakatlarda to‘plangan matematik bilimlar qadimgi Gretsiyada rivojlantirildi va davom ettirildi. Arifmetikaning rivojlanishiga asr o‘rtalarida Hind, Arab dunyosi mamlakatlari va O‘rta Osiyo matematiklari, XVIII asrdan boshlab esa, yevropalik olimlar katta hissa qo‘shdilar.

«Natural son» terminini birinchi bo‘lib rimlik olim A.A. Boesiy qo‘lladi.

Natural butun sonlar to‘plamini tuzishda ikki xil yondashuv bor:

1) to‘plamlar nazariyasi asosida;
2) aksiomatik metod asosida;

Nomanfiy butun sonlar to‘plamini to‘plamlar nazariyasi asosida qurishni qaraymiz:

XIX asrda G. Kantor tomonidan to‘plamlar nazariyasi yaratilgandan so‘ng, bu nazariya asosida natural sonlar nazariyasi yaratildi. Bu nazariya asosida chekli to‘plam va o‘zaro bir qiymatli moslik tushunchalari yotadi.

1-ta’rif: Agar A va B to‘plamlar orasida o‘zaro bir qiymatli moslik o‘rnatish mumkin bo‘lsa, bu to‘plamlar teng sonli deyiladi.

«Teng sonlilik» munosabati ekvivalentlik munosabati bo‘lib, barcha chekli to‘plamlarni ekvivalentlik sinflariga ajratadi. Har bir sinfda turli elementli to‘plamlar yig‘ilgan bo‘lib, ularning umumiy xossasi teng sonli ekanligidir.

2-ta’rif: Natural son deb, bo‘sh bo‘lmagan chekli bir-biriga ekvivalent to‘plamlar sinfining umumiy xossasiga aytiladi.

Har bir ekvivalentlik sinfining umumiy xossasini uning biror bir to‘plami to‘la ifodalaydi. Har bir sinf xossasini ifodalovchi natural son alohida belgi bilan belgilanadi. Masalan: $a = n(A)$; $b = n(B)$

3-ta’rif. Bo‘sh to‘plamlar sinfining umumiy xossasini 0 soni ifodalaydi, $0 = n(\varnothing)$.

4-ta’rif. 0 soni va barcha natural sonlar birgalikda nomanfiy butun sonlar to‘plamini tashkil qiladi. Bu to‘plam Z_0 ko‘rinishida belgilanadi. $Z_0 \equiv \{0\} \bigcup N$. N - barcha natural sonlar to‘plami.

Sonlarni taqqoslash qanday nazariya asosida yuz berishini aniqlaymiz. Ikkita nomanfiy butun a va b son berilgan bo‘lsin. Ular chekli A va B to‘plamlar elementlari sonini ifodalaydi.

5-ta’rif: Agar a va b sonlar teng sonli to‘plamlar bilan aniqlansa, u holda ular teng bo‘ladi.

$$a = b \Leftrightarrow A \sim B \text{ bu yerda } n(A) = a; \quad n(B) = b$$

Agar A va B to‘plamlar teng sonli bo‘lmasa, u holda ular bilan aniqlanadigan sonlar turlicha bo‘ladi. Agar A to‘plam B to‘plamning o‘z qism to‘plamiga teng sonli va $n(A) = a$; $n(B) = b$ bo‘lsa, a son b sondan kichik deyiladi va $a < b$ kabi yoziladi. Xuddi shu vaziyatda $a > b$ kabi yoziladi.

$$a < b \Leftrightarrow A \sim B_1, \text{ bu yerda } B_1 \subset B \text{ va } B_1 \neq B; B_1 \neq \varnothing.$$

6-tarif. Butun nomanfiy a va b sonlarning yig‘indisi deb $n(A) = a$; $n(B) = b$, bo‘lib, kesishmaydigan A va B to‘plamlar birlashmasidagi elementlar soniga aytiladi.

$$a + b = n(A \bigcup B), \text{ bu yerda } n(A) = a; \quad n(B) = b \text{ va } A \bigcap B = \varnothing$$

Berilgan ta’rifdan foydalanib, *5+2=7* bo‘lishini tushuntiramiz.

5–bu biror A to‘plamning elementlari soni, 2-biror B to‘plamning elementlari soni, bunda ularning kesishmasi bo‘sh to‘plam bo‘lishi kerak.

Masalan $A = \{x, y, z, t, p\}$, $B = \{a, b\}$ to‘plamlarni olamiz. Ularni birlashtiramiz. $A \bigcup B = \{x, y, z, t, p, a, b\}$ sanash yo‘li bilan $n(A \bigcup B) = 7$ ekanligini aniqlaymiz. Demak, *5+2=7*.

Umuman, $a + b$ yig‘indi $n(A) = a$; $n(B) = b$ shartni qanoatlantiruvchi kesishmaydigan A va B to‘plamlarning tanlanishiga bog‘liq emas. Bu umumiy da’voni biz isbotsiz qabul qilamiz.

Bundan tashqari butun nomanfiy sonlar yig‘indisi har doim mavjud va yagonadir. Boshqacha aytganda, biz qanday ikkita nomanfiy a va b sonlar olmaylik, ularning yig‘indisi bo‘lgan butun nomanfiy c sonni har doim topish mumkin. U berilgan a va b sonlari uchun yagona bo‘ladi.

Yig‘indining mavjudligi va yagonaligi ikki to‘plam birlashmasining mavjudligi va yagonaligidan kelib chiqadi.

Yig‘indi ta’rifidan foydalanib “kichik” munosabatiga boshqacha ta’rif berish mumkin.

7-Ta’rif: $\forall a,b \in N$ uchun $a = b + c$, bo‘ladigan c son topilsa, $b < a$ (yoki $a > b$) bo‘ladi.

$$(\forall a,b \in N)(\exists c \in N)(b < a \Leftrightarrow a = b + c)$$

Qo‘shish amalining xossalari:

1^0. Qo‘shish kommutativdir:

$$(\forall a,b \in Z_0)(a + b = b + a)$$

ya’ni ixtiyoriy nomanfiy butun *a* va *b* sonlar uchun *a+b=b+a* tenglik o‘rinlidir.

Isbot: $a = n(A),\ b = n(B)$ va $A \bigcap B = \varnothing$ bo‘lsin,

$$a + b = n(A \bigcup B) = n(B \bigcup A) = b + a$$

(to‘plamlar birlashmasining kommutativligiga asosan).

2^o. Qo‘shish amali assotsiativdir:

$$(\forall a,b,c \in Z_0) \quad (a + (b + c)) = ((a + b) + c)$$

Isboti: $a = n(A),\ b = n(B),\ c = n(C)$ va $A \bigcap B = \varnothing,\ B \bigcap C = \varnothing,\ A \bigcap C = \varnothing$ bo‘lsin. $a + (b + c) = n(A \bigcup (B \bigcup C));$ $(a + b) + c = n((A \bigcup B) \bigcup C)$ to‘plamlar birlashmasining assotsiativligiga ko‘ra

$$A \bigcup (B \bigcup C) = (A \bigcup B) \bigcup C$$

Demak, $a + (b + c) = (a + b) + c$

3^o. O ni yutish xossasi:

$$(\forall a \in Z_0) \qquad a + 0 = a$$

Isboti: $a = n(A),\ 0 = n(\varnothing)$ $a + 0 = n(A \bigcup \varnothing) = n(A) = a$. ($A \bigcup \varnothing = A$ va $A \bigcap \varnothing = \varnothing$ bo‘lgani uchun)

4^0. *(*$\forall a, b, c, \in Z_0$*)* $a=b \Leftrightarrow a+c= b+c$

Isboti: $a = n(A),\ b = n(B),\ c = n(C)$, $A \bigcap B = \varnothing$, $B \bigcap C = \varnothing$, $A \bigcap C = \varnothing$ $a = b \Rightarrow n(A) = n(B)$, $n(A + C) = n(a + c)$, $n(B + C) = n(b + c)$, bundan $a + c = b + c$

5^0. Qo‘shish monotonligi

$$(\forall a,c,b \in Z_0) \qquad a < b \ \Rightarrow \ a + c < b + c$$

Isboti: $a = n(A),\ b = n(B),$ bo‘lsin. $a < b \ \Rightarrow \ A \sim B_1 \subset B$ bu yerda $B_1 \neq B,\ \ B_1 = \varnothing$ u holda $A \bigcup C \sim B_1 \bigcup C \subset B \bigcap C \ \Rightarrow \ a + c < b + c$.

Endi ayirmaning ta’rifi va uning mavjudligi va yagonaligini ko‘rib o‘tamiz.

8-Ta’rif: Butun nomanfiy a va b sonlarning ayirmasi deb $n(A) = a$, $n(B) = b$ va $B \subset A$ shartlar bajarilganda, B to‘plamni A to‘plamgacha to‘ldiruvchi to‘plam elementlari soniga aytiladi.

$a - b = n(B_A)$ bu yerda $a = n(A),\ b = n(B)$, $B \subset A$, $B_A - B$ ni A ga to‘ldiruvchi to‘plam.

Misol. Berilgan ta’rifdan foydalanib, $7-4=3$ bo‘lishini tushuntiramiz. 7 biror A to‘plamning elementlari soni, 4 A to‘plamning qism to‘plami bo‘lgan B to‘plamning elementlari soni.

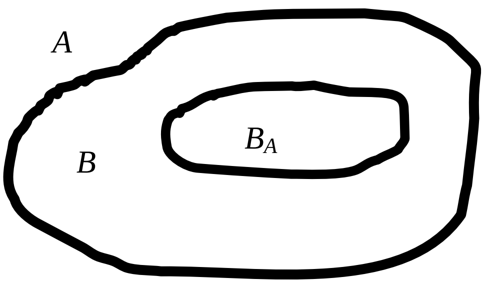
Masalan: $A=\{x,y,z,t,p,r,s\}$, $B=\{x,y,z,t\}$ to‘plamlarni olaylik. B to‘plamning A to‘plamgacha to‘ldiruvchisini topamiz:

$A\setminus B=\{p,r,s\},\ n(A\setminus B)=3$

Demak, $7-4=3$.

$a-b$ ayirma $n(A)=a$, $n(B)=b$ va $B\subset A$ shartlarini qanoatlantiruvchi A va B to‘plamlarning tanlanishiga bog‘liq emas.

$a=n(A),\ b=n(B),$ va $B\subset A$ bo‘ladigan butun nomanfiy *a* va *b* sonlar berilgan bo‘lsin va bu sonlarning ayirmasi B to‘plamni A to‘plamgacha to‘ldiruvchisidagi elementlar soni bo‘lsin, ya’ni $a-b=n(B_A)$.



26-chizma

Eyler doiralarida A, B, $A\setminus B$ to‘plamlar 26-chizmada ko‘rsatilganidek tasvirlanadi. $A=B\bigcup B_A$ ekani ma’lum, bundan $n(A)=n;\ (B\bigcup B_A)=A;\ B\bigcap B_A=\varnothing$ bo‘lgani uchun biz

$$a=n(A)=n(B\bigcup B_A)=n(B)+n(B_A)=b+(a-b)$$

ga ega bo‘lamiz.

Bu esa ayirmaga boshqacha ta’rif berish imkonini beradi.

9-ta’rif: Butun nomanfiy a va b sonlarning ayirmasi deb, shunday butun nomanfiy c songa aytiladiki, uning b son bilan yig‘indisi a songa teng bo‘ladi. $a-b=c\ \Leftrightarrow\ a=b+c$.

Shunday qilib, $a-b=c$ yozuvda a-kamayuvchi, b-ayriluvchi, c-ayirma deb ataladi.

Ayirish amali qo‘shishga teskari amaldir. Ayirmaning ikkinchi ta’rifidan kelib chiqib, quyidagi teoremalarni isbotlaymiz:

1-teorema: Butun nomanfiy *a* va *b* sonlarning ayirmasi faqat $b\le a$ bo‘lgandagina mavjud bo‘ladi.

Isboti. Agar $a=b$ bo‘lsa, u holda $a-b=0$ bo‘ladi, demak, $a-b$ ayirma mavjud bo‘ladi.

Agar $b<a$ bo‘lsa, u holda «kichik» munosabati ta’rifiga ko‘ra shunday natural son mavjud bo‘ladiki, bunda $a=b+c$ bo‘ladi. U holda ayirmaning ta’rifiga ko‘ra $c=a-b$, ya’ni $a-b$ ayirma mavjud bo‘ladi. Agar $a-b$ ayirma mavjud bo‘lsa, u holda ayirmaning ta’rifiga ko‘ra shunday butun nomanfiy *c* son topiladiki, $a=b+c$, bo‘ladi. Agar $c=0$ bo‘lsa, u holda $a=b$ bo‘ladi; agar $c>0$ bo‘lsa, u holda «kichik» munosabatining ta’rifiga ko‘ra $b<a$ bo‘ladi. Demak, $b\le a$.

2-teorema. Agar butun nomanfiy *a* va *b* sonlarining ayirmasi mavjud bo‘lsa, u holda u yagonadir.

Isboti $a-b$ ayirmaning ikkita qiymati mavjud bo‘lsin deb faraz qilaylik: $a-b=c_1$ va $a-b=c_2$. U holda ayirmaning ta’rifiga ko‘ra $a=b+c_1$ va $a=b+c_2$ ga ega bo‘lamiz. Bundan $b+c_1=b+c_2$; demak, $c_1=c_2$ ekani kelib chiqadi. Demak, ayirma yagona ekan.

Yig‘indidan sonni va sondan yig‘indini ayirish qoidalarini to‘plamlar nazariyasi bo‘yicha ma’nosini qaraymiz.

Yig‘indidan sonni ayirish uchun yig‘indidagi qo‘shiluvchilardan biridan shu sonni ayirish va hosil bo‘lgan natijaga ikkinchi qo‘shiluvchini qo‘shish yetarli.

Bu qoidani simvollardan foydalanib yozamiz:

Agar, *a,b,c* - butun nomanfiy sonlar bo‘lsa, u holda:

a) $a \geq c$ bo‘lganda $(a+b)-c=(a-c)+b$ bo‘ladi;

b) $b \geq c$ bo‘lganda $(a+b)-c =a+(b-c)$ bo‘ladi;

v) $a \geq c$ va $b \geq c$ bo‘lganda yuqoridagi formulaning ixtiyoriy bittasidan foydalanish mumkin. Yig‘indidan sonni ayirish qoidasining to‘g‘riligini ko‘rsatamiz. Faraz qilaylik, $a \geq c$ bo‘lsin, u holda $a-c$ ayirma mavjud bo‘ladi. Uni *r* orqali belgilaymiz: $a-c=r$. Bundan $a=r+c$ chiqadi, $r+c$ yig‘indini $(a+b)-c$ ifodadagi *a* ning o‘rniga qo‘yamiz va unda shakl almashtiramiz:

$$(a+b)-c=(r+c+b)-c=r+b+c-c=r+b.$$

Biroq *r* harfi orqali $a-c$ ayirma belgilangan edi, bundan isbotlanishi talab etilgan $(a+b)-c= (a-c)+b$ ifodaga ega bo‘lamiz.

Endi sondan yig‘indini ayirish qoidasini qaraymiz:

Sondan sonlar yig‘indisini ayirish uchun bu sondan qo‘shiluvchilarning birini, ketidan ikkinchisini ketma-ket ayirish yetarli, ya’ni agar *a, c, b* - butun nomanfiy sonlar bo‘lsa, u holda $a \geq b+c$ bo‘lganda $a-(b+c)=(a-b)-c$ ga ega bo‘lamiz.

Bu qoidaning asoslanishi ham yig‘indidan sonni ayirish qoidasi uchun bajarilgani kabi bajariladi.

Keltirilgan qoidalar boshlang‘ich maktabda konkret misollarda qaraladi, asoslash uchun ko‘rgazmali tasvirlar namoyish etiladi.

Bu qoidalar hisoblashlarni ixcham bajarish imkonini beradi.

Masalan, sondan yig‘indini ayirish qoidasi sonni bo‘laklab ayirish usuliga asos bo‘ladi:

$$5-2=5-(1+1)=(5-1)-1=4-1=3.$$

O‘z-o‘zini nazorat qilish uchun savollar

1. Natural son va nolning ta’rifini ayting.
2. Qaysi holda *a* soni *b* sonidan katta deyiladi va aksincha?
3. Nomanfiy butun sonlar yig‘indisi ta’rifini ayting, uning mavjudligi va yagonaligini asoslang.
4. Qo‘shishning qanday qonunlari bor?
5. Nomanfiy butun sonlar ayirmasi ta’rifi qanday? Ayirma qaysi holda mavjud bo‘ladi?
6. Ayirmaga yig‘indi orqali ta’rif bering.
7. Yig‘indi va ayirma qoidalarini to‘plamlar nazariyasi asosida tushuntiring.

II.1.2.NOMANFIY BUTUN SONLARNI KO‘PAYTIRISH VA BO’LISH

1.Ko‘paytmaning ta’rifi, uning mavjudligi va yagonaligi

$a=n(A)$ va $b-n(B)$ bo‘lgan *a* va *b* nomanfiy butun sonlar berilgan bo‘lsin.

1-Ta’rif: *a* va *b* nomanfiy butun sonlar ko‘paytmasi deb, $A\times B$ dekart ko‘paytma elementlari sonini ifodalovchi *c* nomanfiy butun songa aytiladi.

Bu yerda $A\times B=\{(a,b) \setminus a\in A,\ b\in B\}$ ekanini eslatib o‘tamiz.

Demak, ta’rifga ko‘ra: $a\cdot b=n(A\times B)=c$ bu yerda $a,b,c \in Z_0$. $a\cdot b=c$ yozuvda *a*-*1*-ko‘paytuvchi *b*-*2*-ko‘paytuvchi *c*–ko‘paytma deyiladi, $c\in Z_0$ sonni topish amali esa ko‘paytirish deyiladi.

Masalan; ta’rifga ko‘ra $5\cdot 2$ ko‘paytmani topaylik. Buning uchun $n(A)=5$ va $n(B)=2$ bo‘lgan $A=\{a,b,c,d,e\}$, $B=\{1,2\}$ to‘plamlarning dekart ko‘paytmasini tuzamiz:

$$A\times B=\{(a,1), (a,2), (b,1), (b,2), (c,1), (c,2), (d,1), (d,2), (e,1), (e,2)\}.$$

Dekart ko‘paytma elementlari soni 10 bo‘lgani uchun $5\cdot 2=10$.

1-Teorema: Ikki nomanfiy butun son ko‘paytmasi mavjud va yagonadir.

Ko‘paytmaning mavjudligi berilgan sondagi elementlardan tashkil topgan to‘plamlarning dekart ko‘paytmasini tuzish har doim mumkinligi va dekart ko‘paytma elementlari soni to‘plamlarning qanday elementlardan tashkil topganiga bog‘liq emasligi bilan isbotlanadi.
Ikkita nomanfiy butun son ko‘paytmasining yagonaligini isbotlash talabalarga topshiriladi.

2. Ko‘paytirish amalining xossalari

1^o. Ko‘paytirish kommutativdir:

$$(\forall a,b\in Z_0)\ ab=ba$$

Isbot. $a=n(A)$ va $b=n(B)$, $A\cap B=\varnothing$ bo‘lsin. Dekart ko‘paytma ta`rifiga ko‘ra $A\times B\neq B\times A$ shunga qaramay, $A\times B=B\times A$ deb olamiz (bunda istalgan $(a,b)\in A\times B$ juftlikka $(b,a)\in B\times A$ juftlik mos keltirildi) $A\times B=B\times A\Rightarrow n(A\times B)=n(B\times A)$, $ab=n(A\times B)=n(B\times A)=ba$ $\Rightarrow ab=ba$

2^0 Ko‘paytirish assotsiativdir.

$$(\forall a, b, c\in Z_0)\ \ (a b)c= a(bc).$$

Isbot: $a=n(A)$ $b=n(B)$, $c=n(C)$ va A,B,C lar jufti-jufti bilan kesishmaydigan to‘plamlar bo‘lsin, yani $A\cap B=\varnothing,\quad A\cap C=\varnothing,\quad B\cap C=\varnothing.$

$$(ab)c=n((A\times B)\times C)\ \text{ va }\ a(bc)=n(A\times (B\times C)).$$

Yuqoridagi dekart ko‘paytmalar doirasida o‘zaro bir qiymatli moslik o‘rnatish yo‘li bilan $(A\times B)\times C=A\times(B\times C)$ ekanini ko‘rsatish mumkin (kombinatorika bo‘limidagi ko‘paytma qoidasini eslang).
Demak $(ab)c=n((A\times B)\times C)=n(A\times(B\times C))=a(bc)$.

3^0 Ko‘paytirishning qo‘shishga nisbatan distributivligi

$$(\forall a,b,c\in Z_0)\ \ (a+b)c=ac+bc$$

Isboti: $a=n(A)$, $b=n(B)$, $c=n(C)$ va A,B,C lar jufti-jufti bilan kesishmaydigan to‘plamlar bo‘lsin. To‘plamlar nazariyasidan ma’lumki
$(A\cup B)\times C=(A\times C)\cup(B\times C)$ va $A\cap B=\varnothing\Rightarrow(A\times C)\cap(B\times C)=\varnothing$ chunki $A\times C$ va $B\times C$ dekart ko‘paytmalar elementlari 1-komponentlari bilan farq qiladi. Shularga asosan:

$$(a+b)\cdot c=n((A\cup B)\times C)=n((A\times C)\cup(B\times C) = n(A\times C) + n(B\times C) = ac+bc$$

Demak, $(a+b)c=ac+bc$

4^0 Yutuvchi elementning mavjudligi: $(\forall a\in Z_0)\ a\cdot 0=0$

Isboti: $a=n(A)$ $0=n(\varnothing)$ bo‘lsin. $A\times\varnothing=\varnothing$ ekanligidan $a\circ 0=n(A\times\varnothing)=n(\varnothing)=0$

5^0 Ko‘paytirishning monotonligi.

$(\forall a,b,c\in Z_0,\ c\neq 0)\qquad a>b\Rightarrow ac>bc$

$(\forall a,b,c\in Z_0)\qquad a\geq b\Rightarrow ac\geq bc$

$(\forall a,b,c\in Z_0),\ c\neq 0)\qquad a<b\Rightarrow ac<bc$

Isboti: 1-sini isbotlab ko‘rsatamiz.
$a>b\Rightarrow B\sim A_1\subset A$ bu yerda $n(A)=a$, $n(B)=b$ $A_1\neq\varnothing$ $A_1\neq A$
U holda $B\times C\sim(A_1\times C)\subset(A\times C)$
Demak, $n(B\times C)=n(A_1\times C)<n(A\times C)\Rightarrow bc < ac$

6^0 Ko‘paytmaning qisqaruvchanligi

$$(\forall a,b,c,\in Z_0,\ c\neq 0)\quad ac=bc\Rightarrow a=b$$

Isbot: Teskarisini faraz qilaylik: $a\neq b$ bo‘lsin. U holda yoki $a<b$, yoki $a>b$ bo‘lishi kerak. $a<b$ bo‘lsa, $ac<bc$ bo‘lishi kerak, bu esa shartga zid. Demak, $a=b$ ekan.

3. Ko‘paytmaning yig‘indi orqali ta’rifi

2-Ta'rif: $a,b \in Z_0$ bo'lsin. a sonning b soniga ko'paytmasi deb, har biri a ga teng bo'lgan b ta qo'shiluvchining yig'indisiga aytiladi.

$$ab = \underbrace{a + a + \ldots + a}_{b \text{ марта}}$$

Bundan $a \cdot 1 = a$ va $a \cdot 0 = 0$ ekanligi kelib chiqadi.
Bu ta'rif $a=n(A)$, $b=n(B)$, $A \cap B = \varnothing$ bo'lgan $A \times B$ dekart ko'paytma elementlarini sanash ma'lum bir qonuniyatga asoslanishiga bog'liq.
Misol. $A=\{a,b,c\}$, $B=\{x,y,z,t\}$
$A \times B$ dekart ko'paytmani quyidagi jadval ko'rinishida yozamiz:
Dekart ko'paytma elementlarini ustunlar bo'yicha sanasak, $3 \times 4 = 3+3+3+3 = 12$ ga ega bo'lamiz.

(a,x)	(a,y)	(a,z)	(a,t)
(b,x)	(b,y)	(b,z)	(b,t)
(c,x)	(c,y)	(c,z)	(c,t)

4.Bo'lishning ta'rifi

Nomanfiy butun sonlar to‘plamida bo‘lish amalini ta’riflash uchun to‘plamni sinflarga ajratish tushunchasidan foydalanamiz. $a=n(A)$ A to‘plamni juft-jufti bilan kesishmaydigan teng quvvatli sinflarga ajratish mumkin bo‘lsin. Butun nomanfiy a sonning natural b songa bo‘linmasi quyidagicha ta’riflanadi:

4-ta’rif: Agar b son A to‘plamni bo‘lishdagi har bir qism to‘plam elementlari soni bo‘lsa, u holda a va b sonlarning bo‘linmasi deb bu bo‘linmadagi qism to‘plamlar soniga aytiladi. Nomanfiy butun a va b sonlar bo‘linmasini topish amali bo‘lish, a – bo‘linuvchi, b – bo‘luvchi, $a:b$ - bo‘linma deyiladi. Yuqoridagi ta’riflarni misollar yordamida tushuntiramiz.

Misol: 12 ta gilosni har biriga 3 tadan nechta bolaga tarqatishdi. Masala savoliga javob bo‘lish orqali topiladi 12:3=4 Masalani tahlil qilaylik: 12 ta elementga ega to‘plam 3 ta elementga ega bo‘lgan teng quvvatli qism to‘plamlarga ajratilgan. Shuning bilan ular juft-jufti bilan kesishmaydi. Masalada nechta shunday qism to‘plam borligi so‘ralayapti. Javobdagi 4 soni 12 elementli to‘plamning 3 elementli qism to‘plamlar sonini bildiradi. Boshqacharoq masalani qaraylik. 12 ta gilosni 4 ta bolaga baravaridan tarqatishdi. Har bir bolaga nechtadan gilos tarqatishdi. Bu masala ham bo‘lish bilan echiladi: 12:4=3 (gilos). Bu yerda 3 soni boshqa ma’noda – 12 elementdan iborat to‘plam berilgan teng quvvatli kesishmaydgan har bir to‘rtta qism to‘plamdagi elementlar sonini bildiradi. Bo‘lish amalining to‘g‘ri bajarilganini tekshirish uchun ko‘paytirish amaliga murojaat qilinadi, chunki bo‘lish va ko‘paytirish amallari o‘zaro bog‘liq. Bu bog‘lanishni qaraylik. $a=n(A)$ son va A to‘plam b ta juft-jufti bilan kesishmaydigan teng quvvatli $A_1,A_2,...,A_b$ qism to‘plamlarga ajratilgan bo‘lsin. U holda $c=a:b$ har bir shunday qism to‘plamdagi elementlar soni bo‘ladi, ya’ni $c=a:b=n(A_1)=n(A_2)=...n(A_b)$. Shartga ko‘ra $A=A_1\cup A_2\cup....\cup A_b$, bo‘lgani uchun $n(A)=n(A_1\cup A_2\cup....\cup A_b)$ bo‘ladi. Ammo $A_1, A_2, ..., A_b$ qism to‘plamlar juft-jufti bilan kesishmaydi. yig‘indi ta’rifiga ko‘ra

$$n(A_1\cup A_2\cup....\cup A_b)=n(A_1)+n(A_2)+....+n(A_b)=\underbrace{c+c+....+c}_{b\ marta};$$

Ko‘paytma ta’rifiga ko‘ra $c\cdot b$ ga teng. Shunday qilib $a=c\cdot b$ ekan. Bundan esa a va b sonlarning bo‘linmasi shunday c sonki, u bilan b sonining ko‘paytmasi a ga teng bo‘ladi. Bundan foydalanib bo‘linmaga quyidagicha ta’rif berish mumkin.

5-ta’rif: Butun nomanfiy a soni bilan b natural sonning bo‘linmasi deb, shunday butun nomanfiy $c=a:b$ songa aytiladiki, uning b soni bilan ko‘paytmasi a ga teng bo‘ladi. Bu ta’rifdan $a:b=c \Leftrightarrow a=c\cdot b$ ekanligi ko‘rinadi.

5. Bo‘lishning bajarilishi va bir qiymatliligi

Bo‘linma har doim ham mavjud bo‘laveradimi degan savol tug‘iladi?

2-Teorema. Ikkita a va b natural sonning bo‘linmasi mavjud bo‘lishi uchun $b\leq a$ bo‘lishi zarur.

Isboti. a va b natural sonlarning bo‘linmasi mavjud bo‘lsin,.ya’ni $a=c\cdot b$ bajariladigan c natural son mavjud bo‘lsin. Ixtiyoriy natural son uchun $1\leq c$ ekanligi o‘z-o‘zidan ravshan. Bu tengsizlikning ikkala qismini b natural songa ko‘paytirib $b\leq c\cdot b$ ga ega bo‘lamiz, $c\cdot b=a$ bo‘lgani uchun $b\leq a$ bo‘ladi. Teorema isbotlandi. $a=0$ va b natural sonning bo‘linmasi nimaga teng? Ta’rifga ko‘ra, bu $c\cdot b=0$ shartni qanoatlantiruvchi a sonidir. $b\neq 0$ bo‘lgani uchun $c\cdot b=0$ tenglik $c=0$ bo‘lganda bajariladi. Demak, $b\in N$ da $0:b=0$ bo‘ladi.

3-Teorema. Agar a va b natural sonlarning bo‘linmasi mavjud bo‘lsa, u yagonadir. Buning isboti ayirmaning yagonaligi haqidagi teorema isbotiga o‘xshash qilinadi. Butun nomanfiy sonni nolga bo‘lish mumkin emasligini qaraymiz. $a\neq o$ va $b=0$ sonlar berilgan bo‘lsin. a va b sonlarning bo‘linmasi mavjud deb faraz qilaylik. U holda bo‘linmaning ta’rifiga ko‘ra $a=c\cdot 0$ tenglik bajariladigan butun nomanfiy c soni mavjud bo‘ladi, bundan $a=0$, farazimiz noto‘g‘ri, demak, $a\neq o$ va $b=o$ sonlarining bo‘linmasi mavjud emas. Agar $a=o$ va $b=o$ bo‘lsa, $o=c\cdot o$ tenglik kelib chiqadi, undan esa a va b sonlarning bo‘linmasi har qanday son bo‘lishi mumkin degan xulosa chiqadi. Shuning uchun matematikada nolni nolga bo‘lish ham mumkin emas deb hisoblanadi. Nomanfiy butun sonlarni bo‘lish ta’rifidan «... marta katta» va «-... marta kichik» munosabatlari aniqlanadi. Agar $a= n(A)$, $b=n (B)$, $a>b$ bo‘ladigan a va b sonlar berilgan va bunda A to‘plamni B to‘plamga teng quvvatli c ta qism to‘plamga ajratish mumkin bo‘lsa a soni b sonidan c marta katta, b soni esa a sonidan c marta kichik deyiladi. c sonini o‘zi bo‘linmani ifodalaydi. Shularni hisobga olib quyidagi qoidani hosil qilamiz. Bir son ikkinchi sondan necha marta katta yoki kichik ekanini bilish uchun katta sonni kichik songa bo‘lish zarur.

6.Yig‘indini songa va sonni ko‘paytmaga bo‘lish qoidalari.

a) yig‘indini songa bo‘lish qoidasi:

4-teorema. Agar a va b sonlar c songa bo‘linsa, u holda ularning $a+b$ yig‘indisi ham c ga bo‘linadi: $a+b$ yig‘indini c ga bo‘lganda hosil bo‘ladigan bo‘linma a ni c ga va b ni c ga bo‘lganda hosil bo‘ladigan bo‘linmalar yig‘indisiga teng, ya’ni $(a+b):c=a:c+b:c$

Isboti: a soni c ga bo‘lingani uchun $a=c\cdot m$ bo‘ladigan $m=a:c$ natural son mavjud. Shunga o‘xshash $b=c\cdot n$ bo‘ladigan $n=b:c$ natural son mavjud. U holda $a+b=c\cdot m+c\cdot n=c(m+n)$. Bundan esa $a+b$ yig‘indining c ga bo‘linishi va $a+b$ ni c ga bo‘lganda hosil bo‘ladigan bo‘linma $m+n$ ga teng bo‘lishi, ya’ni $a:c+b:c$ ekani kelib chiqadi. Bu qoidani to‘plamlar nuqtaiy nazaridan tahlil qilsak tubandagicha:

$a=n (A)$, $b= n (B)$ va bunda $A\cap B=\varnothing$ bo‘lsin.

Agar A va B to‘plamlarning har birini c ga teng quvvatli qism to‘plamlarga ajratish mumkin bo‘lsa, u holda bu to‘plamlar birlashmalarini ham shunday ajratish mumkin. Bunda, agar A to‘plamni ajratishdagi har bir qism to‘plam $a:c$ elementga, B to‘plamning har bir qism to‘plami $b:c$ elementga ega bo‘lsa, u holda $A\cup B$ to‘plamning har bir qism to‘plamida $a:c+b:c$ element bo‘ladi.

b) Sonni ko‘paytmaga bo‘lish va sonni ikki sonning bo‘linmasiga ko‘paytirish qoidalari:

5-teorema. Agar a natural son b va c natural sonlarga bo‘linsa, u holda a sonni b va c sonlar ko‘paytmasiga bo‘lish uchun a sonni $b(c)$ ga bo‘lish va hosil bo‘lgan bo‘linmani $c(b)$ ga bo‘lish yetarli:

$$a:(b\cdot c)=(a:b):c=(a:c):b$$

Isboti: $(a:b):c=x$ deb faraz qilamiz, u holda bo‘linmaning ta’rifiga ko‘ra $a:b=c\cdot x$ bo‘ladi, bundan shunga o‘xshash $a=b\cdot(c\cdot x)$ bo‘ladi. Ko‘paytirishning gruppalash qonuniga asosan $a=(b\cdot c)\cdot x$. hosil bo‘lgan tenglik $a:(b\cdot c)=x$ ekanini bildiradi.

6-teorema. Sonni ikki sonning bo‘linmasiga ko‘paytirish uchun bu sonni bo‘linuvchiga ko‘paytirish va hosil bo‘lgan ko‘paytmani bo‘luvchiga bo‘lish yetarli, ya’ni

$$a\cdot(b:c)= (a\cdot b):c$$

Isbot. Bu tenglikni ham sonni ko‘paytmaga bo‘lish qoidasiga o‘xshash isbotlash mumkin.

Misollar:

1) (220+140):10=220:10+140:10=22+14=36;
2) 240: (10·2)=(240:10):2=24:2=12;
3) 12·(30:15)=(12·30):15=360:15=24

O‘z-o‘zini nazorat qilish uchun savollar.

1. Nomanfiy butun sonlar ko‘paytmasi ta’rifini ayting. Ko‘paytmaning mavjudlik va yagonalik shartlari qanday?
2. Ko‘paytmaning qanday qoidalari bor? Ularni to‘plamlar nazariyasiga ko‘ra asoslang.
3. Ko‘paytmaga yig‘indi orqali ta’rif bering.
4. Nomanfiy butun sonlar bo‘linmasini ta’riflang.
5. Bo‘linmaga ko‘paytma orqali ta’rif bering.
6. Bo‘linmaning mavjudlik va yagonalik shartlarini ayting.
7. Yig‘indi va ko‘paytmani songa bo‘lish qoidalarini aytib, isbotlab bering.

II.1.3.NOMANFIY BUTUN SONLAR TO‘PLAMINI AKSIOMATIK ASOSDA QURISH. QO’SHISH AKSIOMALARI. MATEMATIK INDUKSIYA PRINSPI.

1. Nomanfiy butun sonlar to‘plamini aksiomatik asosda qurish.

Natural sonlar to‘plamini aksiomatik metod asosida qurish uchun dastlab aksiomalar sistemalari va ularning xossalarini ko‘rib chiqishimiz kerak.

1.Aksiomalar sistemasi va ularning xossalari.

Matematik tushunchalar dastlab kishilik jamiyatining rivojlanishi bilan yuzaga kelgan. Bu tushunchalar aniq ta’riflarga ega bo‘lmagan. Masalan, sharni ko‘z oldiga keltirishda uni to‘pga o‘xshatganlar. Tushunchalarni aniqlashga muhtojlik tug‘ilgan, ya’ni tushunchalar orasidagi bog‘lanishlarni aniqlashga zaruriyat yuzaga kelgan. Masalan; aylana diametri tushunchasi dastlab aylanani teng ikkiga bo‘luvchi vatar deb tushunilgan. Keyinchalik bu tushunchani eramizdan oldingi VI asrda yashagan qadimgi Gretsiyaning Milet shahrida yashagan Fales aylana diametri deganda albatta markaz orqali o‘tuvchi vatarni tushunish kerakligini aytgan va isbotlab bergan. Shundan keyin esa aylana diametri deganda uning markazi orqali o‘tib ikkita nuqtasini tutashtiruvchi to‘g‘ri chiziq kesmasi tushunilgan.
Bu ta’rifni yanada aniqroq qilish uchun «aylana», «aylana markazi», «to‘g‘ri chiziq kesmasi» so‘zlarining ma’nolarini bilmoq kerak. Bu so‘zlarga ta’rif berilsa, yangi ta’rif ichidagi ayrim so‘zlarga yana ta’rif berish kerak bo‘ladi. Shuning uchun matematik nazariyani yaratishda ayrim tushunchalarni ta’riflanmaydigan asosiy tushunchalar deb qabul qilib, barcha nazariyani shularga asosan qurmoq kerak.

Maktab planimetriya kursida «nuqta», «to‘g‘ri chiziq» va «masofa» tushunchalari, xuddi shuningdek matematikadagi «to‘plam» va «son» tushunchalari shular jumlasiga kiradi. Biror nazariyani aksiomatik qurishda quyidagicha yondashiladi. Ba’zi bir ta’riflanmaydigan tushunchalar boshlang‘ichlar sifatida olinib, bu tushunchalar bilan bog‘liq ta’riflanmagan munosabatlar ko‘rsatilib, keyinchalik bu munosabatlar va tushunchalarning xossalarini ifodalovchi bir qancha mulohazalar shakllantiriladi. Bu muloha-zalarga ifodalayotgan nazariyaning aksiomalari deyiladi.

Asosiy tushunchalar, munosabatlar va aksiomalar kiritilgandan keyin nazariyaning rivojlanishi faqat mantiqiy fikrlash asosida boradi. Aksiomatik nazariyani qurishda tushuncha, munosabat va aksiomalar ixtiyoriy bo‘lmasdan, ular ba’zibir haqiqiy ob’yektlar va ularning xossalarini yaqqol ko‘rsatishi lozim. Masalan, ixtiyoriy uchta A,B va M nuqtalar uchun, M nuqtadan A va B nuqtalargacha masofalarning yig‘indisi bu nuqtalar orasidagi masofadan kichik degan aksioma aytilsa, u holda haqiqatan hayotga aloqasi bo‘lmagan nazariya yuzaga kelar edi., haqiqatda esa $|MA| + |MB| \geq |AB|$;

Shunday qilib, aksiomatik nazariya reallikning matematik modelini berishi kerak.

2. Aksioma sistemasi modellari

Agar munosabatlari bilan berilgan to‘plamda aksiomalar sistemasini barcha aksiomalari bajarilsa, u holda munosabatlari bilan berilgan to‘plam aksiomalar sistemasini modeli deyiladi. Biz tubandagi aksiomalar sistemasining modellarini qaraylik.

1-misol. Quyidagi uchta aksiomani qanoatlantiruvchi *a~b* ekvivalentlik munosabati bilan berilgan aksiomalar sistemasini qaraymiz:

1) Barcha *a* lar uchun *a~a* bajariladi:

2) Ixtiyoriy *a* va *b* lar uchun *a ~b* dan *b~a* kelib chiqadi.

3) Ixtiyoriy *a,b* va *c* lar uchun *a ~b* va *b~c* dan *a~c* kelib chiqadi.

2-misol. $a<b$ birgina munosabat va quyidagi aksiomalar bilan aniqlanuvchi aksiomalar sistemasini qaraylik:

1) Ixtiyoriy *a* va *b* lar uchun $a<b$ dan $b<a$ yolg‘onligi kelib chiqadi;

2) Ixtiyoriy *a* va *b* lar uchun $a<b$ va $b<c$ dan $a<c$ kelib chiqadi.

Bu aksioma qat’iy tartiblanganlik munosabatini ifodalaydi.

Bu sistema interpretatsiyasini quyidagicha ifodalash mumkin:

Kishilar to‘plamida «*a* odam *b* odamdan baland», «*a* tana *b* tanadan og‘irroq» va hokazo. Bu sistemaga quyidagi aksiomani qo‘shamiz.

3) $a\neq b$ ekanligidan $a<b$ yoki $b<a$ kelib chiqadi. Endi biz qat’iy chiziqli tartib aksiomalar sistemasiga ega bo‘ldik. Berilgan aksiomalar sistemasining ikkita modeli bir-biridan tashqi ko‘rinishi bilan farq qilishi mumkin.

Misol: agar $a<b$, $b<c$ va $a<c$ hamda 1<2, 2<3 va 1<3 desak,

$X=\{a;b;c\}$ *ва* $Y\{1,2,3\}$ to‘plamlar tartib aksiomalari sistemasi modelini ifodalaydi. Birinchi modelni 2-modelga aylantirish uchun *a* ni 1, *b* ni 2, *c* ni 3 deb olish yetarli. Ikkita model bir-biridan tashqi ko‘rinishi bilan farq qilib, mazmuni bir xil bo‘lsa, izomorf modellar deyiladi.

Aksiomalar sistemasi modeli real dunyo xossalarini aniqroq ifodalashi uchun ular mantiqan bir qancha talablarni bajarishi lozim.

1^o Birinchi navbatda aksiomalar sistemasi ziddiyatsiz bo‘lishi kerak. Boshqacha aytganda berilgan aksiomalar sistemasida bir paytda chin va yolg‘on tasdiq kelib chiqmasligi kerak.

Masalan, tubandagi ko‘rinishdagi aksiomalar sistemasi bo‘lishi mumkin emas.

1) Ixtiyoriy *a* element uchun, shunday *b* element mavjud, bunda *a~b*
2) Hech bir *a* element *a~a* bajarilmaydi.
3) Agar *a~b* bo‘lsa, u holda *b~a*
4) Agar *a~b* va *b~c* bo‘lsa, u holda *a~c*

Haqiqatan ham biror a elementni olaylik. 1) aksiomaga asosan shunday b element topiladiki, $a \sim b$. 3) aksiomaga asosan $b \sim a$. 4) aksiomaga asosan esa, ya'ni $a \sim b$ va $b \sim a$ dan $a \sim a$ kelib chiqadi. Bu esa 2) aksiomaga ziddir.

2^o Ikkinchidan, aksiomalar sistemasi bir-biriga bog'liq bo'lmasligi, ya'ni bir aksioma aksiomalar sistemasining boshqa aksiomalaridan kelib chiqmasligi kerak.

Agar biz yuqoridagi sistemani 4) aksiomasini agar $a \sim b$ va $b \sim c$ bo'lsa, u holda $a \sim c$ deb olsak, u aksioma ortiqcha bo'ladi, chunki uni boshqa aksiomalardan keltirib chiqarish mumkin.

3^o Uchinchidan, aksiomalar sistemasi qat'iy bo'lishi kerak.

3.Natural sonlar to'plami aksiomatikasi.

Natural sonlar aksiomatikasini qurish uchun dastlab natural sonlar tushunchasining kelib chiqishi va uning miqdoriy nazariyasini ko'rib o'tamiz.

1) Natural sonlar tushunchasining kelib chiqishi

Natural sonlar tushunchasi ham matematikaning boshqa tushuncha-lari kabi amaliy ehtiyojlardan kelib chiqqan. Qadim davrlarda chekli to'plamlar elementlarini solishtirishga zaruriyat tug'ilgan. Masalan, ov qurollari qabiladagi barcha ovchilarga yetadimi, tutilgan baliqlar qabilaning barcha a'zolariga yetadimi va hokazo. Bu solishtirishning oddiy usuli sanamasdan ikki to'plam elementlari orasida yoki bir to'plam bilan ikkinchi to'plam to'plam osti elementlari orasida o'zaro bir qiymatli moslik o'rnatishdan iborat bo'lgan. Ammo bunday moslik o'rnatish bir-biridan uzoq bo'lgan to'plamlar (otarlar) o'rtasida mumkin bo'lmagan. Shuning uchun bunday hollarda vositachi (dallol) to'plamlardan foydalanilgan, ya'ni barmoqlar, toshlar, chig'anoqlar va boshqalar. Masalan, ikkita otardagi qo'ylar to'plamini solishtirish uchun birinchi otardagi qo'ylar to'plamiga teng chig'anoqlarni olib, ikkinchi otarga borib u yerdagi qo'ylar to'plami bilan solishtirganlar. Vositachi to'plamlardan faqat otardagi qo'ylar to'plamini solishtirishgina emas, barcha boshqa to'plamlarni solishtirishda ham foydalanganlar. Shuning bilan birga vositachi to'plam nomlari boshqa to'plamlar sonlarini ifodalash uchun ham ishlatilgan. Masalan, «beshta o'rik» deyish o'rniga «qo'l o'rik», «o'nta olma» deyish o'rniga «ikkita qo'l olma», «yigirma qop bug'doy» deyish o'rniga «odam qop bug'doy» va h.k. Umuman, to'plam elementlari sonini vositachi to'plamlar yordamida ifodalaganlar. Keyinchalik sonlarni har safar bitta birlik qo'shib 1,2,3,... ko'rinishda qator qilib yozganlar. Shunday qilib natural sonlar qatori kelib chiqqan. «Natural sonlar» terminini birinchi bo'lib, rim olimi Boesiy (eramizdan oldingi 475-524 yillar) qo'llagan. Natural sonlar tushunchasini paydo bo'lishi matematikani rivojlanishida muhim burilish bo'lib, sonlarni nazariy jihatdan o'rganuvchi «arifmetika» fani yuzaga kelishga sababchi bo'ldi. Dastlab olimlar tomonidan katta sonlar o'rganila boshlandi. Buni qadimgi grek olimlari traktatlarida ko'rish mumkin.

2) Natural sonlar miqdoriy nazariyasi.

XIX asrda Georg Kantor tomonidan to'plamlar nazariyasiga asos solingandan keyin uning asosida natural sonlar nazariyasi qurildi. Nazariyani qurishga asos qilib chekli to'plamlar va o'zaro bir qiymatli moslik olingan. A va B to'plamlar elementlari orasida o‘zaro bir qiymatli moslik o‘rnatish mumkin bo‘lsa, ular teng sonli deyiladi. «A to‘plam B to‘plamga teng sonli» munosabati refleksiv, simmetrik va tranzitiv xossalarga ega. Bundan ko‘rinadiki, teng sonlilik munosabati ekvivalentlik munosabati bo‘lib, u butun chekli to‘plamlar majmuasini ekvivalentlik sinflariga ajratadi. Bitta sinfda turli xil to‘plamlar bo‘lishi mumkin, faqat ularning barchasi uchun teng sonlilik xossasi o‘rinli, boshqacha aytganda bir xil sondagi elementlarga ega bo‘ladi. Masalan, $\{a; b; c\}$ elementlarni saqlovchi sinfga, uchburchaklar sinfi, uchta tayoqcha va hokazo.

Ta`rif: Bir-biriga ekvivalent bo‘sh bo‘lmagan chekli to‘plamlar umumiy xossasiga natural sonlar deyiladi. Yuqoridagi misolda 3 soni asosiy xossa hisoblanadi.

M to‘plam bilan aniqlangan son $|M|$ yoki $n|M|$ bilan belgilanadi va M to‘plamning quvvati deyiladi.

Ixtiyoriy to‘plamga bitta element qo‘shib u to‘plamga ekvivalent bo‘lmagan to‘plamga ega bo‘lamiz. Shunday jarayonni davom ettirsak, bir-biriga ekvivalent bo‘lmagan to‘plamlarning cheksiz ketma-ketligini hosil qilamiz va ularni 1,2,3, ... , n , ... ko‘rinishda belgilaymiz. Chekli ikkita A va B to‘plamlarni qaraylik. Ularga mos natural sonlarni *a* va *b* bilan belgilaymiz, bu to‘plamlar ekvivalent bo‘lishi ham, bo‘lmasligi ham mumkin. Agar A ~ B bo‘lsa A va B to‘plamlar bir sinfga tegishli bo‘lib, ularga mos keluvchi sonlar teng bo‘ladi, ya’ni $a=b$; Agar A va B lar turli sinflarga tegishli bo‘lsalar, ularga mos keluvchi sonlar turlicha bo‘ladi. Aytaylik A to‘plam *a* elementga, B to‘plam *b* elementga ega bo‘lsin. Agar A to‘plam B to‘plamning to‘plam ostisi B_1 ga teng sonli bo‘lsa, u holda *a* soni *b* sonidan kichik deyiladi va $a<b$ kabi yoziladi.

$$(a<b) \Leftrightarrow (A \sim B_1;\ B_1 \subset B \text{ va } B_1 \neq B,\ B_1 \neq \varnothing$$

$a<b$ munosabat asimmetrik va tranzitiv bo‘lgani uchun bu munosabat tartib munosabati ekanini ko‘rsatish mumkin. Shunday qilib N natural sonlar to‘plami tartiblangan. Chekli to‘plamlar ustidagi amallarga, shu to‘plamlarga mos sonlar ustidagi amallar mos keladi.

Masalan: A va B to‘plamlar kesishmasin yani $A \cap B = \varnothing$ hamda $a=n(A)$, $b=n(B)$ bo‘lsin. U holda $C=AUB$ to‘plamga *c* soni mos keladi va u $a+b$ bilan belgilanib *a* va *b* sonlarining yig‘indisi deyiladi. A va B to‘plamlar birlashmasi kommutativ va assotsiativ xossaga ega ekanligidan natural sonlar yig‘indisi ham shu xossalarga ega ekanligi kelib chiqadi.

Sonlarning yig‘indisi to‘plamlar birlashmasiga bog‘liq bo‘lsa, sonlarning ayirmasi to‘plamga to‘ldiruvchi bilan bog‘liq. Aytaylik, A chekli to‘plam, B esa uning xususiy to‘plam ostisi bo‘lsin va $a=n(A)$, $b=n(B)$ bo‘lsin. Sonlarning $a–b$ ayirmasi deb, B ni A ga to‘ldiruvchi B_A – to‘plam quvvatiga aytiladi.

$B_A^1 \cup B = A$ bo‘lishidan $(a-b)+b\equiv a$ bo‘ladi.

Natural sonlarni ko‘paytirish amali ikki to‘plam Dekart ko‘paytmasi elementlarining sonini sanashga bog‘liq. Aytaylik $a=n(A)$ va $b=n(B)$ bo‘lsin. *a* va *b* natural sonlarning ko‘paytmasi deb A x B to‘plam ko‘paytmasiga aytiladi, boshqacha aytganda A va B to‘plamlar elementlaridan tuzilgan juftliklar soniga aytiladi. To‘plamlar Dekart ko‘paytmasi kommutativlik xossasiga ega bo‘lmasada, ko‘paytirishda n (AxB)=n(BxA). Natural sonlarni ko‘paytirish kommutativ va assotsiativ.

O‘z-o‘zini nazorat qilish savollari

1. Matematik tushunchalar deganda nimani tushunasiz:?
2. Asosiy tushunchalar, munosabatlar va aksiomalarga misollar keltiring.
3. Nazariyani aksiomatik qurishda nimalar talab qilinadi?
4. Aksiomalar sistemasi modellariga misollar keltiring.
5. Aksiomalar sistemalari modellari qachon izomorf deyiladi?
6. Natural sonlar tushunchasining paydo bo‘lishini tushuntiring.
7. Natural sonlarga ta’rif bering
8. Natural sonlar ustidagi amallarni to‘plamlar nazariyasi asosida tushuntiring va xossalarini ayting.

4.Qo‘shish aksiomalari

1). Natural sonlar to‘plamini qo‘shish aksiomalari asosida qurish.

N natural sonlar to‘plami uchun aksiomalar sistemasini turli usullar bilan qurish mumkin. Asosiy tushunchalar uchun sonlar yig‘indisi yoki tartib munosabati yoki bir son ketidan bevosita ikkinchi son kelish munosabati kabilarni olish yordamida tuzish mumkin. Har bir hol uchun asosiy tushunchalar xossalarini ifodalovchi aksiomalarni berish lozim. Biz asosiy tushuncha deb qo‘shish amalini olib aksiomalar sistemasini beramiz. Agar bo‘sh bo‘lmagan N to‘plamda quyidagi xossalarga ega qo‘shish deb ataluvchi $(a;b)\Rightarrow a+b$ binar algebraik amal aniqlangan bo‘lsa, N to‘plamga natural sonlar to‘plami deyiladi (bunda $a+b$ sonni a va b sonlarning yig‘indisi deymiz).

1) qo‘shish kommutativ, ya’ni $a\in$N va $b\in$N bo‘lsa, u holda $a+b=b+a$;

2) qo‘shish assotsiativ; ya’ni $a\in$N, $b\in$N, $c\in$N bo‘lsa, u holda $a+(b+c)=(a+b)+c$;

3) Ixtiyoriy ikki a va b natural sonlari uchun $a+b$ yig‘indi a sonidan farqli $a+b\neq a$;

4) N to‘plamning bo‘sh bo‘lmagan ixtiyoriy A to‘plam ostida shunday a soni mavjudki, a sonidan farqli barcha x$\in$A sonini x=$a+b$ shaklida yozish mumkin, bunda $b\in$N;

1) – 4) aksiomalar sistemasi, natural sonlar arifmetikasini qurish uchun yetarli.

Natural sonlar arifmetikasini bu aksiomalar asosida qurganda chekli to‘plam xossalaridan foydalanishga ehtiyoj qolmaydi.

1), 4) aksiomalar sistemasidan 3) ni isbotlaymiz.

Bizga ma’lumki, A va B to‘plam bo‘sh bo‘lmasa u holda B to‘plam A U B to‘plamdan farq qiladi va $b\neq a+b$ munosabat bajariladi. 3) aksiomada berilishicha yig‘indi birinchi qo‘shiluvchidan farq qiladi. Shuning uchun $b\neq a+b$ munosabatda b ni birinchi qo‘shiluvchi o‘rniga qo‘yish kerak. Buni esa 1) $a+b=b+a$ aksiomaga asosan amalga oshiramiz. $b\neq a+b$ da 1) ga asosan $b\neq a+b$ ga ega bo‘lamiz. Odatda, ko‘rgazmaliliksiz 1) – 4) aksiomalar vositasida bajarilgan isbotlar juda uzun bo‘ladi, lekin ulardan kelib chiqadigan natijalarni nafaqat natural sonlar to‘plami, balki 1) – 4) aksiomalar sistemasi ixtiyoriy modellariga qo‘llash mumkin bo‘ladi. Bizga yaxshi tanish bo‘lgan aksiomalar sistemasi modellaridan biri bu oddiy ma’noda qo‘shish amali berilgan {1;2;3;4; ...} to‘plamdir. Bu model bilan birga boshqa modellar ham mavjud. Masalan: {-1;-2;-3;-4; ...} sonli to‘plamda ham qo‘shish amali oddiy ma’noda aniqlangan. Ba’zi bir qo‘shish aksiomalar sistemasida qo‘shish amali odatdagi qo‘shish amalidan farq qiladi.

Masalan, agar oddiy qo‘shish amali bilan berilgan {3;4;5; ...} sonli to‘plamni qaraydigan bo‘lsak, bu to‘plamda 4) aksiomalar bajarilmaydi, ya’ni 4 va 5 sonlarini 3 sonlarining yig‘indisi ko‘rinishida yozish mumkin bo‘lmaydi. Agar qo‘shishni $a*b=a+b-2$ ko‘rinishida qabul qilinsa, bu to‘plamda 1) – 4) aksiomalar bajariladi.

Masalan: 4=3*3=3+3-2, 5=3*4=3+4-2

Agar qo‘shish amali o‘rniga ko‘paytirish amali qabul qilinsa, ushbu aksiomalar $\{2;2^2;2^3;2^4....\}$ to‘plamda ham bajariladi.

Yuqorida qaralgan to‘plamlar turlicha va ularda qo‘shish amali berilgan oddiy ma’nodagi qo‘shish amalidan farq qilishiga qaramasdan 1) – 4) aksiomalarga asoslangan holda natural sonlarni qo‘shishga oid bo‘lgan barcha isbotlar har qanday aksiomalar sistemasi modellari uchun o‘rinli bo‘ladi.

1) - 4) aksiomalar sistemasi barcha modellari qat’iy izomorfligini isbotlash mumkin.

Bu aksiomalar sistemasi uchun ikkita interpretatsiyaning izomorfligini quyidagicha isbotlaymiz. Aksiomalar sistemasining birining interpretatsiyasi oddiy ma’nodagi qo‘shish amali bilan berilgan $\{1;2;3;....\}$ to‘plam bo‘lsin, ikkinchi interpretatsiya oddiy ma’noda ko‘paytirish amali bilan berilgan. Bu ikki interpretatsiyaning izomorfligini ko‘rsatish uchun har bir natural n soniga 2^n sonini mos qo‘yish lozim bo‘ladi. U holda $m+n$ soniga 2^{m+n} soni mos qo‘yiladi.

$2^{m+n}= 2^m\ 2^n$ ekanligidan $n\rightarrow 2^n$ mos qo‘yuvchi akslantirish jarayonida qo‘shish amali ko‘paytirish amaliga o‘tadi.

2). Natural sonlar to‘plamida tartib munosabati va uning xossalari

N natural sonlar to‘plamiga tartib munosabatini kiritamiz. Bunda biz 1),4) aksiomalarga va elementlar yig‘indisi tushunchalariga asoslanamiz.

«*a* natural son *b* natural sondan kichik» ta’rifini keltirib chiqarishda chekli to‘plamlarga bog‘liqlikdan foydalanamiz.

Bizga ma’lumki, chekli A to‘plam bilan bo‘sh bo‘lmagan chekli B to‘plam birlashmasi $C=A\cup B$ $(A\cap B=\varnothing)$ A to‘plamdagidan ko‘p elementlarga ega bo‘ladi. Bu esa quyidagi ta’rifga olib keladi:

Ta’rif. Agar *a* va *b* natural sonlari uchun shunday bir *c* natural soni mavjud bo‘lib, $a+c=b$ munosabat o‘rinli bo‘lsa, *a* natural soni *b* natural sonidan kichik deyiladi va $a<b$ ko‘rinishda yoziladi.

Masalan, 5 <7 bu holda shunday natural son 2 mavjudki, 2+5=7 bo‘ladi.

$a<b$ munosabatdan foydalanib, 4) aksiomani quyidagicha ifodalash mumkin.

4^1) N natural sonlarning bo‘sh bo‘lmagan A to‘plam ostida eng kichik son bor, ya’ni shunday sonni *a* desak, A to‘plamdagi *a* dan farqli barcha *x* sonlari uchun $a<x$. Endi < munosabatini N to‘plamda qattiq tartib munosabati ekanini ko‘rsatamiz, ya’ni bu munosabat tranzitiv va antisimmetrik. Aytaylik, $a<b$ va $b<$

c bo‘lsin. Ta’rifga asosan shunday k va l sonlari topiladiki $b=a+k$, $c=b+l$ bo‘ladi. U holda $c= (a+k)+l$

2) aksiomaga asosan $c=a+(k+l)$, $k+l$ natural son bo‘lgani uchun tenglikdan $a < c$. Demak, $a<b$ va $b<c$ dan $a<c$ kelib chiqadi. Bu esa < munosabati tranzitiv ekanligini ko‘rsatadi.

< munosabati asimmetrik ekanligi 4) aksiomadan ko‘rinadi. Bu aksiomaga asosan natural sonlar to‘plamining bo‘sh bo‘lmagan A to‘plamida eng kamida bitta eng kichik element a bor. A da bu element bir qiymatli aniqlangan va bundan boshqa eng kichik element yo‘q ekanligini ko‘rsatamiz. Aytaylik a dan boshqa eng kichik b element bor bo‘lsin, u holda $a< b$ va $b< a$ bajariladi. Bunday bo‘lishi esa mumkin emas. Shunday qilib < munosabati N to‘plamda qattiq tartib munosabati ekan. Bu tartibning chiziqli ekanini ko‘rsatamiz, ya’ni ixtiyoriy ikkita turli xil a va b natural sonlar uchun $a <b$ va $b<a$ munosabatlardan biri bajariladi. Haqiqatan ham ikkita elementdan tashkil topgan A={$a; b$} to‘plamni olaylik.

4^1) aksiomaga asosan bu to‘plamda eng kichik element bo‘lishi kerak. Agar bu element a bo‘lsa, $a < b$, agar bu element b bo‘lsa, $b< a$ munosabat o‘rinli.

Endi natural sonlarni qo‘shish monotonlik xossasiga ega ekanligini ko‘rsatamiz.

Agar $a<b$ bo‘lsa, u holda ixtiyoriy $c\in N$ uchun $a+c <b+c$ ga ega bo‘lamiz (tengsizlikni ikkala tomoniga bir xil soni qo‘shsak, tengsizlik belgisi o‘zgarmaydi). Aslida ta’rifga ko‘ra $a<b$ deganda shunday bir k sonni mavjud bo‘lib $b=a+k$ ekanini bildiradi. Lekin $b+c=(a+k)+c$. 1) va 2) aksiomalarga ko‘ra $b+c =(a+k)+c=a+(k+c) = a+(c+k)=(a+c)+k$.

Demak $b+c=(a+c)+k$. Bu esa $a+c < b+c$ ekanini bildiradi.

Endi natural sonlarni qo‘shish qisqaruvchanligini ko‘rsatamiz, ya’ni $a+c= b+c$ bo‘lsa, u holda $a=b$ ga teng. Aslida quyidagi uch hol bo‘lishi mumkin: $a<b$, $b<a$, $a=b$; Ammo $a<b$ bo‘lsa, u holda $a+c < b+c$ bo‘ladi, biz esa $a+c=b+c$ deb oldik. Demak $a<b$ hol mumkin emas. Shu sababli $b<a$ hol ham mumkin emas, faqat $a=b$ bo‘lgan hol qoladi.

3). Natural sonlar to‘plamining cheklanmaganligi va diskretligi.

4^1) aksiomaga ko‘ra N natural sonlar to‘plamida eng kichik son mavjud. Bu son 1 bilan belgilanadi va birlik deb ataladi. N natural sonlar to‘plamida eng kichik son bo‘lgani uchun, ixtiyoriy $a\in N$, son uchun $a\neq 1$ va $1<a$ bajariladi. Bu deganimiz $a=1+b$, bu yerda $b\in N$ natural sonlar to‘plamida eng katta son mavjud emas, haqiqatan ham ixtiyoriy $a\in N$ uchun $a<a+1$, demak a N to‘plam uchun eng katta son bo‘la olmaydi. Shunga ko‘ra N natural sonlar to‘plami quyidan 1 soni bilan chegaralanib, yuqoridan esa chegaralanmagan deb aytiladi.

Barcha sonlar o‘rtasida a sonidan keyin keluvchi eng kichik $a+1$ son bor. Haqiqatan ham a sonidan keyin b soni kelsin desak, u holda shunday c natural soni topiladiki $b=a+c$.

Ammo $1\leq c$ bo‘lganidan $a+1\leq a+c$ ga ega bo‘lamiz, bundan esa $a+1\leq b$. Bu esa $a+1$ soni a sonidan keyin keluvchi eng kichik son ekanligini ko‘rsatadi.

Bundan keyin a sonidan keyin keluvchi eng kichik songa, a sonidan bevosita keyin keluvchi son deyiladi. Shunday qilib, N natural sonlar to‘plamidagi har bir elementdan bevosita keyin keluvchi element mavjud.

Bu xossa natural sonlar to‘plamining diskretligi deyiladi. «b soni a sonidan bevosita keyin keladi» munosabatiga «a soni b sonidan bevosita oldin keladi» munosabati teskari hisoblanadi. Boshqacha aytganda, a soni b sonidan bevosita oldin keladi» munosabati faqat va faqat $b=a+1$ bo‘lganda o‘rinli. 1 sonidan oldin keluvchi son yo‘q, chunki 1) va 3) aksiomalarga ko‘ra $1=a+1$ bajarilmaydi. 1 dan boshqa barcha natural sonlar uchun uning oldidan keluvchi faqat bitta va bitta natural son mavjudligini ham ko‘rsatish mumkin. Haqiqatan ham $b\neq 1$ bo‘lsa, u holda $1<b$.(1-eng kichik natural son), bundan esa shunday $a\in N$ natural soni mavjud bo‘lib, $b=1+a=a+1$ ekani ko‘rinadi. Demak, b natural soni a dan keyin kelar ekan, ya’ni b natural soni a dan bevosita keyin keladi. Endi b dan boshqa a dan bevosita keyin keluvchi natural son yo‘qligini ko‘rsatamiz. Faraz qilaylik, $c\neq a$, c b dan bevosita keyin keluvchi son bo‘lsin. U holda $b=a+1$; $b=c+1$ bo‘ladi, bundan $a+1=c+1$;

Qo‘shishning qisqaruvchanlik xossasiga asosan $a=c$, bu esa farazimizga qarama-qarshi.

Demak, b son a sonidan bevosita keyin keluvchi yagona son ekan.

O‘z-o‘zini nazorat qilish uchun savollar

1. Natural sonlar to‘plamiga ta’rif bering.
2. Qo‘shish aksiomalarini izohlab aytib bering.
3. Qo‘shish va ko‘paytirish amali bilan berilgan aksiomalar sistemasining interpretatsiyasi izomorfligini ko‘rsating.
4. a natural soni b natural sonidan qachon kichik deyiladi?
5. Kichik munosabati N to‘plamda tartib munosabati bo‘lishini izohlang.
6. Natural sonlar to‘plamini chegaralanmaganligi va diskretligini tushuntiring?

II.1.4.Matematik induksiya prinsipi.

1). Matematik induksiya prinsipi mohiyati.

Matematik induksiya prinsipi – natural sonlar to‘plamining xossasi ekanligini ko‘rsatamiz. Agar N natural sonlar to‘plamining A to‘plam osti tarkibida 1 bilan har bir a soni uchun undan bevosita keyin keluvchi $a+1$ soni bo‘lsa, u holda A to‘plam N to‘plam bilan ustma-ust tushadi.

Bu degani 1 sonidan boshlab, unga bitta birlikni qo‘shish natijasida ixtiyoriy natural sonni hosil qilamiz. Matematik induksiya prinsipini isbotlashni teskarisidan boshlaymiz. Faraz qilaylik, yuqoridagi xossaga ega bo‘lgan to‘plam bilan ustma-ust tushuvchi A to‘plam mavjud (ya’ni $1\in A$ va $a\in A$ tegishliligidan $a+1\in A$). U holda uning to‘ldiruvchisi $A^1=N\backslash A$ bo‘sh emas, ya’ni $A^1\in Ø$.

4^1) aksiomaga asosan A^1 da eng kichik b soni bor. Bu son 1 dan farqli va $1\in A$ bo‘lgani uchun, 1 soni A to‘plam to‘ldiruvchisiga tegishli emas. Demak b soni biror a sonidan bevosita keyin keladi, ya’ni $b=a+1$. $a<b$ va b A^1 to‘plamdagi eng kichik son. Shuning uchun a son A^1 ga tegishli emas, ya’ni u A to‘plamdagi son. U holda $b=a+1$ son ham A to‘plamga tegishli bo‘lishi lozim. Bundan ko‘rinayaptiki b soni bir vaqtda ham A, ham A^1 to‘plamga tegishli bo‘layapti. Buning esa bo‘lishi mumkin emas. Natijada hosil bo‘lgan qarama-qarshilik $A^1=Ø$ ekanini va $A=N$ ekanligini ko‘rsatadi.

Matematik teoremalarni isbotlashda ko‘p hollarda matematik induksiya prinsipidan foydalaniladi.

Masalan,

$$1^2+2^2+\ldots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \qquad (1)$$

tenglikning barcha n natural sonlar uchun to‘g‘riligini isbotlang.

n ning o‘rniga n=1 dan boshlab qiymatlar qo‘yish bilan bu tenglikni n ning ma’lum bir qiymatigacha to‘g‘riligiga ishonch hosil qilish mumkin, ya’ni

n = 1 bo‘lsa $\frac{1(1+1)(2\cdot 1+1)}{6}=\frac{1\cdot 2\cdot 3}{6}=1,$ demak, 1=1

n = 2 bo‘lsa $\frac{2(2+1)(2\cdot 2+1)}{6}=\frac{2\cdot 3\cdot 5}{6}=5$, demak $1^2+2^2=5$

n = 3 bo‘lsa $\frac{3(3+1)(2\cdot 3+1)}{6}=\frac{3\cdot 4\cdot 7}{6}=14$, demak $1^2+2^2+3^3=14$

Ammo n ning katta qiymatlari uchun tenglikning to‘g‘riligini ko‘rsatish qiyin. Boshqacha aytganda barcha n natural sonlar uchun tenglikning to‘g‘riligini ko‘rsatishga qodir emasmiz. Shu sababli, tenglikni isbotlashda boshqacha muhokama yuritamiz. Dastlab tenglikni n=1 uchun to‘g‘riligini ko‘rsatamiz, buni biz ko‘rsatdik. Keyinchalik bu tenglikni biror n qiymat uchun to‘g‘ri deb, undan bevosita keyin keluvchi n+1 qiymat uchun to‘g‘riligini isbotlaymiz, ya’ni

$$1^2+2^2+\ldots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

to‘g‘ri deb,

$$1^2+2^2+\ldots+n^2+(n+1)^2=\frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6} \qquad (2)$$

to‘g‘riligini isbotlaymiz.

Buning uchun (1) tenglikning chap tomoniga $(n+1)^2$ hadni qo‘shib, o‘ng tomonida n ni n+1 ga almashtiramiz. (1)-da n ta natural sonlar kvadratlarining yig‘indisi $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ ga teng bo‘lgani uchun (2) ni chap tomonida almashtirish bajaramiz va quyidagini hisoblaymiz.

$$\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+(n+1)^2=\frac{n(n+1)(2n+1)+6(n+1)^2}{6}=$$

$$=\frac{(n+1)[n(2n+1)+6(n+1)]}{6}=\frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6};$$

Demak n ta natural sonlar kvadratlarining yig‘indisi $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ ga teng ekan.

Bizning bu muhokamamiz mantiqiy jihatdan to‘la emas, chunki bizning «ertami kechmi n ni barcha qiymatlariga yetamiz» iborasini aksiomalar yordamida asoslab bo‘lmaydi. Asoslash uchun quyidagicha yondashamiz. (1) tenglik to‘g‘ri bo‘lgan n ning qiymatlar to‘plamini A bilan belgilaymiz.

Biz 1 sonini A ga tegishli ekanini bilamiz (n =1 uchun tenglik o‘rinli) $n \in A$ bo‘lishidan $n+1 \in A$ (agar tenglik n ning ba’zi bir qiymatlari uchun to‘g‘ri bo‘lsa, u n +1 uchun ham to‘g‘ri).
U holda matematik induksiya prinsipiga asosan A to‘plam natural sonlar to‘plami N bilan ustma-ust tushadi, bu esa tenglikning n ning barcha natural qiymatlari uchun to‘g‘riligini bildiradi.

2). Peano aksiomatikasi.

Natural sonlarni qo‘shish tushunchasi natural sonlar to‘plami aksiomatikasini qurish uchun yagona asos emas. Shuning bilan birga bu tushuncha sodda emas. Ma’lumki, n natural soniga m natural sonini qo‘shishni qadama-qadam, ya’ni qadamga yana bitta birlikni qo‘shish yordamida hosil qilamiz. Masalan : $5+3=(((5+1)+1)+1)$;
Shuning uchun qo‘shish operatsiyasini eng sodda ya’ni 1 sonini qo‘shish operatsiyasiga keltirish mumkin. n +1 soni bevosita n sonidan keyin kelganligi uchun keyingi songa o‘tish to‘g‘risida gapirish mumkin. Shunga ko‘ra natural sonlar to‘plamida asosiy tushuncha sifatida «b soni a sonidan bevosita keyin keladi» tushunchasini tanlash mumkin. Bu holda quyidagi aksiomalar qabul qilinadi.

1) 0- bu natural son;
2) Natural sondan keyin natural son keladi;
3) 0 bu hech qanday natural sondan keyin kelmaydi;
4) Har qanday natural son bevosita faqat bitta natural sondan keyin keladi;
5) To‘liq induksiya aksiomasi;

Aksiomatik nuqtayi nazardan biz ikkita asosiy tushuncha bilan ish ko‘rdik: "natural son" (ob’ekt) va "a dan bevosita keyin keladi".
Hozirgi adabiyotlarda bu aksiomalar sistemasi shakl jihatidan boshqacharoq ifodalanadi.

Natural sonlar – bu biror bo‘sh bo‘lmagan N to‘plam elementlari bo‘lib, to‘plamning ba’zi bir *a* va *b* elementlari uchun quyidagi 4 aksiomani qanoatlantiruvchi «*b* element *a* dan bevosita keyin keladi» munosabati o‘rnatilgan: (*a* soni dan keyin keluvchi sonni a^* bilan belgilaymiz).

1) 1 natural soni mavjud va u bevosita hech bir natural sondan keyin kelmaydi, ya’ni ixtiyoriy *a* soni uchun $a^* \neq 1$;
2) Har bir *a* natural soni uchun undan bevosita keyin keluvchi faqat va faqat bitta natural son a^* mavjud ya’ni $a=b \Rightarrow a^* = b^*$
3) 1 dan boshqa ixtiyoriy natural son faqat va faqat bitta natural sondan keyin keladi $a^*=b^* \Rightarrow a=b$
4) Induksiya aksiomasi.

Aytaylik, M N natural sonlar to‘plamining to‘plam osti quyidagi xossalarga ega bo‘lgan bo‘lsin:

a) 1 soni M ga tegishli bo‘lsin:

b) agar a natural soni M ga tegishli bo‘lsa, u holda a^* soni ham M ga tegishli bo‘ladi, u holda M barcha natural sonlardan iborat bo‘ladi, ya’ni M N bilan ustma-ust tushadi. Natural sonlar aksiomalar sistemasi 1891-yilda italyan matematigi va mantiqchisi Turin universiteti professori Djuzeppe Peano tomonidan («O ponyatii chisla» maqolasida) taklif qilindi. Natural sonlar to‘plami uchun biz ikkita aksiomatikani berdik. Bu aksiomalar sistemasi teng kuchlimi, boshqacha aytganda ularning ikkalasi ham natural sonlar to‘plamini ifodalaydimi, degan savol tug‘iladi. Ikkita aksiomalar sistemasi tasdiq uchun olingan asosiy tushunchalar bilan farq qiladi. Shuning uchun bir sistemadagi aksioma, ikkinchi sistemada isbot talab qiladigan teorema bo‘lib keladi. Quyidagi amallarni bajarib bir aksiomatikadan ikkinchisiga o‘tilsa, ular ekvivalent deyiladi:

1) berilgan sistemadagi asosiy tushunchalardan ikkinchi sistema asosiy tushunchalarini aniqlash;

2) berilgan sistema aksiomalariga ko‘ra ikkinchi sistema aksiomalarini isbotlash;

Oldingi temachalarda biz qo‘shish aksiomalaridan foydalanib «bevosita keyin keladi» munosabati xossasini isbotladik. Bu xossalar ichida esa Peano aksiomalar sistemasidagi barcha tasdiqlar bor. Demak, Peano aksiomalar sistemasi qo‘shish aksiomalaridan kelib chiqadi.

Shunga o‘xshash Peano aksiomalar sistemasidan qo‘shish aksiomalar sistemasining kelib chiqishini ko‘rsatish mumkin.

O‘z-o‘zini nazorat qilish uchun savollar

1. Matematik induksiya prinsipi mohiyatini aytib bering.
2. Bitta teorema yoki tenglikni olib uning to‘g‘riligini matematik induksiya prinsipi yordamida isbotlang.
3. Peano aksiomalarini aytib bering.
4. Qo‘shish aksiomalari bilan Peano aksiomalari teng kuchlimi?

II.1.5.NATURAL SONLAR MIQDORLARNI O‘LCHASH NATIJASI SIFATIDA

Kishilarning turmush faoliyatida faqat buyumlarning sanog‘ini bilishgina emas, balki turli kattaliklarni – uzunlik, massa, vaqt va boshqalarni ham o‘lchashga ehtiyoj paydo bo‘ldi. Shu sababli natural sonlarning paydo bo‘lishida sanoqqa bo‘lgan ehtiyoj bilan o‘lchashga bo‘lgan ehtiyoj ham sabab bo‘ldi. Natural sonlarni kattaliklarni o‘lchash natijasida ya’ni miqdorlarni o‘lchash asosida paydo bo‘lishiga to‘xtalamiz.

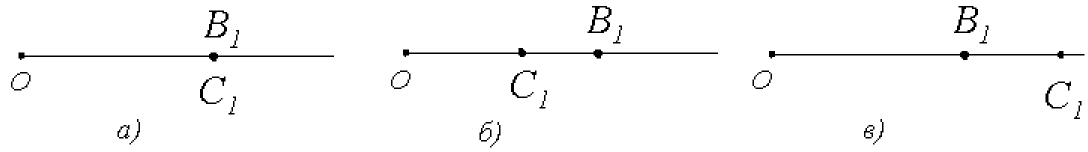
1). Kesmalarni taqqoslash. Kesmalar ustida amallar.

Bizga a=[AB] va b=[BC] kesmalar berilgan bo‘lsin. Bu kesmalarga teng kesmalarni boshi 0 nuqtada bo‘lgan biror nurga qo‘yamiz. $OB_1=a$ va $OC_1=b$ kesmalarni hosil qilamiz. Bunda uchta hol bo‘lishi mumkin:

1) B_1 va C_1 nuqtalar ustma-ust tushadi (27a– chizma). U holda OB_1 va OC_1 bitta kesmani ifodalaydi, demak $a=b$;

2) C_1 nuqta OB_1 kesma ichida yotadi (27b– chizma) . U holda OC_1 kesma OB_1 kesmadan kichik (yoki OB_1 kesma OC_1 kesmadan katta) deyiladi va quyidagicha yoziladi; $OC_1 < OB_1$ ($OB_1>OC_1$) yoki $b< a$ $(a>b)$:

3) B_1 nuqta OC_1 kesma ichida yotadi (27*в*- chizma) U holda OB_1 kesma OC_1 kesmadan kichik deyiladi. $OB_1 < OC_1$ yoki $a < b$ ko‘rinishda yoziladi.

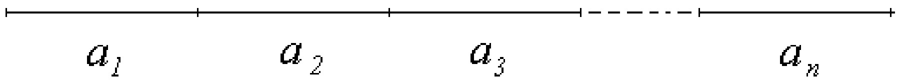


27 – chizma

Kesmalar ustida turli amallar bajariladi.

1-Ta’rif: Agar $a_1, a_2, \ldots, a_n$ kesmalarning birlashmasi a kesmaga teng bo‘lib, kesmalar biri-biri bilan ustma-ust tushmasa (ya’ni ichki nuqtalarga ega bo‘lmasa) va bir kesma ikkinchi kesmaning oxiriga birin-ketin tushsa, u holda a kesma $a_1, a_2, \ldots, a_n$ kesmalarning yig‘indisi deyiladi (3-chizma) yig‘indi quyidagi ko‘rinishda yoziladi:

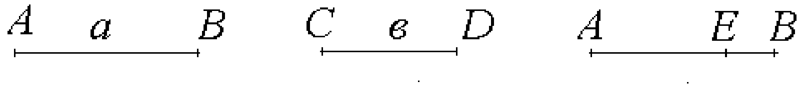
$$a=a_1 + a_2+ \ldots + a_n$$



28-chizma.

2-Ta’rif. a va b kesmalarning ayirmasi deb, shunday c kesmaga aytiladiki, uning uchun $b+c=a$ tenglik bajariladi.

a va b kesmalarning ayirmasi quyidagicha topiladi. a=[AB] kesma yasaladi va shu kesmada b kesmaga teng [AE] kesma ajratiladi. Natijada c= [EB] kesma hosil bo‘ladi (29-chizma)



29-chizma.

a-b ayirma mavjud bo‘lishi uchun a kesma b kesmadan katta bo‘lishi zarur va yetarlidir.

2). Kesmalar ustidagi amallar xossalari

Kesmalar ustida amallar quyidagi xossalarga ega:

1) Har qanday a va b kesmalar uchun $a+b=b+a$ tenglik o‘rinli (kesmalarni qo‘shish o‘rin almashtirish qonunga bo‘ysunadi).

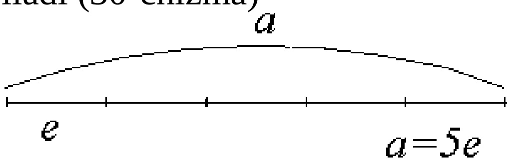
2) Har qanday a,b,c kesmalar uchun $a+(b+c)=(a+b)+c$ tenglik o‘rinli (kesmalarni qo‘shish gruppalash qonuniga bo‘ysunadi)

3) Har qanday a,b va c kesmalar uchun $a<b$ bo‘lsa, u holda $a+c<b+c$ bo‘ladi.

3). Natural son kesma uzunligining qiymati sifatida

Eng avvalo kesmalar uzunligini o‘lchashni eslaymiz. Kesmalar to‘plamida birorta e kesma tanlanib, u birlik kesma yoki uzunlik birligi deyiladi. Keyinchalik esa boshqa kesmalar shu birlik e kesma bilan taqqoslanadi. Biror a kesma e birlik kesmaga teng n ta kesma yig‘indisidan iborat bo‘lsa, u tubandagicha yoziladi:

$\underbrace{e+e+\ldots+e}_{n\ ta}=ne$ va n natural son a kesma uzunligining e uzunlik birligidagi son qiymati deyiladi (30-chizma)



$a = 5e$

30-chizma

Agar uzunlik birligi sifatida boshqa kesma olinsa, u holda *a* kesma uzunligining son qiymati o‘zgaradi.

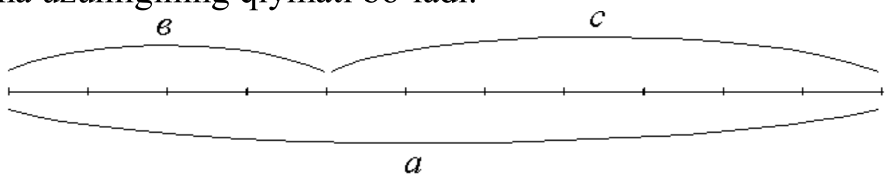
Shunday qilib, *a* kesma uzunligining son qiymati sifatidagi natural son *a* kesma tanlab olingan *e* birlik kesmalarning nechtasidan iboratligini ko‘rsatadi. Tanlab olingan *e* uzunlik birligida bu son yagonadir. Bu sonlar uchun «teng» va «kichik» munosabatlarini qaraylik. Aytaylik m natural son *a* kesma uzunligining, *n* natural son *b* kesma uzunligining *e* uzunlik birligidagi son qiymatlari bo‘lsin. Agar *a* va *b* kesmalar teng bo‘lsa, ular uzunliklarining son qiymatlari ham teng bo‘ladi, ya’ni $m=n$;

Agar *a* kesma *b* kesmadan kichik bo‘lsa, u holda $m<n$ bo‘ladi va teskari tasdiq ham to‘g‘ri bo‘ladi. Kesmalar va ular uzunliklarining son qiymatlari orasida o‘rnatilgan bog‘lanish kesmalar uzun-liklarini taqqoslashni ularni tegishli son qiymatlarini taqqoslashga keltiradi.

4). Kattaliklarning qiymatlari bo‘lgan sonlarni qo‘shish va ayirishning ma’nosi

Agar natural sonlar kesmalarning uzunliklarini o‘lchash natijasida hosil bo‘lgan bo‘lsa, bu sonlarni qo‘shish va ayirish qanday ma’noga ega bo‘lishini aniqlaymiz.

1) Qo‘shish. Masalan, 4 va 7 sonlari *b* va *c* kesmalarni *e* birlik yordamida o‘lchash natijalari bo‘lsin, $b= 4e$, $c=7e$. 4+7=11 ekani ma’lum. Bunda 11 soni $a=b+c$ kesma uzunligining qiymati bo‘ladi.



31-chizma

Umumiy holda *a* kesma *b* va c kesmalar yig‘indisi hamda $b=me$; $c=ne$ bo‘lsin. Bunda m va n - natural sonlar. Bu deganimiz, *b* kesma *m* ta, c kesma n ta shunday bo‘lakka bo‘linadi, bu bo‘laklarning har biri birlik kesma *e* ga teng. Shunday qilib, m va n natural sonlar yig‘indisini uzunliklari m va n natural sonlar bilan ifodalangan *b* va c kesmalardan tuzilgan *a* kesma uzunligining qiymati sifatida qarash mumkin.

2) Ayirish. Agar *a* kesma, *b* va c kesmalardan iborat bo‘lib, *a* va *b* kesmalarning uzunliklari m va n natural sonlar bilan ifodalansa (bir xil uzunlik birligida), c kesma uzunligining son qiymati *a* va *b* kesmalar uzunliklari son qiymatlari ayirmasiga teng. $c=(m-n)e$

Bundan ko‘rinadiki, natural sonlarning $m-n$ ayirmasining uzunliklari mos ravishda m va n natural sonlar bilan ifodalangan *a* va *b* kesmalar ayirmasi bo‘lgan c kesma uzunligining qiymatini ifodalar ekan.

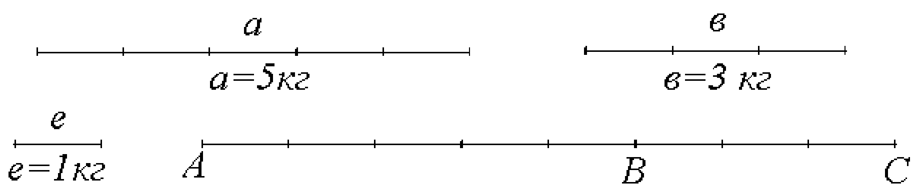
Agar $a=7e$ kesma *b* va c kesmalardan iborat bo‘lib $b=3e$ bo‘lsa, u holda $c=(7-4)e=3e$ bo‘ladi.

Natural sonlarni qo‘shish va ayirishga bunday yondashish nafaqat kesmalar uzunliklarini o‘lchash, balki boshqa kattaliklarni o‘lchash bilan ham bog‘liq. Boshlang‘ich sinflar uchun matematika darsliklarida turli xil kattaliklar va ular ustida amallarga doir masalalar ko‘p. Bu masalalarni yechish esa kattaliklarning qiymatlari bo‘lgan natural sonlarni qo‘shish va ayirishning ma’nosini aniqlash bunday masalalarni yechishda amallarni tanlashga imkon beradi.

Masalan, Karim 5 kg olma, Olim 3 kg nok terdi. Karim va Olim hammasi bo‘lib necha kilogramm meva tergan?

Masala qo‘shish amali bilan yechiladi. Masalani yechishda terilgan olmalar massasini *a* kesma, noklar massasini *b* kesma ko‘rinishida tasvirlaymiz (32-chizma).

U holda terilgan hamma mevalar massasini *a* ga teng [AB] va *b* ga teng [BC] kesmadan tuzilgan [AC] kesma yordamida tasvirlash mumkin. [AC] kesma uzunligining son qiymati [AB] va [BC] kesmalar son qiymatlarining yig‘indisiga teng bo‘lgani uchun terilgan mevalar massasini qo‘shish amali bilan topamiz.

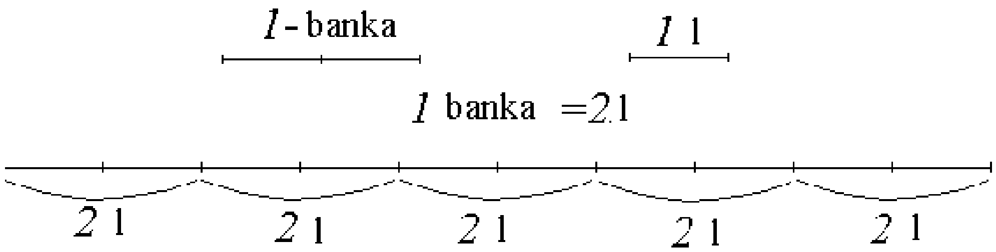


32-chizma.

5). Kattaliklarning qiymatlari bo‘lgan sonlarni ko‘paytirish va bo‘lishning ma’nosi

Kattaliklarning qiymatlari bo‘lgan sonlarni ko‘paytirish va bo‘lishning ma’nosini ko‘rsatish uchun dastlab masalalarga murojaat qilamiz.

Masala. Omborxonada har birida 2 *l* sharbat bo‘lgan 5 ta banka bor. Bu bankalarda hammasi bo‘lib qancha litr sharbat bor. Bu masalani kesmalar yordamida ifodalaylik (33-chizma).



33-chizma.

Bu masala ko‘paytirish amali bilan yechiladi: 2x5=10(*l*). Nima uchun?

Bu savolga yuqoridagi chizma yordamida javob beramiz.

5 ta bankada hammasi bo‘lib qancha litr sharbat borligini bilish uchun 2*l*+2*l*+2*l*+2*l*+2*l* yig‘indini topish yetarli. 2 *l* deganimiz 2·1 ko‘paytma bo‘lgani uchun yig‘indini quyidagi ko‘rinishda yozish mumkin. (2+2+2+2+2)·1. 5 ta bir xil

qo‘shiluvchining yig‘indisini 2·5 ko‘paytma bilan almashtirib, (2+2+2+2+2)·1=(2·5)·1*l*=10·1*l*=10*l* ni hosil qilamiz. Bu masalada sharbat egallagan hajmning ikki o‘lchov birligi banka va litr haqida so‘z yuritilmoqda. Shu sababli bu masalani boshqa usulda ham yechish mumkin. Dastlab birlik sifatida bankani olsak, keyin litrga o‘tsak, boshqacha aytganda yangi birlik sifatida litrni olsak 1 banka-2 litr.

U holda 5·1 *b*= 5·(2*l*)= 5(2 · 1*l*)=(5·2)·1*l*=10 *l*

Bundan ko‘rinadiki, natural sonlarni ko‘paytirish kattalikning yangi, yanada maydaroq birligini tasvirlar ekan. Bu xulosamizni sonlarga-kesmalar uzunliklarining qiymatlariga qo‘llab umumiy ko‘rinishda isbotlaymiz.

a kesma *e* ga teng m ta kesmadan, *e* kesmaning o‘zi e_1 ga teng n ta kesmadan iborat bo‘lsa, *a* kesma uzunligining son qiymati uzunlikning e_1 birligida m·n ga teng bo‘ladi. Haqiqatan ham, *a* kesmaning e_1 kesmaga teng bo‘laklar soni $\underbrace{n+n+...+n}_{m\,ta}$ ga teng, Shuning uchun u n·m ga teng. Demak, $a=(m\cdot n)e_1$;

Shunday qilib, natural sonlarni ko‘paytirish uzunlikning yangi birligiga o‘tishni ifodalaydi. Bu deganimiz, agar m natural son *a* kesma uzunligining *e* uzunlik birligidagi qiymati, n natural son *e* kesma uzunligining e_1 uzunlik birligidagi qiymati bo‘lsa, m · n ko‘paytma *a* kesma uzunligining e_1 uzunlik birligidagi qiymati demakdir. Kattaliklarning qiymatlari bo‘lgan natural sonlarni bo‘lishning ma’nosini aniqlaymiz.

Masala. Bir bankaning sig‘imi 2 *l* bo‘lsa, 10 *l* meva sharbatini qo‘yish uchun necha banka kerak bo‘ladi?

Masalani yechish uchun 10 *l* ni kesma bilan tasvirlaymiz va unda 2 *l* ni tasvirlovchi kesma necha marta joylashishini aniqlaymiz:

10 *l* : 2 *l*=5(*b*)

Bu masalaning yechilishini boshqacha asoslash mumkin. Masalada sharbat egallagan hajmning ikki birligi - litr va banka qaralmoqda, o‘lchash natijasini bankalar bilan, ya’ni yangi birlikda ifodalash talab etilmoqda. Yangi birlikda (bankada) 2 ta eski birlik (2 *l*) bor.

Shuning uchun 1 *l*=1 *b*: 2 ; 10 *l* = 10 (1*b*:2)=(10:2)·1*b*=5·1*b*=5*b*;

Ko‘rinib turibdiki, natural sonlarni bo‘lish kattalikning yangi birligiga o‘tish bilan bog‘liq ekan. Buni umumiy holda ko‘rsatamiz. *a* kesma *e* ga teng m ta kesmadan, e_1 kesma *e* ga teng n ta kesmadan iborat bo‘lsin. e_1 uzunlik birligida *a* kesma uzunligini ifodalaydigan sonni qanday topish mumkinligini aniqlaymiz.

$e_1= n\,e$ bo‘lgani uchun $e=e_1 : n$. U holda $a= me=m(e_1 : n)=(m : n)\, e_1$;

Shunday qilib, kesmalar uzunliklarining qiymati bo‘lgan natural sonlarni bo‘lish uzunlikning yangi (yanada yirikroq) birligiga o‘tishni tasvirlaydi: agar m natural son *a* kesma uzunligining *e* uzunlik birligidagi qiymati, n natural son *e* kesma uzunligining e_1 uzunlik birligidagi qiymati bo‘lsa, m:n bo‘linma *a* kesma uzunligining e_1 uzunlik birligidagi qiymatidir.

Masalan, agar $a=16e$ va $e_1=4e$ bo‘lsa, *a* kesma uzunligining e_1 uzunlik birligidagi qiymati $4e_1$ ga teng bo‘ladi:

$a=16e=16\cdot(e_1:4)=(16:4)\,e_1=4\,e_1$;

Boshlang‘ich sinf matematika darslarida turli kattaliklar qatnashadigan ko‘paytirish va bo‘lish bilan yechiladigan sodda masalalar ko‘p. Bularni yechishda ko‘paytirish bir xil qo‘shiluvchilarni qo‘shish amali sifatida, bo‘lish esa ko‘paytirishga teskari amal sifatida qaraladi.

II.1.6.Tartibiy va miqdoriy natural sonlar

Bizga ma’lumki, natural sonlar deb buyumlarni sanashda qo‘llaniladigan sonlarga aytiladi. Sanash jarayoni nimani ifodalaydi?
Masalan, biz A={*a, b, c, d, e*} to‘plam elementlarini sanashni qanday olib borishimiz kerak? Bu to‘plamning har bir elementini ko‘rsatib, biz «birinchi», «ikkinchi» , «uchinchi», «to‘rtinchi» , «beshinchi» deymiz. Shu bilan sanash jarayonini tugatamiz, chunki A to‘plamning barcha elementlaridan foydalandik. Sanab borishda biz tubandagi qoidalarga amal qildik.

A to‘plamning ixtiyoriy elementi sanashda birinchi ko‘rsatilishi, birorta element ham tushib qolmasligi, bitta element ikki marta sanalmasligi kerak.
A to‘plamni sanab biz A to‘plamda 5 ta element bor deymiz, ya’ni bu to‘plamning miqdoriy xarakteristikasiga ega bo‘lamiz. Buni hosil qilish uchun esa tartibiy natural sonlar: «birinchi», ... «beshinchi» dan foydalandik. Boshqacha aytganda biz natural qator kesmasi deb ataluvchi {1,2,3,4,5,} to‘plamdan foydalandik.

1-Ta’rif. Natural qatorning N_a kesmasi deb *a* natural sondan katta bo‘lmagan natural sonlar to‘plamiga aytiladi.

Masalan, N_5 kesma 1,2,3,4,5 natural qatorning N_a kesmasi $x \le a$ bo‘lgan barcha *x* sonlardan tashkil topadi.

Natural qator kesmasining ta’rifi to‘plam elementlari sanog‘i tushunchasiga olib keladi. Bunda A to‘plam elementlari bilan N_a kesma o‘rtasida bir qiymatli moslik o‘rnatiladi.

2-Ta’rif. A to‘plam elementlarini sanash deb, A to‘plam bilan natural qatorning N_a kesmasi orasida o‘zaro bir qiymatli moslik o‘rnatishga aytiladi. a soni deb A to‘plamdagi elementlar soniga aytiladi va n(A)=*a* kabi yoziladi. Bu a soni yagona va u miqdoriy natural sondir. Shunday qilib sanashda chekli A to‘plam elementlari nafaqat ma’lum tartibda joylashtiriladi(bunda «birinchi», «ikkinchi» va hokazo sonlar bilan ifodalanuvchi tartibiy natural sonlardan foydalaniladi), shuningdek A to‘plam nechta elementni o‘z ichiga olishi aniqlanadi (miqdoriy natural sonlardan foydalaniladi). Sanash uchun avvaldan yetarlicha sonlar zapasiga ega bo‘lish zarur va bu sonlar ma’lum tartibda joylashishi, birinchi son mavjud bo‘lishi lozim. Sanash chekli to‘plam elementlarini tartiblashtirish uchun, ham ularning miqdorini aniqlash uchun xizmat qiladi. Demak tartibiy son miqdoriy songa olib keladi. Miqdoriy natural sonlar chekli teng quvvatli to‘plamlar sinfining umumiy xossasini ifodalaydi.Shunday qilib, miqdoriy va tartibiy natural sonlar boshlang‘ich ta’limda o‘zaro uzviy boglangan, birgalikda qatnashadi.

O‘z-o‘zini nazorat qilish uchun savollar

1.Kesmalarni taqqoslashni tushuntirib bering.
2.Kesmalar ustida bajariladigan amallarni tushuntiring.
3.Kesmalar ustida amallar qanday xossalarga ega?
4.Kattaliklarni qiymatlari bo‘lgan sonlar ustida bajariladigan

amallarning ma’nosi.

5.Tartibiy miqdoriy natural sonlar deganda qanday sonlarni tushunasiz?

II.2. SANOQ SISTEMALARI. POZITSION SANOQ SISTEMALARI

II.2.1. Sanoq sistemalari

1). Sanoq sistemalari tarixi

Hozirgi kunda har bir qadamda sonlar bilan ish ko‘rishga to‘g‘ri keladi. Shuning uchun biz har qanday sonni to‘g‘ri aytishimiz va yozishimiz, ular ustida amallar bajarishimiz kerak. Buning uchun sanoq sistemalari to‘g‘risida bilishimiz lozim. Umuman, sanoq sistemasi deb, sonlarni aytish va yozish hamda ular ustida amallar bajarishda ishlatiladigan tilga aytiladi. Dastavval sanoq sistemalari tarixi bilan tanishamiz. Ma’lumki, son tushunchasi juda qadim zamonlarda vujudga kelgan. O‘sha vaqtning o‘zidayoq sonlarni yozishga zaruriyat tug‘ilgan. Yozuv paydo bo‘lmasdan oldin kishilar sonlarni ayta bilganlar, hisob-kitob yuritganlar. Bunda ularga turli qurollar va eng avvalo qo‘l va oyoqdagi barmoqlar yordam bergan. Shuningdek kertikli yog‘och tayoqchalar, tugunli ip va arqonlar kabi hisob-kitob asboblaridan foydalanilgan. Kertik va tugunlar yordamida sonlarni «yozish»gan. Ammo bunday «yozish» qulay bo‘lmagan, chunki katta sonlarni yozish uchun anchagina kertik va tugunlar yasashga to‘g‘ri kelgan, bu esa yozuvnigina qiyinlashtirmasdan, balki sonlarni taqqoslashda, sonlar ustida amallar bajarishda ham qiyinchiliklar tug‘dirgan. Shuning uchun sonlarni yozishning boshqacha, tejamliroq usuli vujudga kelgan: hisoblash ishlari bir xil sondagi elementlardan iborat bo‘lgan gruppalar bilan olib borilgan.

Masalan, bitta odam ikkita qo‘l barmoqlari elementlari bir gruppa hisoblangan. Bunda hisob bir necha odam tomonidan olib borilgan. Birinchi odam barmoqlarini tartibli ravishda hammasini buklagandan keyin, ularni yozdiradi va shu zahoti ikkinchi odam birinchi barmog‘ini bukadi. Undan keyin ikkinchi odam keyingi o‘nliklarni hisobini olib boradi, uning hamma barmoqlari bukilgandan keyin, qaytadan barmoqlarini yozdiradi va uchinchi odam birinchi barmog‘ini bukadi, hisob natijasi taxminan quyidagicha olib boriladi: masalan uchinchi odamning beshta barmog‘i, ikkinchi odamning sakkizta barmog‘i va birinchi odamning uchta barmog‘i bukilsa, bu 583 sonni bildirgan. Odamning ikkita qo‘l barmoqlari va ikkita oyoq barmoqlari gruppa hisoblangan va u 20 ta elementdan iborat bo‘lgan. Bunday 20 lik hisob – kitoblar Amerika qabilalarida XYI asrgacha saqlanib kelgan. Fransuzlarda hozir ham uning qoldiqlari bor. Masalan ular «sakson besh» sonini «to‘rt marta yigirma va besh» deb ataydilar. Iqtisodiy ehtiyojning o‘sib borishi natijasida insoniyat asta-sekin hisoblash usullarini vujudga keltira boshladi. Ularning keyingi rivoji bundan taxminan besh ming yil avval qadimgi davlatlar – Vavilon, Misr, Xitoy va boshqalarning shakllanish davriga to‘g‘ri keladi. Bu davrda sonlar yozuvining yangi usullari yaratildi. Qadimgi Vavilonda oltmishtadan gruppalab hisoblaganlar, ya’ni u yerda oltmishli sanoq sistemasidan foydalanilgan. Masalan, vavilonlik matematik 137 sonini bunday tasvirlagan : $137=2\cdot 60+17$. Albatta bu son belgilar – uchburchaklar va ponalar bilan yozilgan. Gap shundaki, qadimgi vavilionliklar yozish uchun loyli tablichkalardan uchburchakli ponalar bosib chiqarganlar. Keyin bu tablichkalarni quritganlar va olovga tutib kuydirganlar. Sonlarni yozish uchun ponalarning holatlaridan foydalanilgan: vertikal holat – uchi bilan pastga va gorizontal holat – uchi bilan chapga qaratilgan. Bunda ∇ belgi bir va oltmishni, ◁ belgi – o‘nlikni bildirgan boshqa sonlar bu belgilar va qo‘shish amali bilan tasvirlangan. Masalan,

6 soni bunday tasvirlangan:

∇∇∇
∇∇∇

199 soni bunday:

∇∇∇
∇∇∇ ◁ ∇∇∇
∇∇∇

Oxirgi yozuv sonining oltmishli sistemadagi yozuvidir: 60+60+60+10+9=3· 60+19. Biroq qadimgi Vavilonda paydo bo‘lgan sonlar yozuvi kamchiliklarga ega edi: Unda katta sonlarni belgilash qiyin edi: sanoq sistemasining asosini – 60 sonini belgilash uchun maxsus belgi yo‘q edi, bu esa ba’zi yozuvlarni turlicha o‘qishga olib kelar edi. Oltmishli sanoq sistemasining vujudga kelishida aylanani 360 ta teng bo‘lakka bo‘lish, shu bilan birga yilni 360 kunga bo‘lish asos qilib olingan, degan taxmin mavjud. Bu sanoq sistemasining qoldiqlari shu kungacha saqlanib kelgan: aylanani 360^o ga bo‘lishga yana burchaklarni gradus, minut va sekundlar bilan o‘lchashni ko‘rsatish mumkin. Qadimgi misrliklar o‘ntalab hisoblaganlar. Ularda maxsus belgilar faqat xonalarni – birlar, o‘nlar, yuzlar, minglar va boshqalarni belgilash uchun ishlatilgan. Birdan to‘qqizgacha bo‘lgan sonlar tayoqchalar yordamida yozilgan.

1-I, 10-⋂, 100 - ⊂, 1000 - 1

Masalan, 132 sonini misrliklar quyidagicha: ⊂⋂⋂⋂I I

1234 sonini esa bunday : 1⊂⊂⋂⋂⋂I I I I

ko‘rinishda ayrim holatlarda tekis qator qilib o‘ngdan chapga yoki ustun qilib yuqoridan pastga qarab yozilgan.

Masalan, 65 sonini IIІ⋂⋂⋂, II⋂⋂⋂ yoki ⋂⋂⋂III , ⋂⋂⋂II ko‘rinishda ham yozganlar. Yozuvlar asosan papiruslarda bo‘yoqlar bilan bajarilgan. Ba’zan yozish uchun tosh, daraxt, teri, holst, sopol sinig‘idan foydalanilgan.

2). Nopozitsion sanoq sistemalari

Yuqorida sonlarni yozishda sonni ifodalovchi belgilarning o‘rni ahamiyatga ega emas. Shuning uchun sonlarni yozishning bu sistemasiga nopozitsion sanoq sistemasi deyiladi. Misr papiruslarining ayrimlari bizning kungacha yetib kelgan. Ulardan biri –«Moskva matematik papirusi» deb nomlangani Moskvada A.S.Pushkin nomidagi tasviriy san’at davlat muzeyida saqlanadi. Shunisi qiziqki, misrliklar ko‘paytirish amalini ikkilantirish usuli bilan bajarganlar. Masalan, 25 ni 9 ga ko‘paytirish uchun quyidagi amallarni bajarish kerak bo‘lgan.

$$25(1+2\cdot2\cdot2)=25+25\cdot2\cdot2\cdot2=25+50\cdot2\cdot2=25+100\cdot2=25+200=225$$

Bo‘lish amali ko‘paytirishga teskari amal deb qaralgan, ya’ni shunday son tanlanganki, uni bo‘luvchiga ko‘paytirganda bo‘linuvchi hosil bo‘lgan. Umuman, qadimgi misrliklar va vavilonliklar yetarlicha katta hajmdagi matematik bilimga ega edilar, lekin bularning hammasi asosan tajriba xarakterida edi. Aslini olganda umumlashmalar va isbotlar yo‘q edi, ya’ni matematika fani endigina dunyoga kelmoqda edi. Uning keyingi rivojlanishiga qadimgi Gretsiya olimlaridan Fales (bizning eramizgacha 624-547 y). Pifagor (eramizgacha taxminan 580-500), Demokrit (eramizgacha taxminan 460-370 y), Platon (bizning eramizgacha 427-347), Evklid (bizning eramizgacha taxminan 300 y), Arximed (bizning eramizgacha taxminan 287-212 y), Eratosfen (eramizgacha 276-194 y) va boshqalar katta hissa qo‘shdilar. Bu son haqidagi ta’limotning tarixi va rivojlanishidagi butun bir davrdir. Shuni eslatish kerakki, Qadimgi Gretsiyada ham nopozitsion sanoq sistemasi mavjud edi. Ular 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 sonlarni grek alfavitining birinchi to‘qqizta harfi bilan, masalan $\alpha=1,\beta=2,\gamma=3,\delta=4,\varepsilon=5$ va h.k.

10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90 sonlarini esa navbatdagi 9 ta harf bilan $(10=\iota, 20=\chi, 30=\lambda, 40=\mu, 50=\gamma$ va h.k.)

100, 200, 300, 400, 500, 600, 700, 800,900 sonlarni qolgan 9 ta harf bilan belgilaganlar $(100=\rho, 200=\delta, .300=\tau$ va hk)

Masalan 325 sonini $\overline{\tau\chi\varepsilon}$ ko‘rinishda yozilgan, bu yozuvda son so‘zdan farq qilishi uchun ustiga chiziq qo‘yilgan.

Greklar mingliklarni ifodalashda birliklarni ifodalovchi harfni chapdan pastiga shtrix qo‘yganlar. Masalan, $\overline{\varepsilon\rho\mu\beta}$ yozuv 5142 sonini bildirgan. 10000 soni esa miriado deyilib, M harfi bilan belgilangan. $\overset{\lambda\varepsilon}{M\gamma\beta}$ yozuv 350052 sonini bildiradi.

Ikki ming yildan sal ilgari Garbiy Yevropadagi barcha mamlakatlar va Osiyoning ko‘pgina mamlakatlari qadimgi rimliklarga bo‘ysungan. Rim imperiyasida matematika rivojlantirilmasdan, undan faqat amaliy maqsadlar uchun foydalanilgan. Qadimgi Rimdan qolgan narsalardan biri sonlarni yozishning yana bitta usulidir. Rim sanoq sistemasida ham Qadimgi Misr sistemasidagi kabi belgili sonlar bor.

Bir- I, Besh – V, O‘n - X , Ellik – L, Yuz -C , Besh yuz –D, Ming – M

Qolgan hamma sonlar shu belgili sonlarga qo‘shish va ulardan ayirish orqali hosil qilinadi. Kichik songa tegishli belgi katta songa tegishli belgidan oldin turgan bo‘lsa, ayirish bajariladi.

Kichik songa tegishli belgi katta songa tegishli belgidan keyin turgan bo‘lsa qo‘shish bajariladi.

Masalan: IV–to‘rt (5-1=4), XC-to‘qson (100-10=90), XL–qirq (50-10=40). VI-olti (5+1=6), CX – biryuz o‘n(100+10=110)

Bir necha sonni rimcha nomerlash bilan yozamiz. 265- bu ikki yuz (CC) plyus oltmish, ya’ni ellik plyus o‘n (LX), plyus besh (V). Demak, 265 soni bunday yoziladi: CCL XV: 385 – bu uch yuz (CCC) plyus sakson, ya’ni ellik plyus o‘ndan 3 marta (LXXX), plyus besh (V). Demak, 385 soni bunday yoziladi: CCC LXXXV. To‘rt, besh va olti xonali sonlar m harfi (lotincha millming so‘zidan olingan) yordamida yoziladi, uning chap tomoniga minglar, o‘ng tomoniga yuzlar, o‘nlar, birlar yoziladi.

Masalan: XXXIXm DXXXVI yozuv 39536 sonning, CCXXXVIIIm DCXLVI yozuv 238646 sonning yozuvidir.
Qadimgi Rus madaniyati greklar madaniyati bilan bog‘liq bo‘lgani uchun, ularda ham sonlarning belgilanishi greklardagi belgilashlarga o‘xshash bo‘lgan, ya’ni sonlarni harflar bilan belgilashgan.

O‘z-o‘zini nazorat qilish uchun savollar

1. Sanoq sistemalari tarixi haqida tushuntiring.
2. Vavilonliklarning oltmishli sanoq sistemasi to‘g‘risida gapiring.
3. Misrliklarda sonlarning yozilishini ko‘rsating.
4. Qadimgi Gretsiyada sonlarning grek alvafiti orqali ifodalanishini aytib bering.
5. Rim sanoq sistemasida belgili sonlarni yozib ko‘rsating, ixtiyoriy sonni belgili sonlar yordamida ifodalang.

II.2.2.Pozitsion sanoq sistemalari

1).O‘nli sanoq sistemasining vujudga kelishi

Pozitsion sanoq sistemasining vujudga kelishi matematikaning rivojlanishida katta rol o‘ynaydi. Bu sistemada bitta belgi (raqam) sonlarning yozilishida joylashish tartibiga ko‘ra turli sonlarni ifodalashi mumkin. Pozitsion sistemaning vujudga kelish tarixi bilan birmuncha tanishib o‘tamiz.

V-XII asrlarda Sharq mamlakatlaridan Hindiston va Yaqin Sharqda matematika sezilarli darajada rivojlandi. Hindiston va Xitoyda matematika Misrdagidek bundan 5 ming yil avval paydo bo‘lgan.

Ayniqsa, hind olimlarining arifmetikaga qo‘shgan hissalari kattadir, chunki ular hozirgi kunda butun insoniyat qo‘llagan sonlarni o‘qish va yozish usulini ya’ni o‘nli sanoq sistemasini kashf qildilar.

Hind matematiklari o‘ylab topgan kashfiyotning mohiyati shundaki, ular sonlarni yozishda har bir raqamning yozuvidagi qiymati uning o‘rniga, pozitsiyasiga bog‘liq. Masalan, 823 sonidagi 8 raqami 8 yuzlikni, 87 sonidagi o‘sha 8 raqami 8 o‘nlikni, 8926 sonidagi 8 raqami esa 8 minglikni bildiradi. Bundan o‘nta raqam yordamida har qanday sonni yozish mumkin ekan degan xulosa chiqadi. Shuning uchun o‘nli sanoq sistemasi pozitsion sistema deyiladi. Undan tashqari, Hindistonda birinchi marta xona birligi yo‘qligini bildirish uchun noldan foydalanildi, bu esa sonlar yozuvini takomillashtirish va hisoblashlarni osonlashtirishda katta rol o‘ynaydi.

To‘g‘ri nolning bizga odat bo‘lgan yozuvi birdaniga paydo bo‘lmagan. Avvalo sonda birorta xona bo‘lmasa, hindlar shu xona raqamini aytish o‘rniga «bo‘sh» so‘zini aytardilar, yozishda esa bo‘sh o‘ringa nuqta qo‘yadilar. Keyinchalik nuqtalar o‘rniga doiracha chizadigan bo‘ldilar. Sonlar yozuvidagi o‘nta 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9 belgining hammasi raqamlar deyiladi. Biroq bundan 200 yil avval bitta belgi – 0 gina raqam deyilar edi. Sonning o‘nli sanoq sistemasida yozilishidagi raqamlarni ham qadimgi Hindiston matematiklari o‘ylab topgan, lekin ularning dastlabki yozilishi hozirgi yozilishidan farq qiladi, raqamlarning hozirgi formasi kitob bosib chiqarish kashf qilingandan keyin -XY asrda qaror topdi. Nima uchun Hindistonda kashf qilingan raqamlar ko‘pincha arab raqamlari deyiladi? Chunki VII asrda vujudga kelgan Arab xalifaligi rivojlanishning yuqori darajasida turgan bir qancha davlatlarni ikki yuz yilga yaqin o‘ziga bo‘ysundirgan edi. Jumladan: Shimoliy Hindiston, Misr, O‘rta Osiyo, Mesopotamiya, Zakavkaze, Shimoliy Afrika va boshqa davlatlar. Bu katta mamlakatning poytaxti (markazi) Bag‘dod shahri edi. Arablar fanning muhimligini tushunar va o‘zlari bosib olgan mamlakatlarning, jumladan, Gretsiya, Hindiston, O‘rta Osiyo olimlarining asarlarini (ishlarini) o‘z tillariga tarjima qilar, o‘rganar va to‘plar edilar. Biroq arab matematiklari qadimgi buyuk olimlarning asarlarini saqlabgina qolmasdan, matematikani rivojlantirishga katta hissa ham qo‘shdilar. IX asrning buyuk olimlaridan biri o‘zbek (Xorazm) matematigi Muhammad ibn Muso al-Xorazmiydir. Uning «Kitob al-jabr» nomli kitobi fanga algebra nomini berdi. Bu kitobda arifmetik masala va tenglamalarning yechilish qoidalari bayon qilingan. Al-Xorazmiy o‘zining boshqa kitobida Hindistonda kashf qilingan hind arifmetikasini, ya’ni o‘nli sanoq sistemasini yoritdi. Uch yuz yil keyin, ya’ni XII asrda u lotin tiliga tarjima qilindi va bu kitob butun Yevropa xalqlari uchun arifmetikadan birinchi darslik bo‘lib qoldi. Natijada Yevropa mamlakatlarida Arab davlatida yashagan muallif yozgan kitob bo‘yicha o‘nli sanoq sistemasi o‘rganilgani uchun o‘nli sistemadagi arab raqamlari deyila boshlandi. Bu esa noto‘g‘ridir. XII asrdan boshlab Garbiy Yevropada uzoq davom etgan turg‘unlikdan so‘ng matematikaga qiziqish uyg‘ondi, bunga savdo-sotiqning kengayishi sabab bo‘ldi .

Yevropada o‘nli sanoq sistemasining tarqalishiga Leonardo Fibonachchining 1202-yilda chop qilingan «Kniga abaka» kitobi yordam berdi. XIII asrdan boshlab o‘nli sistema joriy qilindi va u XVI asrga kelib Garbiy Yevropa mamlakatlarida to‘la foydalana boshlandi.

XVI asr oxirida, Ivan Grozniy podsholigi davrida, Rusda birinchi bosma matematik kitoblar paydo bo‘ldi, bu kitoblardan maqsad turli amaliy masalalarni yechishda hisoblashni osonlashtirishdan iborat edi. Ularda sonlar slavyancha sanoq sistemasida yozilgan edi.

Rus fanining rivojlanishida Leontiy Filippovich Magniskiy tomonidan yozilgan «Arifmetika sirech nauka chislitelnaya» kitobi muhim rol o‘ynadi. Bu kitob Pyotr I davrida 1703-yilda slavyan tilida nashr qilindi, ammo undagi hamma hisoblashlar o‘nli sanoq sistemasida bajarilgan edi. Bu kitob uzoq vaqt barcha ilm kishilari uchun eng zarur kitob bo‘lib qoldi, chunki bu kitobda nafaqat matematikaga oid materiallar, balki astronomiya, navigasiya va boshqa fanlarning ba’zi bir bo‘limlari haqida ma’lumotlar bor edi.

2). O‘nli sanoq sistemasida sonlarning ifodalanishi

Ma’lumki, o‘nli sanoq sistemasida sonlarni yozish uchun 10 ta belgi (raqam)dan foydalaniladi: 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9. Ulardan chekli ketma-ketliklar hosil qilinib, bu ketma-ketliklar sonlarining qisqacha yozuvidir. Masalan: 5 ming +4 yuz+5 o‘n+7 bir 5457 ketma-ketlik sonining qisqacha yozuvidir. Bu yig‘indini bunday ko‘rinishda yozish qabul qilingan: $5\cdot10^3+4\cdot10^2+5\cdot10+7$.

Ta’rif . n natural sonning o‘nli yozuvi deb bu sonni $n=n_k\cdot 10^k + n_{k-1}\cdot10^{k-1} + ... + n_1\cdot10+n_0$ ko‘rinishda yozishga aytiladi, bu yerda n_k, n_{k-1}, ... , n_1, n_0– 0, 1,2,3,4,5,6,7,8,9 qiymatlarni qabul qiladi va $n=n_k\cdot10^k+ n_{k-1}\cdot10^{k-1}+.....+ n_1\cdot10 + n_0$ yig‘indini qisqacha $n=n_kn_{k-1}\ ....n_1n_0$ kabi yozish qabul qilingan.

$1,10,10^2,10^3$, ... ,10^k ko‘rinishdagi sonlar mos ravishda, birinchi, ikkinchi, ... , k+1 - xona birliklari deyiladi, shu bilan birga bitta xonaning 10ta birligi keyingi yuqori xonaning bitta birligini tashkil qiladi, ya’ni qo‘shni xonalar nisbati 10 ga – sanoq sistemasining asosiga teng. Sonlar yozuvidagi dastlabki uchta xona bitta gruppaga birlashtiriladi va birinchi sinf yoki birlar sinfi deyiladi. Birinchi sinfga birlar, o‘nlar, yuzlar kiradi. Sonlar yozuvidagi to‘rtinchi, beshinchi va oltinchi xonalar ikkinchi sinf-minglar sinfini tashkil qiladi. Unga bir minglar, o‘n minglar va yuz minglar kiradi. Keyingi uchinchi xona – millionlar sinfi bo‘ladi, bu sinf ham uchta xonadan iborat: yettinchi, sakkizinchi va to‘qqizinchi xonalardan, ya’ni bir millionlar, o‘n millionlar va yuz millionlardan iborat. Navbatdagi uchta xona ham yangi sinfni hosil qiladi va hokazo. Birlar, minglar, millionlar va hokazo sinflarning ajratilishi sonlarni yozishga va o‘qishga qulayliklar yaratadi. O‘nli sanoq sistemasida hamma sonlarni $n_k\cdot10^k+n_{k-1}\cdot10^{k-1}+.....+n_1\cdot10+n_0$ (bunda $n_k,n_{k-1},......n_1,\ n_0$,koeffitsientlar 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9 qiymatlarni qabul qiladi va $n_k\neq0$) ko‘rinishdagina yozmasdan ularning hammasiga nom, ism berish mumkin. Bu quyidagicha amalga oshiriladi: birinchi o‘nta sonning nomi bor. So‘ngra bu sonlardan o‘nli yozuv ta’rifiga mos ravishda va ozgina so‘z qo‘shish natijasida keyingi sonlarning nomi kelib chiqadi. Masalan, ikkinchi o‘nliklardagi sonlar (ular $1\cdot10+a_0$ ko‘rinishda yoziladi) o‘n bilan birinchi o‘nlikdagi sonlar nomining qo‘shilishidan tuziladi: o‘n bir, o‘n ikki va hokazo. Yigirma so‘zi ikkita o‘nlikni bildiradi. Uchinchi o‘nlikdagi sonlar nomi (ular $2\cdot10+a_0$ ko‘rinishdagi sonlar) yigirma so‘ziga birinchi o‘nlikdagi sonlar nomini qo‘shish natijasida hosil bo‘ladi: yigirma bir, yigirma ikki va h.k. hisobni shunday davom ettirib, to‘rtinchi, beshinchi, oltinchi, ettinchi, sakkizinchi, to‘qqizinchi va o‘ninchi o‘nliklarni hosil qilamiz. Navbatdagi o‘nliklar mos ravishda quyidagicha ataladi: o‘ttiz, qirq, ellik, oltmish, yetmish, sakson, to‘qson. **Yuz so‘zi** o‘nta o‘nni bildiradi. Yuzdan katta sonlar nomi (ya’ni $1\cdot10^2+a_1\cdot10+a_0$ ko‘rinishdagi sonlar) yuz va birinchi hamda keyingi o‘nliklardagi sonlar nomidan tuziladi va birinchi yuzlikni anglatish uchun ular oldiga bir so‘zi yoziladi: bir yuz bir, bir yuz ikki, ... bir yuz yigirma va h.k. Bu yuzlikni keyingi yuzlikkacha to‘ldirib, ikkita yuzlikka ega bo‘lamiz, u ikki yuz deyiladi. Ikki yuzdan katta sonlarni hosil qilish uchun ikki yuz soniga birinchi va keyingi o‘nlikdagi sonlar qo‘shib aytiladi. Har bir yuzlikdan keyin yangi yuzlik hosil bo‘ladi: uch yuz, to‘rt yuz, besh yuz va h.k., o‘nta yuz maxsus nom bilan «ming» deb yuritiladi. Mingdan keyingi sonlar mingga bittadan qo‘shib borish natijasida hosil bo‘ladi, bu yerda ham birinchi minglik oldiga bir so‘zi qo‘yiladi (bir ming bir, bir ming ikki va h.k.). Natijada ikki ming, uch ming va h.k. sonlar hosil bo‘ladi. Mingta ming soni maxsus nom bilan «million» deb ataladi. Yana sanashni davom ettirib, mingta millionni hosil qilamiz. Mingta million soni maxsus nom bilan «milliard» deb ataladi. hisoblashlarda million 10^6, milliard 10^9, milliard 10^{12} ko‘rinishida yoziladi. Shunga o‘xshash undan ham katta sonlarni yozish mumkin. Shunday qilib, milliard ichidagi hamma natural sonlarni aytish uchun hammasi bo‘lib 22 ta turli so‘z ishlatiladi: bir, ikki, uch, to‘rt, besh, olti, etti, sakkiz, to‘qqiz, o‘n, yigirma, o‘ttiz, qirq, ellik, oltmish, etmish, sakson, to‘qson, yuz, ming, million, milliard. Natural sonning o‘nli yozuvi sonlarni taqqoslashning yana bir usulini beradi, Agar n va m natural sonlar o‘nli sanoq sistemasida, ya’ni

$$n=n_k\cdot 10^k+n_{k-1}\cdot 10^{k-1}+.....+n_1\cdot 10+ n_0,\ n_k\neq 0$$

$$m= m_l\cdot 10^{\ l} + m_{l-1}\cdot 10^{\ l-1} + ...+ m_1\cdot 10+m_0,\ m_l\neq 0$$

ko‘rinishda berilgan bo‘lsa, quyidagi shartlardan biri bajarilsa, n soni m dan kichik bo‘ladi:

1) $k< l$ (n sondagi xonalar soni m sondagi xonalar sonidan kichik):
2) $k= l$, ammo $n_k< m_l$
3) $k=l$, $n_k = m_k$, ... , $n_s= m_s$ ammo $n_{s-1} < m_{s-1}$;

Bu tasdiqni isbotsiz qabul qilamiz. Ulardan foydalanib, sonlarni oson taqqoslash mumkin. Masalan, a) 2465<18328, chunki 2465 sonning yozuvidagi raqamlar 18328 sonning yozuvidagi raqamlardan kam;
b) 2456 <5287, bunda raqamlar soni bir xil, ammo 2456 sonidagi minglar xonasidagi raqam 5287 sonining minglar xonasidagi raqamdan kichik; v) 2475<2486, bunda raqamlar soni bir xil, birlar va o‘nlar xonasidagi raqam 2486 sonidagi birlar va o‘nlar xonasidagi raqamdan kichik.

3). Sonlarning o‘nli sanoq sistemasidan farqli pozitsion sanoq sistemasidagi yozuvi

Biz asosi 10 bo‘lgan sanoq sistemasida har qanday son ushbu $n_n\cdot 10^k+n_{k-1}\cdot 10^{k-1}+.....+n_1\cdot 10+ n_0$ ko‘rinishida yozilishini bilamiz,unda n_k, n_{k-1}, ...,n_0 koeffitsientlar 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9, qiymatlarini qabul qiladi va $n_k\neq 0$.
O‘nli sanoq sistemasi pozitsiondir – ayni bir belgi (raqam) ning qiymati bu belgining shu sonning yozuvida tutgan o‘rniga (pozitsiyasiga) bog‘liq.

Ma’lumki, o‘nli sanoq sistemasidan boshqa bir qancha pozitsion sanoq sistemalari mavjud va bularni o‘nli sanoq sistemasidan farqi bu sistemalarning asoslari turlicha bo‘lishligidir.

Masalan, Vavilonda sanoq sistemasi oltmishli bo‘lgan. Bundan boshqa sanoq sistemalar ham ma’lum: o‘n ikkili sistema va hokazo. Umuman, pozitsion sanoq sistemasining asosi ikkidan katta yoki ikkiga teng istalgan p natural son bo‘lishi mumkin. Agar p=2 bo‘lsa, sistema ikkili, p=3 bo‘lsa, uchli, p=10 bo‘lsa, o‘nli sistema deyiladi.
p asosli sistemada son qanday yoziladi?
O‘nli sistemada sonni yozish uchun 10 ta belgidan foydalaniladi
0,1,2,3,4,5,6.7,8,9.

Ravshanki, ikkili sistemada sonni 2 ta belgi masalan, 0,1 belgilar yordamida, sakkizli sistemada 0,1,2,3,4,5,6,7,, belgilar yordamida yozish mumkin. Umuman, p asosli sanoq sistemasida sonni yozish uchun p ta belgidan foydalanish kerak: 0,1,2, 3, ..., p – 1.

Ta’rif. p asosli sanoq sistemasida n natural sonning yozuvi deb uning $n=n_k\cdot P^k +n_{k-1}\cdot P^{k-1} + ...+ n_1\cdot P + n_0$ ko‘rinishdagi yozuviga aytiladi, bunda n_k , n_{k-1}, ... , n_0 lar 0,1,2 ..., P-1 qiymatlarni qabul qiladi va $n_k\neq 0$
Har qanday n natural sonni bunday yagona ko‘rinishda yozish mumkinligini isbotsiz qabul qilamiz.
n sonining $n= n_k \cdot P^k + n_{k-1}\cdot P^{k-1} + ...n_1\cdot P+n_o$ ko‘rinishini qisqacha ushbu ko‘rinishda yozish qabul qilingan: $n=n_k\ n_{k-1} ... n_1\ n_0.$
Masalan, to‘rtli sistemada, ya’ni P=4 da $3\cdot 4^3 + 0\cdot 4^2 + 2\cdot 4+3$ yig‘indi $n=3023_4$ ko‘rinishda qisqacha yozish mumkin bo‘lgan biror n sonining yozuvidir.
Bu son quyidagicha o‘qiladi: «uch, nol, ikki, uch to‘rtli sanoq sistemasida».
Sonlarni yozishda turli belgilardan foydalanish nuqtaiy nazaridan ikkili sanoq sistemasi tejamkorliroqdir – unda sonlarni yozish uchun faqat ikkita belgi 0 va 1

kerak. Bu sistemada sonning qisqa yozuvi nol va birlardan tuzilgan chekli ketma-ketlikdan iborat. Masalan,

$$1011_2 = 1\cdot 2^3+0\cdot 2^2+1\cdot 10+1; \qquad 10001_2 = 1\cdot 2^4+0\cdot 2^3+0\cdot 2^2+0\cdot 2+1.$$

p asosli sanoq sistemasida yozilgan sonlarni taqqoslash o‘nli sanoq sistemadagidek bajariladi. Masalan, $2101_3 < 2102_3$ chunki bu sonlarda xonalar soni bir xil va yuqori xonadagi uchta raqam bir xil bo‘lib, birinchi sondagi kichik xona raqami ikkinchi sondagi o‘sha xona raqamidan kichik.

4). Bir sanoq sistemasidan ikkinchisiga o‘tish

1) Sonning p asosli sistemadagi yozuvidan o‘nli sistemadagi yozuviga o‘tish. n soni p asosli sanoq sistemasida yozilgan bo‘lsin: $n=n_kn_{k-1}....n_1n_0$. Uni ushbu $n_k\cdot p^k+n_{k-1}\cdot p^{k-1}+.....+n_1\cdot p+n_0$ ko‘p had ko‘rinishda yoyib yozish mumkin, bunda $n_k,n_{k-1},....,n_1,$ n_0 va p sonlar yozuvi o‘nli sistemada berilgan. Bu sonlar ustida o‘nli sistemada qabul qilingan qoidalar bo‘yicha amallar bajarib, n sonning o‘nli yozuvini hosil qilamiz. Masalan, 253_6 sonining o‘nli yozuvini topish uchun uni $2\cdot 6^2+5\cdot 6+3$ yig‘indi ko‘rinishida yozamiz va qiymatlarini topamiz: $2\cdot 6^2+5\cdot 6+3=112$. Demak, $253_6=112_{10}$

2) Sonning o‘nli sistemadagi yozuvidan p asosli sistemadagi yozuviga o‘tish.

n soni o‘nli sistemada yozilgan bo‘lsin. Uni p asosli sistemada yozish degan so‘z n_k, n_{k-1}, ... , n_0 larning $n=n_k\cdot p^k + n_{k-1}\cdot p^{k-1} + ... + n_1\cdot p + n_0$ bo‘ladigan qiymatini topish demakdir, bunda

$$1\leq n_k< p,\ 0\leq n_{k-1}<p,\ ... ,\ 0\leq n_0 < p.$$

Diqqatimizni ushbu qonuniyatga qaratamiz.

$n=n_k\cdot p^k+n_{k-1}\cdot p^{k-1}+ ... +n_1\cdot p+n_0$ sonini $n=p\cdot(n_k\cdot p^{k-1}+n_{k-1}\cdot p^{k-2}+ ... +n_1)+n_0$ ko‘rinishda yozish mumkin $0\leq n_0 < p$ bo‘lgani uchun n sonining oxirgi yozuvini n sonini p qoldiqli bo‘lishdagi yozuv deb qarash mumkin, bunda n_0 - qoldiq, $n_k\cdot p^k + n_{k-1}\cdot p^{k-2} + ... + n_1$ - to‘liqsiz bo‘linma. Xuddi shuningdek, n_1 – ni hosil bo‘lgan bo‘linmani p ga bo‘lganda chiqqan qoldiq deb qarash mumkin va hokazo.

Bu qonuniyat sonning o‘nli yozuvidan p asosli sistemadagi yozuviga o‘tish jarayoniga asos bo‘ladi. n sonini p ga o‘nli sistemada bo‘lish qoidasi bo‘yicha qoldiqli bo‘lamiz. Bo‘lishda chiqqan qoldiq sonning p asosli sistemadagi yozuvining oxirgi raqami bo‘ladi.

Chiqqan bo‘linmani yana p ga qoldiqli bo‘lamiz. Yangi qoldiq n sonining p asosli sistemasidagi yozuvning oxiridan bitta oldingi raqami bo‘ladi. Bo‘lish jarayonini davom ettirib, n sonining p asosli sistemadagi yozuvining hamma raqamlarini topamiz.

Masalan, 97 sonining uchli sanoq sistemasidagi yozuvini topaylik, ya’ni 97 sonini $n_k\cdot 3^n + n_{k-1}\cdot 3^{n-1} + ... + n_1\cdot 3 + n_0$ ko‘rinishda yozamiz, bunda $n_k, n_{k-1},..., n_1, n_0$ lar 0,1,2 qiymatlarni qabul qiladi. 97 ni 3 ga bo‘lamiz: $97=32\cdot 3+1$. Bo‘lish natijasida $n_0=1$ ekanligi topildi. Biroq 3 soni oldidagi koeffitsient 3 dan katta: shuning uchun 32 ni 3 ga bo‘lamiz: $32=10\cdot 3+2$, ya’ni $97=(10\cdot 3+2)\cdot 3+1=10\cdot 3^2+2\cdot 3+1$. Bu bo‘lishda $n_1=2$ ni topdik, biroq 3^2 daraja oldidagi koeffitsient 2 dan katta, shuning uchun 10 ni 3 ga bo‘lamiz: $10=3\cdot 3+1$, ya’ni $97=(3\cdot 3+1)\cdot 3^2 + 2\cdot 3+1= 3\cdot 3^3+1\cdot 3^2 + 2\cdot 3+1$

Bu bosqichda $n_2=1$ ekanini aniqladik, ammo 3^2 daraja oldidagi koeffitsient 3 dan katta, shuning uchun 3 ni 3ga bo‘lamiz: $3=1\cdot 3+0$, ya’ni $97=(1\cdot 3+0)\cdot 3^3 + 1\cdot 3^2 + 2\cdot 3+1=1\cdot 3^4+0\cdot 3^3+1\cdot 3^2+2\cdot 3+1$

Oxirgi bo‘lishni bajarib, biz $n_3=0$ ekaninigina topmasdan, katta xona raqamini ham aniqladik. Shuning uchun bo‘lish jarayoni tugallandi. $1\cdot 3^4+0\cdot 3^3+1\cdot 3^2+2\cdot 3+1$ ko‘phad 10121_3 sonining yozuvidir. Demak, $97_{10} = 101\ 21_3$

Ko‘rsatilgan bu jarayonni burchak qilib bo‘lishni bajarib ham olib borish mumkin. Demak, $97_{10} = 10121_3$;

Bunday bo‘lish natijasini yoza borib, katta xona raqami ketma-ket bo‘lishdagi oxirgi bo‘linma ekanligini esda tutish lozim.

O‘z-o‘zini nazorat qilish uchun savollar:

1. Pozitsion sanoq sistemasi deganda nimani tushunasiz?
2. O‘nli sanoq sistemasida sonlar qanday ifodalanadi?
3. Sonlar yozuvidagi sinflarni aytib bering.
4. O‘nli sanoq sistemasida yozilgan sonlarni taqqoslang.
5. O‘ndan farqli pozitsion sistemalarda sonlarning yozilishiga misollar keltiring.
6. Bir sanoq sistemasidan ikkinchi sanoq sistemasiga o‘tishni misollar yordamida tushuntiring.

II.2.3.O‘NLI VA BOSHQA POZITSION SANOQ SISTEMALARIDA SONLARNI QO‘SHISH

1). O‘nli va boshqa pozitsion sanoq sistemalarida sonlarni qo‘shish.

Dastlab misollardan boshlaymiz: 364+2423 sonlarni qo‘shamiz. Buning uchun qo‘shiluvchilarni koeffitsientli o‘nning darajalari yig‘indisi ko‘rinishda yozamiz:

$364+2423=(3\cdot 10^2+6\cdot 10+4)+(2\cdot 10^3+4\cdot 10^2+2\cdot 10+3)$.

Bu ifodada qavslarni ochib, qo‘shiluvchilar o‘rnini shunday almash-tiramizki, birlar birlar oldida, o‘nlar o‘nlar oldida va hokazo bo‘lsin va yana qavs ichiga olamiz. Bularning hammasini qo‘shishning tegishli qonunlari asosida bajarish mumkin. Haqiqatan, gruppalash qonuni ifodalarini qavslarsiz yozishga imkon beradi:
$3\cdot 10^2+6\cdot 10+4+2\cdot 10^3+4\cdot 10^2+2\cdot 10+3$. O‘rin almashtirish qonuniga ko‘ra qo‘shiluvchilar o‘rnini almashtiramiz: $2\cdot 10^3+(3\cdot 10^2+4\cdot 10^2)+(6\cdot 10+2\cdot 10)+ +(4+3)$. Birinchi qavsdan 10^2 ni, ikkinchisidan 10 ni qavsdan tashqariga chiqaramiz. Buni qo‘shishga nisbatan ko‘paytirishning taqsimot qonunini qo‘llab bajarish mumkin:

$$2\cdot 10^3+(3+4)\cdot 10^2+(6+2)\cdot 10+(4+3)$$

Ko‘rib turibmizki, 364 va 2423 sonlarini qo‘shish tegishli xonalar raqamlari bilan tasvirlangan bir xonali sonlarni qo‘shishga keltirildi. Bu yig‘indini qo‘shish jadvalidan topamiz:

$$2\cdot 10^3+7\cdot 10^2+8\cdot 10+7$$

Hosil qilingan ifoda 2787 sonining o‘nli yozuvidir.
Endi $n=n_k\cdot 10^k+n_{k-1}\cdot 10^{k-1}+...+n_o$ va $m= m_k\cdot 10^k+m_{k-1}\cdot 10^{k-1}+...+m_o$ sonlarini qo‘shishni ko‘raylik. Agar ikkala sonda ham xona birliklari teng bo‘lib (agar teng bo‘lmasa teng bo‘lmagan son oldiga nollar yozib tenglashtiramiz) $n_s+m_s<10$ bo‘lsa, yig‘indi tubandagicha bo‘ladi.

$$(n_k\cdot 10^k+n_{k-1}\cdot 10^{k-1}+...+n_o)+(m_k\cdot 10^k+m_{k-1}\cdot 10^{k-1}+...+m_o)=$$
$$=(n_k+m_k)\cdot 10^k+(n_{k-1}+m_{k-1})10^{k-1}+...+(n_o+m_o);$$

Agar $n_s+m_s\geq 10$ bo‘lsa qo‘shish birmuncha qiyin bo‘ladi.

Masalan, 394+827 yig‘indini qaraylik.

Qo‘shiluvchilarni koeffitsientli o‘nning darajalari yig‘indisi ko‘rinishida yozamiz:

$$(3\cdot 10^2+9\cdot 10+4)+(8\cdot 10^2+2\cdot 10+7).$$

Qo‘shish qonunlari, qo‘shishga nisbatan ko‘paytirishning taqsimot qonunidan foydalanib, berilgan ifodani quyidagi ko‘rinishga keltiramiz:

$$(3+8)\cdot 10^2+(9+2)\cdot 10+(4+7).$$

Ko‘rib turibmizki, bu holda ham berilgan sonlarni qo‘shish bir xonali sonlarni qo‘shishga keltirildi, ammo 3+8, 9+2, 4+7 yig‘indilar 10 sonidan katta, shuning uchun hosil bo‘lgan ifoda biror sonning o‘nli yozuvi bo‘lmaydi. Shunday qilish kerakki, 10 ning darajalari oldidagi koeffitsientlar 10 dan kichik bo‘lsin. Buning uchun bir qator almashtirishlar bajaramiz. Avval 4+7 yig‘indini 10+1 ko‘rinishda yozamiz:

$$(3+8)\cdot 10^2+(9+2)\cdot 10+(10+1)$$

Endi qo‘shish va ko‘paytirish qonunlaridan foydalanib, topilgan ifodani quyidagi ko‘rinishga keltiramiz:

$$(3+8) \cdot 10^2 +(9+2 +1) \cdot 10+1$$

Oxirgi almashtirishning mohiyati ravshan:birlarni qo‘shishda hosil bo‘lgan o‘nni berilgan sonlardagi o‘nliklarga qo‘shdik. 9+3 yig‘indini $1\cdot10+2$ ko‘rinishda yozib, quyidagini hosil qilamiz:

$$(3+8)\ 10^2 +(10+2)10+1 \quad \text{yoki} \quad (3+8)10^2 +10^2 +2\cdot10+1$$

va nihoyat 3+9 yig‘indi hosil qilamiz: $(1\cdot 10 +2)\ 10^2 + 2 \cdot 10+1$ bundan

$$1\cdot 10^3 + 2 \cdot 10^2 + 2\cdot10+1.$$

Hosil bo‘lgan ifoda 1221 sonining o‘nli yozuvidir.

O‘nli sanoq sistemasida yozilgan ko‘p xonali sonlarni qo‘shish algoritmi umumiy ko‘rinishda tubandagicha ifodalanadi :

1) Ikkinchi qo‘shiluvchining tegishli xonalari bir-birining ostiga tushadigan qilib birinchi qo‘shiluvchining ostiga yozamiz, agar qo‘shiluvchilarning bittasida xonalar soni kam bo‘lsa, uning oldiga nollar yozib xonalar sonini tenglashtiramiz;
2) Birlar xonasidagi raqamlar qo‘shiladi. Agar yig‘indi 10 dan kichik bo‘lsa, uni javobdagi birlar xonasiga yozamiz va keyingi xonaga (o‘nlar xonasiga) o‘tamiz.
3) Agar birliklar raqamlarining yig‘indisi 10 dan katta yoki 10 ga teng bo‘lsa, uni $10+S_0$, bunda S_0 ni javobdagi birlar xonasiga yozamiz va birinchi qo‘shiluvchidagi o‘nlar raqamiga 1 ni qo‘shamiz, keyin o‘nlar xonasiga o‘tamiz.
4) O‘nlar bilan yuqoridagi amallarni bajaramiz, keyin yuzlar bilan va hokazo. Yuqori xona raqamlari qo‘shilgandan keyin bu jarayonni to‘xtatamiz.

Boshqa sanoq sistemalarida sonlarni qo‘shish ham shunga o‘xshaydi. Bunda faqat shu sistemadagi bir qiymatli sonlarni qo‘shish jadvalini bilish kerak.

Masalan, ikkilik sanoq sistemasida qo‘shish jadvali quyidagicha:

m\n	0	1
0	0	1
1	1	10

Sakkizlik sanoq sistemasida qo‘shish jadvali quyidagicha:

m\n	0	1	2	3	4	5	6	7
0	0	1	2	3	4	5	6	7
1	1	2	3	4	5	6	7	10
2	2	3	4	5	6	7	10	11
3	3	4	5	6	7	10	11	12
4	4	5	6	7	10	11	12	13
5	5	6	7	10	11	12	13	14
6	6	7	10	11	12	13	14	15
7	7	10	11	12	13	14	15	16

Yuqoridagi jadvallarga mos sonlarni qo‘shishga misollar keltiramiz.

$$\begin{array}{r} 1101110_2 \\ + \underline{\ \ 110101_2} \\ 10100011_2 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 230547_8 \\ + \underline{\ \ 326715_8} \\ 557464_8 \end{array}$$

2). O‘nli va boshqa pozitsion sanoq sistemalarida sonlarni ayirish

Quyidagi misollarni qaraylik.

1-misol: 3848 sonidan 725 sonini ayirish talab qilinsin. Dastlab kamayuvchi va ayriluvchida xonalar sonini tenglashtiramiz. Ayriluvchini 0725 ko‘rinishda yozib, sonlarni koeffitsientli o‘nning darajalari ko‘rinishida yozamiz.

$$3248= 3\cdot 10^3 + 8 \cdot 10^2 + 4 \cdot 10 + 8$$

$$0725= 0 \cdot 10^3 + 7 \cdot 10^2 + 2\cdot 10 +5$$

Endi 3248 – 0725 ayirmani tubandagi ko‘rinishda yozamiz.

$3848–0725=(3 \cdot 10^3 +8 \cdot 10^2 + 4\cdot 10 +8) – (0 \cdot 10^3 +7\cdot 10^2 + 2\cdot 10+5)=$

$= 3\cdot 10^3 + 8 \cdot 10^2 + 4\cdot 10 +8 - 0\cdot 10^3 - 7\cdot 10^2 - 2\cdot 10-5;$

Yig‘indi va ayirma xossalaridan foydalanib, bu ifodani quyidagicha yozamiz:

$3848-0725=(3–0)\cdot 10^3+(8-7)\cdot 10^2+(4-2)\cdot 10+(8-5)=3\cdot 10^3+1\cdot 10^2+2\cdot 10+3=3123$

2-misol. 6157 – 376 ayirmani topish talab qilinsin. Bu holda ayirish oldingi misoldan qiyinroq bo‘ladi, chunki bu ayirmani

$(6-0) \cdot 10^3 +(1-3) \cdot 10^2 +(5-7)\cdot 10 +(7-6)$ ko‘rinishda yozib bo‘lmaydi, sababi ayrim qavs ichidagi ifodalarda ayriluvchi kamayuvchidan katta. Shuning uchun kamayuvchini tubandagi ko‘rinishda yozamiz.

$$6 \cdot 10^3 +1 \cdot 10^2 + 5 \cdot 10 +7$$

Bu ifodada ham 6 ni 5+1 ko‘rinishda yozamiz. U holda $6157=6\cdot 10^3+1\cdot 10^2 + 5\cdot 10 +7$; ammo $10^3 = 900 + 100= 9 \cdot 10^2 + 10 \cdot 10$ bo‘lganligidan $6157=5\cdot 10^3+(9+1)\cdot 10^2+(5+10)\cdot 10+7=5\cdot 10^3+10\cdot 10^2+15\cdot 10+7$

Demak, $6157–376=(5-0)\cdot 10^3+(10-3)\cdot 10^2+(15-6)\cdot 10+(7-6)=5\cdot 10^3+7\cdot 10^2+9\cdot 10 +1=5791$

Endi umumiy holda $n=n_k10^k+n_{k-1}10^{k-1}+...+n_0$ va $m=m_k10^k+m_{k-1}10^{k-1}+...+m_0$ sonlari berilgan bo‘lsin.

U holda n-m ayirma barcha $s(o \le s \le k)$ lar uchun $n_s \ge m_s$ shart bajarilganda quyidagiga teng bo‘ladi:

$$n-m=(n_k – m_k)10^k + (n_{k-1} – m_{k-1})\, 10^{k-1}+...+(n_o –m_o).$$

Shunday qilib, ikki son ayirmasini topish algoritmi quyidagicha ifodalanadi:

1) ayriluvchini mos xonalari bir-birining ostida bo‘ladigan qilib kamayuvchining ostiga yozamiz. Xonalar sonini tenglashtiramiz.

2) agar ayriluvchining birlar xonasidagi raqam kamayuvchining tegishli raqamidan katta bo‘lsa, uni kamayuvchining raqamidan ayiramiz, so‘ngra keyingi xonaga o‘tamiz.

3) agar ayriluvchining birlar raqami kamayuvchining birlar raqami-dan katta, ya’ni $n_o < m_o$ bo‘lib, kamayuvchining o‘nlar raqami noldan farqli bo‘lsa, kamayuvchining o‘nlar raqamini bitta kam-aytiramiz, shu vaqtning o‘zida birlar raqami 10 ta ortadi, shundan keyin $10+n_o$ sonidan m_o ni ayiramiz va natijani ayirmaning birlar xonasiga yozamiz, so‘ngra keyingi xonaga o‘tamiz.

4) agar ayriluvchining birlar raqami kamayuvchining birlar raqamidan katta bo‘lib, kamayuvchining o‘nlar, yuzlar va boshqa xonasidagi raqamlar nolga teng bo‘lsa, kamayuvchining noldan farqli birinchi (birlar xonasidan keyingi) raqamini olib, uni bitta kamaytiramiz, kichik xonalardagi barcha raqamlarni o‘nlar xonasigacha 9 ta orttiramiz, birlar xonasidagi raqamni esa 10 ta orttiramiz va $10+ n_o$ dan m_o ni ayiramiz, natijani ayirmaning birlar xonasiga yozamiz va keyingi xonaga o‘tamiz.

5) keyingi xonada bu jarayonni takrorlaymiz.

6) kamayuvchining katta xonasidan ayirish bajarilgandan keyin ayirish jarayoni tugallanadi.

Boshqa sanoq sistemalarida ham sonlarni ayirish yuqoridagiga o‘xshash, ammo farqi ayirish qaysi sistemada bajarilayotgan bo‘lsa shu sistemalardagi birlik sonlarni qo‘shish jadvalidan foydalaniladi.

Misollar keltiramiz:

$$\begin{array}{r} 4823_9 \\ -\underline{745_9} \\ 4067_9 \end{array}$$

Haqiqatan ham qo‘shish jadvaliga asosan $5_9+7_9=13_9$; $13_9–5_9=7_9$ bo‘ladi, boshqalarini ham shunga o‘xshash ko‘rsatish mumkin.

3). O‘nli va boshqa pozitsion sanoq sistemalarida sonlarni ko‘paytirish

Ma’lumki, ikkita bir xonali sonni ko‘paytirishda hosil bo‘lgan hamma ko‘paytmalar esda saqlanadi. Hamma bunday ko‘paytmalar maxsus jadvalga yoziladi, bu jadval bir xonali sonlarni ko‘paytirish jadvali deyiladi.

325 sonini 1000 ga ko‘paytirishni bajarganda 325 soni ketiga uchta nolni yozish yetarli, ya’ni 325000 bo‘ladi. Haqiqatan ham, $325=3\cdot10^2+2\cdot10+5$ ko‘rinishida yozish mumkin va qo‘shishga nisbatan ko‘paytirish distributivlik xossasiga ega bo‘lishidan $10^k\cdot10^s=10^{k+s}$ ga ko‘ra $325\cdot1000=(3\cdot10^2+2\cdot10+5)\cdot10^3=3\cdot10^5+2\cdot10^4+5\cdot10^3$ bo‘ladi.

Bu ifodani quyidagicha yozamiz:

$$325\cdot1000=3\cdot10^5+2\cdot10^4+5\cdot10^3+0\cdot10^2+0\cdot10+0=325000$$

Bundan ko‘rinadiki n sonini 10^S ga ko‘paytirish uchun n sonining o‘ng tomoniga s ta nol yozish kifoya.

Haqiqatan ham, agar $n=n_kn_{k-1}...n_o$ soni berilgan bo‘lsa, u holda $n=n_k10^k+n_{k-1}10^{k-1}+...+n$ ni 10^s ga ko‘paytiramiz.

$n\cdot10^S=(n_k10^k+n_{k-1}10^{k-1}+...+n_0)\cdot10^S=n_k10^{k+s}+n_{k-1}10^{k-1+s}+...+n_0\cdot10^s+0\cdot10^{s-1}+...+0;$

Demak, $n\cdot10^s=n_k\cdot n_{k-1}\ ...+n_0\cdot\underbrace{0\cdot0\cdot0}_{s_{ma}}$

Endi $n=n_k\cdot n_{k-1}\ ...+n_0$ sonini bir xonali m soniga ko‘paytiramiz.

$n\cdot m=(n_k10^k+n_{k-1}10^{k-1}+...+n_0)m=n_km10^k+n_{k-1}m10^{k-1}+...+n_0m;$

bu yerda $n_s\cdot m$ lar bir xonali sonlar bo‘lib, ularning ko‘paytmalari bir xonali sonlarni ko‘paytirish jadvalida bor bo‘lib, ularning natijalari bir xonali yoki ikki xonali sonlar bo‘ladi.

$n_s\cdot m$ ko‘paytmani $n_s\cdot m=a_s10+b_s$ ko‘rinishida yozish mumkin, (bunda faqat $a_s=0$ bo‘lgan holni hisobga olgan holda.)

U holda biz quyidagiga ega bo‘lamiz.

$n\cdot m=(a_k10+b_k)10^k+(a_{k-1}\cdot10+b_{k-1})\cdot10^{k-1}+...+(a_0\cdot10+b_0)=(a_k10^{k+1}+a_{k-1}10^k+...++a_010)+(b_k10^k+b_{k-1}10^{k-1}+...+b_o);$

Misol:

$48\cdot7=(4\cdot10+8)\cdot7=4\cdot7\cdot10+8\cdot7=28\cdot10+56=(2\cdot10+8)\cdot10+(5\cdot10+6)=$
$=2\cdot10^2+(8+5)\cdot10+6=2\cdot10^2+(10+3)\cdot10+6=2\cdot10^2+10^2+3\cdot10+6=$
$=3\cdot10^2+3\cdot10+6=336$

Endi ko‘p xonali sonlarni ko‘paytirishni qaraymiz:

$n=n_k10^k+n_{k-1}10^{k-1}+...+n_0$ va $m=m_l10^l+m_{l-1}10^{l-1}+...+m_0)$ sonlari berilgan bo‘lsin. $n\cdot m$ ko‘paytmani topamiz. Dastlab ko‘paytirish xossasiga ko‘ra quyidagini hisoblaymiz.

$n(m_l10^l+m_{l-1}10^{l-1}+...+m_0)=(nm_l)10^l+(n\,m_{l-1})10^{l-1}+...+nm_0$

n sonini ketma-ket bir xonali $m_l,m_{l-1},..,m_0$ sonlariga ko‘paytirib, natijani $10^l,10^{l-1},...,1$ sonlariga ko‘paytirib qo‘shamiz natijada $n\cdot m$ ko‘paytmaga ega bo‘lamiz.

Bu esa bizni odatdagi sonlarni ustun shakldda yozib ko‘paytirish qoidalarimizga mos keladi.

Masalan:

$$\begin{array}{r} 385 \\ {}^{x}\ \underline{24} \\ 1540 \\ {}^{+}\underline{770\ } \\ 9240 \end{array}$$

Shunday qilib, ko‘p xonali sonni ko‘p xonali songa ko‘paytirish ko‘p xonali sonni bir xonali songa ko‘paytirishga keltirildi.

Umuman, $n = n_k \; n_{k-1} \dots n_1 \; n_0$ sonni $m = m_l \; m_{l-1} \dots m_1 \; m_o$ songa ko‘paytirish algoritmini tubandagicha ifodalash mumkin:

1) n ko‘paytuvchini yozamiz va uning ostiga ikkinchi ko‘paytuvchi m ni yozamiz.

2) n sonni m sonning kichik xonasi m_0 ga ko‘paytiramiz va nm_0 ko‘paytmani m sonning ostiga yozamiz.

3) n sonni m sonning keyingi xonasi m_1 ga ko‘paytiramiz va n m_1 ko‘paytmani bir xona chapga surib yozamiz. Bu nm_1 ni 10 ga ko‘paytirishga mos keladi.

4) bu jarayonni nm_l ni hisoblaguncha davom ettiramiz.

5) topilgan l+1 ta ko‘paytmani qo‘shamiz.

O‘nli sanoq sistemadan boshqa sistemadagi sonlar ham shunga o‘xshash ko‘paytiriladi. Bunday ko‘paytirishda shu sistemadagi bir xonali sonlarni ko‘paytirish jadvalidan foydalaniladi. Ikki, uch va oltilik sanoq sistemalari uchun shunday jadvallarni keltiramiz.

1) ikkilik sanoq sistemasi uchun

n\m	0	1
0	0	0
1	0	1

2) uchlik sanoq sistemasi uchun

n\m	0	1	2
0	0	0	0
1	0	1	2
2	0	2	11

3) oltilik sanoq sistemasi uchun

n\m	0	1	2	3	4	5
0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5
2	0	2	4	10	12	14
3	0	3	10	13	20	23
4	0	4	12	20	24	32
5	0	5	14	23	32	41

Misol:

$$
\begin{array}{r}
\times \; 43_5 \\
\underline{32_5} \\
+ \; 141 \\
\underline{234\;\;} \\
3031_5
\end{array}
$$

4). O‘nli va boshqa pozitsion sanoq sistemalarida sonlarni bo‘lish

Sonlarni bo‘lish texnikasi haqida so‘z borar ekan, bu jarayon qoldiqli bo‘lish amali kabi qaraladi. Ta’rifni eslaylik. Butun nomanfiy a sonni b natural songa qoldiqli bo‘lish deb, a=bq+r va $0 \leq r < b$ bo‘ladigan butun nomanfiy q va r sonlarni topishga aytiladi, q soni esa to‘liqsiz bo‘linma deyiladi.

Bir xonali va ikki xonali sonlarni bir xonali songa bo‘lganda bir xonali sonlarni ko‘paytirish jadvalidan foydalaniladi.

Masalan, 63 ni 8 ga bo‘lamiz. Ko‘paytirish jadvalidan 8-ustunda 63 soni yo‘q. Shuning uchun bu ustunda 63 dan kichik eng yaqin 56 sonini olamiz. 56 soni 8-satrda bo‘lgani uchun to‘liqsiz bo‘linma 7 ga teng. Qoldiqni topish uchun 63 dan 56 ni ayiramiz: 63-56=7.

Shunday qilib, $63=8\cdot7+7$;
Endi ko‘p xonali sonni bir xonali songa bo‘lish qanday amalga oshirilishini aniqlaymiz. 346 ni 4 ga bo‘lish kerak bo‘lsin. Bu degani shunday to‘liqsiz bo‘linma q va r qoldiqni topish kerakki, ular uchun $346=4q+r$, $0\le r<4$ bo‘lsin.
Shuni aytish kerakki, 346 va 4 sonlarni to‘liqsiz bo‘linmasi q ga bo‘lgan talabni quyidagicha yozish mumkin:

$$nq\le 346<n(q+1).$$

Avval q sonining yozuvida nechta raqam bo‘lishini aniqlaymiz. q bir xonali son ko‘paytmasi plyus qoldiq 346 ga teng emas. Agar q soni ikki xonali bo‘lsa, ya’ni agar $10<q<100$ bo‘lsa, u holda 346 soni 40 va 400 sonlari orasida bo‘ladi, bu esa to‘g‘ri. Demak, 346 va 4 sonlarining bo‘linmasi ikki xonali son.

Bo‘linmaning o‘nlar raqamini topish uchun bo‘linuvchi 4 ni ketma-ket 20 ga, 30 ga, 40 ga va hokazo ko‘paytiramiz. $4\cdot80=320$, $4\cdot90=360$ va $320<346<360$ bo‘lgani uchun to‘liqsiz bo‘linma 80 va 90 sonlari orasida bo‘ladi, ya’ni $q=80+q_0$. U holda 346 soni haqida bunday deyish mumkin: $4\cdot(80+q_o)\le346<4\cdot(80+q_0+1)$, bundan $320+4q_0\le346<320++4(q_0+1)$ va $4q_0\le26<4\cdot(q_0+1)$.
Berilgan tengsizlikni qanoatlantiruvchi q_0 sonini(bo‘linmaning birlar raqamini) ko‘paytirish jadvalidan foydalanib topish mumkin. $q_0=6$ hosil bo‘ladi demak, to‘liqsiz bo‘linma $q=80+6=86$, qoldiq ayirish bilan topiladi: $346-4\cdot86=2$. Shunday qilib, 346 ni 4 ga bo‘lganda to‘liqsiz bo‘linma 86 va 2 qoldiq hosil bo‘ladi: $346=4\cdot86+2$.
Bo‘lishni ifodalagan bu jarayon burchak qilib bo‘lish deb nomlana-digan bo‘lish asosida yotadi.

$$\begin{array}{r|l} 346 & 4 \\ \cline{2-2} \underline{-32} & 86 \\ 26 & \\ \underline{24} & \\ 2 & \end{array}$$

Ko‘p xonali sonni ko‘p xonali songa bo‘lish tubandagicha bajariladi. Masalan, 6547 ni 57 ga bo‘laylik. Bu bo‘lishni bajarish shunday butun nomanfiy q va r sonlarni topish kerakki, uning uchun $6547=57q+r$, $0\le r<57$ bajarilsin.
Bundan $57q\le6547<57(q+1)$ q bo‘linmadagi raqamlar sonini aniqlaymiz. Shubhasiz, q bo‘linma 100 va 1000 sonlari orasida yotadi (u uch xonali), chunki $5700<6547<57000$;
Bo‘linmaning yuzlar raqamini topish uchun bo‘linuvchi 57 ni ketma-ket 100 ga, 200 ga, 300 ga va hokazo ko‘paytiramiz. $57\cdot100=5700$; $57\cdot200==11400$ va $5700<6547<11400$ bo‘lgani uchun to‘liqsiz bo‘linma 100 va 200 sonlari orasida yotadi, ya’ni $q=100+q_1$, bu yerda q_1 – ikki xonali son. U holda quyidagi tengsizlik o‘rinli bo‘ladi:

$$57\cdot(100+q_1)\le6547<57\cdot(100+q_1+1).$$

Qavslarni ochib va 5700 sonini ayirib, ushbu tengsizlikka kelamiz:

$$57q_1\le847<57\cdot(q_1+1)$$

q_1 soni ikki xonali. Shuning uchun bo‘linmadagi o‘nlar raqamini topish uchun bo‘linuvchi 57 ni ketma-ket 10 ga, 20 ga, 30 ga va hokazo ko‘paytiramiz.
$57\cdot10=570$, $57\cdot20=1140$ va $570<847<1140$ bo‘lgani uchun $10<q_1<20$ va q_1 sonini $q_1=10+q_0$ ko‘rinishda yozish mumkin. U holda 847 soni haqida quyidagilarni aytish mumkin:
$57\cdot(10+q_0)\le847<57\cdot(10+q_0+1)$, ya’ni
$57\cdot10+57\cdot q_0\le847<57\cdot20+57\cdot(q_0+1)$, $57q_0\le277<57\cdot(q_0+1)$.
Oxirgi tengsizlikni qanoatlantiruvchi q_0 sonining (bo‘linmaning birlar raqamini) 57 ni ketma-ket 1 ga, 2 ga, ... , 9 ga ko‘paytirib tengsizlikni qanoatlantiruvchi q_0 sonini tanlab topamiz. $57\cdot4=228$. Demak q_0 soni 4 ga q_1 esa 14 ga , to‘liqsiz bo‘linma $q=100+14=114$ ga teng. Qoldiq ayirish yo‘li bilan topiladi $6547-114\cdot57=49$ 6547 ni 57 ga bo‘lganda, to‘liqsiz bo‘linma 114 ga, qoldiq 49 ga teng. $6547=114\cdot57+49$.
Butun nomanfiy a sonni b natural songa bo‘lishning turli usullarining umumlashmasi quyidagi burchak qilib bo‘lish algoritmi hisoblanadi:

I. Agar a=b bo‘lsa, bo‘linma q=1 qoldiq r=0 bo‘ladi.

II. Agar a>b bo‘lib, a va b sonlardagi xonalar soni bir xil bo‘lsa, b ni ketma-ket 1, 2, 3, 4, 5, 6,7, 8, 9 ga ko‘paytirib, bo‘linma tanlab olinadi, chunki a < 10 b

III. Agar a >b bo‘lib, a sondagi xonalar soni b sondagi xonalar sonidan katta bo‘lsa, a bo‘linuvchini yozib, uning o‘ng tomoniga b bo‘luvchini yozamiz va oralariga burchak belgisini qo‘yib, bo‘linma hamda qoldiqni ushbu ketma-ketlikda qidiramiz:

1) b sonda nechta xona bo‘lsa, a sonda shuncha katta xonalarni yoki, agar zarur bo‘lsa, bitta ortiq xonani shunday ajratamizki, ular b dan katta yoki unga teng d_1 sonni hosil qilsin. b ni ketma-ket 1,2,3,4,5,6,7,8,9. ga ko‘paytirib, d_1 va b sonlarning q_1 bo‘linmasini tanlab topamiz. q_1 ni burchak ostiga (b dan pastga) yozamiz.

2) b ni q_1 ga ko‘paytirib, ko‘paytmani a sonining ostiga shunday yozamizki, bq_1 sonning quyi xonasi ajratilgan d_1 sonning quyi xonasi ostiga yozilsin.

3) b_1 ning ostiga chiziqcha chizamiz va ayirmani topamiz: $r_1= d_1 – b\, q_1$

4) r_1 ayirmani b q_1 sonning ostiga yozamiz. r_1 ning o‘ng tomoniga a bo‘linuvchining foydalanilmagan xonalaridan yuqori xonasini yozamiz va chiqqan d_2 sonni b son bilan taqqoslaymiz.

5) Agar chiqqan d_2 son b dan katta yoki unga teng bo‘lsa, u holda d ga nisbatan I yoki II punktlardagidek ish tutamiz. q_2 bo‘linmani q_1 dan keyin yozamiz.

6) Agar chiqqan d_2 son b dan kichik bo‘lsa, birinchi chiqqan d_3 son b dan katta yoki unga teng bo‘lishi uchun keyingi xonadan qancha zarur bo‘lsa yana shuncha yozamiz. Bu holda q_1 dan keyin shuncha nol yozamiz. Keyin d_3 ga nisbatan I yoki II punktlardagidek ish tutamiz. q_2 bo‘linma nollardan keyin yoziladi. Agar a sonning kichik xonadan foydalanganda d_3<b , bo‘lsa, d_3 va b sonlarning bo‘linmasi nolga teng bo‘ladi va bu nolni bo‘linmaning oxirgi xonasiga yozamiz, qoldiq $r=d_3$ bo‘ladi.

Boshqa sanoq sistemalarida bo‘lishda hisoblashlar burchak qilib bo‘lishga keltiriladi va unda shu sistemadagi bir xonali sonlarni ko‘paytirish jadvallaridan foydalaniladi.

Masalan, $10220_3 :12_3$ hisoblansin (uchlik sanoq sistemasi).

Demak, $10220_3 : 12_3 =210_3$.

O‘z-o‘zini nazorat qilish uchun savollar

1. O‘nli sanoq sistemasida sonlarni qo‘shish formulasini keltirib chiqaring.
2. O‘nli sanoq sistemasida sonlarni qo‘shish algoritmini yozib bering.
3. Yettilik sanoq sistemasida sonlarni qo‘shishni misollar yordamida tushuntiring.
4. O‘nli sanoq sistemasida sonlarni ayirish formulasini keltirib chiqaring.
5. O‘nli sanoq sistemasida sonlarni ayirish algoritmini yozib bering.
6. Oltilik sanoq sistemasida sonlarni ayirishni misollar yorda-mida tushuntiring.
7. O‘nli sanoq sistemasida sonlarni ko‘paytirish formulasini keltirib chiqaring.
8. O‘nli sanoq sistemasida sonlarni ko‘paytirish algoritmini yozib bering.
9. Sakkizlik sanoq sistemasida sonlarni ko‘paytirishni misollar yordamida tushuntiring.
10. O‘nlik sanoq sistemasida sonlarni bo‘lishni tushuntiring
11. O‘nli sanoq sistemasida sonlarni bo‘lishning umumlashgan burchak qilib bo‘lish algoritmini yozib bering.
12. Uchlik sanoq sistemasida sonlarni bo‘lishni misollar yordamida tushuntiring.

II.2.4.NOMANFIY BUTUN SONLARNING BO‘LINUVCHANLIGI BO‘LINUVCHANLIK MUNOSABATI VA UNING XOSSALARI

1). Bo‘luvchanlik munosabati

Ma’lumki, butun nomanfiy sonlarni har doim ham ayirib va bo‘lib bo‘lmaydi. Ammo butun nomanfiy a va b sonlari ayirmasining mavjudligi haqidagi masala oson yechiladi, ya’ni a ≥b ni aniqlash yetarli. Bo‘lish uchun esa bunday umumiy shart yo‘q.

Bu bo‘linish alomatlarini qarash uchun bo‘linuvchanlik munosabati tushunchasini aniqlashtirish kerak.

Ta’rif. Butun nomanfiy a son va b natural son berilgan bo‘lsin. Agar a ni b ga qoldiqli bo‘lganda qoldiq nolga teng bo‘lsa, b soni a sonining bo‘luvchisi deyiladi.

Ta’rifdan kelib chiqadiki agar b soni a ning bo‘luvchisi bo‘lsa, shunday butun nomanfiy son q mavjudki, uning uchun a=b·q bo‘ladi.

Masalan, 6 soni 24 sonining bo‘luvchisidir, chunki shunday butun nomanfiy q=4 son mavjudki, uning uchun 24=6·4 bo‘ladi.

“Berilgan sonning bo‘luvchisi” terminini “bo‘luvchi” terminidan ajrata bilish kerak. Masalan, 25 ni 4 ga bo‘lganda 6 soni bo‘luvchi deyiladi, lekin bu son 25 ning bo‘luvchisi emas. Agar 25 ni 5 ga bo‘lsak, bunda “bo‘luvchi” va “berilgan sonning bo‘luvchisi” terminlari bitta narsani anglatadi.

b soni a sonining bo‘luvchisi bo‘lganda a soni b ga karrali yoki a soni bga bo‘linadi deyiladi va $a \vdots b$ kabi yoziladi.

$a \vdots b$ yozuv bo‘linuvchanlik munosabati yozuvidir, bu yozuv a va b sonlari ustida bajariladigan amalni ko‘rsatmaydi, ya’ni $a \vdots b=c$ deb yozib bo‘lmaydi.

Berilgan sonning bo‘luvchisi shu sondan katta bo‘lmagani uchun uning bo‘luvchilari to‘plami chekli. Masalan, 24 sonining hamma bo‘luvchilarini qaraylik. Ular chekli to‘plamni hosil qiladi: {1,2,3,4,6,8,12,24}.

2). Bo‘linuvchanlik munosabati xossalari.

Bo‘linuvchanlik munosabati qator xossalarga ega:

1-teorema. 0 soni ixtiyoriy songa bo‘linadi, ya’ni $(\forall b \in Z_0)\ 0 \vdots b$

Isboti: haqiqatan ham ixtiyoriy $b \in Z_0$ uchun $0=b\cdot 0$. ($0 \in Z$) bo‘lganligidan bo‘linuvchanlik ta’rifiga ko‘ra $0 \vdots b$

2-teorema. 0 dan farqli ixtiyoriy son nolga bo‘linmaydi, ya’ni $(\forall a \in Z_0)\ a \vdots 0$ bajarilmaydi.

Isboti: Aytaylik, $a \neq 0$ bo‘lsin. Ixtiyoriy $b \in Z_0$ coni uchun $0\cdot b=0$ bo‘lganligidan *b* ning hech bir qiymati uchun $a=o\cdot b$ tenglik bajarilmaydi. Demak, *a* soni 0 ga bo‘linmaydi.

3-teorema: Ixtiyoriy son 1 ga bo‘linadi, ya’ni $(\forall a \in Z_0)\ a \vdots 1$

Isboti : Ixtiyoriy $a \in Z_0$ soni uchun $a=1\cdot a$ ga egamiz, bundan esa *a* ning 1 ga bo‘linishi kelib chiqadi.

4-teorema. Bo‘linuvchanlik munosabati refleksivdir, ya’ni har qanday natural *a* son uchun $a=a\cdot 1$ tenglik o‘rinli. Bu degani, shunday q=1 son mavjudki, uning uchun $a=a\cdot 1$, bundan bo‘linuvchanlik munosabati ta’rifiga ko‘ra $a \vdots a$.

Isbot qilingan bu teoremadan har qanday butun nomanfiy sonning 1 ga bo‘linishi kelib chiqadi.

5-teorema. Agar $a \vdots b$ va $a>0$ bo‘lsa, u holda $a \geq b$ bo‘ladi.

Isboti: haqiqatan ham $a \vdots b$ bo‘lsa, u holda $a=bc$, bu yerda $c \in Z_0$ Shuning uchun $a-b=bc-b=b(c-1)$ $a>0$ deganimiz uchun $c>0$. Z_0 – butun nomanfiy sonlar to‘plamida ixtiyoriy son 1 dan kichik bo‘lmagani uchun $c \geq 1$, demak,

$b(c-1) \geq 0$. Shuning uchun $a-b \geq 0$, bundan $a \geq b$;

6-teorema. Bo‘linuvchanlik munosabati tranzitivdir, ya’ni $a \vdots b$ va $b \vdots c$ dan $a \vdots c$ kelib chiqadi.

Isboti: $a \vdots b$ bo‘lgani uchun shunday butun nomanfiy *k* soni mavjudki, uning uchun $a=b\cdot k$ bo‘ladi. $b \vdots c$ bo‘lgani uchun shunday butun nomanfiy ℓ soni mavjudki, uning uchun $b=c\cdot \ell$ bo‘ladi. Birinchi tenglikda b o‘rniga $c\cdot \ell$ ni qo‘yamiz: $a=(c\cdot \ell)\cdot k$ bo‘ladi, bundan $a=(c\cdot \ell)\cdot k=c\cdot(\ell \cdot k)$ $\ell \cdot k$ ko‘paytma ikkita nomanfiy butun sonlar ko‘paytmasidan iborat bo‘lgani uchun ko‘paytma ham nomanfiy butun son. Shuning uchun *a* soni ham *c* ga bo‘linadi, ya’ni $a \vdots c$

7-torema: Agar *a* va *b* sonlari *c* ga bo‘linsa, ularning yig‘indisi ham *c* ga bo‘linadi, ya’ni $(\forall a,b,c \in Z_0)(a \vdots c \wedge b \vdots c) \Rightarrow ((a+b) \vdots c)$

Isboti: haqiqatan ham shunday *k* va ℓ sonlari topiladiki, *a=ck* va *b=c*ℓ bo‘ladi. U holda *a+b=ck+c*ℓ *=c(k+*ℓ*)* *k+*ℓ – nomanfiy butun son bo‘lgani uchun $(a+b) \vdots c$ bo‘ladi.

Bu isbotlangan tasdiq qo‘shiluvchilar soni ikkitadan ko‘p bo‘lganda ham o‘rinli. Bu teorema isbotidan quyidagi jumlaning isboti ham kelib chiqadi.

Agar $a \geq b$ shartda *a* va *b* sonlari *c* ga bo‘linsa *a* - *b* ayirma ham *c* ga bo‘linadi.

8-teorema. Bo‘linuvchanlik munosabati antisimmetrikdir, ya’ni $a \vdots b$ dagi turli *a* va *b* sonlar uchun $b \vdots a$ emasligi kelib chiqadi.

Bo‘linuvchanlik munosabatlariga doir masalalarini o‘rganish va masalalar yechish uchun quyidagilarni bilish zarur.

Masalan, agar son 5 ga bo‘linsa, u 5q ko‘rinishga ega bo‘ladi, bu yerda q – butun nomanfiy son. Agar son 5 ga bo‘linmasa, u qanday ko‘rinishga ega bo‘ladi?

Ma’lumki, agar son 5 ga butun son marta bo‘linmasa, u holda uni 4 ga qoldiqli bo‘lish mumkin, bunda qolgan qoldiq 4 dan kichik bo‘lishi kerak, ya’ni 1,2,3 yoki 4 sonlari bo‘lishi kerak. Unda 5 ga bo‘lganda qoldiqda 1 qoladigan sonlar 5q –1 ko‘rinishda; 5 ga bo‘lganda qoldiqda 2 qoladigan sonlar 5q- 2 ko‘rinishda; 5 ga bo‘lganda qoldiqda 3 qoladigan sonlar 5q-3 ko‘rinishda; 5 ga bo‘lganda qoldiqda 4 qoladigan sonlar 5q-4 ko‘rinishda bo‘ladi. 5q, 5q-1, 5q-2, 5q-3, 5q-4 ko‘rinishdagi sonlar juft-jufti bilan o‘zaro kesishmaydigan, ularning birlashmasi esa butun nomanfiy sonlar to‘plami bilan ustma-ust tushadigan to‘plamlar hosil qiladi.

3).Bo‘linuvchanlik alomatlari

Quyidagicha savol tug‘iladi:

O‘nli sanoq sistemasida yozilgan biror x sonini a soniga bo‘linuvchanligini bevosita (bo‘lish ishlarini bajarmasdan) aniqlash mumkinmi?

Ta’rif: O‘nli sanoq sistemasida yozilgan *x* sonini biror *a* soniga bo‘linuvchanligini aniqlash qoidasi bo‘linuvchanlik alomatlari deyiladi. O‘nli sanoq sistemasida ba’zi bir bo‘linuvchanlik alomatlarini qaraymiz:

1) 2 ga bo‘linish alomati. *x* soni 2 ga bo‘linishi uchun uning o‘nli yozuvi 0,2,4,6,8 raqamlaridan biri bilan tugashi zarur va yetarlidir.

Isboti: *x* soni o‘nli sanoq sistemasida yozilgan bo‘lsin, ya’ni $x=n_k \cdot 10^k+n_{k-1} \cdot 10^{k-1} + ... + n_1 \cdot 10+n_0$ ...(1), (bunda n_k , n_{k-1}, ... , n_1 ,n_0 lar 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9 qiymatlarni qabul qiladi va $n_k \neq 0$ hamda n_0 0,2,4,6,8 qiymatlarni qabul qiladi). U holda $x \vdots 2$ bo‘lishini isbotlaymiz.

$10 \vdots 2$ bo‘lgani uchun $10^2 \vdots 2$, $10^3 \vdots 2$, ... , $10^p \vdots 2$ va demak, $(n_k \cdot 10^k +n_{k-1} \cdot 10^{k-1} + ... + n_1 \cdot 10) \vdots 2$. Shartga ko‘ra n_0 ham 2 ga bo‘linadi, shuning uchun *x* ni, ya’ni (1) ni har biri 2 ga bo‘linadigan ikki qo‘shiluvchining yig‘indisi sifatida qarash mumkin.

Demak, yig‘indining bo‘linuvchanligi haqidagi teoremaga ko‘ra *x* sonning o‘zi ham 2 ga bo‘linadi.

Endi teskarisini isbotlaymiz: agar *x* son 2 ga bo‘linsa, uning o‘nli yozuvi 0,2,4,6,8 raqamlaridan biri bilan tugaydi.

(1) tenglikni $n_0=x- (n_k \cdot 10^k +n_{k-1} \cdot 10^{k-1} + ... + n_1 \cdot 10)$ ko‘rinishda yozamiz. U holda ayirmaning bo‘linuvchanligi haqidagi teoremaga ko‘ra $n_0 \vdots 2$, chunki $x \vdots 2$ va $(n_k \cdot 10^k +n_{k-1} \cdot 10^{k-1} + ... + n_1 \cdot 10) \vdots 2$. bir xonali son 2 ga bo‘linishi uchun u 0,2,4,6,8 qiymatlarni qabul qilishi kerak. Bu isbotdan 2ga bo‘linish alomatini quyidagicha ham ta’riflash mumkin. o‘nli sanoq sistemasida yozilgan sonning faqat va faqat oxirgi raqami juft son bilan tugasa u 2 ga bo‘linadi.

2) 5 ga bo‘linish alomati. *x* soni 5 ga bo‘linishi uchun uning o‘nli yozuvi 0 yoki 5 raqami bilan tugashi zarur va etarlidir. Bu alomatning isboti 2 ga bo‘linish alomatining isbotiga o‘xshaydi.

3) 4 ga bo‘linish alomati. *x* soni 4 ga bo‘linishi uchun *x* sonining o‘nli yozuvidagi oxirgi ikkita raqamidan hosil bo‘lgan ikki xonali sonning 4 ga bo‘linishi zarur va yetarlidir.

Isbot. x soni o'nli sanoq sistemasida yozilgan bo'lsin, ya'ni $x=n_k\cdot 10^k+n_{k-1}\cdot 10^{k-1}+...+n_1\cdot 10+n_0$ bunda n_k, n_{k-1}, ... , n_0 lar 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9 qiymatlarni qabul qiladi va oxirgi ikkita raqam 4 ga bo'linadigan sonni tashkil qilsin. U holda $x\vdots 4$ bo'lishni isbotlaymiz.

Isbot: $100\vdots 4$ bo'lgani uchun $(n_k\cdot 10^k+n_{k-1}\cdot 10k^{-1}+...+n_2\cdot 10^2)\vdots 4$. Shartga ko'ra $a_1\cdot 10+a_0$ (bu ikki xonali sonning yozuvidir) ham 4 ga bo'linadi. Shuning uchun x ni har biri 4 ga bo'linadigan ikki qo'shiluvchining yig'indisi deb qarash mumkin. Demak, yig'indining bo'linuvchanligi haqidagi teoremaga ko'ra x sonining o'zi ham 4 ga bo'linadi.

Teskarisini isbot qilamiz, ya'ni agar x soni 4 ga bo'linsa, uning o'nli yozuvidagi oxirgi ikkita raqamdan hosil bo'lgan ikki xonali son ham 4 ga bo'linadi.

(1) tenglikni quyidagicha yozamiz: $n_1\cdot 10+n_0=x-(n_k\cdot 10^k+n_{k-1}\cdot 10^{k-1}+...+n_2\cdot 10^2)$; $x\vdots 4$ va $(n_k\cdot 10^k+n_{k-1}\cdot 10^{k-1}+...+n_2\cdot 10^2)\vdots 4$ bo'lgani uchun ayirmaning bo'linuvchanligi haqidagi teoremaga ko'ra $(n_1\cdot 10+n_0)\vdots 4$. Ammo $n_1\cdot 10+n_0$ yozuv x sonining oxirgi ikkita raqamidan hosil bo'lgan ikki xonali sonning yozuvidir.

4) 3 va 9 ga bo'linish alomati. Oldin 9 ga bo'linish alomatini qaraymiz. x soni 9 ga bo'linishi uchun uning o'nli yozuvidagi raqamlari yig'indisi 9 ga bo'linishi zarur va yetarlidir.

Isbot. Avval 10^k-1 ko'rinishdagi sonlar 9 ga bo'linishini isbotlaymiz.

Haqiqatan , $10^k-1=(9\cdot 10^{k-1}+10^{k-1})-1=(9\cdot 10^{k-1}+9\cdot 10^{k-2}+10^{k-2})-1=(9\cdot 10^{k-1}++9\cdot 10^{k-2}+...+10)-1=9\cdot 10^{k-1}+9\cdot 10^{k-2}...+9$. hosil bo'lgan yig'indining har bir qo'shiluvchisi 9 ga bo'linadi, demak, 10^k-1 soni ham 9 ga bo'linadi.

x soni o'nli sanoq sistemasida yozilgan bo'lsin, ya'ni $x=n_k\cdot 10^k+n_{k-1}\cdot 10^{k-1}++...+n_1\cdot 10+n_0$, bunda n_k , n_{k-1}, ... , n_1 , n_0 lar 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9 qiymatlarni qabul qiladi va $(n_k+n_{k-1}+...+n_0)\vdots 9$.

U holda $x\vdots 9$ bo'lishini isbotlaymiz. $n_k\cdot 10^k+n_{k-1}\cdot 10^{k-1}+...+n_0$ yig'indiga $n+n_{k-1}+...+n_0$ ifodani qo'shib va ayirib, natijani bunday ko'rinishda yozamiz: $x=(n_k\cdot 10^k-n_k)+...+(n_1\cdot 10-n_1)+(n_0-n_0)+(n_k+n_{k-1}+...+n_1+n_0)=$

$=n_k\cdot(10^k-1)+n_{k-1}(10^{k-1}-1)+...+n_1(10^{k-1}-1)+...+n_1(10-1)+(n_k+n_{k-1}+..++n_0)$

Oxirgi yig'indida har bir qo'shiluvchi 9 ga bo'linadi:

$n_k(10^k-1)\vdots 9$, chunki $(10^k-1)\vdots 9$

$n_{k-1}(10^{k-1}-1)\vdots 9$, chunki $(10^{k-1}-1)\vdots 9$

....

$n_1(10-1)\vdots 9$, chunki $(10-1)\vdots 9$.

Shartga ko'ra $(n_k+n_{k-1}+...+n_0)\vdots 9$. Demak, $x\vdots 9$. 3 ga bo'linish alomatini qaraymiz. x soni 3 ga bo'linishi uchun uning o'nli yozuvidagi raqamlar yig'indisi 3 ga bo'linishi zarur va yetarlidir.

Bu alomatning isboti 9 ga bo'linish alomatining isbotiga o'xshashdir.

Boshqa pozitsion sanoq sistemalarida bo'linuvchanlik alomatlarini qaraymiz. Aytaylik, P sanoq sistemasining asosi bo'lsin.

Agar P : a bo'lsa, u holda P^2, P^3, ... , P^p ko'rinishdagi barcha sonlar a ga bo'linadi. Shuningdek $X_pP^p+X_{p-1}P^{p-1}+...+XP$ ko'rinishdagi yig'indi ham a ga bo'linadi.

Ta'rif: Agar P a soniga bo'linsa va X P asosli sanoq sistemasida

$$X=X_pP^p+X_{p-1}P^{p-1}+...+X_0$$

ko'rinishda bo'lsa, u holda X soni a ga faqat va faqat X_0 soni a ga bo'linsa bo'linadi.

Masalan, o'n ikkili sanoq sistemasidagi son faqat va faqat uning oxirgi raqami 0,3,6 va 9 bilan tugasa 3 ga bo'linadi.

Umumiy holda P-1 ga bo'linuvchanlik alomatini yozamiz.

$X=X_kP^k+X_{k-1}P^{k-1}+...+X_1P+X_0$ soni berilgan bo'lsin, shu sonni P-1 ga bo'linuvchanlik alomatini yozamiz

Algebradan bizga tubandagi formula ma'lum.

$$P^p-1=(P-1)(P^{p-1}+P^{p-2}+...+1)$$

Bu formuladan n ning ixtiyoriy qiymatida P^p-1 ni P-1 ga bo'linishi kelib chiqadi. X sonini quyidagicha yozish mumkin.

$$X=[X_k(P^k - 1) + ... + X_1(P-1)] + (X_k+X_{k-1} + ... + X_o)$$

Birinchi qo‘shiluvchi P-1 ga bo‘linadi. Bundan esa quyidagi qoida kelib chiqadi. X soni P-1 soniga faqat va faqat uning raqamlarining yig‘indisi P-1 songa bo‘linsa bo‘linadi.

Masalan: 6723_8 soni 9 ga bo‘linadi, chunki uning raqamlarini yig‘indisi 6+7+2+3=18; 18 esa 9 ga bo‘linadi

O‘z-o‘zini nazorat qilish uchun savollar

1.Qachon b soni a sonining bo‘luvchisi deyiladi?
2.Bo‘linuvchanlik munosabati nima?
3.«Berilgan sonning bo‘luvchisi» va «bo‘luvchi» terminlarining farqi nimada?
4.Bo‘linuvchanlik munosabatlarining xossalarini ayting.
5.2 ga va 3 ga bo‘linish alomatlarini aytib, isbotlab bering.
6.4 ga va 9 ga bo‘linish alomatlarini aytib , isbotlab bering.
7.O‘nli sanoq sistemasidan boshqa pozitsion sistemalarida bo‘linish alomatlarini aytib bering.

KARRALI VA BO‘LUVCHILAR

1). Sonlarning eng kichik umumiy karralisi.

Agar a soni b soniga bo‘linsa, a soni b ga karrali deyiladi. O soni barcha sonlarga bo‘lingani uchun o soni barcha sonlarga karrali. Biz b soniga karrali deganda b soniga natural karralini tushunmog‘imiz kerak, ya’ni b , 2b, ... , nb; bularning eng kichigi b hisoblanadi.

Bo‘linuvchanlik munosabati xossalarini karralilik xossalari kabi ifodalash ham mumkin.

Masalan, a soni b soniga karrali, b soni esa s ga karrali bo‘lsa, a soni s ga karrali bo‘ladi. a va b sonlarini olaylik. Agar m soni a sonini ham, b sonini ham karralisi bo‘lsa, u holda m soni bu sonlarning umumiy karralisi deyiladi.

a va b sonlarining umumiy karralisi ularning ko‘paytmasi ab hisoblanadi, chunki u a ga ham, b ga ham bo‘linadi.

a va b sonlarining umumiy karralisi bo‘lgan sonlar to‘plami, a va b sonlariga karrali sonlar to‘plamining kesishmasidan iborat bo‘ladi.

Masalan: 3 ga karrali sonlar to‘plami A, 4 ga karrali sonlar to‘plami B bo‘lsin.

A={3, 6, 9, 12, 15, 18, 21,24,27,30,33,36,}

B={4,8,12,16,20,24,28,32,36}

A va B to‘plamlarning kesishmasi

$A\bigcap B$={12,24,36, ...}

Bu to‘plamning barcha sonlari 3 va 4 ga karrali.

Bu sonlarning ichida eng kichigi 12 soni.

Ta’rif. a va b sonlariga umumiy karrali bo‘lgan sonlarni ichida eng kichigiga , bu sonlarning eng kichik umumiy karralisi deyiladi va u K(a,b) bilan belgilanadi. Masalan, K(3,4)= 12;

Umumiy karralilik xossalari:

1-teorema. Ixtiyoriy ikkita a va b sonlarning umumiy karralisi, u sonlarning eng kichik umumiy karralisiga bo‘linadi.

Isboti. Aytaylik K(a,b)=n bo‘lsin m soni esa a va b sonlarining umumiy karralisi bo‘lsin. Biz m:n ekanini ko‘rsatishimiz kerak. m soni n ga bo‘linsin va biror r qoldiq qolsin, ya’ni $m=n\cdot q+r$; r=o ekanini ko‘rsatamiz.

m ham, n ham a soniga bo‘lingani uchun r=m-kq ham a soniga bo‘linadi. Shuningdek, m ham n ham b soniga bo‘lingani uchun r ham b ga bo‘linadi. Demak, r ham a ga ham b ga bo‘linadi. Agar r noldan farqli bo‘lsa, u a va b sonlarining umumiy karralisi bo‘lishi kerak va u n dan kichik bo‘lmasligi kerak, ya’ni $r\leq n$ (n esa a va b sonlarining eng kichik umumiy karralisi). Buning esa bo‘lishi mumkin emas, chunki qoldiq bo‘luvchidan katta.

Demak, qoldiq r noldan farqli emas, ya’ni r=o.

Demak, m = n q, ya’ni m n ga bo‘linadi.

2-teorema. Agar K(a,b)=n bo‘lsa, u holda ixtiyoriy natural s soni uchun K(as, bs)=ns tenglik o‘rinli.

Endi bo‘luvchi ustida to‘xtalamiz. “a sonini b soniga karrali” munosabatiga “b soni a sonining bo‘luvchisi” munosabati teskari. Boshqacha aytganda b soni a sonining bo‘luvchisi bo‘lishi uchun faqat va faqat a soni b soniga karrali bo‘lishi kerak.

Agar b soni a sonining bo‘luvchisi bo‘lsa, b\a ko‘rinishida yoziladi. Masalan, 4|16 yozuvi 16 ⋮ 4 ni bildiradi.

Bo‘linuvchilik munosabatining har bir xossasiga bo‘luvchilik munosabati mos keladi.

Masalan, bo‘linuvchilik munosabatida tranzitivlik xossa tubandagicha ifodalanadi: agar a b ning bo‘luvchisi, b esa s ning bo‘luvchisi bo‘lsa, u holda a, s ning bo‘luvchisi bo‘ladi. Har bir son o‘zining bo‘luvchisi, 1 esa ixtiyoriy sonning bo‘luvchisidir.

2). Sonlarning eng katta umumiy bo‘luvchisi

1-ta’rif. Agar a va b sonlari s ga bo‘linsa, s soni bu sonlarning umumiy bo‘luvchisi deyiladi. a va b sonlarining umumiy bo‘luvchilarini topish uchun a soni bo‘luvchilari to‘plami bilan b soni bo‘luvchilari to‘plami kesishmasini topish kerak.

Masalan, 16 va 28 sonlarining umumiy bo‘luvchilarini toping.

A va B to‘plamlar mos ravishda 16 va 28 sonlarining umumiy bo‘luvchilarini ifodalasin. U holda

A={ 1,2,3,4,8,16} , B= {1,2,4,7,14,28}

$A\bigcap B$={1,2,4}, Demak, 16 va 28 sonlarining umumiy bo‘luvchilari 1,2,4 sonlari ekan. Aytaylik, a natural son b ga bo‘linsin. Ammo a sonining bo‘luvchilar soni a dan oshmaydi, shu sababli bo‘luvchilar soni chekli bo‘ladi. Shunga asosan a va b sonlarining umumiy bo‘luvchilar soni chekli va chekli to‘plam tashkil etadi.

2-ta’rif. a va b sonlarining umumiy bo‘luvchilari ichida eng kattasiga, a va b sonlarining eng katta umumiy bo‘luvchisi deyiladi va D(a,b) ko‘rinishda belgilanadi. Yuqoridagi misolda D(16,28) =4 ga teng.

3-ta’rif. Agar a va b sonlari 1 dan boshqa umumiy bo‘luvchilarga ega bo‘lmasa, ular o‘zaro tub deyiladi. Masala: 13 va 15 sonlari uchun D(13, 15)=1.

3). Eng kichik umumiy karrali va eng katta umumiy bo‘luvchining xossalari

1-xossa. Agar c soni a va b sonlarining umumiy bo‘luvchisi bo‘lsa (ya’ni $a=a_1c$; $b=b_1c$), u holda $\ell=\frac{ab}{c}$ - son *a* va *b* sonlarining umumiy karralisi bo‘ladi.

Isbot: Shartga ko‘ra $a=a_1c$; $b=b_1c$ bo‘lganda $\ell=a_1b$ $\ell=b_1a$ ekanligini ko‘rsatamiz.

$\ell=\frac{ab}{c}$ dan $\ell=\frac{a_1cb_1c}{c}=a_1b_1c=b_1(a_1c)=b_1a;$ bundan ℓ ni a ga bo‘linishi kelib chiqadi.

Ikkinchi tomondan, $\ell=a_1(b_1c)=a_1b$: bundan esa ℓ soni *a* va *b* sonlarining umumiy karralisi ekan.

Misol: 6 soni 12 va 18 sonlarining umumiy bo‘luvchisi ya’ni, 12=6·2; 18=6·3.

Bundan $\ell=\frac{12\cdot 18}{6}=36$ soni 12 va 18 sonlarining eng kichik umumiy karralisi bo‘ladi.

2-xossa. Agar *d* soni *a* va *b* sonlarining eng kichik umumiy karralisi bo‘lsa (ya’ni *d=K(a,b)* bo‘lsa) , u holda $\ell=\frac{ab}{d}$ soni *a* va *b* sonlarining eng katta umumiy bo‘luvchisi bo‘ladi.

Bu xossa to‘g‘riligini ko‘rsatish oson (buni ko‘rsatishni talabalarga mustaqil topshiramiz).

Bu xossadan quyidagi natijalar kelib chiqadi.

1-natija. Ikkita *a* va *b* sonlarining eng kichik umumiy karralisini, uning eng katta umumiy bo‘luvchisiga ko‘paytmasi shu sonlarning ko‘paytmasiga teng.

$$D(a,b) \cdot K(a,b) = \frac{ab}{d} d = ab$$

Xususiy holda, agar $D(a,b) = 1$ bo‘lsa, u holda $K(a,b) = a \cdot b$ ga teng.

2-natija: O‘zaro tub ikkita natural sonning eng kichik umumiy karralisi shu sonlarning ko‘paytmasiga teng.

3-xossa. a va b natural sonlarining eng katta umumiy bo‘luvchisi shu sonlarning ixtiyoriy umumiy bo‘luvchilariga bo‘linadi.

4-xossa. Agar a va b natural sonlar ko‘paytmasi $a \cdot b$ m natural soniga bo‘linsa hamda m soni a soni bilan o‘zaro tub bo‘lsa, b soni ham m ga bo‘linadi.

5-xossa. Agar a natural soni o‘zaro tub bo‘lgan b va c sonlarining har biriga bo‘linsa, u holda a soni ularning $b \cdot c$ ko‘paytmasiga ham bo‘linadi.

Bu xossadan natural sonning murakkab sonlarga bo‘linish alomatlari kelib chiqadi. Masalan, natural x soni 12 ga bo‘linishi uchun u 4 va 3 sonlariga bo‘linishi zarur va yetarli.

4). Tub sonlar va ularning xossalari

Har bir son a kamida ikkita bo‘luvchiga ega: a sonining o‘zi va 1 ;

1-ta’rif. Ikkita bo‘luvchiga ega bo‘lgan va birdan katta sonlarga tub sonlar deyiladi, boshqacha aytganda, o‘ziga va 1 ga bo‘linadigan sonlarga tub sonlar deyiladi.

Masalan, 7 tub son, uning bo‘luvchilari 7 va 1, 15 soni tub son emas, chunki u 15 va 1 bo‘luvchilaridan boshqa 3 va 5 bo‘luvchilarga ega.

2-ta’rif. Ikkitadan ortiq har xil bo‘luvchilarga ega bo‘lgan sonlar murakkab sonlar deyiladi.

1 soni 1 ta bo‘luvchiga, ya’ni o‘ziga, 0 soni esa cheksiz ko‘p bo‘luvchilarga ega. Shu sababli 1 va 0 sonlari tub sonlarga ham murakkab sonlar sostaviga ham kiritilmaydi.

Shunday qilib, nomanfiy butun sonlar to‘plami Z_0 4 ta sinfga ajratiladi:

1) birinchi sinf faqat 0 soni (cheksiz ko‘p bo‘luvchilarga ega)
2) ikkinchi sinf faqat 1 soni (faqat bitta bo‘luvchiga ega)
3) tub sonlar sinfi (ikkita bo‘luvchiga ega)
4) murakkkab sonlar sinfi(0 dan farqli ikkitadan ortiq bo‘luvchilarga ega)

Tub sonlar quyidagi xossalarga ega:

1) agar r tub soni 1 dan farqli biror n natural soniga bo‘linsa, u n soni bilan ustma-ust tushmasa, u uchinchi bo‘luvchiga ega bo‘ladi, ya’ni 1, r va n. U holda r tub son emas.

2) agar r va q lar har xil tub sonlar bo‘lsa, u holda r soni q ga bo‘linmaydi.

3) agar a natural soni r tub songa bo‘linmasa, u holda a va r sonlari o‘zaro tub sonlar.

4) agar ikkita a va b natural sonlar ko‘paytmasi r tub songa bo‘linsa, u holda ulardan bittasi shu tub songa bo‘linadi.

5) agar natural son 1 dan katta bo‘lsa, aqalli bitta tub bo‘luvchiga ega bo‘ladi.

6) Murakkab a sonining eng kichik tub bo‘luvchisi $\sqrt{a}$ dan oshmaydi.

O‘z-o‘zini nazorat qilish uchun savollar

1. Karrali deganda nimani tushunasiz?
2. Eng kichik umumiy karraliga ta’rif bering.
3. Sonlarning umumiy bo‘luvchisini tushuntiring va eng katta umumiy bo‘luvchiga ta’rif bering.
4. Eng kichik umumiy karrali va eng katta umumiy bo‘luvchining xossalarini aytib bering.
5. Tub va murakkab sonlar deb qanday sonlarga aytiladi?

II.2.6. SONLARNI TUB KO‘PAYTUVCHILARGA AJRATISH [YOYISH] USULI BILAN ULARNING ENG KATTA UMUMIY BO‘LUVCHISI VA ENG KICHIK UMUMIY KARRALISINI TOPISH

1). Sonlarni tub ko‘paytuvchilarga ajratish [yoyish] usuli bilan ularning eng katta umumiy bo‘luvchisi va eng kichik umumiy karralisini topish

Sonni tub sonlar ko‘paytmasi ko‘rinishida ifodalash bu sonni tub ko‘paytuvchilarga ajratish (yoyish) deyiladi. Masalan, 86=2·43 yozuv 86 soni 2, 43 tub ko‘paytuvchilarga ajratilganini bildiradi.

Umuman, har qanday murakkab sonni tub ko‘paytuvchilarga ajratish mumkin. U qanday usulda ajratilsa ham bir xil yoyilma hosil bo‘ladi.(agar ko‘paytuvchilar tartibi hisobga olinmasa.). Shuning uchun 86 sonini 2·43 ko‘paytma yoki 43·2 ko‘paytma ko‘rinishida yozish 86 sonini tub ko‘paytuvchilarga ajratishning bir xil yoyilmasidir. 436 sonining yoyilmasini qaraymiz.

436	2
218	2
109	109
1	

Bir xil ko‘paytuvchilarni ko‘paytmasining darajasi qilib yozish qabul qilingan. $436 = 2^2 \cdot 109$ sonining bunday yozilishi uning kanonik ko‘rinishi deyiladi. Sonlarni tub ko‘paytuvchilarga ajratish ularning eng katta umumiy bo‘luvchisini va eng kichik umumiy karralisini topishda ishlatiladi.

Masalan, 1800 va 244 sonlarining eng katta umumiy bo‘luvchisi va eng kichik umumiy karralisini topaylik. Bu sonlarning har birini kanonik ko‘rinishda yozamiz.

$1800=2\cdot2\cdot2\cdot3\cdot3\cdot5\cdot5=2^3\cdot3^2\cdot5^2$ $\quad$ $244=2\cdot2\cdot61=2^2\cdot61$

900	122
450	61
225	1
75	
25	
5	
1	

1800 va 244 sonlarining eng katta umumiy bo‘luvchisining tub ko‘paytuvchilarga yoyilmasiga berilgan sonlar yoyilmasidagi barcha umumiy tub ko‘paytuvchilar kirishi va bu tub ko‘paytuvchilarning har biri berilgan sonlarning yoyilmalaridagi eng kichik ko‘rsatkichi bilan olinishi kerak. Shuning uchun 1800 va 244 sonlarining eng katta umumiy bo‘luvchisining yoyilmasiga 2^2 kiradi. Demak, $D(1800,244)=2^2=4$ 1800 va 244 sonlarining eng kichik umumiy karralisining tub ko‘paytuvchilarga yoyilmasiga berilgan sonlar yoyilmasining hech bo‘lmaganda bittasida bo‘lgan hamma tub ko‘paytuvchilar kirishi va bu tub ko‘paytuvchilarning har biri shu yoyilmalardagi eng katta darajasi bilan olinishi kerak. Shuning uchun 1800 va 244 sonlarning eng kichik umumiy karralisining yoyilmasiga 2^3, 3^2, 5^2, 61 ko‘paytuvchilar kiradi. Demak, K(1800, 244)= $2^3\,2^3\cdot3^2\cdot$ $5^2\cdot61$= 109800

Umuman, berilgan sonlarning eng kichik umumiy karralisini topish uchun:

1) berilgan har bir sonni kanonik ko‘rinishda yozamiz; 2) berilgan sonlar yoyilmasidagi hamma tub ko‘paytuvchilar ko‘paytmasini hosil qilamiz, bunda har bir ko‘paytuvchini berilgan sonlar yoyilmasiga kirgan eng katta ko‘rsatkichi bilan olamiz; 3) bu ko‘paytmaning qiymatini topamiz – u berilgan sonlarning eng kichik umumiy karralisi bo‘ladi. Bir nechta misol qaraymiz:

1-misol. 60, 252, 264 sonlarining eng katta umumiy bo‘luvchisini va eng kichik umumiy karralisini topamiz.

Har bir sonni kanonik ko‘rinishda yozamiz:

$60=2^2\cdot3\cdot5$, $252=2^2\cdot3^2\cdot7$, $264=2^3\cdot3\cdot11$.

Berilgan sonlarning eng katta umumiy bo‘luvchisini topish uchun berilgan yoyilmalardagi umumiy tub ko‘paytuvchilar ko‘paytmasini hosil qilamiz, bunda har bir ko‘paytuvchini berilgan sonlarning yoyilmasiga kirgan eng kichik ko‘rsatikichi bilan olamiz. D(60,252,264)= $2^2\cdot3=12$

Berilgan sonlarning eng kichik umumiy karralisini topish uchun berilgan sonlarning yoyilmasidagi hamma ko‘paytuvchilar ko‘paytmasi-ni hosil qilamiz, bunda har bir ko‘paytuvchini berilgan sonlar yoyilmasiga kirgan eng katta ko‘rsatkichi bilan olamiz: K(60,252, 264)= $2^3\cdot3^3\cdot5\cdot7\cdot11$= 27720

2-misol. 48 va 245 sonlarining eng katta umumiy bo‘luvchisini va eng kichik umumiy karralisini topamiz. Har bir sonni kanonik ko‘rinishda yozamiz. $48=2^4\cdot3$; $245=5\cdot7^2$.

Berilgan sonlar yoyilmasida umumiy ko‘paytuvchilar bo‘lmagani uchun D(48, 245)=1. K(48,245)=48·245=10760

2). Eratosfen g‘alviri

Matematiklar tomonidan tub sonlarni ifodalovchi bir qancha jadvallar tuzilgan. Bu jadvallardan foydalanilsa, har bir sonning tub yoki murakkabligini tekshirib o‘tirish shart emas. Eramizdan oldingi III asrda Aleksandriyada yashagan grek matematigi va astronomi Eratosfen, tub sonlarni aniqlashning oddiy usulini, ya’ni ma’lum qoidaga ko‘ra sonlarni o‘chirishga asoslangan usulini yaratdi.

Bu metodni qo‘llaganda o‘chirilgan sonlar o‘rni bo‘sh qoladi, boshqacha aytganda murakkab sonlar tushib, tub sonlar qoladi, shu sababli bu metodni Eratosfen galviri deb ataganlar. Bu metodning mohiyati quyidagicha. Dastlab 2 dan n gacha barcha natural sonlar yoziladi. Shundan keyin 2 soni qoldirilib, 2 ga karrali sonlar o‘chiriladi.

Masalan: $n = 30$ deb olsak, quyidagi jadval hosil bo‘ladi:

2, 3, 5, 7, 11, 13, 15, 17, 19, 21, 23, 25, 27, 29.

Jadvaldan 2 sonidan boshqa 2 ga bo‘linadigan sonlar o‘chirilgan, bundan esa qolgan sonlarni eng kichik tub bo‘luvchisi 2 dan katta ekanligi ko‘rinadi.

Jadvalda 2 dan keyin o‘chirilmagan son 3. 3 sonini o‘zini qoldirib, jadvaldan 3 ga bo‘linuvchi sonlarni o‘chiramiz.

2, 3, 5, 7, 10, 11, 13, 15, 17, 19, 23, 25, 29.

(ba’zi bir sonlar ikki martadan chizildi)

2 va 3 dan boshqa qolgan sonlar 2 ga ham 3 ga ham bo‘linmaydi.

Kelgusi bosqichda 5 sonini qoldirib 5 ga karrali sonlarni o‘chiramiz. U holda jadval quyidagi ko‘rinishga keladi.

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 27, 29.

Uch marta chizilgandan keyin qolgan sonlar 2,3 va 5 ga bo‘linmaydi. Tub sonlar quyidagilar:

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29;

Eratosfen metodi berilgan n natural sonidan oshmaydigan tub sonlarni topishga imkon beradi. Ammo u bu tub sonlar soni cheklimi yoki cheksizmi degan savolga javob beraolmaydi. Bu savolga eramizdan oldin III asrda Aleksandriyada yashagan grek matematigi Evklid javob berdi. U tub sonlar to‘plami cheksizdir degan tasdiqni isbotladi va u Evklidning tub sonlar haqidagi teoremasi nomi bilan yuritiladi. Bu teorema isbotini ko‘raylik.

Teorema. Tub sonlar to‘plami cheksiz.

Isbot. Teorema isbotini teskarisidan boshlaymiz. Faraz qilaylik tub sonlar to‘plami chekli, u $r_1, r_2, \ldots, r_p$ sonlardan iborat bo‘lsin. Bu sonlar ko‘paytmasini hosil qilib unga 1 sonini qo‘shaylik, ya’ni $a = r_1 \cdot r_2 \ldots r_p + 1$:

Bu son yo murakkab, yoki tub son bo‘lishi mumkin. Bu son tub son emas, chunki u $r_1, r_2, \ldots, r_p$ sonlardan katta, biz esa shu sonlardan boshqa tub son yo‘q deb faraz qilganmiz. Ikkinchi tomondan, a soni murakkab son bo‘lsa, u kamida bitta tub ko‘paytuvchiga ega bo‘lishi kerak va bu tub ko‘paytuvchi $r_1, r_2, \ldots, r_p$ lardan bittasi bo‘lishi kerak. a soni esa bu sonlardan bittasiga ham bo‘linmaydi (bo‘linganda ham 1 qoldiqqa ega). Bu esa bizning farazimizga qarama-qarshi. Demak tub sonlar to‘plami cheksiz.

3). Natural sonlar arifmetikasining asosiy teoremasi

Bizga ma’lumki maktabda o‘quvchilar natural sonlarni tub ko‘paytuvchilarga ajrata oladilar.

Masalan, $124 = 2 \cdot 2 \cdot 31$, $210 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$. Ammo maktab matematika kursida ixtiyoriy murakkab son uchun tub ko‘paytuvchilarga ajratish mavjudmi va ajratish usuli bir xilmi, degan savolga javob berilmagan. Bu savolga natural sonlar arifmetikasining asosiy teoremasi deb ataluvchi quyidagi teorema javob beradi.

Teorema. Ixtiyoriy murakkab sonni yagona usulda tub sonlar ko‘paytmasi shaklida ifodalash mumkin.

Isbot. Teorema isboti ikki qismdan iborat:
1) ixtiyoriy natural son uchun tub sonlar ko‘paytmasi mavjudmi?
2) ko‘paytma mavjud bo‘lsa, u yagonami?
Birinchi qismini isbot qilamiz. Faraz qilamiz tub ko‘paytuvchilarga ajralmaydigan murakkab son mavjud. U holda shunday sonlar to‘plami A da eng kichik a soni bor. A to‘plamdagi hamma sonlar murakkab bo‘lgani uchun, a sonini ikkita a_1 va a_2 sonlar ko‘paytmasi shaklida yozish mumkin. a_1 va a_2 larni har biri a dan kichik.

$a_1 < a$; $a_2 < a$; a_1 va a_2 sonlari a dan kichik bo‘lgani uchun ular A to‘plamga tegishli emas. Shuning uchun ular tub sonlar yoki ular tub sonlar ko‘paytmasiga ajraladigan sonlar.

Agar $a_1= r_1...r_m$ va $a_2=q_1...q_n$ bo‘lsa, (bu yerda $r_1,...., r_m$ va $q_1, ... q_n$ lar tub sonlar). U holda $a=a_1 \cdot a_2 = r_1 ....r_m\, q_1 ... q_m$

a sonini tub ko‘paytuvchilarga ajratilmaydi degan farazimizga zid. Demak, murakkab sonni tub sonlar ko‘paytmasi shaklida ifodalash mavjud.

Endi teoremaning ikkinchi qismini isbotlaymiz.

Murakkab sonni tub sonlar ko‘paytmasi shaklida ifodalash mumkin va u bir qiymatli aniqlanganligini ko‘rsatamiz.
Boshqacha aytganda, murakkab sonni ikki xil tub ko‘paytuvchilarga ajratish bir-biridan ko‘paytuvchilarning o‘rinlarini almashinuvi bilan farq qilishini ko‘rsatamiz.

Faraz qilaylik, ikki xil tub ko‘paytuvchilarga ajratilgan natural sonlar mavjud. Bu sonlar to‘plamini A bilan belgilaymiz. Farazga ko‘ra A to‘plam bo‘sh to‘plam emas, unda eng kichik a son mavjud. Shartga ko‘ra quyidagi tub ko‘paytuvchilarga egamiz.

$$a= r_1 ....r_m; \quad a=q_1 ... q_n$$

U holda $r_1 ....r_m = q_1 ... q_n$ ....(1)
(1) tenglikni o‘ng tomoni tub q_1 soniga bo‘linadi, u holda chap tomoni ham q_1 soniga bo‘linadi, ya’ni chap tomondagi ko‘paytuvchilardan biri bo‘linadi.
Agar r_1 q_1 ga bo‘linadi desak, u holda $r_1 =q_1$ bo‘ladi. (1) tenglikni ikkala tomonini r_1 ga qisqartiramiz.

U holda $c= r_2...r_m = q_2 ... q_n$ tenglikka ega bo‘lamiz. bu yerda $c=a:r_1$; $r_1>1$ bo‘lsa, u holda $c<a$ bo‘ladi.

Farazimizga ko‘ra a eng kichik son va ikki xil tub ko‘paytuvchilarga ega. Demak, c bitta tub ko‘paytuvchilarga ega bo‘lib, $c=r_2...r_m=q_1...q_n$ tub ko‘paytuvchilar ajratmasi bir- biridan ko‘paytuvchilar tartibi bilan farq qiladi. Bu esa tub ko‘paytuvchilarga ajratish turlicha degan farazimizga zid.
Demak, tub ko‘paytuvchilarga ajratish yagonadir.

Sonlarni tub ko‘paytuvchilarga ajratishdagi yoyilmada tub sonlar tub sonlarni o‘sish tartibida joylashtiriladi.
$2520= 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5\cdot 7$

$a = P_1^{\alpha_1} .... P_n^{\alpha_n}$ yoyilmaga 2 dan boshlab P_p gacha barcha tub sonlar kiradi. Agar yoyilma o‘rtasida tub sonlar tushib qolsa, umumiylikni buzmasdan, ularni 0 ko‘rsatkichli qilib yoziladi.
Masalan: $726=2 \cdot 3\cdot 11^2 = 2\cdot 3\cdot 5^0 \cdot 7^0 \cdot 11^2$

4). Evklid algoritmi

Sonlarni tub ko‘paytuvchilarga ajratish usuli bilan ularning eng katta umumiy bo‘luvchisini topish ba’zan qator qiyinchiliklarga olib keladi. Masalan 6815 sonini tub ko‘paytuvchilarga ajratishda birinchi bo‘luvchi 5 ni topib, 1363 sonini hosil qilamiz, bu sonning eng kichik bo‘luvchisi 29 ga teng. Ammo 29 ni topish uchun 1363 sonining 2 ga, 3 ga, 5 ga, 7 ga, 11 ga, 13 ga, 17 ga, 19 ga, 23 ga, 29 ga bo‘linish-bo‘linmasligini tekshirishimiz kerak, bunda 1363 soni faqat 29 gagina butun son marta bo‘linadi. Berilgan sonlarning eng katta umumiy bo‘luvchisini qiyinchiliklarsiz topish usuli mavjud.

Buning uchun ikki son umumiy bo‘luvchisining bitta muhim xossasini eslaymiz. Masalan, 525 va 231 sonlarini olamiz va 525 ni 231 ga qoldiqli bo‘lamiz: $525=231\cdot2+63$.

525 va 231 sonlarining umumiy bo‘luvchilari to‘plamini A orqali, 231 va 63 sonlarining umumiy bo‘luvchilari to‘plamini B orqali belgilaymiz va A=B ni isbotlaymiz, boshqacha aytganda 525 va 231 sonlarining ixtiyoriy umumiy bo‘luvchisi 231 va 63 sonlarining umumiy bo‘luvchisi ekanligini isbotlaymiz. Haqiqatan, agar 525:d va 231:d bo‘lsa, ayirmaning bo‘linuvchanligi haqidagi teoremaga ko‘ra 63:d ni hosil qilamiz. Agar $525=231\cdot2+63$ tenglikni $63=525-231\cdot2$ ko‘rinishida yozsak, bunga oson ishonch hosil qilish mumkin. Shunday qilib, 525 va 231 sonlarining ixtiyoriy umumiy bo‘luvchisi 231 va 63 sonlarining umumiy bo‘luvchisi bo‘ladi, ya’ni $A\subset B$ Aksincha, agar 231 va 63 sonlarining umumiy bo‘luvchisi, ya’ni 231:t va 63:t bo‘lsa, yig‘indining bo‘linuvchanligi haqidagi teoremaga ko‘ra 525:t bo‘ladi. Demak, 231 va 63 sonlarining ixtiyoriy umumiy bo‘luvchisi 525 va 231 sonlarining ham umumiy bo‘luvchisi bo‘lar ekan, ya’ni $B\subset A$.

Teng to‘plamlar ta’rifiga ko‘ra A=B. Ammo agar berilgan sonlar juftining umumiy bo‘luvchilari to‘plami bir xil bo‘lsa, ularning eng katta umumiy bo‘luvchisi ham teng bo‘ladi, ya’ni
D (525, 231)= D (231, 63).

Umuman, agar a va b – natural sonlar hamda a=bq+r bo‘lsa, D(a,b)= D(b, r) bo‘ladi, bunda r<b .

Bu teoremaning isboti yuqorida keltirilgan xususiy holning isboti kabidir.
Bu xossaning muhimligi nimada? Bu xossa a va b sonlarining eng katta umumiy bo‘luvchisini topishda bu sonlarni kichik sonlarga almashtirishga imkon yaratadi, bu esa hisoblashlarni osonlashtiradi. Bunday almashtirishni bir necha bor bajarish mumkin. Masalan, 525 ni 231 ga qoldiqli bo‘lib, qoldiqda 63 ni hosil qilamiz.
Demak, D (525, 231)= D(231, 63). 231 ni 63 ga qoldiqli bo‘lamiz: $231=63\cdot3+42$, ya’ni D(231, 63)=D (63, 42).

63 ni 42 ga qoldiqli bo‘lamiz: $63=42\cdot1+21$. Demak, D(63,42)=D(42,21). 42 ni 21 ga qoldiqli bo‘lganda qoldiqda 0 hosil qilamiz, ya’ni D(42, 21)=D (21,0) . 21 bilan 0 ning eng katta umumiy bo‘luvchisi 21 ga teng. Demak, 21 soni 525 va 231 sonlarining eng katta umumiy bo‘luvchisi bo‘ladi, chunki D(525, 231)=D(231, 63)=D(63,42)=(42, 21)=D(21, 0)=21.
Biz bajargan hisoblashlar ko‘pincha bunday yoziladi:

$525 = 231\cdot 2 + 63$

$231 = 63\cdot 3+42$

$63 = 42\cdot 1 + 21$

$42 = 21\cdot 2 + 0$

D(525,231)=21.

Eng katta umumiy bo‘luvchini topishning ko‘rilgan usuli qoldiqli bo‘lishga asoslangan. Bu usulni birinchi marta qadimgi grek matematigi Evklid (eramizgacha III asr) yaratgan va shuning uchun u Evklid algoritmi nomi bilan yuritiladi. Evklid algoritmini umumiy ko‘rinishda bunday ifodalash mumkin:
a va b – natural sonlar hamda a > b bo‘lsin. a soni b soniga qoldiqli bo‘linadi, keyin b soni qolgan qoldiqqa qoldiqli bo‘linadi, so‘ngra birinchi qoldiq ikkinchi qoldiqqa qoldiqli bo‘linadi va hokazo, u holda oxirgi holdan farqli qoldiq a va b sonlarning eng katta umumiy bo‘luvchisi bo‘ladi.

O‘z-o‘zini nazorat qilish uchun savollar

1. Sonlarni tub ko‘paytuvchilarga ajratish yo‘li bilan eng katta umumiy bo‘luvchisi va eng kichik umumiy karralisini topishni misollar yordamida tushuntirib bering.
2. Tub sonlarni aniqlashdagi Eratosfen g‘alviri metodini tushuntiring.
3. Natural sonlar arifmetikasining asosiy teoremasini ifodalang va isbotlab bering.
4. Sonlarni eng katta umumiy bo‘luvchisini topishni, Evklid algoritmini tushuntirib bering.

III – BOB. SON TUSHUNCHASINI KEHGAYTIRISH.
3.1. BUTUN SONLAR.

3.1.1. Butun nomanfiy sonlar. Manfiy sonlarning kiritilishi. Butun sonlarning geometrik interpretatsiyasi.

1.Butun nomanfiy sonlar. a va b natural sonlar va $a+b=c$ yig‘indi berilgan bo‘lsin. Bu yig‘indi uchun 1) $c>a$ va $c>b$; 2) har bir qo‘shiluvchi, yig‘indi bilan ikkinchi qo‘shiluvchi orasidagi ayirmaga teng, ya’ni $b=c-a$ va $a=c-b$

«0» soni bo‘sh to‘lpamlar sinfining xarakteristikasi sifatida kiritilgan bo‘lib «a» natural son esa bo‘shmas to‘lpamlar sinfining xarakteristikasi bo‘lganligi uchun $a+0=a$ ekanligini tushunish qiyin emas. Yigindida biror qo‘shiluvchini topish qoidasini qo‘shiluvchilardan biri nol bo‘lgan holda qarab, $0=a-a$ ni hosil qilamiz. Shunday qilib, «0» sonini ikkita teng sonning ayirmasi deb qarash mumkin.

Nol sonini natural sonlar to‘plamiga qo‘shib, butun nomanfiy sonlar to‘plami deb ataladigan yangi sonli to‘plam hosil qilamiz. Bu kengaytirilgan to‘plam Z_0 bilan belgilanadi va quyidagicha yoziladi

$$Z_0=\{0,1,2,3,4,\ldots,n,\ldots\}$$

Nol soni bilan amallar bajarish qoidalarini, ushbu tengliklar ko‘rinishida yozish mumkin: $a+0=a$ (ta’rifga ko‘ra), $0+a=a$;

$$a-0=a;\ \ a\cdot 0=0,\ \ 0\cdot a=0$$

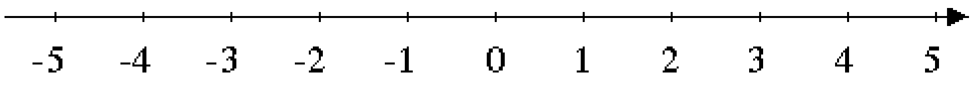
agar $a\neq 0$ bo‘lsa, $0:a=0$

Nolga bo‘lishni alohida qaraymiz. Noldan farqli a son berilgan bo‘lsin, ya’ni $a\neq 0$ $a:0$ bo‘linma mavjud bo‘lsin deb faraz qilaylik; uni b orqali belgilaylik. U holda $a:0=b$ ga ega bo‘lamiz, bundan esa quyidagi kelib chiqadi; $a=0\cdot b$ yoki $a=0$ bu esa shartga ziddir. Demak, $a:0$ bo‘linmaning mavjudligi haqida qilgan farazimiz noto‘g‘ri. Shunday qilib, nolga bo‘lish mavjud emas.

Nolni natural sonlar to‘plamiga qo‘shish natijasida son tushunchasini dastlabki kengaytirish amalga oshirildi.

2.Manfiy sonlarning kiritilishi. Nol sonini kiritilishi natijasida teng sonlarni ayirish mumkin bo‘ldi. Katta sonni kichik sondan ayirish mumkin bo‘lishi uchun sonlar to‘plamini yangi sonlar kiritish yo‘li bilan kengaytirilgan.

To‘g‘ri chiziqni olib, unda yo‘nalish, O boshlang‘ich nuqta va masshtab birligini olamiz. Boshlang‘ich



34-chizma

nuqtaga 0 sonini mos qo‘yamiz. Boshlang‘ich nuqtadan o‘ng tomonda bir, ikki, uch va h.k. masshtab birligi masofada joylashgan nuqtalarga 1,2,3,… natural sonlarni mos qo‘yamiz, boshlang‘ich nuqtadan chap tomonda bir, ikki, uch va h.k. birlik masofada joylashgan nuqtalarga -1, -2, -3 … simvollari bilan belgilanadigan yangi sonlarni mos qo‘yamiz. Bu sonlar butun manfiy sonlar deb ataladi.

Sonlar belgilangan bu to‘g‘ri chiziq son o‘qi deb ataladi. O‘qning strelka bilan ko‘rsatilgan yo‘nalishi musbat yo‘nalish, qarama – qarshi yo‘nalishi esa manfiy yo‘nalish deb ataladi. Natural sonlar son o‘qida boshlang‘ich nuqtadan musbat yo‘nalishda qo‘yiladi, shuning uchun ularni musbat butun sonlar deb ataladi.

Butun nomanfiy sonlar to‘plami bilan butun manfiy sonlar to‘plamining birlashmasi yangi sonli to‘plamni hosil qiladi, bu to‘plam butun sonlar to‘plami deb ataladi va Z simvoli bilan belgilanadi va quyidagicha yoziladi.

$$Z = \{\ldots -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \ldots\}$$

Yuqoridagi 34-chizma butun sonlar to‘plamining geometrik interpretatsiyasini tashkil etadi. Chizmadan ko‘rinadiki, har bir butun songa son o‘qida aniq nuqta mos keladi, lekin son o‘qining har bir nuqtasiga ham butun son mos kelavermaydi.

3. Natural sonlar to‘plamini butun sonlar to‘plamiga kengaytirilishini ikkinchi talqini.

0- simvoli bilan belgilanadigan nol soni va manfiy butun sonlar quyidagicha kiritiladi: a) istalgan n - natural son va 0- sonining yig‘indisi n sondir.

$$n + 0 = n$$

b) istalgan n natural songa shunday yagona $-n$ - manfiy butun son mos keladiki, n va n sonlarning yig‘indisi nolga teng.

$$n + (-n) = 0$$

$-n$ soni n songa qarama-qarshi son deb aytiladi. $-n$ soniga qarama – qarshi son n sonidir; $-(-n) = n$.

Natural sonlar to`plamiga yangi ob’ektlarni – nol sonini va manfiy butun sonlarni kiritish natijasida hosil bo‘lgan to‘plamni butun sonlar to‘plami deyiladi. Butun sonlar to‘plamidagi natural sonlar musbat butun sonlar deb ataladi. Barcha butun sonlar to‘plami Z bilan belgilanadi. Butun sonlar to‘plami tartiblangan to‘plamdir, ya’ni istalgan ikkita m va n butun sonlar uchun quyidagi munosabatlardan biri va faqat biri o‘rinlidir.

$$m = n \text{ yoki } m < n \text{ yoki } n < m$$

Butun sonlar ustida arifmetik amallarni bajarishdan oldin sonning moduli to‘g‘risida tushuncha beramiz. n sonining absolyut qiymati (yoki moduli) deb $|n|$ bilan belgilanadigan va ushbu qoida bo‘yicha hisoblanadigan songa aytiladi;

n sonining absolyut qiymati musbat n sonlar uchun ham manfiy n sonlar uchun ham musbat bo‘lib faqat n=0 bo‘lgandagina nolga teng.

3.1.2 Butun sonlar ustida amallar.

1. Qo‘shish. Butun sonlarni qo‘shishda quyidagi ikki holga e’tibor berish lozim.

a) qo‘shiluvchilar bir xil ishorali;

b) qo‘shiluvchilar turli ishorali.

1-ta’rif. Bir xil ishorali ikki butun sonning yig‘indisi deb, shunday ishorali, moduli esa qo‘shiluvchilar modullarining yig‘indisiga teng bo‘lgan butun songa aytiladi.

Turli ishorali va turli modulli ikki butun sonning yig‘indisi deb, moduli qo‘shiluvchilar modullari ayirmasiga teng, ishorasi esa moduli katta bo‘lgan qo‘shiluvchi ishorasi bilan bir xil bo‘lgan songa aytiladi; Ikkita qarama-qarshi sonning yig‘indisi nolga teng, ya’ni $a + (-a) = 0$

Masalan,

(+8) + (+13)=+21, (-12)+(-11)=-23,

(+8)+(-13)=-5, (-8)+(+13)=+5, (8)+(-8)=0.

Natural sonlar to'plamidagi qo'shish qonunlari (o'rin almashtirish, gruppalash) butun sonlar to`plami uchun ham o'rinli. Bundan tashqari butun sonlar to'plamida qo'shish monotonlik qonuniga bo'ysunadi.

Yig'indining monotonlik qonuni:

Agar $a > b$ bo'lsa, u holda $a + c > b + c$ ning saqlanishini misollarda tekshirib ko'ramiz. Haqiqatan, ham - 7 > -9 tengsizlikdan quyidagilar kelib chiqadi:

(-7)+(11)>(-9)+(+11)

(-7)+0 > (-9)+0, (-7)+(-3) > (-9)+(-3)

Natural sonlar to'plamida yig'indi har bir qo'shiluvchidan doimo katta. Butun sonlar to'plamida yig'indi bu cheklanishdan xoli.

Ikkita butun sonning yig'indisi: a) har bir qo'shiluvchidan katta bo'lishi mumkin; b) bir qo'shiluvchidan katta va ikkinchisidan kichik bo'lishi mumkin. v) har bir qo'shiluvchidan kichik bo'lishi mumkin; g) qo'shiluvchilardan biriga teng bo'lishi mumkin.

2.Ko'paytirish.

2-ta'rif. Ikki butun sonning ko'paytmasi deb, moduli ko'paytuvchilar modullari ko'paytmasiga teng va ko'paytuvchilar bir xil ishorali bo'lsa, plus ishora bilan olingan, ko'paytuvchilar turli ishorali bo'lsa, minus ishora bilan olinadigan songa aytiladi; agar ko'paytuvchilardan biri nolga teng bo'lsa, ko'paytma nolga teng.

Masalan,

(+3) · (+8)=24;   (-3) · (-8)=24; (-3) · (8)=-24;

(+3) · (-8)=-24

bulardan esa $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$ kelib chiqadi, ya'ni ko'paytmaning moduli ko'paytuvchilar modullari ko'paytmasiga teng.

Butun sonlarni ko'paytirish uchun o'rin almashtirish, gruppalash va taqsimot qonunlari o'rinli. Bu qonunlarni o'rinli ekanligini beavosita misollar yordamida ko'rsatish mumkin.

$2 \cdot 3 = 3 \cdot 2$; $(-2) \cdot (3) = (3) \cdot (-2)$; $(-2) \cdot (-3) = (-3) \cdot (-2)$

$[(-5) \cdot (-4)] \cdot (+3) = (-5) \cdot [(-4) \cdot (+3)]$

$[(+5) \cdot (-4)] \cdot (-3) = (+5) \cdot [(-4) \cdot (-3)]$

Butun sonlar to'plamida monotonlik qonuni natural sonlar to'plamidagi monotonlik qonunidan kengaytirilgan shaklda bo'ladi, ya'ni agar $a > b$ va $m > 0$ bo'lsa, u holda $am > bm$, agar $a > b$ va $m < 0$ bo'lsa, u holda $am < bm$. Shunday qilib, natural sonlar uchun monotonlik qonuni butun sonlar uchun monotonlik qonunining xususiy holidir.

Natural sonlar to'plamidan butun sonlar to'plamiga o'tilganda ko'paytirishning ma'nosi o'zgaradi. Haqiqatan, a natural sonni 6 ga ko'paytirish a sonni 6 marta orttirish demakdir.

Natural ko'rsatkichli darajaga ko'tarish.

Darajaga ko'tarish amalining natural asos uchun ifodalangan ta'rifi istalgan butun asos uchun ham saqlanadi.

Masalan,

$(-4)^3=(-4) \cdot (-4) \cdot (-4)=-64$

$(-2)^6= (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2)=64$

Ishoralar qoidasi:

$a > 0$ va $a < 0$ da $a^{2m} > 0$;

$a > 0$ da $a^{2m} > 0$

Butun sonlar to'plamida to'g'ri amallar (qo'shish, ko'paytirish va darajaga ko'tarish) doimo bir qiymatli bajariladi, bu tegishli qoidalardan bevosita kelib chiqadi.

3.Ayirish.

Ayirish amalining ta'rifi natural sonlar uchun ayirish amali qoidasiga o'xshash.

3-ta’rif: a va b butun sonlarning ayirmasi deb, shunday x butun songa aytiladiki, uni b songa qo‘shganda a soni hosil bo‘ladi. Shu sababli agar $a-b=x$ bo‘lsa, u holda $x+b=a$

Ayirish qoidasi ta’rifini ayirma ta’rifi, butun sonlarni qo‘shish qoidasi va qo‘shishning gruppalash qonuniga asoslanib keltirib chiqaramiz. a va b butun sonlar ayirmasini topish talab qilinayotgan bo‘lsin. Izlanayotgan ayirmani x orqali belgilaymiz.

Ayirma ta’rifiga ko‘ra

$$x+b=a$$

Bu tenglikning ikkala qismiga – b ni qo‘shib $x+b+(-b)=a+(-b)$ ni hosil qilamiz. Yig‘indining gruppalash xossasini qo‘llanib, quyidagini topamiz:

$$x+[b+(-b)]=a+(-b)$$

$b+(-b)=0$ bo‘lganligi uchun $x=a+(-b)$ yoki $a-b=a+(b)$ so‘nggi tenglik butun sonlarni ayirish qoidasini ifodalaydi va bunday ta’riflanadi: bir butun sondan ikkinchi butun sonni ayirish uchun ayiriluvchiga qarama – qarshi sonni kamayuvchiga qo‘shish kerak.

Bundan butun sonlarni ayirish qo‘shishga keltirilishi kelib chiqadi. Butun sonlar to‘plamida qo‘shish bir qiymatli bajarilganligidan butun sonlar to‘plamida ayirish amali ham bir qiymatli bajarilishi kelib chiqadi.

Shuni ta’kidlash kerakki, manfiy sonlar kiritilishi bilan kichik sondan katta sonni ayirish mumkin bo‘ladi.

Masalan, (+4)-(+7)=(+4)+(-7)=-3

(-4)-(+7)=(-4)+(-7)=-11

4. Bo‘lish.

Butun sonlar to‘plamida bo‘lish amali natural sonlar to‘plamidagi kabi aniqlanadi. Butun sonlarni bo‘lish qoidasini bo‘linmaning ta’rifi va butun sonlarni ko‘paytirish qoidasiga asoslanib keltirib chiqaramiz.

a butun sonni noldan farqli b butun songa bo‘lishdan chiqadigan bo‘linmani topish talab qilingan bo‘lsin. Izlanayotgan bo‘linmani x bilan belgilaymiz va bunday yozamiz: $a:b=x$. Natural sonlarni bo‘lishdagi bo‘linmaning ta’rifiga ko‘ra $b\cdot x=a$. Bu tenglikdan ko‘rish osonki, agar a va b turli ishorali bo‘lsa, u holda x bo‘linma manfiydir. Bu tenglikning o‘zidan yana $|b|\cdot|x|=|a|$ bo‘lishi kelib chiqadi, bunda agar $|a|$ son $|b|$ ga karrali bo‘lsa, $|x|=|a|:|b|$ bo‘ladi. Shunday qilib, bir butun sonni noldan farqli ikkinchi butun songa bo‘lish uchun bo‘linuvchining modulini bo‘luvchining moduliga bo‘lish va agar bo‘linuvchi va bo‘luvchi bir xil ishorali bo‘lsa, hosil bo‘lgan bo‘linmani «+» ishora bilan olish, agar bo‘linuvchi va bo‘luvchi turli ishorali bo‘lsa, bo‘linmani «-» ishora bilan olish etarlidir; agar bo‘linuvchi nolga teng bo‘lsa, u holda bo‘linma ham nolga teng.

Bundan kelib chiqadiki, butun sonlar to‘plamida bo‘linma faqat bo‘linuvchining moduli bo‘luvchining moduliga karrali bo‘lganda mavjud ekan. Bu har qanday ixtiyoriy ikkita butun son uchun bo‘lish amali bajarilmasligini ko‘rsatadi. Bu esa sonli to‘plamni yanada kengaytirishni, ya’ni yangi sonlarni kiritishni talab etadi.

O‘z-o‘zini nazorat qilish uchun savollar

1. Butun nomanfiy sonlar deganda qanday sonlarni tushunasiz?
2. Manfiy sonlarning kiritilishini tushuntiring
3. Butun sonlarning geometrik interpretatsiyasini tushuntiring
4. Butun sonlarni qo‘shish va ko‘paytirish qoidalarini keltiring.
5. Butun sonlarni ayirish va bo‘lish ta’riflarini keltirib tushuntirib bering.
6. Sonning moduli deganda nimani tushunasiz.

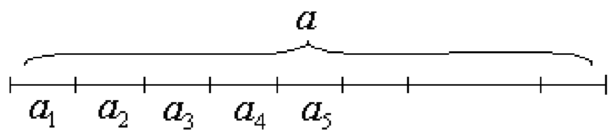
3.2. MUSBAT RATSIONAL SONLAR

3.2.1. Musbat ratsional sonlar to‘plami.

1. Kesmalarni o‘lchash.

Son tushanchasini kengaytirish mazmunini ochishdan oldin, o‘lchanuvchi kattaliklar va o‘lchov birliklari orasidagi bog‘lanishni aniqlash lozim. Buning uchun kesmalarni o‘lchashni qaraymiz.

Aytaylik a kesma $a_1, a_2, ..., a_n$ kesmalar birlashmasidan tashkil topgan bo‘lib, ularni hech bir ikkitasi ichki nuqtalarga ega bo‘lmasin (kesmalar uchlari umumiy bo‘lishi mumkin). (35- chizma)



35-chizma

U holda a kesmani $a_1, a_2, ..., a_n$ kesmalarni yig‘indisi deyiladi va tubandagi ko‘rinishda yoziladi:

$$a = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n \quad \text{yoki} \quad a = \sum_{k=1}^{n} a_k$$

Biror e kesmani tanlab, uni birlik kesma yoki uzunlik o‘lchov birligi deymiz. Agar a kesmani har biri e kesmaga kongruent bo‘lgan n ta bo‘lakchaga ajratish mumkin bo‘lsa, u holda a kesma e kesmaga karrali yoki boshqacha n soni a kesmaning e o‘lchov biriligidagi qiymati deyiladi va $m_e(a)$ kabi belgilanadi.

Agar e o‘lchov birligi sifatida qabul qilingan bo‘lsa $m_e(a)$ o‘rniga $m\ (a)$ yoziladi. $m(a) = n$ bo‘lsa, uni $a \cong n \cdot e$ ko‘rinishida yozish mumkin, ya’ni a kesma e kesmaga kongruent n ta kesmadan tashkil topganini bildiradi.

Kesma o‘lchovi ikkita hossaga ega: additivlik va multiplakativlik.

1) *Additivlik xossasi:*

Agar $a = b + c$ bo‘lib, bunda b va c kesmalar uzunliklari natural sonlar bilan ifodalangan bo‘lsa, u holda a kesma uzunligi kesmalar bo‘laklari uzunliklari yig‘indisiga teng bo‘ladi:

$$m(a) = m(b) + m(c) \qquad (1)$$

bu additivlik hossasi. (additivlik so‘zi lotincha additio - so‘zidan olingan bizningcha qo‘shish degan ma’noni beradi.)

2) *Multiplakativlik xossasi.*

Uzunlik o‘lchov birligini biridan ikkinchisiga o‘tishning umumiy holini qaraylik. Aytaylik, e_1, e_2 dan n marta katta bo‘lsin, ya’ni $e_1 \cong ne_2$: (n - natural son). Agar a kesmani e_1 o‘lchov birligida o‘lchaganda biror k soni hosil bo‘lsa (ya’ni $a \cong k \cdot e_1$) shu a kesmani e_2 o‘lchov birligida o‘lchasa kn soni hosil bo‘ladi (ya’ni $a \cong (kne_2)$. Haqiqatan ham a kesma e_1 kesmaga kongruent bo‘lgan k ta kesmadan tashkil topadi. Bunda k ta kesmalarning har biri e_2 kesmaga kongrent. Demak a kesma e_2 kesmaga kongruent bo‘lgan kn kesmadan tashkil topadi, ya’ni $a \cong (kn)e_2$

Bulardan $a \cong ke_1$ va $e_1 \cong ne_2$ bo‘lishidan $k(ne_2) = (kn)e_2$ ekanligi kelib chiqadi.

a kesmaning e_1 o‘lchov birligidagi uzunligini $m_1(a)$, e_2 o‘lchov birligidagi uzunligini $m_2(a)$ bilan belgilaymiz. U holda $m_1(a)=k, \quad m_2(a)=kn.$

e_1 kesmaning e_2 o‘lchov birligidagi uzunligini n ga tengligini hisobga olsak (ya’ni $m_2(e_1)=n; \quad m_2(a)=kn$) tubandagi munosabatga ega bo‘lamiz.

$$m_2(a)=m_1(a)m_2(e_1) \qquad (2)$$

(2) - dan quyidagi xossa kelib chiqadi.

Agar a kesma e_1 kesmaga karrali, e_1 kesma esa e_2 kesmaga karrali bo‘lsa, u holda a kesma e_2 kesmaga karrali bo‘ladi va (2) tenglik bajariladi.

Bu xossaga multiplakativlik xossasi deyiladi. (multiplakativ so‘zi lotincha "multiplicatio" - so‘zidan olingan bo‘lib, bizningcha ko‘paytirish degan ma’noni beradi).

2.Kasr tushunchasini kiritilishi.

Matematikaning amaliyotga ko‘pgina tadbiqi ikkita asosiy masalaga ya’ni kattaliklarni o‘lchash va chekli to‘plamlar elementlari sonini hisoblashga doir masalalarga olib keladi. To‘plamlar elementlari sonini sanash natural sonlar bilan ifodalanadi.

Lekin hamma vaqt ham o‘lchanadigan kattalikni butun son marta o‘lchov birligi orqali ifodalab bo‘lmagan. Bu esa natural sonlardan boshqa sonlarni ham kiritishga ya’ni sonlar tushunchasini kengaytirishga olib kelgan. Ma’lumki, matematika kursida natural, butun, ratsional, irratsional, haqiqiy va kompleks sonlar to‘plamlari bilan ish ko‘riladi. Sonlarning turli to‘plamlari orasidagi o‘zaro bog‘lanishlari xususida to‘xtalamiz.

Son tushunchasining kengayishi jarayonidagi dastlabki to‘plam Z_0 bo‘ldi. Biz buni oldingi mavzuda ko`rib o`tdik. Juda qadim zamonlarda paydo bo‘lgan natural son tushunchasi ko‘p asrlar davomida kengaydi va umumlashtirildi. Kattaliklarni (miqdorlarni) yanada aniqroq o‘lchashga bo‘lgan talab musbat kasr sonlar tushunchasiga olib keldi. Manfiy sonlar tushunchasining paydo bo‘lishi tenglamalarni echish va nazariy izlanishlar bilan bog‘liq. Nol avval sonning yo‘qligini bildirgan bo‘lsa, manfiy sonlarning kiritilishi bilan butun sonlar to‘plami Z da hamda ratsional sonlar to‘plami Q da teng huquqli songa aylandi.

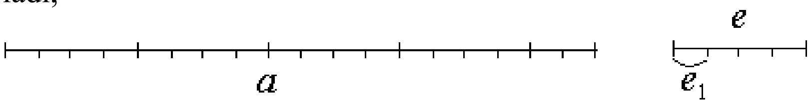
Bizning eramizgacha V asrda Pifagor maktabida musbat ratsional sonlar kesmalar uzunliklarini aniq o‘lchash uchun etarli emasligi aniqlangan va keyinroq bu muammo hal qilingandan keyin irratsional sonlar paydo bo‘ldi, XVI asrda esa o‘nli kasrlarning kiritilishi bilan haqiqiy sonlarga qadam qo‘yildi. Haqiqiy sonning qat’iy ta’rifi, haqiqiy sonlar to‘plami xossalarining asoslanishi XIX asrda berildi.

Haqiqiy sonlar tushunchasi sonlar qatorining oxirgisi emas. Son tushunchasining kengayishi jarayonini davom ettirish mumkin va u davom etadi. O‘quvchilarning kasr sonlar bilan dastlabki tanishuvi boshlang‘ich sinflarda boshlanadi. Keyinchalik o‘rta sinflarda kasr sonlar tushunchasi aniqlashtiriladi va kengaytiriladi. Shuning uchun boshlang‘ich sinf o‘qituvchisi kasr va ratsional sonlar ta’rifini, ratsional sonlar ustida amallar bajarish qoidasini va bu amallar qonunlarini bilishi zarur, shuningdek, ratsional va haqiqiy sonlar to‘plamlari bilan natural sonlar to‘plamining o‘zaro bog‘liqligini ko‘ra bilishi kerak. Bu boshlang‘ich va o‘rta sinflarda matematikani ketma-ket o‘rganish uchun zarurdir.

Kasrlarning paydo bo‘lishi tarixi kattaliklarni o‘lchash bilan bog‘liq. Masalan, kesma uzunligini o‘lchashda kasrlar qanday paydo bo‘lishini aniqlaymiz.

a kesma olamiz. Uning uzunligini topish uchun kesma uzunligning birligi sifatida e ni olamiz. (36-chizma).

O‘lchashda a kesmaning uzunligi $4e$ dan katta, lekin $5e$ dan kichikligi topildi. Shuning uchun uni natural son bilan (e uzunlik birligida) ifodalab bo‘lmaydi. Ammo e kesmani har biri e_1 ga teng bo‘lgan to‘rtta teng qismga bo‘lsak, e kesmanig uzunligi $4e_1$ bo‘ladi. Agar dastlabki uzunlik birligi e ga qaytsak, unda a kesma e kesmaning to‘rtdan bir qismiga teng kesmalarning 18 tasidan iborat bo‘ladi,



36-chizma.

ya’ni a kesmaning uzunligi haqida gapirar ekanmiz, ikkita natural son - 18 va 4 sonlari ustida amallar bajarishga majbur bo‘lamiz. Bunday vaziyatda kesma uzunligini $\frac{18}{4}e$ ko‘rinishida yozishga, $\frac{18}{4}$ belgini esa kasr deb aytishga kelishib olamiz.

Kasr tushunchasi umumiy ko‘rinishda bunday ta’riflanadi: a kesma va e birlik kesma berilgan bo‘lsa, bunda e kesma har biri e_1 ga teng bo‘lgan n ta kesma yig‘indisi. Agar a kesma har biri e_1 ga teng m ta kesmadan tuzilgan bo‘lsa, uning uzunligi $\frac{m}{n}e$ ko‘rinishida bo‘lishi mumkin. $\frac{m}{n}$ belgi kasr deyiladi, bunda m va n -natural sonlar, bu belgi bunday o‘qiladi: «n dan m»

Tanlab olingan e_1 kesma e kesmaning to‘rtdan bir qismidir. a kesmaga butun son marta qo‘yiladigan e kesmaning bunday ulushidan boshqa ulishini, ya’ni e kesmaning sakkizdan bir qismini ham tanlash mumkin, unda a kesma 36 ta shunday kesmadan iborat bo‘lib, uning uzunligi $\frac{36}{8}e$ ga teng bo‘ladi. e kesmaning o‘n oltidan bir qismini olish mumkin, unda a kesma 72 ta shunday kesmadan iborat bo‘lib, uning uzunligi $\frac{72}{16}e$ bo‘ladi. Bu jarayonni cheksiz davom ettirsak, a kesmaning uzunligi turli kasrlarning cheksiz to‘plami bilan ifodalanishi mumkin: $\frac{18}{4};\frac{36}{8};\frac{72}{16};.$

Umuman, agar e uzunlik birligida a kesmaning uzunligi $\frac{m}{n}$ kasr bilan ifodalansa, u ixtiyoriy $\frac{mk}{nk}$ kasr bilan ifodalanadi, bunda k -natural son.

Bundan ko‘rinadiki, bir xil uzunlikdagi kasr berilgan o‘lchov birligida turli xil ko‘rinishdagi kasrlar bilan ifodalanishi mumkin.

Ta’rif: e uzunlik birligida bitta kesmaning uzunligini ifodalovchi kasrlar teng kasrlar deyiladi.

Agar $\frac{p}{n}$ va $\frac{t}{q}$ kasrlar teng bo‘lsa, bunday yoziladi: $\frac{p}{n} = \frac{t}{q}$.

Masalan: $\frac{18}{4}$ va $\frac{36}{8}$ kasrlar e uzunlik birligida bitta kesmaning uzunligini ifodalaydi, demak, $\frac{18}{4}=\frac{36}{8}$.

Berilgan kasrlarning tengligi yoki teng emasligini quyidagi teorema aniqlab beradi.

Teorema: $\frac{p}{n}$ va $\frac{t}{q}$ kasrlar teng bo‘lishi uchun $pq = nt$ bo‘lishi zarur va etarlidir.

Isboti: 1) $\frac{p}{n}$ va $\frac{t}{q}$ kasrlarning tengligidan $pq = nt$ ekanligini ko‘rsatamiz. Har qanday q natural son uchun $\frac{p}{n} = \frac{pq}{nq}$, har qanday n natural son uchun $\frac{t}{q} = \frac{tn}{qn}$ bo‘lgani uchun $\frac{p}{n}$ va $\frac{t}{q}$ kasrlarning tengligidan $\frac{pq}{nq} = \frac{tn}{qn}$ tenglik kelib chiqadi, bundan o‘z navbatida $pq = nt$ tenglik kelib chiqadi

2) $pq = nt \Rightarrow \frac{p}{n} = \frac{t}{q}$ ni ko‘rsatamiz. $pq = nt$ to‘g‘ri tennglikning ikkala qismini nq natural songa bo‘lsak, $\frac{pq}{nq} = \frac{nt}{nq}$ to‘g‘ri tenglikning hosil qilamiz. Ammo $\frac{pq}{nq} = \frac{p}{n}, \frac{nt}{nq} = \frac{t}{q}$. Demak, $\frac{p}{n} = \frac{t}{q}$

Yuqorida qaralgan faktlardan kasrning asosiy xossasi kelib chiqadi: agar berilgan kasrning surat va maxraji bir xil natural songa ko‘paytirilsa, bo‘linsa, berilgan kasrga teng kasr hosil bo‘ladi. Kasrlarni qisqartirish va kasrlarni bir xil maxrajga keltirish shu xossaga asoslangan.

Kasrlarni qisqartirish – berilgan kasrni unga teng, lekin surati va maxraji undan kichik bo‘lgan kasrga almashtirishdir.

Agar kasrning surat va maxraji bir paytda faqat 1 ga bo‘linsa, kasr qisqarmas kasr deyiladi. Masalan $\frac{3}{4}$ qisqarmas kasr.

Kasrni qisqartirish natijasida odatda unga teng qisqarmas kasrni hosil qilish uchun berilgan kasrning surat va maxrajini ularning eng katta umumiy bo‘luvchisiga bo‘lish kerak.

Masalan: $\frac{35}{40}$ kasrni qisqartirish uchun $D(35,40)$ ni topamiz, $D(35,40) = 5.$ Endi 35 ni 5 ga va 40 ni 5 ga bo‘lib, $\frac{35}{40} = \frac{7}{8}$ ni hosil qilamiz. $\frac{7}{8}$ - qisqarmas kasr.

Agar $\frac{p}{n}$ va $\frac{t}{q}$ kasrlar faqat va faqat bitta kesma uzunligini ifodalasa, ekvivalent kasrlar deyiladi.

3.2.2. Musbat ratsional sonlar.

Ma’lumki bitta kesmaga cheksiz ko`p ekvivalent kasrlar mos keladi. Shuning uchun ekvivalent kasrlar to‘plamiga musbat ratsional sonlar deyiladi. Boshqacha aytganda, agar sonni kasr ko‘rinishida yozish mumkin bo‘lsa, bunday songa musbat ratsional son deyiladi.

Umuman, musbat ratsional son – bu teng kasrlar to‘plami, bu to‘plamga tegishli har bir kasr shu sonning yozuvidir.

Masalan, $\left\{\frac{5}{4},\frac{10}{8},\frac{20}{16},\frac{40}{32},...\right\}$ to‘plam biror ratsional sonni ifodalaydi. Bunda $\frac{5}{4},\frac{10}{8},\frac{20}{16}$ va h.k kasrlar esa shu sonning turli yozuvidir.

$\left\{\frac{3}{5},\frac{6}{10},\frac{12}{20},\frac{24}{40},.....\frac{3n}{5n}\right\}$ to‘plam boshqa musbat ratsional sonni aniqlaydi.

Yuqorida berilgan ta’rifiga ko‘ra, biz $\frac{p}{n}$ yozuvga qarab, $\frac{p}{n}$ bu kasr yoki $\frac{p}{n}$ kasr ko‘rinishidagi yozilgan musbat ratsional son deymiz. Ko‘pincha qisqa bunday deyiladi: «musbat ratsional son $\frac{p}{n}$ berilgan». Bu degani musbat ratsional son va kasr tushunchasi aynan bir xil degani emas. Bular turli tushunchalardir, lekin jumla qisqa bo‘lishi uchungina shunday deyiladi.

$\frac{7}{8}$ yozuv nimani anglatadi? Javoblar bunday bo‘lishi mumkin: «Bu kasr», «Bu musbat ratsional sonning yozuvi».

$\frac{7}{8}$ -musbat ratsional son deyish mumkinmi? Mumkin, faqat gapni qisqartish maksadida shunday deyish mumkin.

Biror musbat ratsional sonning barcha yozuvlari orasidan qisqarmas kasr ajratiladi, ya’ni surat va maxrajini eng kichik umumiy bo‘luvchisi 1 ga teng bo‘lgan kasr ajratib olinadi. Masalan, ratsional sonni aniqlovchi $\left\{\frac{3}{4},\frac{6}{8},\frac{12}{16},\frac{24}{12},.....\right\}$ kasrlar orasida $\frac{3}{4}$ kasr qisqarmas kasrdir. Bu esa quyidagi teoremaga olib keladi.

Teorema: Har qanday musbat ratsional son uchun shu sonning yozuvi bo‘lgan bitta va faqat bitta qisqarmas kasr mavjud. (teorema isboti talabalarga mustaqil ish sifatida beriladi).

Natural sonlar to‘plamini musbat ratsional sonlar to‘plamiga to‘ldiruvchi sonlar kasr sonlar deyiladi.

O‘z- o‘zini nazorat qilish uchun savollar

1. O‘lchanuvchi kattaliklar va o‘lchov birliklari orasidagi boglanishni aniqlashda kesmalarni o‘lchashning mohiyatini tushuntirib bering.
2. Kesma o‘lchovi xossalarini sanang va tushuntiring.
3. Son tushunchasini kengaytirish zarurligini aytib bering.
4. Kasrlarning paydo bo‘lishi va kasr tushunchasiga ta’rif bering.
5. Kasrlar teng bo‘lishi haqidagi teoremani aytib bering.
6. Kasrlarni qisqartirish deganda nimani tushunasiz?
7. Musbat ratsional kasrga ta’rif bering.
8. Har qanday musbat ratsional son uchun bitta va faqat bitta qisqarmas kasr mavjudligi haqidagi teoremani isbotlab bering.

3.2.3. MUSBAT RATSIONAL SONLAR USTIDA AMALLAR

1. Musbat ratsional sonlarni qo‘shish va ayirish. Qo‘shishning xossalari

Biz Q_+ to‘plamda qo‘shish va ayirish amallarini qaraymiz.

1) Qo‘shish. Qo‘shish amalini aniqlash uchun dastlab tubandagi tasdiqni to‘g‘riligini ko‘rsatamiz.

$a,b\in Q_+$ sonlarni bir xil maxrajga ega bo‘lgan kasrlar shaklida ifodalash mumkin. Haqiqatan ham, a sonini $\frac{p}{n}$, b sonini $\frac{t}{q}$ ko‘rinishda berilgan bo‘lsa, u holda bu kasrlarni bir xil maxrajga ega bo‘lgan $\frac{pq}{nq}$ va $\frac{tn}{qn}$ kasrlar ko‘rinishida ifodalash mumkin.

$\frac{p}{n}$ va $\frac{t}{q}$ kasrlarni ularga ekvivalent bo‘lgan bir xil maxrajli kasrlar bilan almashtirishga kasrlarni umumiy maxrajga keltirish deyiladi.

$\frac{p}{n}$ va $\frac{t}{q}$ ikki kasrning umumiy maxrajini topish n *ва* q sonlarning eng kichik umumiy karralisi $K(n,q)$ ni topish demakdir.

Agar $k=K(n;q)$ bo‘lsa, u holda $k=nl=ql^1$ bundan esa $\frac{p}{n}$ kasr $\frac{pl}{nl}=\frac{pl}{k}$ kasrlarga, $\frac{t}{q}$ kasr esa $\frac{tl^1}{ql^1}=\frac{tl^1}{k}$ kasrlarga ekvivalent.

Misol: $\frac{11}{15}$ va $\frac{5}{6}$ kasrlarni eng kichik umumiy maxrajini topish uchun $K(15;\ 6)$ ni topamiz.

$K(15;6)=30$. Demak eng kichik umumiy maxraj 30 soniga teng.

Demak $\frac{11}{15}$ va $\frac{5}{6}$ kasrlarni $\frac{11\cdot 2}{15\cdot 2}$ va $\frac{5\cdot 15}{6\cdot 5}$ kasrlarga almashtiramiz, ya’ni $\frac{22}{30}$ va $\frac{75}{30}$ kasrlarni hosil qilamiz.

Aytaylik a va b musbat ratsional sonlar mos ravishda $\frac{p}{n}$ va $\frac{t}{n}$ kasrlar ko‘rinishida berilgan bo‘lsin.

Ta’rif. Agar $a,b\in Q_+$ musbat ratsional sonlar bo‘lsa, u holda a va b sonlarning yig‘indisi deb $\frac{p+t}{n}$ kasr bilan ifodalangan songa aytiladi.

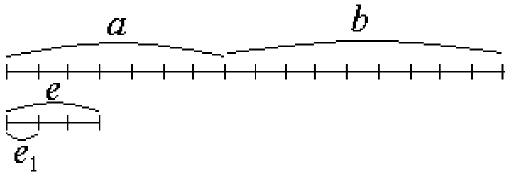
$$\frac{p}{n}+\frac{t}{n}=\frac{p+t}{n} \qquad (1)$$

Agar a va b musbat ratsional sonlar turli maxrajli kasrlar bilan ifodalangan bo‘lsa, bu kasrlar eng kichik umumiy maxrajga keltiriladi va (1) qoida buyicha qo‘shiladi.

Masalan: $\frac{11}{15}+\frac{5}{6}=\frac{22}{30}+\frac{25}{30}=\frac{47}{30}$;

Endi musbat ratsional sonlarni kesmalar bo‘yicha qo‘shishni qaraymiz.

a,b,c kesmalar berilgan bo‘lib, $c=a+b$ va tanlab olingan uzunlik birligi e da $a=\frac{7}{3}e,\ \ b=\frac{9}{3}e$ bo‘lsin. (37-chizma).



37-chizma.

U holda, ya’ni c kesma uzunligi $\frac{16}{3}$ soni bilan ifodalanadi, bu $c = a + b = \frac{7}{3}e + \frac{9}{3}e = 7e_1 + 9e_1 = (7+9)e_1 = 16e_1 = \frac{16}{3}e$ sonni $\frac{7}{3}$ va $\frac{9}{3}$ sonlarining yig‘indisi sifatida qarash mumkin.

Agar $a, b \in Q_+$ musbat ratsional sonlarni ifodalovchi kasrlarning ikkitasi yoki bittasi noto‘g‘ri kasr bo‘lsa, (ya’ni $\frac{p}{n}$ noto‘g‘ri kasr bo‘lsin $(p \geq n)$.) u holda p n ga karrali bo‘lsa, u holda $\frac{p}{n}$ - kasr natural sonning yozuvi bo‘ladi.

Misol: $\frac{16}{4} = 4$;

Agar p n ga karrali bo‘lmasa, p *ни* n ga qoldiqli bo‘lamiz: $p = nq + r$, bunda $r < n$

$\frac{p}{n}$ kasrda p o`rniga $nq + r$ ni qo‘yamiz va (1) qoidani qo‘llaymiz.

$$\frac{p}{n} = \frac{nq + r}{n} = \frac{nq}{n} + \frac{r}{n} = q + \frac{r}{n};$$

Bunga noto‘g‘ri kasrdan butun qismni ajratish deyiladi.

Qo‘shishning xossalari:

a) Qo‘shish amali kommutativlik xossasiga ega, ya’ni $a, b \in Q_+$ uchun

$$a + b = b + a$$

Haqiqatan ham a va b musbat ratsional sonlari $\frac{p}{n}$ va $\frac{t}{n}$ kasrlar ko‘rinishida berilgan bo‘lsa, u holda $a + b$ musbat ratsional soni $\frac{p+t}{n}$ kasr ko‘rinishida, $b + a$ musbat ratsional soni esa $\frac{t+p}{n}$ ko‘rinishida ifodalanadi. $p + t = t + p$ bo‘lgani uchun $a + b = b + a$

b) Qo‘shish amali assotsiativ, ya’ni $a + (b + c) = (a + b) + c$.

Haqiqatan ham a, b va c musbat ratsional sonlari mos ravishda $\frac{p}{n}, \frac{t}{n}$ *ва* $\frac{l}{n}$ kasrlar ko‘rinishida berilgan bo‘lsa, u holda $a + (b + c)$ soni $\frac{p + (t + l)}{n}$ kasr ko‘rinishida, $(a + b) + c$ soni esa $\frac{(p + t) + l}{n}$ kasr ko‘rinishida ifodalanadi.

$p + (t + l) = (p + t) + l$ (Natural sonlar xossasiga ko‘ra) bo‘lganligi sababli $a + (b + c) = (a + b) + c$

v) Qo‘shish amali qisqaruvchan, ya’ni $a+c=b+c$ dan $a=b$ kelib chiqadi.

Natural sonlar to‘plamidagi kabi Q_+ da ">" munosabati assimmetrik, tranzitiv va chiziqli. Kattalik munosabati quyidagicha: agar a va b sonilari teng maxrajli $\frac{p}{n}$ va $\frac{t}{n}$ kasrlar bilan ifodalangan bo‘lsa, u holda faqat va faqat $p>t$ bo‘lganda $a>b$ bo‘ladi. Agar a va b sonlaari $\frac{p}{n}$ va $\frac{t}{q}$ kasrlar bilan ifodalangan bo‘lsa, u holda faqat va faqat $pq>nt$ bo‘lganda $a>b$ bo‘ladi. Bundan Q_+ to‘plamda tartib munosabati mavjudligi kelib chiqadi.

2) **Ayirish**. Aytaylik $a,b\in Q_+$ va $a>b$ bo‘lsin. U holda qo‘shish ta’rifiga asosan shunday $c\in Q_+$ mavjudki $a=b+c$ tenglik o‘rinli bo‘ladi. Tenglik uchun c sonini bir qiymatli aniqlanishini ko‘rsatamiz. Haqiqatan ham, faraz qilaylik $a=b+d$ bo‘lsin, bunda $d\in Q_+$;
U holda $b+c=b+d$ tenglikga ega bo‘lamiz. Q_+ to‘plamda qisqaruvchanlik xossasiga ko‘ra $c=d$ bo‘ladi. Bu esa c sonining bir qiymatli aniqlanganini ko‘rsatadi.
Agar Q_+ to‘plamda c soni mavjud bo‘lib $a=b+c$ tenglik o‘rinli bo‘lsa, u holda c soniga a va b sonlarining ayirmasi deyiladi va $a-b$ ko‘rinishida belgilanadi.
Agar a va b sonlari $\frac{p}{n}$ va $\frac{t}{n}$ kasr ko‘rinishida ifodalansa, $a-b$ ayirma $\frac{p-t}{n}$ kasr ko‘rinishida bo‘ladi.
Agar a va b sonlari $\frac{p}{n}$ va $\frac{t}{q}$ kasr ko‘rinishida bo‘lsa, $a-b$ ayirma $\frac{pq-tn}{nq}$ kasr ko‘rinishida ifodalanadi. Bunda $\frac{p}{n}$ va $\frac{t}{q}$ kasrlar umumiy maxrajga keltiriladi.

Misol: $\frac{5}{12}-\frac{3}{20}=\frac{25-9}{60}=\frac{16}{60}=\frac{4}{15};$

3) Musbat ratsional sonlarni ko‘paytirish va bo‘lish.

Aytaylik, a kesma e_1 birlik kesma e_1 kesma esa e_2 birlik kesma bilan o‘lchangan bo‘lsa, u holda $a\cong\frac{p}{n}e_1,\ e_1=\frac{t}{q}e_2$ bo‘ladi, ya’ni $na\cong pe_1;\ qe_1\cong te_2;$
U holda $(nq)a\cong(pq)e_1,\ (pq)e_1\cong(pt)e_2,$ shuning uchun $(nq)a\cong(pt)e_2$. Bu esa a kesmaning e_2 birlik kesmaga nisbatan uzunligi $\frac{pt}{nq}$ kasr bilan ifodalanishini ko‘rsatadi boshqacha aytganda $m_2(a)$ son $\frac{pt}{nq}$ kasr bilan ifodalanadi, ya’ni $m_2(a)=\frac{pt}{nq}$.

Ammo shartga ko‘ra $m_1(a)=\frac{p}{n};\ m_2(e_1)=\frac{t}{q}$:

Kesmalarni o‘lchashni multiplakativlik xossasi $m_2(a)=m_1(a)\cdot m_2(e_1)$ bajarilishi talab qilinsa, $\frac{pt}{nq}=\frac{p}{n}\cdot\frac{t}{q}$ tenglik bajarilishi lozim.

Ta'rif. Agar musbat ratsional sonlar $\frac{p}{n}$ va $\frac{t}{q}$ kasrlar bilan ifodalangan bo'lsa, u holda ularning ko'paytmasi $\frac{pt}{nq}$ kasr bilan ifodalangan son bo'ladi.

$$\frac{p}{n}\cdot\frac{t}{q}=\frac{pt}{nq}. \qquad (1)$$

(kasrni kasrga ko'paytirish qoidasi maktabda tubandagicha ta'riflanadi: kasrni kasrga ko'paytirish natijasi shunday kasrga tengki, u kasrning surati ko'payyuvchi kasrlarning suratidagi sonlar ko'paytmasidan, maxraji esa ko'payyuvchi kasrlarning maxrajlari ko'paytmasidan iborat).

Musbat ratsional sonlarni ko'paytirish kommutativlik, assotsiativlik, qisqaruvchanlik xossalariga bo'ysunadi. Shuningdek musbat ratsional sonlarni ko'paytirish qo'shishga nisbatan taqsimot qonuniga bo'ysunadi.

Ta'rif: Ikki a va b ratsional sonning bo'linmasi deb shunday c songa aytiladiki, uning uchun $a=bc$ bo'ladi.

Biz a va b sonlarining bo'linmasi ta'rifini berdik. Agar $a=\frac{p}{n}, b=\frac{t}{q}$ bo'lsa, bo'linma qanday topiladi? $c=\frac{pq}{nt}$ son shu bo'linma ekanligini ko'rsatamiz. Bo'linma ta'rifiga ko'ra $a=bc=\frac{t}{q}\cdot\frac{pq}{nt}$.

Musbat ratsional sonlarning ko'paytirishning (1) qoidasini va ko'paytirish qonunlarini qo'llab, shakl almashtirishlar bajaramiz: $\frac{t}{q}\cdot\frac{pq}{nt}=\frac{t(pq)}{q(nt)}=\frac{(tq)p}{(tq)n}=\frac{p}{n}$.

Shunday qilib, ikki musbat ratsional sonning bo'linmasi: $\frac{p}{n}:\frac{t}{q}=\frac{pq}{nt}$ (2) formula buyicha topiladi.

Hosil bo'lgan formula ixtiyoriy musbat ratsional sonlar uchun bo'linma mavjudligini ko'rsatadi, ya'ni natural sonlar to'plamida har doim ham bajarib bo'lavermaydigan bo'lish amallarini Q_+ to'plamda har doim bajarib bo'ladi.

Shuni eslatamizki, $\frac{p}{n}$ kasr yozuvidagi chiziq belgisini bo'lish amalining belgisi deb qarash mumkin. Haqiqatdan, ikkita p va n natural sonni olamiz va (2) qoida buyicha ularning bo'linmasini topamiz:

$p:n=\frac{p}{1}:\frac{n}{1}=p:n$. Aksincha, agar $\frac{p}{n}$ bo'lgani uchun har qanday musbat ratsional sonni ikki natural sonning bo'linmasi deb qarash mumkin. Shuni aytish kerakki, "ratsional son" termini lotincha ratio so'zdan kelib chiqqan bo'lib, tarjimasi "nisbat" (bo'linma) ni anglatadi.

3.2.4. Musbat ratsional sonlar to'plamining tartiblanganligi.

Agar ratsional sonlar teng kasrlar bilan ifodalangan bo‘lsa, ular teng bo‘ladi. Masalan, agar a ratsional son $\frac{3}{4}$ $(a=\frac{3}{4})$ kasr bilan, b ratsional son $\frac{6}{8}$ $(b=\frac{6}{8})$ kasr bilan ifodalangan bo‘lsa, u holda $a=b$ bo‘ladi, chunki $\frac{3}{4}=\frac{6}{8}$.

a va b ratsional sonlardan qaysi biri kichik (katta) ekanligini qanday bilish mumkin?

Ta’rif: a va b - musbat ratsional sonlar bo‘lsin. Agar shunday c ratsional son mavjud bo‘lib, unda $a+c=b$ bo‘lsa, a soni b sondan kichik $(a<b)$ yoki b soni a dan katta $(b>a)$ deb aytiladi.

Bu ta’rif musbat ratsional sonlar to‘plamida ayirma mavjud bo‘lishinig zarur va etarli shartini ifodalashga imkon yaratadi.

a va b musbat ratsional sonlarning ayirmasi mavjud bo‘lishi uchun $b<a$ bo‘lishi zarur va etarlidir.

Bu shartning isboti natural sonlar to‘plamida ayirma mavjud bo‘lishi haqidagi teoremaning isbotiga o‘xshaydi.

"Kichik" munosabatining keltirib chiqarilgan ta’rifidan bu munosabatni o‘rgatishning amaliy usullarini chiqarish mumkin.

Agar $a=\frac{m}{n}, b=\frac{p}{n}$ bo‘lsa, $m<p$ bo‘lganda va faqat shunda $a<b$ bo‘ladi.

Agar $a=\frac{m}{n},\ b=\frac{p}{q}$ bo‘lsa, $mq<np$ bo‘lganda va faqat shunda $a<b$ bo‘ladi.

Haqiqatdan ham, $\frac{m}{n}$ va $\frac{p}{q}$ kasrlarni umumiy maxrajga keltiramiz: $\frac{m}{n}=\frac{mp}{nq}; \frac{p}{q}=\frac{pn}{qn}$. Natijada berilgan kasrlarni taqqoslash ularning suratlarini taqqoslashga keltiriladi: agar $mq>pn$ bo‘lsa, $a>b$; agar $mq<pn$ bo‘lsa, $a<b.$

Masalan, agar $a=\frac{7}{8}, b=\frac{11}{13}$ bo‘lsa, $a>b$, chunki $7\cdot 13=91,\ 8\cdot 11=88$ va $8\cdot 11<7\cdot 13.$ Bunday aniqlangan "kichik" munosabati tranzitiv va antisimmetrik ekanligini, ya’ni "kichik" munosabati musbat ratsional sonlar to‘plamida tartib munosabati ekanini, bu to‘plamning o‘zi tartiblangan to‘plam ekanini ko‘rsatish mumkin. Shuni eslatib o‘tamizki, musbat ratsional sonlar to‘plamidagi tartib munosabati natural sonlar to‘plamidagi tartib munosabatidan farqli xossalarga ega. Ma’lumki, N to‘plam diskret - natural sonlar orasida boshqa natural sonlar yo‘q. Musbat ratsional sonlar to‘plamida: 1) eng kichik son yo‘q; 2) ixtiyoriy ikkita musbat ratsional sonning orasida Q_+ to‘plamining cheksiz ko‘p soni bor.

Q_+ to‘plamda eng kichik son yo‘qligini isbotlaymiz. Faraz qilaylik a Q_+ to‘plamdagi eng kichik son bo‘lsin. a sonini $\frac{m}{n}$ kasr ko‘rinishida ifodalash mumkin, u holda $\frac{m}{n+1}$ soni $\frac{m}{n}$ sonidan kichik bo‘ladi, ya’ni $\frac{m}{n+1}<\frac{m}{n}$ chunki $(mn<mn+m)$. Demak, farazimiz noto‘g‘ri. Musbat ratsional sonlar to‘plamida eng kichik son yo‘q.

Ikkinchi xossani misolda ko‘rsatamiz. $\frac{1}{3}$ dan katta va $\frac{2}{3}$ dan kichik ratsional son mavjudmi? Mavjud. Buning uchun berilgan sonlarning o‘rta arifmetigini topish etarli: $(\frac{1}{3}+\frac{2}{3}):2=\frac{1}{2}$.

Shunday qilib, $\frac{1}{3}<\frac{1}{2}<\frac{2}{3}$. $\frac{1}{3}$ bilan $\frac{2}{3}$ ning orasida yotgan son yana topiladimi? Ha, uni topish uchun $\frac{1}{3}$ va $\frac{1}{2}$ sonlarning o‘rta arifmetigini topish etarli: $(\frac{1}{3}+\frac{1}{2}):2=\frac{5}{12}$. Shunday qilib, $\frac{1}{3}<\frac{5}{12}<\frac{1}{2}<\frac{2}{3}$. Bu jarayonni davom ettirish mumkin: Q_+ to‘plamda olingan ixtiyoriy ikki son orasida shu to‘plamda yotadigan cheksiz ko‘p son bor. Q_+ to‘plamning bu xossasi zichlik xossasi deyiladi.

3.2.5. Musbat ratsional sonlar nazariyasining aksiomatik qurish.

Biz musbat ratsional sonlar va uning ustida bajariladigan amallarni geometrik nuqtai nazardan, ya’ni kesmalarni o‘lchash masalalaridan kelib chiqib aniqladik.

Ammo musbat ratsional sonlar faqat kesmalarni uzunliklarini o‘lchash uchun emas, balki massa, yuza, hajm va boshqalarni o‘lchash uchun ham zarur. Bu esa musbat ratsional sonlar nazariyasini yaratishni talab qiladi. Buning uchun bu sonlarni qanoatlantiruvchi aksiomalarni ko‘rsatish etarlik.

Q_+ da qo‘shish xossalarini va natural sonlar to‘plamida ko‘paytirishni (na=a+a+ . . . +a; n marta) ifodalovchi aksiomalar sisitemasi yordamida Q_+ to‘plamni aniqlaymiz. Bu aksiomalar sistemasi quyidagicha;

1. Q_+ to‘plam N natural sonlar to‘plamiga ega.
2. Q_+ to‘plamda qo‘shish amali aniqlangan bo‘lib, u Q_+ to‘plamdagi ixtiyoriy ikkita a va b sonlar uchun shu to‘plamda a va b sonlarining yig‘indisi deb ataluvchi a + b sonini qo‘yadi. N to‘plam ostida qo‘shish amali N to‘plamda aniqlangan qo‘shish amali bilan bir xil.
3. Q_+ da aniqlangan qo‘shish amali kommutativ, assotsiativ va qisqaruvchan .
4. Ixtiyoriy $a\in Q_+$ son uchun shunday natural p va n sonlari topiladiki, bular uchun na = p o‘rinli
5. Ixtiyoriy natural p va n sonlari uchun shunday $a\in Q_+$ soni topiladi. Bunda na = p
6. Agar na = nb bo‘lsa , u holda a = b

Bu aksiomalar sistemasi ziddiyatsiz bo‘lib, Q_+ to‘plamni va undagi qo‘shish amalini aniqlaydi (ziddiyatsizligini isbotini keltirmadik).

O‘z- o‘zini nazorat qilish uchun savollar

1. Musbat ratsional sonlarni qo‘shish va ayrishni misollar yordamida tushuntiring. Qo‘shishning xossalarini sanab, tushuntirib bering.
2. Musbat ratsional sonlarni ko‘paytirish va bo‘lishni ta’riflang va misollar yordamida tushuntirib bering.
3. Musbat ratsional sonlar to‘plamining tartiblanganligini tushuntiring.

4. a va b musbat ratsional sonlari o‘rtasida a sonidan b sonini kichik bo‘lishi ta’rifini keltiring.
5. Musbat ratsional sonlar to‘plamida eng kichik son yo‘qligi va ikkita musbat ratsional sonlar o‘rtasida cheksiz ko‘p ratsonal sonlar mavjudligini isbotlang.
6. Musbat ratsional sonlar nazariyasining aksiomatik qurishni tushuntiring.

3.3. O‘NLI KASRLAR

3.3.1. O‘nli kasrlar. Musbat ratsional sonlarning o‘nli kasr ko‘rinishidagi yozuvi.

Bizga ma’lumki kasr sonlarning paydo bo‘lishi kattalikning bir birligidan ikkinchi birligiga o‘tishdir, kasr maxraji berilgan kattalik birligi nechta ulushga bo‘linishini ko‘rsatadi. Hozirgi paytda deyarlik barcha mamlakatlarda xalqaro birliklar sistemasi ishlatiladi. Bu sistemada o‘nli sanoq sistemasidan foydalanilganligi uchun kattaliklarning yangi birliklari berilganlarni 10, 100, 1000 va hakozo marta kamaytirish bilan hosil qilinadi. Masalan, 1 dm=10 sm; 1 sm=100 mm; 1 km=1000 m=10000 dm; 1 kg= 1000 g va h.k. Shuning uchun amalda maxraji 10 ning darajalari bo‘lgan kasrlar ya’ni $\frac{m}{10^n}$ (bunda m, n-natural sonlar) katta ahamiyatga ega. Bunday kasrlarni o‘nli kasrlar deyiladi. O‘nli kasrlardan farqli ravishda $\frac{m}{n}$ ko‘rinishdagi kasrlar oddiy kasrlar deyiladi.

Sonning o‘nli kasr ko‘rinishidagi yozuvining ma’nosini aniqlaymiz. $\frac{4362}{10^2}$ kasrni olamiz va quyidagi shakl almashtirishlar bajaramiz:

$$\frac{4362}{10^2} = \frac{4\cdot 10^3 + 3\cdot 10^2 + 6\cdot 10 + 2}{10^2} = 4\cdot 10 + 3 + \frac{6}{10} + \frac{2}{10^2}.$$

$4\cdot 10 + 3$ yig‘indi 43 sonining yozuvidir, $\frac{6}{10} + \frac{2}{10^2}$ yig‘indi esa $\frac{4362}{10^2}$ sonining kasr qismining yozuvidir. Bunday kasr qismini maxrajsiz yozish qabul qilingan, bunda kasr qismi butun qismidan vergul bilan ajratiladi: $\frac{4362}{10^2} = 43{,}62$.

Umumiy holda qaraylik. Kasr suratining o‘nli sanoq sistemasidagi yozuvi $m = \overline{m_k \ldots m_0}$ ko‘rinishga, boshqacha yozganda $m = m_k \cdot 10^k + \ldots + m_0$ ko‘rinishga ega bo‘lsin. U holda daraja ustidagi amallarni bajarish qoidasiga ko‘ra ($n \le k$ bo‘lganda) quyidagiga ega bo‘lamiz.

$$\frac{m}{10^n} = \frac{m_k \cdot 10^k + \ldots + m_n 10^n + m_{n-1} 10^{n-1} + \ldots + m_0}{10^n} =$$

$$= m_k 10^{k-n} + \ldots + m_n + \frac{m_{n-1}}{10} + \ldots + \frac{m_0}{10^0} \ldots \quad (1)$$

$m_k 10^{k-n}+...+m_n$ - natural sonini M bilan belgilaymiz. (1) oʻnli kasrni quyidagicha belgilash qabul qilingan: $M, m_{n-1}..m_0$. shunday qilib, $\frac{m}{10^n}$ kasrni yozishda, m sonini oʻnli yozuvdagi keyingi n ta raqami vergul bilan ajratiladi. Masalan: $\frac{621}{10^2}=6{,}21.$

Ma'lumki, oʻnli kasrlarni taqqoslash ular ustida amallar bajarishga keltiriladi. Masalan, $0{,}4563<0{,}4572$, chunki sonlarning oʻnli va yuzli ulushlari teng boʻlgani bilan, birinchi sonning mingli ulushi ikkinchi sonnikidan kichik $(6<7)$.

Oʻnli kasrlarni taqqoslash va ular ustida amallar bajarish oson boʻlgani uchun quyidagi savol kelib chiqadi: $\frac{m}{n}(m,n\in N)$ koʻrinishdagi har qanday kasrni ham oʻnli kasr koʻrinishida yozish mumkinmi?
Bunga quyidagi teorema javob beradi

Teorema: $\frac{m}{n}$ qisqarmas kasr oʻnli kasrga teng boʻlishi uchun bu kasr maxrajining tub koʻpaytuvchilarga yoyilmasida faqat 2 va 5 sonlari boʻlishi zarur va etarlidir. (biz uni isbotsiz qabul qilamiz):

Masalan, $\frac{17}{250}$ kasrni oʻnli kasr koʻrinishida yozish mumkin, chunki u qisqarmas va maxrajining tub koʻpaytuvchilarga yoyilmasi 2 va 5 sonlaridangina iborat: $250=2\ \cdot 5^3$, $\frac{7}{15}$ kasrni oʻnli kasr koʻrinishida yozib boʻlmaydi, uning maxrajining tub koʻpaytuvchilarga yoyilmasida 3 soni bor: $15=3\cdot 5$

Oʻnli kasrlar orasida $0{,}01$ kasr ajralib turadi va undan koʻp foydalaniladi, U protsent deb ataladi va 1% deb belgilanadi. Amalda kattaliklarning qismlari protsentlar bilan ifodalanadi. Masalan, tovarning narxi 20% arzonlashtirildi. Agar shakarkamish tarkibida 15% shakar boʻlsa, 10 t shakarqamishda qancha shakar bor? $0{,}15\cdot 10\text{т}=1{,}5\text{т}$. Demak, 10 t ning 15% i $1{,}5$ t ni tashkil qilar ekan.
Endi oʻnli kasrlar ustida amallarini bajarish algoritmlarini keltiramiz.

Ikkita oʻnli kasrni qoʻshish (ayirish) algoritmi:

1) Ikkita oʻnli kasrda verguldan keyingi oʻnli belgilar sonini tenglashtirish kerak, agar oʻnli kasrning bittasida oʻnli belgilar soni kam boʻlsa, uning oʻng tomoniga bir qancha nollar yozish bilan tenglashtiriladi;
2) Hosil qilingan oʻnli kasrda vergullarni tashlab, hosil boʻlgan natural sonlar qoʻshiladi (ayiriladi);
3) Natijada hosil boʻlgan yigʻindi (ayirma) sonda qoʻshiluvchilarning (kamayuvchi va ayriluvchida) qaysi birida oʻnli belgilar koʻp boʻlsa, shuncha oʻnli belgini vergul bilan ajratish kerak.

Masalan: 3, 12 va 2, 1536 oʻnli kasrlarni qoʻshing va ayiring.

a) 3,12 + 2,1536= 3,1200+2,1536=5,2736.

b) 3,12 - 2,1536= 3,1200 - 2,1536=0,9664.

Oʻnli kasrlarni koʻpaytirish algoritmi:

1) Ikkita oʻnli kasrdagi vergullar tashlab yuboriladi;
2) Hosil boʻlgan ikkita natural son natural sonlarni koʻpaytirish qoidasiga asosan koʻpaytiriladi;
3) Koʻpaytmada hosil boʻlgan natural sonning oʻngidan chapiga qarab, ikkita oʻnli kasrda verguldan keyin qancha raqam boʻlsa, shuncha raqam sanalib vergul qoʻyiladi.

Masalan: 2,15x3,17=6,8155.

Ikki o‘nli kasrni bo‘lish algoritmi:

1) Ikkita o‘nli kasrning verguldan keyingi raqamlar soni tenglashtiriladi, agar bittasida raqamlar soni kam bo‘lsa, o‘nli kasr oxirgi raqamini ketiga nollar yozib to‘lg‘iziladi;
2) Hosil bo‘lgan o‘nli kasrlarning vergullari tashlab yuboriladi;
3) Ikkita natural sonlarni bo‘lish qoidasiga asosan bo‘linadi.

Masalan: 40,625:12,5=40625:12500=3,25

3.3.2. Cheksiz davriy o‘nli kasrlar.

$\frac{1}{3}$ kasrni olib qaraylik, bu kasrni chekli o‘nli kasr ko‘rinishida yozib bo‘lmaydi. 1 ni 3 ga bo‘lish jarayoni cheksiz davom etadi. Shu sababli $\frac{1}{3}$ kasr cheksiz o‘nli kasr hisoblanadi. Bundan tashqari 1 ni 3 ga bo‘lganda, ya’ni $\frac{1}{3} = 0{,}333$... bo‘linmada raqamlar takrorlanadi. Agar biz bo‘linmada bir qancha raqamlarni tashlab yuborsak, u holda $\frac{1}{3}$ dan katta songa ega bo‘lamiz.

Har qanday chekli o‘nli kasrni ham o‘nli kasrni o‘ng tomoniga nollar yozish bilan cheksiz o‘nli kasr ko‘rinishida yozish mumkin.

Masalan 0,16=0,1600...0...

Bulardan ko‘rinadiki, har bir musbat ratsional sonni cheksiz o‘nli kasr ko‘rinishida yozish mumkin ekan.

Bunda hosil qilingan cheksiz o‘nli kasrlarni davriy o‘nli kasrlar deyiladi.

Masalan: $\frac{3}{11}$ soni 0,272727... 27..., $\frac{8}{55}$ soni 0,1454545...45... cheksiz davriy o‘nli kasrlarni ifodalaydi. Bu davriy o‘nli kasrlar qisqacha 0,(27), 0,1(45) ko‘rinishida yoziladi, qavs ichidagi sonlar cheksiz davriy o‘nli kasrdagi takrorlanuvchi bir xil raqamlar guruhini bildiradi va davr deb ataladi.

Davriy kasrlar ikki xil bo‘ladi:

Sof davriy kasrlar - ularda vergul bilan davr orasida boshqa o‘nli xonalar yo‘q.

Masalan 0,(3), 0,(27), 0,(85472), ...

Aralash davriy o‘nli kasrlar - ularda vergul va davr orasida boshqa o‘nli xonalar bor.

3,15(44), 0,1(45), ...

Quyidagicha savol tug‘iladi. Har qanday qisqarmas $\frac{m}{n}$ kasrni davriy o‘nli kasr ko‘rinishida ifodalab bo‘ladimi?

Teorema. Agar $\frac{m}{n}$ kasr qisqarmas va maxrajining yoyilmasida 2 va 5 dan farqli boshqa tub ko‘paytuvchi bo‘lsa. $\frac{m}{n}$ kasr cheksiz davriy o‘nli kasr ko‘rinishida ifodalanadi.

Isboti. Maxraj yoyilmasida 2 va 5 dan farqli boshqa tub ko‘paytuvchi bo‘lgani uchun m ni n ga bo‘lish jarayoni cheksizdir. Bundan tashqari m ni n ga bo‘lganda n dan kichik qoldiqlar ya’ni $1,2,3,\ldots,n-1$ sonlar qoladi. Turli qoldiqlar to‘plami chekli bo‘lgani uchun, qaysidir qadamdan keyin biror qoldiq takrorlanadi, bu esa bo‘linma xonalarining takrorlanishiga olib keladi. Demak, $\frac{m}{n}$ sonini ifodalovchi cheksiz o‘nli kasr albatta davriy bo‘lar ekan.

Isbotlangan teoremadan xulosa kelib chiqadi: ixtiyoriy musbat ratsional sonni chekli o‘nli kasr orqali yoki cheksiz davriy o‘nli kasr orqali ifodalash mumkin.

Agar chekli o‘nli kasrni davri 0 ga teng cheksiz kasr deb hisoblash kelishilsa, buni qisqacha shunday yozish mumkin. Masalan, $7,82 = 7,82(0)$. Bunday kelishilish ixtiyoriy musbat ratsional sonni cheksiz davriy o‘nli kasr ko‘rinishida yozishga imkon beradi. Shuningdek ixtiyoriy musbat cheksiz davriy o‘nli kasrni biror musbat ratsional son shaklida ifodalash mumkin.

$\frac{m}{n}$ musbat ratsional sonni cheksiz davriy o‘nli kasr ko‘rinishida yozish uchun surat m ni maxraj n ga bo‘lish kerak. Cheksiz davriy o‘nli kasr oddiy kasr ko‘rinishiga quyidagicha keltiriladi.

Cheksiz davriy o‘nli kasr $0,(14)$ berilgan bo‘lsin, ya’ni $0,141414....$ Unga mos ratsional sonni a orqali belgilaymiz, u holda $a = 0,141414....$ Bu tenglikning ikkala tomonini 100 ga ko‘paytiramiz:

$100a = 14,1414...$ yoki $100a = 14 + 0,1414... = 14 + a$

$100a = 14 + a$ tenglamani echamiz: $a = \frac{14}{99}$. Bu kasr qisqarmas.

Umuman, sof davriy cheksiz o‘nli kasr shunday oddiy kasrga tengki, uning surati davrga teng, maxraji esa kasr davrida nechta raqam bo‘lsa, shuncha to‘qqizdan iborat.

Aralash davriy kasr $0,5(41)$, ya’ni $0,54141...$ berilgan bo‘lsin. Unga mos ratsional sonni a orqali belgilaymiz, u holda $a = 0,54141...$. Bu tenglikning ikkala qismini 10 ga ko‘paytirib, $10a = 5,4141...$ sof davriy kasrni hosil qilamiz. Keyingi o‘zgartirishlar yuqoridagidek bajariladi. $x = 5,4141...$ deymiz. Bu tenglikni ikkala qismini 100 ga ko‘paytiramiz: $100x = 541,4141...$

yoki $100x = 541 + 0,4141....$ Bu tenglikni ikkala qismiga 5 ni qo‘shamiz:

$100x + 5 = 541 + 5,4141...;$ $x = 5,4141$ bo‘lgani uchun $100x + 5 = 541 + x$ tenglamani hosil qilamiz, bundan $x = \frac{541 - 5}{99}$, x ning bu qiymatini $10a = 5,4141...$ tenglikka qo‘yamiz:

$10a = \frac{541 - 5}{99}$, bundan $a = \frac{541 - 5}{990} = \frac{536}{990}$

Umuman, butun qismi 0 bo‘lgan aralash davriy kasr shunday oddiy kasrga tengki, uning surati ikkinchi davrgacha yozilgan sondan birinchi davrgacha yozilgan sonning ayirmasidan, maxraji esa davrda nechta raqam bo‘lsa, shuncha to‘qqizdan va birinchi davrgacha nechta raqam bo‘lsa, shuncha noldan iborat.

O‘z- o‘zini nazorat qilish uchun savollar

1. O‘nli kasga ta’rif bering.
2. Musbat ratsional sonlarning o‘nli kasr ko‘rinishidagi yozuvini yozib ko‘rsating.
3. Qisqarmas kasrni o‘nli kasrga aylantirishda zaruriy va etarli shartlar to‘g‘risidagi teoremani aytib isbotlab bering.
4. O‘nli kasrlar ustida amallar bajarishning algoritmlarini aytib bering.
5. Cheksiz davriy o‘nli kasrlarni misollar yordamida tushuntiring.
6. Sof va aralash davriy o‘nli kaslarni misollar yordamida tushuntiring.
7. Kasrni cheksiz davriy o‘nli kasr ko‘rinishida ifodalash shartlarini aytib bering.
8. Cheksiz davriy o‘nli kasrni oddiy kasrga aylantirishni misollar yordamida tushuntiring.

3.4. MUSBAT HAQIQIY SONLAR

3.4.1. O‘lchovdosh bo‘lmagan kesmalar.

Musbat ratsional sonlar yordamida u yoki bu kattaliklarni istalgan aniqlik darajasida o‘lchash mumkin. Ammo bunday aniqlikda o‘lchashni hamma vaqt ham bajarib bo‘lmaydi.

Masalan, biror OA kesmani $\frac{1}{10^n}$ aniqlikda o‘lchash talab qilinsin. Buni biz quyidagicha o‘lchaymiz. OA kesmani O nuqtasidan A nuqtasiga qarab uzunligi $\frac{1}{10^n}$ bilan ifodalanuvchi kesmalarni joylashtirib chiqamiz. Ammo bunda quyidagi hollar bo‘lishi mumkin. Boshqacha aytganda shunday musbat m soni mavjudki, buning uchun $\frac{m}{10^n}$ uzunlik OA kesmadan kam, $\frac{m+1}{10^n}$ uzunlik OA kesmadan ortiq bo‘ladi.

Shunday qilib OA kesma uzunligi $\frac{m}{10^n}$ va $\frac{m+1}{10^n}$ sonlari orasida bo‘ladi. Xuddi shunday hol jismlarni o‘lchashda ham ro‘y beradi, ya’ni jism o‘lchashda og‘irlik $\frac{1}{10^n}$ gacha aniqlikda bo‘lishi mumkin.

Bundan ko‘rinadiki, $\frac{m}{10^n}$ va $\frac{m+1}{10^n}$ ratsional sonlari OA kesmani uzunligini taqribiy, ya’ni ortig‘i yoki kami bilan ifodalaydi va u OA kesmaning uzunligini aniq ifodalaydimi?. Bu savolga ayrim hollarda ratsional sonlar bilan chegaralanib javob berib bo‘lmaydi.

Shunday kesmalar mavjudki, ularni uzunliklarini ratsional sonlar yordamida ifodalab bo‘lmaydi. Bunday kesmalarni mavjud bo‘lishini quyidagi teoremada ko‘rish mumkin.

Teorema: Kvadratning dioganali uning tomonlari bilan o‘lchovdosh emas.

Isboti: aytaylik kvadratning tomoni 1 ga teng bo‘lsin. Faraz qilaylik $ABCD$ kvadratning AC dioganali uning tomoni bilan o‘lchovdosh bo‘lsin va uning uzunligi qisqarmas $\frac{p}{q}$ kasr bilan ifodalansin. U holda Pifagor teoremasiga asosan $|AB|^2+|BC|^2=|AC|^2$ tenglikga ega bo‘lamiz.

Boshqacha aytganda, $1^2+1^2=\frac{p^2}{q^2}$ tenglikga ega bo‘lamiz, bundan esa $p^2=2q^2$ tenglik kelib chiqadi. Demak, p^2 - juft son, u holda p ham juft (chunki toq sonni kvadrati juft son bo‘lmaydi). Shunday qilib, $p=2p_1$. Bundan esa $4p_1^2=2q^2$, bundan esa q^2 ni juft sonligi kelib chiqadi va q - juft son.

Demak p va q lar juft son bo‘lib, bizni $\frac{p}{q}$ kasr qisqarmas kasr degan farazimizga zid. Bu zidlik esa, kvadratning tomonini o‘lchov birligi sifatida tanlasak, kvadrat diagonali uzunligini ratsional son orqali ifodalab bo‘lmasligini, ya’ni kvadratning dioganali uning tomoni bilan o‘lchovdosh emasligini ko‘rsatadi.

Shu sababli ixtiyoriy kesmani o‘lchash natijasini son bilan ifodalash uchun Q_+ musbat ratsional sonlar to‘plamini yangi sonlar bilan to‘ldirib kengaytirish kerak.

Bu holda hosil bo‘lgan yangi sonlar to‘plami musbat haqiqiy sonlar to‘plami deyiladi va R_+ bilan belgilanadi.

Bundan ko‘rinadiki, har bir musbat ratsional son R_+ ga tegishli bo‘ladi, ya’ni $Q_+ \subset R_+$; R_+ da qo‘shish va ko‘paytirish amallari musbat ratsional sonlar to‘plami Q_+ dagidek aniqlanib, R_+ da kesmalarni o‘lchash ham additivlik va multiplakatavlik xossalariga ega bo‘ladi.

3.4.2. Musbat haqiqiy sonlar va cheksiz o‘nli kasrlar.

Biz ixtiyoriy kesmani o‘lchash natijasini cheksiz o‘nli kasrlar bilan ifodalanishini ko‘rsatamiz (umuman, davriy bo‘lmagan o‘nli kasrlar ko‘rinishida ifodalanishini). Aytaylik, bizga *a* kesma va *e* birlik kesma berilgan bo‘lsin. U holda *a* kesma birlik *e* kesmadan kichik yoki shunday bir n soni topiladiki $n \cdot e \le a(n+1)e$ tengsizlik o‘rinli bo‘ladi, bu erda n - natural son (agar a e dan kichik bo‘lsa, $n=0$ bo‘ladi) bo‘lib, bunga a kesma uzunligining butun qismi deyiladi.

Agar $a \cong ne$ bo‘lsa, a kesma uzunligi n natural son bilan ifodalanadi. Aks holda $a \cong ne + a_1$, bu erda $a_1 < e$, U holda 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9 qiymatlardan birisini qabul qiluvchi shunday n_1 soni topiladiki, a_1 kesma uchun $\frac{n_1}{10}e \le a_1 < \frac{n_1+1}{10}e$ tengsizlik o‘rinli bo‘ladi, bundan esa $(n+\frac{n_1}{10})e \le ne + a_1 < (n+\frac{n_1+1}{10})e$. Demak $(n,e_1) \le a < (n{,}1+0{,}1)e$. (bu erda n, n_1 lar o‘nli kasr, masalan: 5,4 bo‘lishi mumkin).

O‘lchashda yuqoridagidek jarayonni davom ettirib, 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9 qiymatlardan birini qabul qiluvchi $n_2, n_3, \ldots, n_k$ sonlariga ega bo‘lamiz. Bundan esa a kesmaning ixtiyoriy k bo‘lagi $(n,n_1n_2\ldots n_k)e$ kesmadan katta $(n,n_1n_2\ldots\ldots n_k+\frac{1}{10^k})e$ kesmadan kichik bo‘ladi.

Bundan ko‘rinadiki, a kesmani o‘lchash jarayonini cheksiz o‘nli kasrlar shaklida ifodalash mumkin.

Agar cheksiz o‘nli kasrda verguldan keyin bir qancha raqamlarni qoldirib, qolganlari tashlab yuborilsa $n, n_1\ldots.n_k$ soni hosil bo‘ladi va u a kesma uzunligini kami bilan ifodalaydi, agar qoldirilgan raqamlarni oxirgisiga 1 qo‘shilsa, a kesma uzunligi ortig‘i bilan olinadi. Shu sababli biz a kesma uzunligi $n, n_1n_2\ldots n_k$ kasr bilan ifodalanadi deymiz, ya’ni $m(a) = n, n_1n_2\ldots n_k$

Misol. $m(a) = 5{,}2753\ldots$

Ixtiyoriy n uchun quyidagi tengsizlik o‘rinliligi aniq

$$n, n_1 \cdot n_2 \ldots n_k \le m(a) < n, n_1, n_2 \ldots n_k + \frac{1}{10^k}$$

Kesmalarni o‘lchashda oxirgi raqamlari faqat cheksiz 9 liklardan iborat kasr hosil bo‘lmaydi, Masalan, 0,399..9.. chunki istalgan x soni quyidagi tengsizliklarni qanoatlantirmaydi.

$$0{,}3 \le x < 0{,}4$$
$$0{,}39 \le x < 0{,}40$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$0{,}39\ldots9 \le x < 0{,}400\ldots0$$

Agar bu tengsizliklarni o‘rniga

$$0{,}3 < x \le 0{,}4$$
$$0{,}39 < x \le 0{,}40$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$0{,}39\ldots9 < x \le 0{,}400\ldots0$$

tengsizliklarni yozsak bu tengsizliklarni 0,4 soni qanoatlantiradi. Shu sababli 0,399...9..=0,3(9) o‘nli kasr 0,4 sonining boshqacha yozuvi hisoblanadi. Umuman, agar chekli o‘nli kasrni oxirgi raqamini 1 ga kamaytirilsa va uning ketiga faqat 9 raqamlar ketma-ketligi yozilsa, u holda berilgan chekli o‘nli kasrga teng cheksiz o‘nli kasr hosil bo‘ladi.

0,323= 0,32299...9

6,7 = 6,69...9

Biz har bir kesmaga cheksiz o‘nli kasrni mos qo‘ydik. Demak keyingi raqamlari ketma-ket 9 raqamlari bilan tugallangan cheksiz o‘nli kasrga uzunligi shu kasr bilan ifodalanuvchi kesma mavjud.

Ta’rif: $0{,}0\ \ldots 0$ dan farqi, keyingi raqamlari ketma-ket 9 raqamlari bilan tugamagan cheksiz o‘nli kasrlar to‘plami musbat haqiqiy sonlar to‘plami deyiladi va R_+ bilan belgilanadi.

Har bir musbat x haqiqiy soni uchun uning taqribiy qiymatini ko‘rsatish mumkin. Agar $x = n, n_1, n_2 .. n_k \ldots$ cheksiz o‘nli kasrda verguldan keyin k ta raqamini qoldirib qolganlarini tashlab yuborsak, ya’ni $x_k = n, n_1, n_2 ... n_k$ bu son x sonini kami bilan $\frac{1}{10^k}$ aniqlikda olingan taqribiy qiymati bo‘ladi. Agar bunga $\frac{1}{10^k}$ ni qo‘shsak, u holda $x_k^1 = n, n_1, n_2 ... n_k + \frac{1}{10^k}$ soni x sonini ortig‘i bilan $\frac{1}{10^k}$ aniqlikdagi qiymati bo‘ladi.

Agar n_k raqami 9 dan farqli bo‘lsa, n_k ga 1 ni qo‘shish bilan x_k^1 hosil bo‘ladi.

Masalan, $x = 3{,}82365\ldots$ u holda

$$x = 3{,}823, \qquad x_k^1 = 3{,}824$$

bulardan ko‘rinadiki, ixtiyoriy musbat haqiqiy x soni uchun quyidagi tengsizlik o‘rinli.

$$x_k \le x < x_k^1$$

3.4.3. R_+ to‘plamda tartib munosabati.

Ikkita $x = m, m_1, m_2, ... m_k \ldots$ va $y = n, n_1, n_2 .. n_k \ldots$ musbat haqiqiy sonlari berilgan bo‘lsin. Agar $m < n$ yoki shunday bir k soni uchun $m = n$ da $m = n,\ m_1 = n_1, \ldots, m_{k-1} = n_{k-1}$ bo‘lib, $m_k < n_k$ bo‘lsa, x soni y sonidan kichik deyiladi.

R_+ to‘plamda «<» munosabati qattiq chiziqli tartiblangan, ya’ni u assimmetrik, tranzitiv. Shuning uchun $x \neq y$ da $x < y$ yoki $y < x$.

R_+ to‘plamda Q_+ to‘plamdagidek eng kichik va eng katta element yo‘q. Bundan tashqari R_+ to‘plamdagi ixtiyoriy ikkita son o‘rtasida cheksiz ko‘p ratsional son yotadi. R_+ to‘plamdagi tartib munosabatini asosiy xossalaridan biri uzluksizlik xossasidir. Bu xossaga Q_+ to‘plam ega emas. R_+ ning ixtiyoriy to‘plam osti to‘plamlari sonli to‘plamlar deyiladi. Masalan, N, Q_+.

Agar ixtiyoriy $x \in X$ va $y \in Y$ lar uchun $x \leq c \leq y$ o‘rinli bo‘lsa, c soni X va Y sonli to‘plamlarni bo‘ladi deyiladi.

Bunga asosan R_+ to‘plamni uzluksizligi quyidagicha ta’riflanadi.

Agar X sonli to‘plam Y sonli to‘plamning chap tomoniga joylashgan bo‘lsa, u holda albatta bu to‘plamlarni bo‘luvchi bitta son topiladi.

Masalan, $[2;5]$ va $[7;11]$ kesmalarni olsak, u holda $[2;5]$ kesmasi 6 sonidan chapda, $[7;11]$ kesmasi esa 6 sonidan o‘ngda joylashadi. 6 soni $[2;5]$ va $[7;11]$ kesmalarini bo‘ladi. Doiraning yuzi unga tashqi chizilgan ko‘pburchaklar yuzalarining to‘plami ichki chizilgan ko‘pburchaklar yuzalari to‘plamlarini bo‘ladi.

3.4.4. R_+ da qo‘shish, ko‘paytirish, ayirish va bo‘lish.

Bizga R_+ to‘plamdan $x = m, m_1, m_2, ...m_k...$ va $y = n, n_1, n_2..n_k...$ sonlari berilgan bo‘lsin.

U holda ixtiyoriy k soni uchun $x_k \leq x < x_k^1$, $y_k \leq y < y_k^1$ tengsizliklarga ega bo‘lamiz. Tengsizliklardan $x + y$ soni $x_k + y_k$ sonidan kichik, emasligi $x_k^1 + y_k^1$ sonidan katta emasligi ko‘rinadi.

1-Ta’rif. x va y musbat haqiqiy sonlarni yigindisi ya’ni $x + y$ deb, $\{x_k + y_k\}$ va $\{x_k' + y_k'\}$ to‘plamlarni bo‘luvchi songa aytiladi. Bu x_k va y_k lar x va y sonlarini kami bilan, x_k' va y_k' lar esa x va y sonlarining ortigi bilan olingan taqribiy qiymatidir.

R_+ to‘plamda qo‘shish amali kommutativ, assotsiativ va qisqaruvchan. Agar $x < y$ bo‘lsa, ixtiyoriy $z \in R_+$ uchun $x + z < y + z$ o‘rinli, R_+ dagi ixtiyoriy x va y lar uchun $x = x + y$ tenglik bajarilmaydi.

R_+ da ko‘paytirish amali ham yuqoridagiga o‘xshash aniqlanadi.

2-Ta’rif: Musbat haqiqiy x va y sonlarning ko‘paytmasi deb, $\{x_k \cdot y_k\}$ va $\{x_k^1 \cdot y_k^1\}$ to‘plamlarni bo‘luvchi songa aytiladi.

R_+ da ko‘paytirish amali kommutativ, assotsiativ va qisqaruvchan. Ko‘paytirish amali qo‘shish amaliga nisbatan distributiv. 1 soni ko‘paytirish amaliga nisbatan neytral, ya’ni $a \in R_+$ bo‘lsa, u holda $1 \cdot a = a$.

3-Ta’rif: R_+ da ixtiyoriy ikkita a *ва* b sonlari uchun $a > b$ shartda, shunday $c \in R_+$ topiladiki, $a = b + c$ bajariladi. Bunda c soniga a va b sonlarining ayirmasi deyiladi va $a - b$ ko‘rinishda yoziladi.

R_+ to‘plamda ayirish amali qo‘shish amaliga teskari amal ekanligi o‘z-o‘zidan ravshan. Agar $x > y$ bo‘lsa,

$$(x+y)-y=x$$
$$(x-y)+y=x$$

4-Ta'rif: R_+ dagi ixtiyoriy ikkita x va y sonlari uchun, shunday $z\in R_+$ topiladiki, $x=yz$ o'rinli bo'ladi. Bu holda z soniga $x$ni y ga bo'linmasi deyiladi va $x:y$ ko'rinishida belgilanadi. R_+ da bo'lish amali ko'paytirish amaliga teskari amal bo'lgani uchun

$$(xy):y=x$$
$$(x:y)\cdot y=x$$

lar bajariladi.

3.4.5. Musbat haqiqiy sonlar to'plamining aksiomatikasi.

Biz yuqorida musbat haqiqiy sonlarni cheksiz o'nli kasrlar shaklida ifodalash mumkinligini aytgan edik. Ammo bu musbat haqiqiy sonlarning yozishning bir ko'rinishi xalos. Musbat haqiqiy sonlarni cheksiz ikkilik, cheksiz uchlik, va x.k. kasrlar ko'rinishida ham yozish mumkin. Masalan, musbat haqiqiy sonini cheksiz uchlik kasr ko'rinishida yozsak, uning tarkibida 0,1,2 raqamlari qatnashib, 021, 01210112... ko'rinishda bo'lishi mumkin. Musbat haqiqiy sonlarni uning yozilishi shakliga bog'lamasdan, hammasini qanoatlantiruvchi aksiomalarni shakllantirish lozim. Shunday aksiomalar sistemasidan biri qo'shish amali xossalariga asoslangan bo'lib, unda ta'riflanmaydigan tushuncha qilib 1 va qo'shish amali hisoblanadi. Bu tushunchalar quyidagi aksiomalar sistemasini qanoatlantirishi lozim:

1. $N\subset R_+$
2. Qo'shish amali R_+ to'plamdagi ixtiyoriy $(a;b)$ juftlikga shu to'plamdagi $a+b$ sonini mos qo'yadi.
3. R_+ to'plamda ixtiyoriy a va b lar uchun R_+ da qo'shish amali kommutativ:
$$a+b=b+a$$
4. R_+ dagi ixtiyoriy $(a;b$ ва $c)$ lar uchun R_+ da qo'shish amali assotsiativ:
$$(a+b)+c=a+(b+c)$$
5. Agar $a,b\in R_+$, u holda $a+b\neq a$
6. Agar $a,b\in R_+$ bo'lib $a\neq b$ bo'lsa, u xolda shunday $c\in R_+$ soni topiladiki $b=a+c$ munosabat o'rinli bo'ladi;
7. Ixtiyoriy $a\in R_+$ va ixtiyoriy natural n soni uchun, shunday yagona $b\in R_+$ soni topiladiki, a soni uchun $a=b+b+...+b$ (n marta) munosabat o'rinli bo'ladi.

1) - 7) aksiomalar R_+ to'plamda tartib munosabatini kiritishga yo`l qo'yadi. Boshqacha aytganla R_+ to'plamda shunday bir c soni topildiki, buning uchun faqat va faqat $b=a+c$ musbat o'rinli bo'lgandagina a<b bo'ladi. Bundan tashqari uzluksizlik aksiomasi bajarilishi lozim.

8. Agar X sonlar to'plami Y sonlar to'plamidan chapda yotsa (ya'ni ixtiyoriy $x\in X$, $y\in Y$ lar uchun $x\leq y$), u holda X *ва* Y to'plamlarni bo'luvchi $a\in R_+$ soni mavjud (ya'ni $x\in X$ *ва* $y\in Y$ sonlari uchun $x\leq a\leq y$ tengsizlik o'rinli).

Bu aksiomalar sistemasi yordamida R_+ to'plamdagi cheksiz o'nli kasr ko'rinishidagi ixtiyoriy son R_+ to'plamda qo'shish amalini aniqlashini isbot qilish mumkin.

O'z- o'zini nazorat qilish uchun savollar

1. O'lchovdosh bo'lmagan kesmalarni o`lchash haqida tushuncha bering.

2. Kvadratning dioganali uning tamonlari bilan o‘lchovdosh emasligi to‘g‘risidagi teoremani isbotlang.
3. Musbat haqiqiy sonlarga ta’rif bering.
4. Musbat haqiqiy sonlar to‘plamining tartiblanganligini tushuntiring.
5. Musbat haqiqiy sonlar to‘plamida arifmetik amallar bajarishini ta’riflarini keltiring.
6. Musbat haqiqiy sonlar to‘plamining aksiomatikasini keltiring.

3.5. HAQIQIY SONLAR TO‘PLAMI.

3.5.1. Musbat va manfiy sonlar.

Musbat haqiqiy sonlar yordamida o‘lchash natijasi bo‘lgan ixtiyoriy skalyar miqdorlarni ifodalash mumkin: uzunlik, yuza, hajm, massa va x.k. Ammo amaliyotda bu kattaliklarni o‘lchash natijasinigina emas, bu kattaliklar qanchaga o‘zgarishini ko‘rsatishga to`g‘ri keladi. Kattaliklar esa o‘z navbatida o‘sishi yoki kamayishi yoki o‘zgarmasdan qolishi mumkin. Shu sababli kattaliklarni o‘zgarishini ko‘rsatish uchun musbat haqiqiy sonlar to‘plamini kengaytirishga, ya’ni boshqa sonlarni qo‘shishga zaruriyat tug‘ilgan. R_+ sonlar to‘plamiga 0 (nol) va manfiy sonlar qo‘shilib kengaytirilgan. Buning uchun R_+ to‘plam olinib, bu to‘plamning har bir x soniga $-x$ (minus x) deb ataluvchi yangi son mos qo‘yilgan. Masalan: 3 soniga – 3, 7 va 8 sonlariga –7 va –8 va x.k.

$-x$ ko‘rinishidagi (bunda $x \in R_+$) songa manfiy son deyilib, ularni to‘plami R_- deb belgilangan.

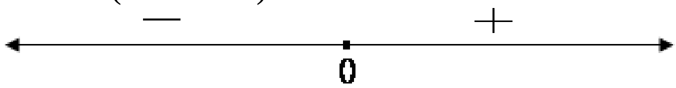
R_+, R_- va $\{0\}$ to‘plamlari birlashtirilib haqiqiy sonlar to‘plami deyiladi va R bilan belgilanadi.

Shunday qilib

$$R = R_+ \cup R_- \cup \{0\}$$

bunda R_+, R_- *ва* $\{0\}$ to‘plamlari o‘zaro jufti-jufti bilan kesishmaydi, boshqacha aytganda bitta son ham musbat, ham manfiy yoki musbat va nol bo‘la olmaydi.
Agar kattalik dastlab x qiymatni qabul qilsa va (bunda $x, y \in R$) $x < y$ bo‘lganda, kattalikni o‘zgarishi musbat $y - x$ son bo‘ladi.

Agar $x > y$ bo‘lsa, kattalik o‘zgarishi manfiy $-(x-y)$ soni bo‘ladi. Musbat va manfiy sonlar qarama-qarshi yo`nalgan nurlar bilan tasvirlanadi, 0 soni esa ikkita nurni boshi hisoblanadi. $x$ *ва* $-x$ sonlari koordinata to`g‘ri chiziqida sanoq boshi hisoblangan 0 nuqtaga nisbatan simmetrik joylashadi. (38-chizma)



38-chizma

Koordinata to`g‘ri chiziqida sanoq boshidan x sonini ifodalovchi nuqtagacha bo‘lgan masofa x sonini moduli deyiladi va $|x|$ bilan belgilanadi.
Shunday qilib,

$$|x| = \begin{cases} x \quad agar\ x > 0\ bo`lsa, \\ -x\ agar\ x < 0\ bo`lsa, \\ 0\ \ agar\ x = 0\ bo`lsa \end{cases}$$

Misol: $|8| = 8;$ $|-7| = 7;$ $|0| = 0;$

Aytaylik, $x \in R_+$ soni $a \in R$ soniga o‘zgarganda $y \in R_+$ soniga o‘tsin. U holda a haqiqiy songa musbat haqiqiy sonlar juftligi $(x;y)$ mos keladi. Masalan; 2 soniga (7;9) juftligi mos keladi, chunki 7 soni 9 soniga o‘tadi. (9;7) juftligiga – 2 soni mos keladi, chunki 9 sonidan 7 soniga o‘tishga -2 soni mos keladi.

Bitta haqiqiy songa cheksiz juftliklar mos keladi. Masalan: 3 soniga (1;4), (3;6), $(\sqrt{2}\,; 3+\sqrt{2}), ...$ va x.k. – 3 soniga esa (4;1), (6;3), $(3+\sqrt{2}; \sqrt{2})$, va x.k.

$(x_1; y_1)$ *ва* $(x_2; y_2)$ juftliklari bitta a soniga mos kelishi uchun faqat va faqat $x_1 + y_2 = x_2 + y_1$ munosabat o‘rinli bo‘lishi zarur. $x_1 + y_2 = x_2 + y_1$ munosabat bajarilsa, $(x_1; y_1)$ *va* $(x_2; y_2)$ juftliklar ekvivalent deyiladi. $(x_1; y_1)$ $(x_2; y_2)$ munosabati refleksivlik, simmetriklik va tranzitivlik xossalariga ega. Shu sababli R_+ to‘plam ekvivalent juftliklar sinflariga bo‘linadi.

Har bir $(x; y)$ juftlikni sonlar nurida boshi x va oxiri y bo‘lgan yo`naltirilgan kesmalar bilan tasvirlash mumkin.

Ekvivalent juftliklarga bir xil uzunlik va bir xil yo`nalishga ega bo‘lgan kesmalar mos keladi va ular ekvivalent kesmalar deyiladi. Bundan esa haqiqiy sonlar ekvivalent yo`naltirilgan kesmalar sinfini tavsirlaydi deyish mumkin.

3.5.2. Haqiqiy sonlarni qo‘shish va ayirish.

Aytaylik biror $x \in R_+$ soni dastlab a keyinchalik esa b soniga o‘zgartirilsin. a va b haqiqiy sonlarning yig‘indisi deb natijaviy o‘zgarishga aytiladi. Masalan, 15 sonini dastlab 3 keyinchalik 7 ga o‘zgartirsak, 15 soni dastlab 18 keyinchalik esa 25 bo‘ladi. Demak 15 sonini 25 qilish uchun 3+7=10 songa o‘zgartirish kerak.

Qarama-qarshi haqiqiy sonlarning yig‘indisi nolga teng. Umuman olganda haqiqiy sonlarni qo‘shish qoidasi tubandagicha. Bir xil ishoraga ega bo‘lgan haqiqiy sonlarni qo‘shganda shu ishorali haqiqiy son hosil bo‘ladi va u sonning moduli qo‘shiluvchi sonlar modullarining yig‘indisiga teng. Qarama-qarshi ishorali haqiqiy sonlarni qo‘shganda hosil bo‘lgan sonning moduli, qo‘shiluvchilar moduli kattasidan moduli kichigini ayirmasiga, ishorasi esa qo‘shiluvchilardan qaysi birining moduli katta bo‘lsa, shu sonning ishorasi bilan bir xil bo‘ladi.

Haqiqiy songa nolni qo‘shish bilan son o‘zgarmaydi.

Haqiqiy sonlarni qo‘shish kommutativlik, assotsiativlik va qisqaruvchanlik xossalariga ega. Bu ta’riflardan R to‘plamda nolning neytral element ekanligi ko‘rinadi.

R to‘plamda ayirish amali qo‘shish amaliga teskari amal sanaladi. R to‘plamda har bir b songa qarama-qarshi -b son mavjud bo‘lib $b + (-b) = 0$

Geometrik nuqtai nazardan ayirma b nuqtadan a nuqtaga boruvchi kesmaning uzunligiga teng, ya’ni $|a - b|$.

R to‘plamda tartib munosabati o‘rinli. Agar $a - b$ ayirma musbat bo‘lsa, $a > b$ bo‘ladi.

Tartib munosabati to‘plamda assimetrik va tranzitiv bo‘lgani uchun, tartib munosabati qattiq tartiblangan hisoblanadi.

Shu sababli R to‘plamda $a = b, a > b, b > a$ munosabatlardan biri o‘rinli.

3.5.3. Haqiqiy sonlar to‘plamida ko‘paytirish va bo‘lish.

x va y sonlarni ko‘paytmasi deb, shunday z soniga aytiladiki, bu sonning moduli ko‘payyuvchilar modullarining ko‘paytmasiga teng, ya’ni $|z| = |x| \cdot |y|$, ishorasi esa ko‘paytuvchilar ishoralari bir xil bo‘lsa, musbat, aks holda manfiy bo‘ladi. Ixtiyoriy x soni uchun $x \cdot 0 = 0 \cdot x = 0$.

Ko‘paytirish amali R to‘plamda kommutativ, assotsiativ va qo‘shishga nisbatan distributiv xossalarga ega. Qisqaruvchanlik xossasiga ega emas, chunki $zx = zy$ dan $x = y$ deb xulosa chiqarib bo‘lmaydi, agar $z=0$; bo‘lsa $x \neq y$, ammo $z \neq 0$ bo‘lsa , $zx = zy$ dan $x = y$ kelib chiqadi.

Shunday qilib ko‘paytirishni noldan farqli sonlar uchun qisqartirish mumkin.

Agar x soni noldan farqli son bo‘lsa, u holda ixtiyoriy $y \in R$ soni uchun shunday z soni topiladiki, $x = yz$ munosabat o‘rinli bo‘ladi. Bu erda z soniga x sonini y soniga bo‘linmasi deyiladi va $x : y$ ko‘rinishda belgilanadi. Shunday qilib R to‘plamda noldan boshqa ixtiyoriy songa bo‘lish aniqlangan.

O‘z- o‘zini nazorat qilish uchun savollar

1. Haqiqiy sonlarni qo‘shish va ayrishini tushuntiring.
2. Haqiqiy sonlar to‘plamida ko‘paytirish va bo‘lishni tushuntiring.
3. Haqiqiy sonlar ustidagi amallarning xossalarini aytib bering.

3.6. SONLARNI YAXLITLASH. MIKROKALKULYATOR YORDAMIDA HISOBLASH.

3.6.1. Sonlarni yaxlitlash va ular ustida amallar

1. Taqribiy hisoblashlar.

Taqribiy son, sonlarni yaxlitlash. Har kimning ko‘rish qobiliyati har xil, biror uzunlikni o‘lchaganda o‘lchov lentasining qattiq yoki bo‘sh tortilishiga ko‘ra o‘lchash natijalari turlicha, bular esa miqdorlarning o‘lchov natijalarning doimo taqribiy ekanligini ko‘rsatadi. Sanash yo‘li bilan hisoblash natijasi doimo taqribiy bo‘lavermaydi, ba’zan aniq, ba’zan taqribiy bo‘ladi. Masalan, bir ko‘ldagi baliqlar soni 173200 dona deyilsa, baliqlar soni bir donaga aniqlikda sanalmagani aniq ko‘rinib turadi. Demak, baliqlarning soni taqribiy. Agar sinfdagi o‘quvchilar soni 26 desak, bu aniq sanalgan deyiladi. Sonning yuqori xonalarida bir yoki bir necha raqam qoldirib, kichik xonalarini o‘chirib, o‘rniga nollar qo‘yishni yaxlitlash deyiladi. Yuqoridagi ko‘ldagi baliqlar soni yaxlitlashga misol bo‘la oladi. Berilgan sonni berilgan shartga ko‘ra yaxlitlash uchun u berilgan sonda o`chiriladigan raqam 5 dan katta yoki 5 ga teng bo‘lsa, undan oldingi xona raqamiga bir qo‘shiladi va o‘chirilgan raqam o‘rniga nol yoziladi. Agar o‘chiriladigan raqam 5 dan kichik bo‘lsa, to‘g‘ridan-to‘g‘ri tashlanib, uning o‘rniga nol yoziladi.

Misol. Quyidagi sonlarni yuzgacha aniqlikda yozing:

1) $325461 \approx 325500$

2) $257240 \approx 257200$

Agar tashlanadigan raqam faqat 5 ning o‘zigina bo‘lib, undan keyin hech qanday raqam kelmasa, u holda undan yuqori xona raqamiga qaraladi, agar u raqam toq bo‘lsa 1 qo‘shilib, juft bo‘lsa, o‘z holicha qoladi. Haligi 5 raqami o‘rniga nol yoziladi.

Misol. Quyidagi sonlarni o‘ngacha aniqlikda yozing:

$345 \approx 340$

$335 \approx 340$

Agar sonning tashlangan xona raqami yaxlitlangandan keyingisi 5 bo‘lib, u 5 ning o‘zini ham yana yaxlitlash kerak bo‘lsa va u 5 ortig‘i yoki kami bilan olinganligi ma’lum bo‘lsa, u holda ortig‘i bilan olingan 5 ning oldidagi xona raqamiga 1 qo‘shiladi va 5 o‘rniga nol qo‘yiladi. Kami bilan olingan bo‘lsa, oldidagi xona o‘zgarishsiz qolib 5 o‘rniga nol yoziladi.

Misol. Quyidagi sonlarni 1000 gacha aniqlikda yozing:

1) $83467 \approx 83500 \approx 83000$

2) $83524 \approx 83500 \approx 84000$

Sonlarni yaxlitlagandan keyin hosil bo‘lgan son berilgan sonning taqribiy qiymati hisoblanadi. Taqribiy natijani yozganda aniqlik sonning ohirgi raqamida ko‘rsatiladi: uning ohirgi raqamidagina kichkina xatolik bo‘lib, boshqa hamma raqamlar ishonchli bo‘lishi kerak. Buning uchun ishonchli va ishonchsiz raqamlar tushunchasini kiritamiz.

Taqribiy sonning qaysi xonadagi raqami yarimdan kam xatolikka ega bo‘lsa, u xona va undan yuqori xonalardagi hamma raqamlar ishonchli deyiladi: agar qaysi xona raqamining xatoligi yarimdan ortiq bo‘lsa, u raqam va undan boshlab o‘ng tomondagi hamma raqamlar ishonchsiz raqamlar deyiladi.

Misol. Tomorkaning perimetrini ruletka bilan 7 marta o‘lchaganimizda quyidagi natijalarni berdi:

$-101{,}22\text{м};\ 101{,}35\text{м};\ 100{,}88\text{м};\ 100{,}56\text{м};$

$101{,}2\text{м};\ 99{,}98\text{м};\ 101{,}31\text{м}$

Bularning arifmetik o‘rtasi:

$$\frac{101{,}22\text{м}+101{,}35\text{м}+100{,}88\text{м}+100{,}56\text{м}+101{,}2\text{м}+101{,}18\text{м}+101{,}31\text{м}}{7}=$$

$$=\frac{707{,}7\text{м}}{7}=101{,}1\text{м}\approx 101\text{м}$$

Demak, 101*m* ning bosh raqami bo‘lgan 10 ishonchli, keyingi raqami 1 esa ishonchsizdir. Bu erda gap ishonchli va ishonchsiz raqamlar haqida borayotir, ya’ni tomorqani necha marta o‘lchasak ham bosh raqamlar esa o‘zgarmayotir. Shu sababli 10 ishonchli raqam, undan keyingi ikkita raqam esa ishonchsiz raqamlar bo‘ladi. Masalan, 1 raqamini olib qaraylik. Bu raqamda birmuncha xatolik bor, bu xatolik 1 ga nisbatan 0,5 dan kam bo‘lishi kerak. Ba’zi hollarda ohirgi raqamdagi xatolik 0,5 dan ortib ketsa, bu holda bundan bir xona yuqorigi raqam ham ishonchsiz bo‘ladi.

Taqribiy sonlar ustida amallarni qaraymiz;

1. Qo‘shish. Bir necha taqribiy sonlarni qo‘shganda bu qo‘shiluvchilarning birontasida yo‘q bo‘lgan xonalarga qarab yig‘indi natijasining o‘ng tomonidan yaxlitlash qoidasiga asosan mos tartibda xonalar olib tashlanadi va ularning o‘rniga nollar yoziladi.

Misol: Shirkat xo`jaligining 3700 ga (100 gektargacha aniqlik bilan) eriga paxta, 260 ga (100 gektargacha aniqlik bilan) eriga pichan ekilgan. 58 ga eri turar joydan iborat. Shirkat xo`jaligining umumiy eri qancha?

$$\begin{array}{r} 3700 \\ +\ 260 \\ \underline{58} \\ 4018\approx 4000 \text{ ga.} \end{array}$$

Demak, bu qo‘shiluvchilardan eng ko‘p aniqmas xonaga ega bo‘lgani 3700, boshqalariniki unikidan kam. Shuning uchun natijaning oxirgi ikki xonasini yaxlitlab, nollar bilan almashtiramiz.

2. Ayirish. Taqribiy sonlarni ayirish ham taqribiy sonlarni qo‘shishdek bajariladi. Masalan, shirkat xo‘jaligining 2450 ga eriga bug‘doy ekilgan. Uning 836 gektari bahorda ekilgan, qolgani kuzda ekilgan. Kuzda qancha eriga bug‘doy ekilgan (2450 o‘ngacha aniqlikda olingan)?

$$\begin{array}{r} 2450 \\ -\ \underline{836} \\ 1614\approx 1610\text{(ga)} \end{array}$$

3. Ko‘paytirish. Taqribiy sonlarni ko`paytirganda ko`paytuvchilarning qaysi biri eng kam aniq raqamga ega bo‘lsa , natijada o`shaning raqamlari soni saqlanadi. Natijani aniqrok hisoblash kerak bo‘lsa, hisoblash davridagi natijalarda bir xona ortiq olish mumkin. Lekin oxirgi natijada olingan ko`shimcha xona tashlab yuboriladi.

Misol: Maktab sport zalining bo‘yi 17 m 74 sm, eni esa 9 m 63 sm ga teng. Maktab sport zalining yuzini toping.

Echish: 1774 sm X 963 sm= 1708362(kv.sm)$\approx$170 0000 kv.sm= 170 kv.m.

O‘lchaganda lenta tarang yoki bo`sh bo‘lib, bo`yi va enidagi birlik xonalari ishonchsiz bo‘lishi mumkin. Shuning uchun bo`yidagi 177 raqami ishonchli, enidagi 96 raqami ishonchli deb, natijada ham yaxlitlash yo`li bilan 17 raqamini qoldirib, boshqa raqamlarni tashlab yuboramiz. Agar hisoblash natijasi bir necha amallar bilan kelib chiqadigan bo‘lsa, uni aniqroq hisoblash uchun oraliqdagi amallar natijasida, yuqoridagi ko‘rsatilgan qoidada aytilganidek bitta raqam ortiq olish kerak. Lekin bu raqam natijalarda hisobga olinmaydi. Masalan, yuqoridagi ko‘rsatilgan zalning balandligi 9 m 26 sm bo‘lsa, uning hajmini topish uchun asosining yuzi 1774 sm X 963 sm $\approx$1710000 kv.sm ni topamiz: bunda bitta raqamni, ya’ni 1 ni qo‘shimcha qilib oldik. Endi uni balandligiga ko‘paytiramiz. U uch raqamli-yu, lekin bir qo‘shimcha raqamni hisobga olmaymiz.

1710000kv.sm X 926sm=1583460000 kub sm$\approx$1600 000 000 kub sm=1600 kub m.

4. Bo‘lish. Taqribiy sonlarni bo‘lish amali taqribiy sonlarni ko‘paytirishdek bajariladi. Bunda bo‘luvchi va bo‘linuvchilarning qaysi birida aniq raqam soni kam bo‘lsa, bo‘linmada shuncha aniq raqam soni saqlanadi.

Masalan, aytaylik bo‘luvchi va bo‘linuvchilardan birining olti raqami, ikkinchisining uch raqami aniq bo‘lsa, bo‘linma uchta aniq raqamli qilib olinadi. Shuning uchun ham bo‘linmadagi uch raqamdan keyingi qoldiq bo‘luvchining yarmidan ortiq bo‘lsa, u uchinchi raqamga bir qo‘shish kerak, agar yarmidan kam bo‘lsa, uchta raqamni o‘zgarishsiz qoldirish kerak.

Misol: $234564 : 310 \approx 757$

```
_234564 | 310
 2170   |------
        | 756,65
 _1756
  1550
  _2064
   1860
   _2040
    1860
    _1800
     1550
      250
```

Masala ishlash vaqtida bo‘lishda ham ko‘paytirishga o‘xshash aniqroq hisoblash maqsadida vaqtincha bo‘linmada bir raqam qo‘shimcha olish kerak. (Qo‘shimcha olingan raqam oxirgi natijada e’tiborga olinmaydi). Taqribiy sonlarni ko‘paytirish va bo‘lishda komponentlarning biri aniq son, biri taqribiy son bo‘lsa, natija taqribiy sonlarning aniq raqamiga qarab aniqlanadi. Aniq sonning raqamiga qaralmaydi. Taqribiy sonlarni ko‘paytirish va bo‘lishda komponentlardan birining bosh raqamlari 1,2,3; natijaning bosh raqami 9,8,7 bo‘lib kelsa, natijani yuqoridagi qoidadan, bir raqam kam olib hisoblash kerak. Shu bilan birga ko‘p raqamli sonni kam raqamli songa bo‘lish uchun o‘sha bo‘luvchining aniq raqami qancha bo‘lsa, bo‘linuvchini ham shuncha raqamgacha bo‘lib, qolganlariga nollar qo‘yamiz. Bunda qancha nol qo`yamiz, degan savol tug‘iladi. Ma’lumki, bo‘linmaning raqamlari soni bo‘linuvchi bilan bo‘luvchining raqamlari sonlarining ayirmasiga teng yoki undan bitta ortiq bo‘ladi. Qaysi vaqtda teng bo‘ladi? Qaysi vaqtda bitta ortiq bo‘ladi?

Agar bo‘lishni boshlashda bo‘luvchi qancha raqamli bo‘lsa, bo‘linuvchining ham shuncha raqami unga etarli bo‘lmasa, unda bo‘linmaning raqam soni bo‘linuvchi bilan bo‘luvchining raqam sonlarining ayirmasidan bitta ortiq bo‘ladi. Agar o‘sha birinchi bo‘lishda bo‘luvchining raqami soniga mos (teng) bo‘lgan bo‘linuvchining bosh raqami soni etmasa, tag‘in bir raqam qo‘shiladigan bo‘lsa, u holda bo‘linmaning raqami soni bo‘linuvi bilan bo‘luvchining raqami sonlarining ayirmasiga teng bo‘ladi.

2. Taqribiy sonlarning absolyut va nisbiy

xatolari.

Aniq son bilan taqribiy sonning farqini absolyut xato deyiladi.

Misol: $90{,}3 \approx 90;$ bunda 90,3-aniq son:

90 - taqribiy son, 90,3 - 90 = 0,3 - absolyut xato.

Absolyut xatoning aniq songa bo‘lgan nisbatini nisbiy xato deyiladi. Berilgan misolda nisbiy xato $\frac{0{,}3}{90{,}3}$ ga teng.

Absolyut va nisbiy xatolar quyidagi xossalarga ega.

1-xossa. Bir necha taqribiy sonlar yig‘indisining absolyut xatosi qo‘shiluvchilar absolyut xatolarining yig‘indisiga teng.

2-xossa. Ikki taqribiy son ayirmasining absolyut xatosi bu sonlarning ikkalasi ham ortig‘i bilan yoki ikkalasi ham kami bilan olingan bo‘lsa, shu taqribiy sonlar absolyut xatolari ayirmasiga teng bo‘ladi.

3-xossa. Biri kami bilan, ikkinchisi ortig‘i bilan olingan ikkita taqribiy son ayirmasining absolyut xatosi kamayuvchi va ayriluvchining absolyut xatolari yig‘indisiga teng.

4-xossa. Ikki taqribiy son ko‘paytmasining absolyut xatosi har qaysi son aniq qiymatini ikkinchi sonning absolyut xatosiga ko‘paytirish natijalarining va ikkala son absolyut xatolari ko‘paytmasining yig‘indisiga teng.

5-xossa. Taqribiy sonni biror aniq songa bo‘lishdan chiqqan bo‘linmaning absolyut xatosi bo‘linuvchining absolyut xatosini bo‘luvchiga bo‘lishdan chiqqan bo‘linmaga teng.

6-xossa. Taqribiy sonlarni bo‘lishda bo‘linmaning eng katta nisbiy xatosi bo‘linuvchi va bo‘luvchining eng katta nisbiy xatolari yig‘indisiga teng.

Xossalardan bittasini isbotini keltiramiz, (boshqa xossalarni isbotini talabalarni mustaqil bajarishiga qoldiramiz).

Ikkinchi xossani isboti:

A va B lar taqribiy sonlar:

a va b lar mos ravishda ularning taqribiy qiymatlari, α va β lar mos ravishda taqribiy sonlarning absolyut xatolari bo‘lsin. Agar A - kamayuvchi, B - ayriluvchi (ikkalasi ham ortig‘i yoki kami bilan olingan) Ikkinchi xossa shartiga ko‘ra

$A-B$ ayirmaning absolyut xatosi, $\alpha-\beta$ ga (ortig‘i bilan olinganda) yoki $\beta-\alpha$ ga teng (kami bilan olinganda) bo‘lishini isbotlash kerak.

I - hol. A va B ortig‘i bilan olingan taqribiy sonlar bo‘lsin, u holda;

$A = a+\alpha$

$B = b+\beta$

Qo‘shish va ayirish xossalariga ko‘ra:

$$A-B=(a+\alpha)-(b+\beta)=a+\alpha-b-\beta=(a-b)+(\alpha-\beta)$$

II-hol. A va B kami bilan olingan taqribiy sonlar bo‘lsin, u holda

$A = a-\alpha$

$B = b-\beta$

qo‘shish va ayirish xossalariga ko‘ra:

$$A-B=(a-\alpha)-(b-\beta)=a-\alpha-b+\beta=(a-b)+(\beta-\alpha);$$

3.6.2. Mikrokalkulyator yordamida hisoblash

Insonniyat juda qadim zamondan buyon o‘z mehnatlarini yengillashtirish imkonini beruvchi mashina va mexanizmlar yaratib kelganlar. Mashinalar bug‘doy, paxta, piyoz, sholi kabilarni ekish, o‘rish, terish, yanchish kabi ishlarni bajarib kishilarni mehnatlarini osonlashtirilishi uchun hizmat qiladi. Aqliy mehnat murakkab va og‘ir bo‘lib, uni yengillashtirish hisob mashinalari zimmasiga yuklatiladi. 1951 yilda birinchi EXM ishga tushdi.

Mashina 5-6 xonali sonlar ustida sekundiga 50 amal bajarar edi. Bu insonni amal bajarish tezligidan 1500 barobar ortiqdir. Zamonaviy EXM lar hisoblashlarni yuqori malakali matematiklardan 100 millyard marta tez bajaradi. Xatto hisob mashinalari otilgan raketa traektoriyasini hisoblab, uchish yo`nalishini to‘g‘irlab turish imkoniyatiga ega.

Biz boshlangich sinf o‘quvchilarini kundalik xayotimizning turli sohalarida ishlatayotgan mikroelektronika elementlaridan yasalgan juda kichik hisob mashinalari bilan tanishtiramiz. O‘quvchi qo‘liga birinchi marta mikrokalkulyatorni olar ekan oldin uni tokka ulab ajratish, raqamlarni kiritish va ekranni tozalash kabi elementar ko‘nikmaga ega bo‘lishi zarur. Bunda albatta bitta kalkulyatorni tugmachalari ifodalangan plakat yoki diapozitiv bo‘lsa tushuntirish ishlari ko‘ngildagidek o‘tadi.

O‘quvchilarni maktablar uchun chiqarilgan MKSH-2 mikrokalkulyatori bilan tanishtirish maqsadga muvofiq, chunki bu kalkulyator ko‘pchilik maktablarda mavjuddir. Hisoblashlarni bajarganda oraliq natijalarni daftarga yozib 1-2 ta misolni o‘quvchilar bilan birga doskada yechib borish maqsadga muvofik.

Hisoblashni bajarishda etarli malakaga ega bo‘lguncha oldin dasturini daftarga yozib, so‘ng o‘sha bo‘yicha ishlash, mashinada ishlashga o‘rganish vaqtini tezlashtiradi hamda o‘quvchilarda izchil algoritmlash bajaradigan ixtiyoriy harakatini rejalash ko‘nikmasini shakllantiradi.

Sinf bilan birga quyidagi ko‘rinishdagi misollarni yechish tavsiya etiladi.

5+4=9 4+17=21

Misol natijasi barcha o‘quvchida bir xil chiqqach mustaqil ishga quyidagilar tavsiya qilinadi.

1. Ifodalarni hisoblang natijani javobga taqqoslang.

a) 6,35 -3,5+18,43

Dastur. 6,35 - 3,5 + 18,43=

Javob: 21,28

b) 32792 - 712:401+405

Dastur. 32792 - 712 : 401+405=

Javob: 485

v) 6848 + 128+288

Dastur. 6848 +128+288=

Javob: 7264

g) $\frac{0,873+4,127}{32}$

Dastur (0,873 + 4,1237) : 32=

Javob: 0,15625

Bu misollarni yechishda hisoblashlarni uzluksiz bajarishni o‘quvchi xis qiladi. Ya’ni ikkinchi amal klavishi bosilganda ikkinchi amaldagi natija chiqishni kuzatadi. Buni o‘quvchilarga quyidagi misolda tushuntirish mumkin.

5+4 misolida ko‘raylik.

5+4-, 5+4+ , 5+4: , 5+4x larni bajarganda natija bir xil chiqadi. Ya’ni birinchi amal kiritilgandan keyin amal = vazifasini o‘tashi kuzatiladi.

Quyidagi misol yuqoridagi ko‘rinishni umumlashtiradi.

5+4 - 3x2

Dastur. a) 5+4=-3=x2=

javob: 12

Dastur. b) 5+4-3x2=

javob: 12.

Ko‘rinib turibdiki har ikkala holda ham javob bir xil. Uzluksiz hisoblash malakasini egallash uchun sonlarni konstruksiyalash o‘yinini taklif qilamiz. Bunda mikrokalkulyatorda hisoblab berilgan boshlang‘ich songa ixtiyoriy sonlarni qo‘shib, ayirib yoki bo‘lib, ko‘paytirib oxirgi son topiladi.

Masalan: Qo‘shish va ayirish amallari yordamida 19 sonidan 125 sonini hosil qiling. 125 sonini 2,3,4 yurishda hosil qilib bo‘ladimi?
Mikrokalkulyatorlarga 8 ta raqamli son sig‘ib, shundan ortiqchasi yaxlitlanadi.
Sodda misollarni yechishda tubandagi jadvaldan foydalaning.

ifoda	Dastur

Mikrokalkulyatorlarda hisoblash malakasini oshirish yo‘llaridan bir unda qiziqarli misollarni birgalikda echishdir. Buning uchun "Son o‘yla" o‘yinini taklif qilishimiz mumkin. Masalan, o‘qituvchi: Ikki xonali sonni o‘ylang. Uni mashinaga kiriting. 19 ga ko‘paytiring, natijaga 43 ni qo‘shing yana 3 ga ko‘paytiring. Natijadan 129 ni ayiring va 57 ga bo‘ling. Ekranda o‘ylagan soningizni o‘qing. Agar barcha amallar to‘g‘ri bajarilsa, ekranda har bir o‘quvchini o‘ylagan soni chiqadi.

To‘rt arifmetik amalni bajarish malakasini hosil qilish uchun tubandagi misollarni yechish tavsiya qilanadi.

1.Natijani tekshiring.

175+455=	195 x 285=	121314:112=
675-792=	675 x 641=	194175:155=
97566612-8788=		64164260+1275=
17181620-253040=		15161718+252627=

2.Amallarni bajaring.

a) 17+18=	b) 689-17=	v) 9x8=	g)9999:11=
8720+17541=	751-579=	17x7=	1718:17=

3. $A=1867-b$ formulada A ni qiymatlarini toping

$b=$:	642,	1785,	941,	1767
A:				

4. Amallarni bajaring.

a) 6,75+7589,42 b) 72,2-44,732
27,1 - 14,789
54,003 - 16,49
15,14 - 14,379

O‘z- o‘zini nazorat qilish uchun savollar

1. Sonlarni yaxlitlashni tushuntiring.
2. Taqribiy sonlar ustida amallar bajarishni misollar yordamida tushuntiring.
3. Taqribiy sonlarning absolut va nisbiy xatolariga ta’rif bering.
4. Absolyut va nisbiy xatolar xossalarini ayting .
5. Mikrokalkulyator tuzilishi va ishlash jarayoni to‘g‘risida gapirib bering.
6. Mikrokalkulyator yordamida misollar yechib ko‘rsating.

3.7. KOMPLEKS SONLAR.

3.7.1. Kompleks son

Ixtiyoriy ko‘rinishdagi algebraik tenglamalarni yechishda haqiqiy sonlar to‘plami yetarli emas. Haqiqatan ham, sonlar to‘plamida diskriminanti manfiy bo‘lgan kvadrat tenglama yechimga ega emas.

Masalan: $x^2+1=0$

Bu qiyinchilikdan qutulish maqsadida kompleks sonlar to‘plami kiritiladi. Bu to‘plamga haqiqiy sonlar to‘plami to‘plam osti sifatida kiradi. Kompleks sonlar to‘plami C bilan belgilanadi.

$D<0$; $x^2+1=0$ tenglama yechimi kompleks sonlar to‘plamida bor deb, ya’ni $i=\sqrt{-1}$ bilan belgilanuvchi mavhum birlik kiritamiz. Bu mavhum birlik yuqoridagi tenglamani yechimi bo‘ladi, ya’ni $i^2+1=0$; $i^2=-1$. Shunday qilib, biz haqiqiy sonlar to‘plamini *bi* mavhum sonlar bilan to‘ldiramiz. Haqiqiy *a* sonini mavhum *bi* soniga qo‘shishdan $a+bi$ kompleks sonini hosil qilamiz.

Ta’rif: $a+bi$ ifodaga kompleks son deyiladi. (Bunda *a*, *b* haqiqiy sonlar, *i* - esa mavhum birlik, *a* - kompleks sonining haqiqiy, *bi* - esa mavhum qismlari. Agar a_1+b_1i va a_2+b_2i kompleks sonlarida $a_1=a_2$; $b_1=b_2$ bo‘lsa, ular teng deyiladi. Odatda kompleks son bitta *z* harf bilan belgilanadi.

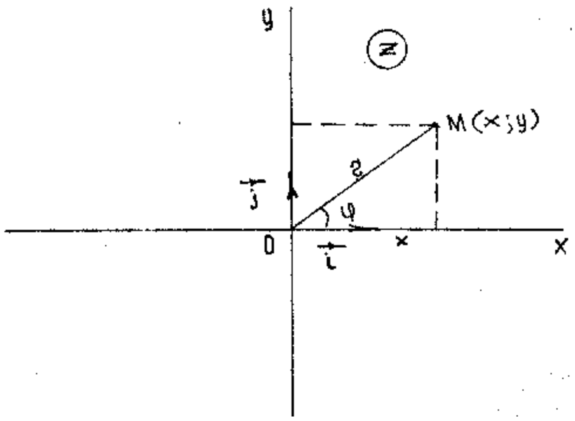
$z=a+bi$ kompleks sonni haqiqiy va mavhum qismi nolga teng bo‘lsa, ya’ni $a=o$ va $b=o$ bo‘lsa u nolga teng bo‘ladi.

Mavhum qismlar bilan farq qiluvchi $z=a+bi$ va $z=a-bi$ kompleks sonlar qo‘shma deyiladi. Haqiqiy va mavhum qismlarning ishoralari bilan farq qiluvchi ikkita $z_1=a+bi$ va $z_1=-a-bi$ kompleks sonlar qarama-qarshi kompleks sonlar deyiladi.

1. Kompleks sonning geometrik tasviri.

$R=\{0;\vec{i};\vec{j}\}$ koordinatalar sistemasida abssissalar o‘qiga $z=a+bi$ kompleks sonning haqiqiy qismi *a* ni, ordinatalar o‘qiga esa mavhum qismini koeffitsienti *b* ni joylashtirsak, tekislikda *(a;b)* nuqtaga ega bo‘lamiz. Shu nuqta $a+bi$ kompleks sonni geometrik tasviri deb qabul qilinadi. Odatda bu *z* nuqta deyiladi. Shunday qilib, tekislikning har bir nuqtasi bitta kompleks sonni ifodalaydi. Boshqacha aytganda, tekislik nuqtalari bilan kompleks sonlar to‘plami o‘rtasida o‘zaro bir qiymatli moslik o‘rnatiladi. *Ox* o‘qida kompleks sonni haqiqiy qismi joylashgani uchun haqiqiy o‘q, ordinatalari o‘qida mavhum qismga tegishli son joylashgani uchun mavhum o‘q, *xOy* tekisligini o‘zi esa kompleks tekislik deyiladi.

Kompleks tekislik *z* bilan belgilanadi. (39-chizma)



2. Kompleks sonning trigonometrik shakli

z=x+yi ko‘rinishdagi son algebraik ko‘rinishdagi kompleks son deyiladi. Kompleks sonni trigonometrik shaklini hosil qilish uchun 39–chizmadan foydalanamiz.

Shakldan:

$$x=r\cos\varphi;\ y=r\sin\varphi \tag{1}$$

bunda *r* - kompleks soni *z* - sonini tasvirlagan vektorning uzunligini ifodalaydi va unga *z* sonning moduli, φ - burchakni esa *z* ning argumenti deyiladi.

$$(1)\Rightarrow |z| = |x+yi| = r = \sqrt{x^2+y^2} \tag{2}$$

Argument bir qiymatli aniqlanmay, balki $2\pi\kappa$ qo‘shiluvchi qadar aniqlikda aniqlanadi, bunda k - butun son.

Argumentning barcha qiymatlari orasidan $0 \le \varphi \le 2\pi\kappa$ tengsizliklarni qanoatlantiruvchi bittasini tanlaymiz. Bu qiymat bosh qiymat deyiladi va tubandagicha belgilanadi. $\varphi = \arg z$

(1) tengliklarni hisobga olib, kompleks sonni quyidagicha ifodalash mumkin:

$$(1)\Rightarrow z = x + yi \Rightarrow r(\cos\varphi + i\sin\varphi) \tag{3}$$

bu erda $r = \sqrt{x^2+y^2}$; $\quad \varphi = \arg z = \begin{cases} arctg\dfrac{y}{x},\ agar\ \ x>0; y>0\ \ \text{b}o\grave{}lsa \\ \pi + arctg\dfrac{y}{x},\ \text{a}gar\ \ x<0\ \ \text{b}o\grave{}lsa \\ 2\pi + arctg\dfrac{y}{x},\ \text{a}gar\ \ x>0, y<0\ \ \text{b}o\grave{}lsa \end{cases}$

(3) ga kompleks sonning trigonometrik shakli deyiladi.

1-Misol. Kompleks sonning moduli 3 ga argumenti $\varphi = \dfrac{\pi}{4}$ ga teng bo‘lsa, uning haqiqiy va mavhum qismlarini toping.

(1) formuladan

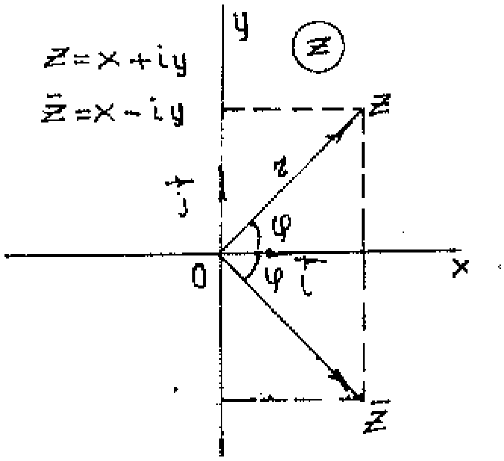
$$x = r\cos\varphi = 3\cos\frac{\pi}{4} = 3\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

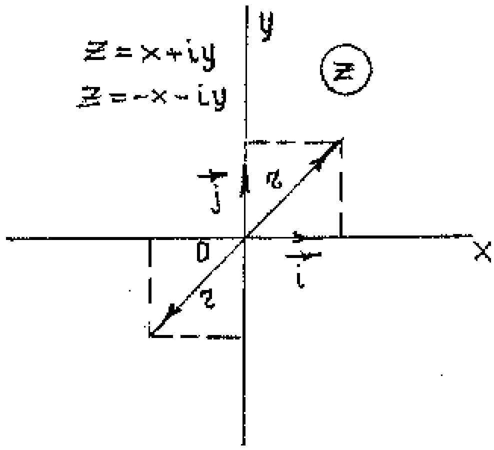
$$y = r\sin\varphi = 3\sin\frac{\pi}{4} = 3\frac{\sqrt{2}}{2}$$

2-Misol. *z=i* kompleks sonning argumentini toping. *x=0; y=1; r=1;* $\varphi = \dfrac{\pi}{2}$

3-Misol. Qo‘shma va qarama-qarshi kompleks sonlarni chizmada tasvirlang va izohlang.

Shakldan ko‘rinadiki, qo‘shma kompleks sonlar bir xil modulga ega va absolyut qiymatlari bo‘yicha teng argumentlarga ega bo‘lib, haqiqiy o‘qqa simmetrik bo‘lgan nuqtalar bilan tasvirlanadi, qarama-qarshi kompleks sonlar koordinatalar boshiga nisbatan simmetrik nuqtalar bilan tasvirlanadi (40-chizma).





40-chizma.

4-Misol. *z=1-i* kompleks sonini trigonometrik shaklda ifodalang

$$x = 1; y = -1; r = \sqrt{2}$$

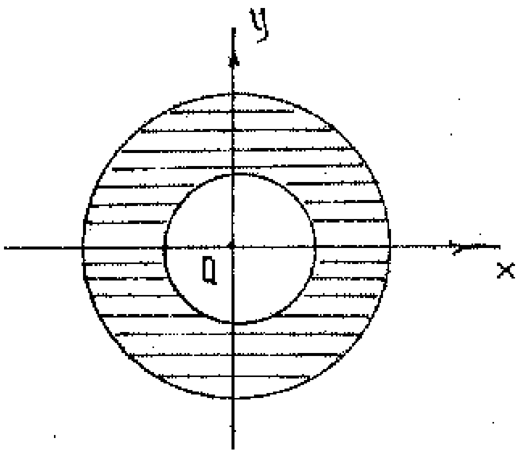
$$tg\varphi = -1; \varphi = 2\pi - arctg(1) = 2\pi - \frac{\pi}{4} = \frac{7\pi}{4}$$

Shunday qilib, $z = \sqrt{2}(\cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4})$.

Endi kompleks sonlar to‘plamining ba’zi bir to‘plam ostilarini ifodalovchi munosabatlarni geometrik nuqtai nazardan ko‘rib o‘taylik.

a) $|z| = 2$ bu munosabat kompleks tekisligida markazi koordinata boshida radiusi 2 ga teng bo‘lgan aylananing nuqtalarini ifodalaydi.

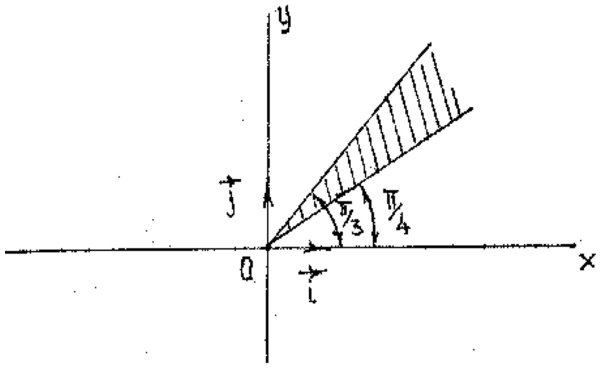
b) $2 \le |z| \le 3$ munosabat esa markazi koordinatalar boshida joylashib ichki radiusi 2 va 3 ga teng bo‘lgan konsentrik joylashgan aylanalar bilan chegaralangan xalqa ichidagi nuqtalar to‘plamini ifodalaydi (41 - chizma).



41-chizma.

v) $arctgz = \frac{\pi}{6}$ munosabatga kompleks tekisligida koordinata boshidan 30^0 burchak ostida chiquvchi nurdagi nuqtalar to‘plami mos keladi.

g) $\frac{\pi}{4} \le \arg z \le \frac{\pi}{3}$ munosabatga esa kompleks tekisligidagi koordinata boshidan 45^0 va 60^0 burchak ostida chiquvchi nurlar bilan chegaralangan nuqtalar to‘plami hamda nurlar ustida yotuvchi nuqtalar to‘plami kiradi (42 - chizma).



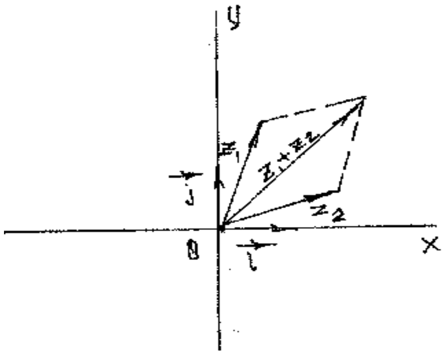
42-chizma

O‘z- o‘zini nazorat qilish uchun savollar

1. Kompleks songa ta’rif bering.
2. Kompleks soni geometrik tasvilang.
3. Kompleks sonni trigonometrik ko‘rinishga keltiring (misollar yordamida ko‘rsating).

3.7.2. KOMPLEKS SONLAR USTIDA AMALLAR.

1) Qo‘shish. $z_1 = a_1 + b_1 i$ va $z_2 = a_2 + b_2 i$ kompleks sonlarning yig‘indisi deb, $z_1 + z_1 = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i$ tenglik bilan aniqlanuvchi songa aytiladi. Kompleks sonlarni qo‘shish vektorlarni qo‘shish formulasidan vektorlar bilan ifodalangan kompleks sonlarni qo‘shish qoidasi bo‘yicha bajarilishi ko‘rinadi. (43 - chizma)



43-chizma

Misol: $z_1=2+5i$ va $z_2=-1-3i$ kompleks sonlarni yig‘indisini toping.

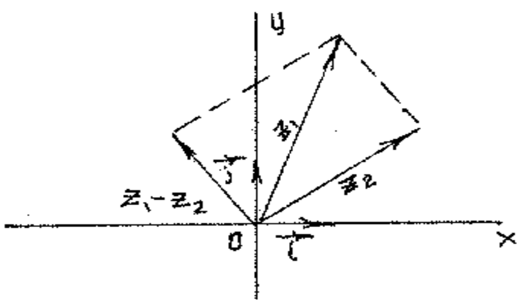
$$z_1+z_2=(2+5i)+(-1-3i)=(2-1)+i(5-3)=1+2i$$

2) **Ayirish.**_ $z_1=a_1+b_1i$ va $z_2=a_2+b_2i$ kompleks sonlarni ayirmasi deb, shunday kompleks songa aytiladiki, unga ayriluvchi kompleks sonni qo‘shganda kamayuvchi kompleks son ho-sil bo‘ladi.

$$z_1- z_2=(a_1+b_1i)-(a_2+b_2i)=(a_1-a_2)+i(b_1-b_2)$$

Ikkita kompleks son ayirmasini moduli shu sonlarni kompleks sonlar tekisligida tasvirlovchi nuqtalar orasidagi masofaga teng (44-chizma).

Misol: $z_1=6+5i$ va $z_2=4-2i$ kompleks sonlarni ayirmasini toping. : $z_1=6+5i$ va $z_2=4-2i$; $z_1-z_2=(6+5i)-(4-2i)=(6-4)+i(5+2)=2+7i$



44-чизма

$$|z_1 - z_2| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

3) Kompleks sonlarni ko‘paytirish. $z_1=a_1+b_1i$ *va* $z_2=a_2+b_2i$ kompleks sonlarning ko‘paytmasi deb, $i^2=-1$ ekanligini hisobga olgan holda kompleks sonlarni ko‘paytmasi ikkita ko‘phad ko‘paytmasi shaklida ko‘paytirishdan hosil bo‘lgan kompleks songa aytiladi.

$$z_1 \cdot z_2 = a_1 \cdot a_2 - b_1 \cdot b_2 + (a_1 b_2 - a_2 b_1)i$$

z_1 va z_2 kompleks sonlar trigonometrik ko‘rinishda berilgan bo‘lsa, ya’ni $z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$ va $z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$ u holda ularning ko‘paytmasi $z_1 \cdot z_1 = r_1 \cdot r_2(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2))$ bo‘ladi.

Misol: $z_1 = 2(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3})$ va $z_2 = \sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6})$ kompleks sonlarni ko‘paytmasini toping.

Yechish.

$$z_1 \cdot z_2 = 2\sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6}\right)\right] = 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right) = 2\sqrt{2}i$$

4) Kompleks sonlarni bo‘lish. Kompleks sonlarni bo‘lish amali ko‘paytirish amaliga teskari amal sifatida aniqlanadi. Boshqacha aytganda $z \cdot z_2 = z_1$ bo‘lsa, z soni $z_1 = x_1 + i\,y_1$ uning $z_2 = x_2 + i\,y_2$ kompleks songa bo‘linmasi deyiladi.

$z = \dfrac{z_1}{z_2}$ bo‘linmasini topish uchun kasrning surat va maxrajini z_2 ning qo‘shmasi $\overline{z}_2$ ga ko‘paytiramiz.

$$z = \frac{z_1 \cdot \bar{z}_2}{z_2 \cdot \bar{z}_2} \quad \text{bundan} \quad z = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_{21}^2 + y_2^2} + i\frac{x_2y_1 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2};$$

Agar kompleks sonlar trigonometrik ko‘rinishda berilgan bo‘lsa, ya’ni $z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$ va $z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$ u holda

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_2)}{r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)} = \frac{r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_2)\cdot(\cos\varphi_2 - i\sin\varphi_2)}{r_2(\cos^2\varphi_2 + \sin^2\varphi_2)} =$$

$$= \frac{r_1}{r_2}[(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)]$$

Shunday qilib, $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{r_1}{r_2}[(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)]$ ya’ni kompleks sonlarni bo‘lishda bo‘linuvchining moduli bo‘luvchining moduliga bo‘linadi, argumentlari esa ayriladi.

Misol: $z_1 = \sqrt{3} + i$ **ni** $z_2 = -3 - 3i$ **ga bo‘ling.**

a) algebraik; b) trigonometrik ko‘rinishda bo‘ling.

Yechish:

a) $$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\sqrt{3} + i}{-3 - 3i} = \frac{(\sqrt{3} + i)\cdot(-3 + 3i)}{(-3 - 3i)\cdot(-3 + 3i)} = \frac{-3\sqrt{3} - 3 + (\sqrt{3} - 3)i}{9 + 9} =$$

$$= \frac{-3[\sqrt{3} + 1(\sqrt{3} - 1)i]}{18} = \frac{-\sqrt{3} - 1}{6} + \frac{\sqrt{3} - 1}{6}i$$

b) $z_1 = \sqrt{3} + i = 2(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6})$; $\quad z_2 = -3 - 3i = 3\sqrt{2}(\cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4})$;

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{2\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)}{3\sqrt{2}(\cos\frac{5\pi}{4}+i\sin\frac{5\pi}{4})}=\frac{2}{3\sqrt{2}}[\cos(\frac{\pi}{6}-\frac{5\pi}{4})+i\sin(\frac{\pi}{6}-\frac{5\pi}{4})]=$$

$$=\frac{2}{3\sqrt{2}}[\cos(-\frac{13\pi}{12})+i\sin(-\frac{13\pi}{12})]=\frac{2}{3\sqrt{2}}(\cos\frac{13\pi}{12}-i\sin\frac{13\pi}{12})=$$

$$=\frac{2}{3\sqrt{2}}[\cos(\pi+\frac{\pi}{12})-i\sin(\pi+\frac{\pi}{12})]=\frac{2}{3\sqrt{2}}(-\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12})=$$

$$=\frac{2}{3\sqrt{2}}\cdot[-\cos(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4})+i\sin(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4})]=$$

$$\frac{2}{3\sqrt{2}}\cdot[(-\cos\frac{\pi}{3}\cdot\cos\frac{\pi}{4}-\sin\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{4})+i(\sin\frac{\pi}{3}\cdot\cos\frac{\pi}{4}-\cos\frac{\pi}{3}\cdot\sin\frac{\pi}{4})]=\frac{2}{3\sqrt{2}}[(-\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}-$$

$$-\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2})+i(\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2})]=-\frac{\sqrt{3}+1}{6}+i\frac{\sqrt{3}-1}{6};$$

5) Darajaga ko‘tarish. Kompleks sonlarni ko‘paytirish qoidasidan darajaga ko‘tarish qoidasi kelib chiqadi. $z=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$ kompleks son uchun $n-$natural bo‘lganda $z^n=r^n(\cos n\varphi+i\sin n\varphi)$. Bu formulani Muavr formulasi deyiladi. Muavr formulasini tadbiq qilishda $i^{4\kappa}=1,\ i^{4\kappa+1}=i,\ i^{4\kappa+2}=-1,\ i^{4\kappa+3}=-i$ bo‘lishini e’tiborga olishimiz kerak.

Misol: $(-1+i)^5$ ni hisoblang.

$$z=-1+i=\sqrt{2}(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4})$$

$$z^5=(-1+i)^5=(\sqrt{2})^5\cdot\left(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}\right)^5=4\sqrt{2}\left(\cos 5\cdot\frac{3\pi}{4}+i\sin 5\cdot\frac{3\pi}{4}\right)=$$

$$=4\sqrt{2}(\cos 675^0+i\sin 675^0)=4\sqrt{2}[\cos(720^0-45^0)+i\sin(720^0-45^0)]=$$

$$=4\sqrt{2}(\cos 45^0-i\sin 45^0)=4\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=4-4i=4(1-i);$$

6) Kompleks sondan ildiz chiqarish. Ildiz chiqarish amali darajaga ko‘tarish amaliga teskari amal. Kompleks sonning n – darajali ildiz $\sqrt[n]{z}$ deb, shunday z^* - kompleks songa aytiladiki, z^* ning n – darajasi z soniga tengdir, ya’ni $(z^*)^n=z$

Aytaylik, $z=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$ va $z^*=\rho(\cos\theta+i\sin\theta)$ bo‘lsin.

Muavr formulasiga asosan $r(\cos\varphi+i\sin\varphi)=\rho^n(\cos n\theta+i\sin n\theta)$ bundan $r=\rho^n, n\theta=\varphi+2\pi\kappa$ ρ va θ ni topamiz.

Bu erda κ - istalgan butun son, $\sqrt[n]{r}$ - arifmetik ildiz. Demak, $\sqrt[n]{r(\cos\varphi+i\sin\varphi)}=\sqrt[n]{r}(\cos\frac{\varphi+2\pi\kappa}{n}+i\sin\frac{\varphi+2\pi\kappa}{n})$; bu erda $\kappa=0,1..n-1$

Misol: $\sqrt[5]{1}$ ning ildizlarini toping.

Yechish: sonni trigonometrik ko‘rinishda yozamiz. $z=1$ bo‘lib, $z=1=\cos 0+i\sin 0$ bo‘ladi.

$$\sqrt[5]{1}=\sqrt[5]{\cos 0+i\sin 0}=\cos\frac{2\pi\kappa}{5}+i\sin\frac{2\pi\kappa}{5}.$$

$$\kappa=0;\ z_1=\cos 0+i\sin 0=1$$

$$\kappa=1;\ z_2=\cos\frac{2\pi}{5}+i\sin\frac{2\pi}{5}=\cos 72^0+i\sin 72^0=0{,}309+0{,}951i$$

$$\kappa=2;\ z_3=\cos\frac{4\pi}{5}+i\sin\frac{4\pi}{5}=\cos 144^0+i\sin 144^0=-0{,}809+0{,}587i$$

$$k_3=3;\ z_4=\cos\frac{6\pi}{5}+i\sin\frac{6\pi}{5}=\cos 216^0+i\sin 216^0=-0{,}809-0{,}587i$$

$$\kappa=4;\ z_5=\cos\frac{8\pi}{5}+i\sin\frac{8\pi}{5}=\cos 288^0+i\sin 288^0=-0{,}309+0{,}951i$$

O‘z- o‘zini nazorat qilish uchun savollar

1. Kompleks sonlar ustida amallar bajarishni misollar yordamida tushuntiring.
2. Kompleks sonni darajaga ko‘tarish va ildiz chiqarish formulalarini keltirib chiqaring.

IV– BOB. FUNKSIYA, HOSILA, INTEGRAL.

4.1. Funksiya tushunchasi. Sonli funksiya. Funksiyaning berilish usullari.

4.1.1. Funksiya

Ma’lumki, ixtiyoriy masalaning javobi masalada berilganlarga bog`liq. Masalan,”Bitta daftar va bitta kitobga 3200 so`m pul to`landi. Daftar 200 so`m turadi. Kitobga necha so`m pul to`langan?”. Masala javobi kitob 3000 so`m turadi. Agar bu masalada daftarni bahosini 300 desak, u holda masala javobi 2900 so`m bo`ladi.

Bundan esa kitobning bahosi daftar bahosining son qiymatiga mos ravishda o`zgarishi ko`rinadi. Agar daftar bahosini x bilan, kitob bahosini y bilan belgilasak x+y=3200 tengligi bajariladi. Bu tenglikdan y ni x orqali ifodalasak y=3200-x ga ega bo`lamiz. Bunda x va y lar faqat natural sonlarni qabul qiladi (manfiy va kasr sonlarni qabul qilmaydi). x va y lar orasidagi moslik jadval ko`rinishida quyidagicha ifodalanadi.

x	50	100	150	200	250	300
y	3150	3100	3050	3000	2950	2900

Bu jadval $X=\{50;100;150;200;250;300\}$ to`plamni R haqiqiy sonlar to`plamiga akslantiradi. Bu akslantirishga aniqlanish sohasi X to`plamdan iborat sonli funktsiya deyiladi. Funksiyaga quyidagicha ta`rif ham berish mumkin.

Ta'rif. Agar biror f qonunga ko‘ra A to‘plamning har bir x elementiga B to‘plamning yagona y elementi mos kelsa, u holda A to‘plamda $f(x)$ funksiya berilgan deyiladi va $y=f(x), \quad x\in A$ ko‘rinishda belgilanadi, bunda x funksiyani argumenti, y esa funksiya qiymati deyiladi. A to‘plam funksiyani aniqlanish sohasi, B to‘plam esa funksiyaning qiymatlar sohasi deyiladi. Funksiyalarni belgilashda faqat *y=f(x)* harfidan emas, balki boshqa harflardan ham foydalanish mumkin.

MASALAN: ***Y=Y(X), Y=G(X) , Y=φ(X), Y=F(X)*** **VA BOSHQALAR. AGAR YUQORIDAGI FUNKSIYA TA'RIFIDA A VA B TO‘PLAMLAR A⊂R, B⊂R BO‘LSA, FUNKSIYA SONLI FUNKSIYA DEYILADI. BIZ SONLI FUNKSIYALAR BILAN ISH KO‘RAMIZ VA UNI BUNDAN KEYIN QISQACHA FUNKSIYA DEB ISHLATAMIZ.**

Funksiyaning berilish usuli.

AGAR A VA B TO‘PLAMLAR HAMDA ULARNING FUNKSIONAL BOG‘LIQ QONUNI BERILGAN BO‘LSA, FUNKSIYA BERILGAN HISOBLANADI. FUNKSIYA ASOSAN QUYIDAGI USULLARDA BERILADI:

a) Analitik usul. Bu usulda o‘zgaruvchilar orasidagi bog‘liqlik formulalar yordamida beriladi.

MISOL. **$Y=(1-X^2)^{1/2}$ FUNKSIYA; ANIQLANISH SOHASI [-1;1] KESMADA, QIYMATLAR TO‘PLAMI [0;1] KESMADA BO‘LGAN FUNKSIYANI ANIQLAYDI.**

AYRIM HOLLARDA FUNKSIYA FUNKSIYANING ANIQLANISH SOHASIDAGI ORALIQLARGA QARAB TURLI FORMULALARDA BERILISHI MUMKIN.

MASALAN:

$$y=\begin{cases} x^3 & x<0 \\ x+3 & x\geq 0 \end{cases}$$

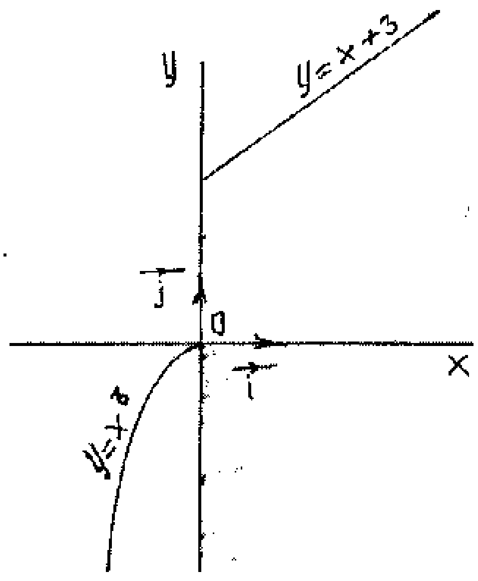
(45-chizma)

b) Jadval usulida:

Funksiya jadval usulida berilganda funksiya argumentlari va unga mos keluvchi funksiya qiymatlari jadvalda keltiriladi.

Masalan:

1) To'rt xonali matematik jadvallar.



45-chizma

2)

x	0	0,1	0,2	3	0,5	4	2	1,5

y	-2	0	2	-2	-1	0,5	0.25	0.2

Jadvaldan ko‘rinadiki, funksiyaning aniqlanish sohasi argumentning 8 ta qiymatida bo‘lib, unga funksiyaning ham 8 ta qiymati to‘g‘ri kelgan. Jadvaldagi qiymatlar tajribalardan yoki tajriba natijalarini matematik ishlov berishlar natijasida olingan bo‘lishi mumkin.

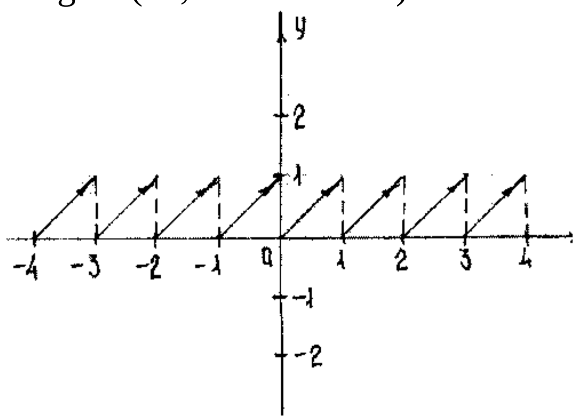
v) Grafik usulda:

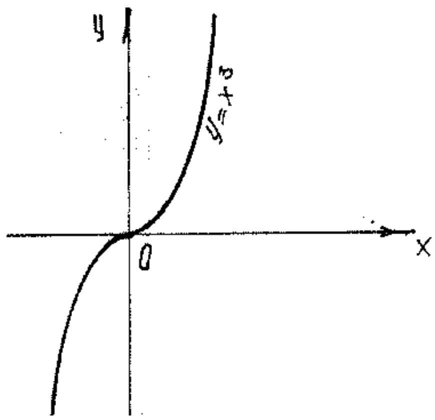
Bu usul asosan funksiyalarni analitik usulda berish qiyin bo‘lgan hollarida uchraydi. Ko‘pincha tabiatda ro‘y beradigan hodisalarni o‘rganish jarayonida apparaturalar yordamida egrilar olinib, ularni o‘rganishga to‘g‘ri keladi. Masalan, ostsilografni, elektrokardiogrammalarni ko‘rsatishlari funksiyani grafik usulida berilishiga misol bo‘la oladi.

4.1.2. Funksiyalarni monotonligi, juft-toqligi va davriyligi.

1-Ta'rif. Agar $y=f(x)$ funksiyada har bir x uchun shunday M soni mavjud bo‘lib, $|f(x)|\le M$ (1) tengsizlik bajarilsa, $y=f(x)$ funksiya cheklangan deyiladi. (1) tengsizlik geometrik nuqtai nazaridan cheklangan funksiyani, grafigi esa koordinata tekisligida $-M\le y\le M$ gorizontal polasada joylashishini bildiradi.

Masalan: $y=x-[x]$, $x\in R$ funksiyaning grafigi butunicha $0\le y\le 1$ polasada joylashgan. Shuning uchun bu funksiya cheklangan. $y=x^3$ funksiya cheklanmagan. (46, 47-chizmalar)





46-chizma. 47-chizma.

2-Ta'rif. Agar f(x) funksiya argumentining ixtiyoriy ikkita $x_1\in A$, $x_2\in A$ qiymatlari uchun $x_1<x_2$ shartda $f(x_1)\le f(x_2)$ tengsizlik bajarilsa f(x) funksiya o‘suvchi deyiladi. Agar $f(x_1)<f(x_2)$ tengsizlik bajarilsa f(x) funksiya qattiq o‘suvchi deyiladi.

3-Ta'rif: Agar f(x) funksiya argumentining ixtiyoriy ikkita $x_1\in A$ va $x_2\in A$ qiymatlari uchun $x_1<x_2$ shartda $f(x_1)\ge f(x_2)$ tengsizlik bajarilsa, f(x) funksiya kamayuvchi deyiladi. Agar $f(x_1)>f(x_2)$ tengsizlik bajarilsa, f(x) funksiya qattiq kamayuvchi deyiladi.

Qattiq o‘suvchi, o‘suvchi, qattiq kamayuvchi va kamayuvchi funksiyalar monoton funksiyalar deyiladi.

4-Ta'rif: Agar f(x) funksiyaning A to‘plamdagi ixtiyoriy *x* elementi uchun $f(-x)=f(x)$ tenglik bajarilsa, $y=f(x)$ funksiya juft funksiya deyiladi. Agar A to‘plamdagi ixtiyoriy *x* elementi uchun $f(-x)=-f(x)$ tenglik bajarilsa, $y=f(x)$ funksiya $y=x^3$ toq funksiya deyiladi. $y=x^2$, $x\in R$ funksiya juft funksiya, chunki $y=(-x)^2=x^2$, $y=x^3$ funksiya esa toq funksiya, chunki $y=(-x)^3=-x^3$

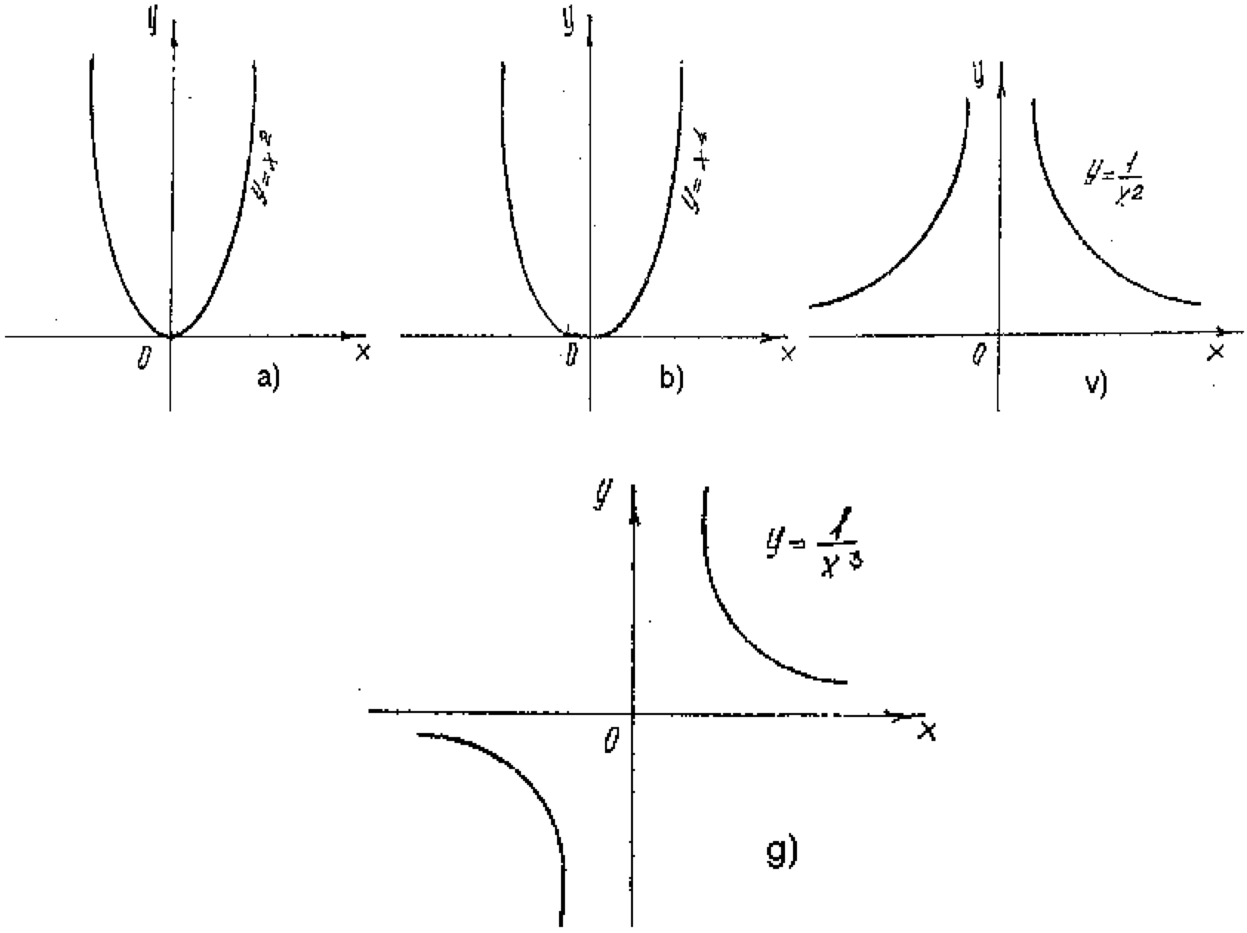
5- Ta'rif: Agar *f(x)* funksiya uchun shunday T>0 son mavjud bo‘lib funksiyaning aniqlanish sohasidan olingan ixtiyoriy *x* uchun *f(x-T)=f(x+T)* tenglik bajarilsa, u holda *y=f(x)* davriy funksiya deyiladi. T – funksiy davri hisoblanadi. *y=sinx, y=cosx, y=tgx* funksiyalar davriy funksiyalar.

4.1.3. Sodda elementar funksiyalar.

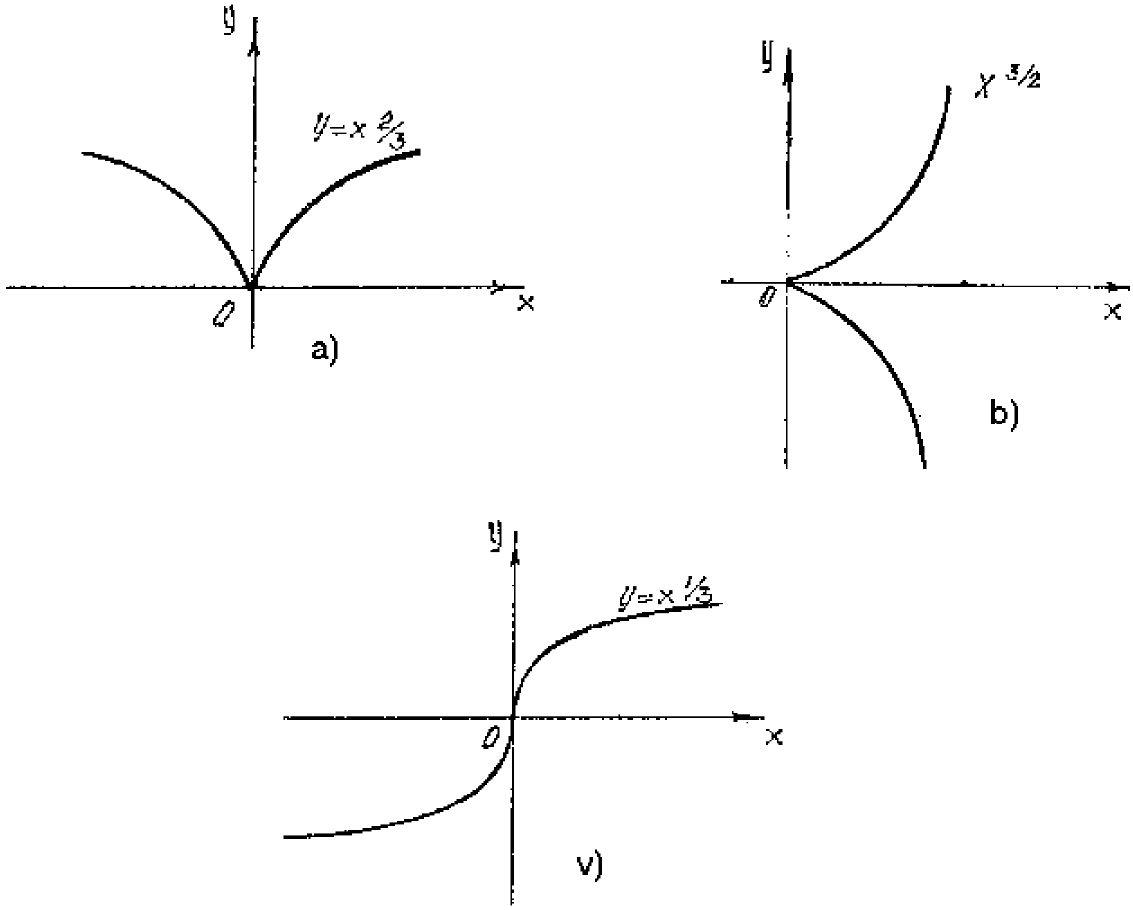
Sodda elementar funksiyalar deb quyidagi funksiyalarga aytiladi: Darajali funksiya: $y=x^{\alpha}$ bunda $\alpha\in$R; ko‘rsatkichli funksiya: $y=a^{x}$ bunda $a\neq 1$, musbat son; logarifmik funksiya: $y=\log_a x$ bunda $a\neq 1$ musbat son; trigonometrik funksiyalar: y=*sinx*, *y=cosx*, *y=tgx*, *y=ctgx*, *u=secx*, *y=cosecx* va teskari trigonometrik funksiyalar y=*arcsinx*, *y=arccosx*, *y=arctgx*, *y=arcctgx*, *y=arcsecx*, *y=arccosecx.* Bu asosiy elementar funksiyalar o‘rta maktab kursida o‘tilgan bo‘lsada, ularni ustida qisqacha to‘xtalib o‘tamiz.

1) Darajali funksiya.

$y=x^{\alpha}$ (α-haqiqiy son) α-darajali funksiyaning ko‘rsatkichi. Umuman darajali funksiya R_+ da to’la aniqlangan. α-irratsional son bo‘lganda funksiya logarifmlash va potensirlash yo‘li bilan hisoblanadi, bu yerda $x>0$. Shuning uchun funksiyani aniqlanish sohasi $(0;+\infty)$ deb olamiz. $x>0$ da $\alpha=0$ bo‘lsa, $x^{\alpha}=1$ bo‘ladi. $\alpha\neq 0$ bo‘lsa, darajali funksiyaning qiymatlar to‘plami haqiqiy sonlar $(0;+\infty)$ intervaldan iborat bo‘ladi. 48, 49-chizmalarda darajali funksiyaning $\alpha>1$ va $\alpha<0$ qiymatlaridagi tasvirlari berilgan.



48-chizma.



49-chizma.

48-chizmadan ko‘rinadiki, darajali funksiya musbat ko‘rsatkichlarda o‘suvchi, manfiy ko‘rsatkichlarda kamayuvchidir. Shuning bilan birga darajali funksiya α ning qiymatlariga qarab aniqlanish sohalari har xil bo‘lishini eslatish kerak:

a) α-butun musbat son bo‘lsa, funksiya $(-\infty;+\infty)$ intervalda aniqlangan.

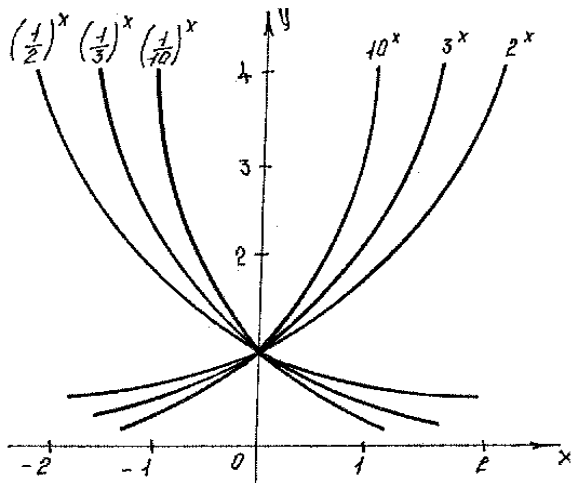
b) α-butun manfiy son bo‘lsa, funksiya x ning x=0 dan boshqa hamma qiymatlarida aniqlangan.

48 a,b-chizmalarda α-ning butun musbat son qiymatlarida grafiklar tasvirlangan

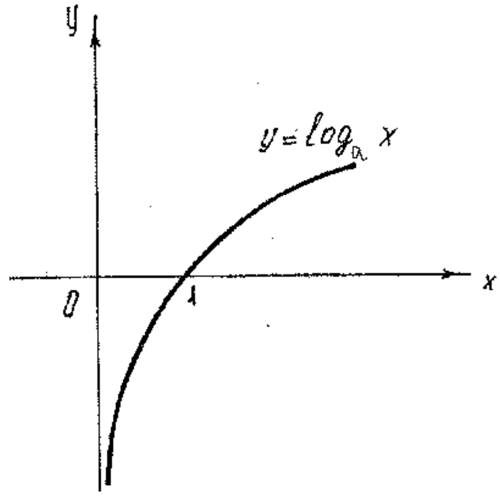
48 v,g- chizmalarda α ning butun manfiy son qiymatlari uchun grafiklar tasvirlangan.

49 a,b,v chizmalarda α ning ratsional kasr qiymatlari uchun grafiklar tasvirlangan.

2) Ko'rsatkichli funksiya $y=a^x$, $a>0$ va $a\neq 1$. Bu funksiyaning aniqlanish sohasi barcha haqiqiy sonlar to‘plami R dan iborat. Bu funksiya $a>1$ da o‘suvchi, $0<a<1$ da kamayuvchi. Ikkala holda funksiya chegaralanmagan. (50-chizma)



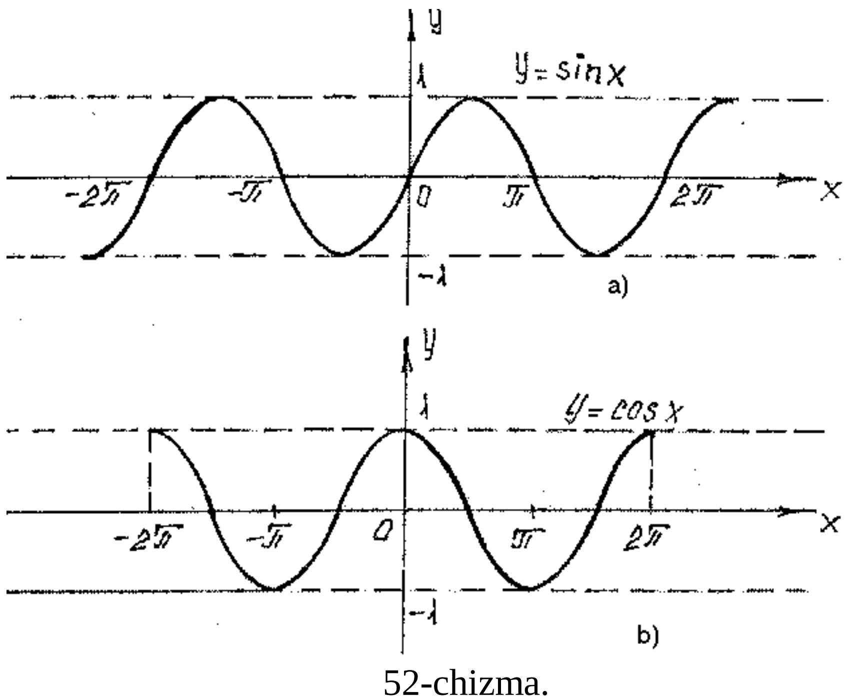
50-chizma.



51-chizma.

3) Logarifmik funksiya. $y=\log_a x$ $, a>0$ va $a\neq 1$. Bu funksiya musbat sonlar to‘plami ya’ni R da aniqlangan. Bu funksiyaning qiymatlar to‘plami esa haqiqiy sonlar to‘plamidan iborat (51-chizma). Ko‘rsatkichli va logarifmik funksiyalar o‘zaro teskari funksiyalar.

4) Trigonometrik funksiyalar. Trigonometrik funksiyalar barchasi davriydir. $y=\sin x$, $y=\cos x$, $x\in R$ funksiyalarining davri 2π ga teng; sinx funksiyasi toq, *cosx* funksiyasi juft funksiyadir. Bu funksiyalar *x* ning barcha qiymatlarida aniqlangan. Bu funksiyalarning grafiklari chegaralangan bo‘lgani uchun $-1\leq y\leq 1$ polasada joylashadi (52-chizma)

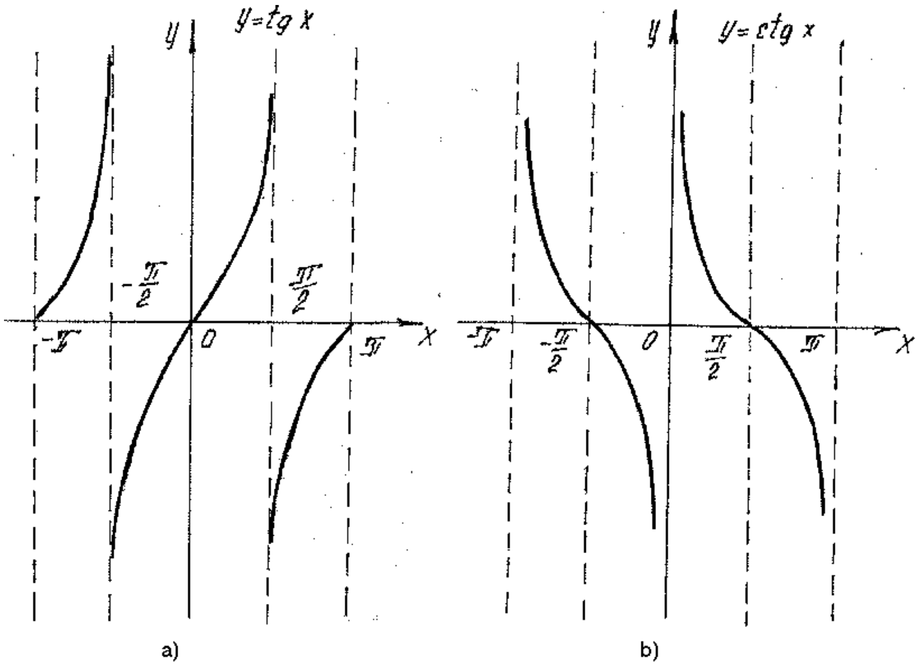


52-chizma.

$$y=tgx\ ;\ x\in R\ ,\ x\neq \pm\pi/2+\pi\kappa,\ \kappa\in z$$

$$y=ctgx;\ x\in R\ ,\ x\neq \pi\kappa,\ \kappa\in z$$

Tangens va kotangens funksiyalari toq, chegaralanmagan, davriy bo‘lib davri π ga teng (53-chizma)



53-chizma.

4.1.4.Funksiya grafigini yasash.

Biz funksiyaning analitik ifodasini tekshirish asosida uni grafigini yasashni ko`rib o`tamiz. Bunda funtsiyaning xossalarini tekshirishga tayanamiz. Dastlab funksiyaning aniqlanish sohasi, uzilish nuqtasi, grafikning (ox) o`qda yotgan nuqtasi (agar bunday nuqtalar mavjud bo`lsa) topiladi. So`ngra funksiyaning juft, toqligi aniqlanadi va grafik argumentning musbat qiymatlari uchun chiziladi. Agar funksiya juft bo`lsa, oy o`qqa nisbatan topilgan nuqtalarga nisbatan simmetrik nuqtalar toq bo`lsa koordinatalar boshiga nisbatan topilgan nuqtalaga nisbatan simmetrik nuqtalar topiladi. Bu topilgan nuqtalar funksiya grafigining formasi va joylashishi haqida tegishli xulosalar chiqarishga imkon beradi. Barcha topilgan nuqtada aniqlangan xossalarga ega bo`lgan tekis egri chiziq bilan tutashtiriladi.

Funksiya grafigini yasashda ayrim sodda o`zgartirishlardan foydalanib yasashni esdan chiqarmaslik kerak.

Bular tubandagilar:

1) f(x)+a funksiyasining grafigi f(x) funksiya grafigiga tegishli bo`lgan nuqtalarni oy o`qiga parallel ravishda a birlik yuqoriga (a>0 bo`lsa) yoki pastga (a<0 bo`lsa) ko`chirish yo`li bilan hosil qilinadi;
2) f(x+a) funksiyaning grafigi f(x) funksiya grafigiga tegishli bo`lgan nuqtalarni ox o`qiga parallel holda |a| birlik chapga (agar a>0 bo`lsa) yoki |a| birlik o`ngga (agar a<0 bo`lsa) surish bilan hosil qilinadi.

3) |a| f(x) funksiyaning grafigi f(x) funksiya grafigiga tegishli bo`lgan nuqtalarning ordinatalarini |a| marta uzaytirish (agar a>0 bo`lsa), yoki |a|

marta qisqartirish (agar a<0 bo`lsa) bilan hosil qilinadi.

4) –f(x) funksiyaning grafigini f(x) funksiya grafigini abssissa o`qiga nisbatan simmetrik ko`chirish bilan hosil qilinadi.
5) f(-x) funksiya grafigini f(x) funksiya grafigini ordinata o`qiga nisbatan simmetrik ko`chirish bilan yasash mumkin.
6) y=|f(x)| funksiya grafigini chizish uchun y=f(x) funksiya grafigi chiziladi. So`ngra y=f(x) funksiya grafigining OX o`q ostidagi qismi bu o`qqa nisbatan simmetrik holda yuqoriga ko`chiriladi.

1. Tekislikda koordinat almashtirish

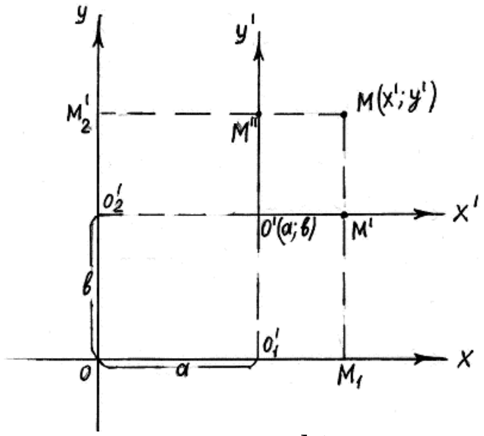
Bitta tekislikda to`g`ri burchakli koordinata sistemasini turlicha tanlash mumkin.

Koordinata boshini ko`chirish

Tekislikda xoy koordinata sistemasini olib, unda biror $0'$(a;b) nuqtani olamiz. Bu nuqta orqali koordinata o`qlariga parallel chiziqlar o`tkazamiz. Bu chiziqlarning yo`nalishlarini xoy sistema abssissa va ordinata o`qlari yo`nalishlariga mos qilib tanlaymiz. Shuningdek o`tkazilgan to`g`ri chiziqlarda xoy sistema birlik vektorlariga teng birlik vektorlar belgilaymiz. U holda biz ikkinchi $X'O'Y'$ koordinata sistemasiga ega bo`lamiz. Bu sistema XOY koordinata sistemasini koordinata boshini $0'$ nuqtaga ko`chirishdan hosil bo`lgan deyiladi. XOY koordinata tekisligida biror M nuqta olamiz, uning XOY sistemaga nisbatan koordinatalari x va y ga teng bo`lsin. U holda uning $X'O'Y'$ sistemaga nisbatan koordinatalari X' va Y' gat eng bo`ladi. $X'$ va $Y'$ larni x va y lar orqali bog`lovchi formulani keltirib chiqaramiz. Buning uchun $0'$ va M nuqtalardan abssissa va ordinata o`qlariga perpendikular o`tkazamiz. U holda abssissa o`qida abssissasi a va x ga teng bo`lgan O_1 va M_1 nuqtalarga ega bo`lamiz.

U holda 54a-chizmadan $0'M' = X'$ $\quad 0'M'$=OM_1-O$0'_1$=x-a

$$0'M'' = Y';\ 0'M'' = OM_2 - O0'_2 = y-b$$



54a - chizma

Bundan

$$\begin{cases} X' = x - a \\ Y' = y - b \end{cases} \qquad (1)$$

(1) formulalar, ya’ni X' va Y' larni x va y lar orqali ifodalovchi formulalardir. Bunda a va b lar yangi koordinata boshining koordinatalari.

To`g`ri va teskari proporsianallik

1. To`g`ri proporsianallik

Agar t - turistning harakat vaqti (soat bilan), S – turist o`tgan yo`l (kilometr bilan) bo`lsa va u 6 km/soat tezlikda tekis harakat qilsa,t ning har bir qiymatiga

S = 6t formuladan kelib chiqadigan S ning yagona qiymati mos keladi. Demak, S = 6t formula funksiyani ifodalaydi.

Ko`rib o`tilgan misolda biz to`g`ri proporsianallik deb ataluvchi funksiya bilan ish ko`rdik

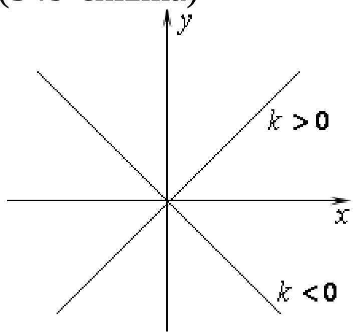
Ta’rif: y = kx ko`rinishdagi formula yordamida berilishi mumkin bo`lgan funksiya to`g`ri proporsianallik deyiladi, bunda x – erkli o`zgaruvchi, k – nolga teng bo`lmagan haqiqiy son.

y = kx formulada k soni proporsianallik koeffitsenti deyiladi, y o`zgaruvchi esa x o`zgaruvchiga proporsianal deyiladi.

y = kx funksiyaning aniqlanish sohasi haqiqiy sonlar to`plami bo`ladi. To`g`ri proporsianallikning grafigi koordinatalar boshidan o`tuvchi to`g`ri chiziqdan iborat.

k > 0 bo`lganda y = kx funksiya o`zini butun aniqlanish sohasida o`sadi,

k < 0 bo`lganda kamayadi (54b-chizma)



54b - chizma

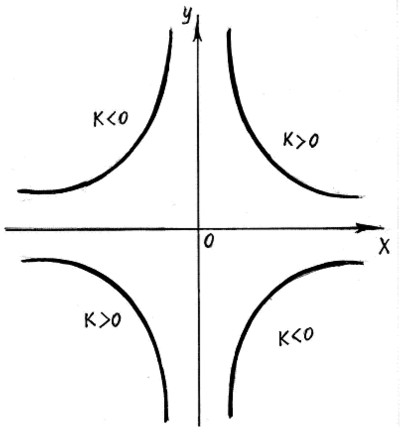
2. Teskari proporsianallik.

Agar S km – turistning o`tishi kerak bo`lgan masofa, t soat – harakat vaqti,

V km/soat – uning tezligi bo`lsa, tezlikning har bir qiymatiga vaqtning yagona qiymati mos keladi.

Demak, $t = \frac{S}{V}$ formula funksiyani beradi. U teskari proporsianallik deyiladi.

Ta’rif. $y = \frac{k}{x}$ ko`rinishdagi formula bilan berish mumkin bo`lgan funksiya teskari proporsianallik deyiladi. Bunda x – erkli o`zgaruvchi, k – nolga teng bo`lmagan sony o`zgaruvchi haqida y x o`zgaruvchiga teskari proporsianal deyiladi. $y = \frac{k}{x}$ funksiyaning aniqlanish sohasi noldan farqli haqiqiy sonlar to`plamidir. Teskari proporsianallikning grafigi giperboladir. k > 0 bo`lganda uning tarmoqlari birinchi va uchinchi choraklarda yotadi. k < 0 bo`lganda ikkinchi va to`rtinchi choraklarda yotadi (54v-chizma).



54v - chizma

Ggiperbolani yasash uchun $y=\frac{k}{x}$ funksiya qiymatlarining jadvalini tuzish kerak.

y = ax^2 + bx + c funksiya grafigini yasash.

Dastlab y = ax^2 + bx + c ifodadana ni qavsdan tashqariga chiqaramiz.

$$y=a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)$$

Endi bu ifodani ikki son yig`indisini to`liq kvadratiga keltiramiz.

$$y=a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)$$

$$=a\left[\left(x^2+2\frac{b}{2a}x+\frac{b^2}{4a^2}\right)+\frac{c}{a}-\frac{b^2}{4a^2}\right]=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a}.$$

Biz $y=(x-\alpha)^2+\beta$ ko`rinishdagi tenglamaga ega bo`ldik, bu yerda:

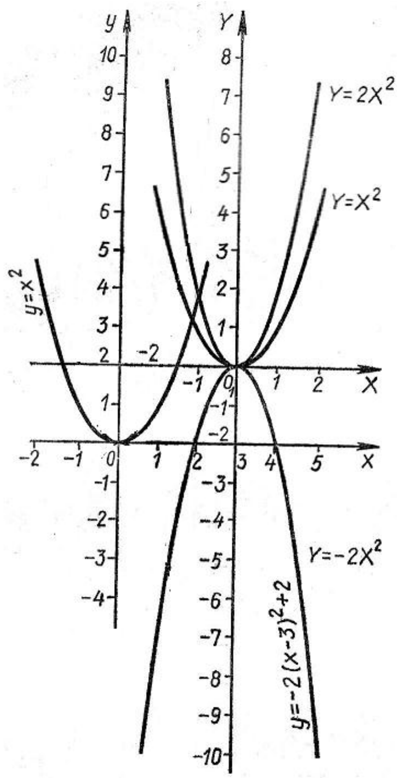
$$\alpha=-\frac{b}{2a}; \qquad \beta=\frac{4ac-b^2}{4a}$$

Bundan esa y = ax^2 + bx + c kvadrat uch had grafigini quyidagi tartibda yasash mumkinligi ko`rinadi:

1) koordinata boshini $O_1(\alpha;\beta)$ nuqtaga ko`chirish kerak. Bunda

$$\alpha=-\frac{b}{2a};\beta=\frac{4ac-b^2}{4a}$$

2) Yangi koordinata sistemasida $y=x^2$ parabolani yasaymiz.
3) Yangi sistemada barcha ordinatalarni |a| ga ko`paytiramiz. Agar a<0 bo`lsa, yangi sistema abssissa o`qiga nisbatan parabola grafigini



simmetrik qilib, pastga joylashtiramiz.

Misol: $y=-2x^2+12x-16$ grafigini yasang. $y=-2x^2+12x-16$ ni to`liq kvadrat shakliga keltiramiz.

$$y=-2\left(x^2-6x+8\right)=-2[(x-6x+9)+8-9]==-2\left[(x-3)^2-1\right]=-2(x-3)^2+2$$

Demak,koordinata boshini $O_1(3;2)$ nuqtaga ko`chiramiz. Yangi koordinata sistemasiga nisbatan $y=x^2$ parabolani yasab, bu parabola ordinatalarini 2 ga ko`paytiramiz. Hosil bo`lgan parabolaning $O_1X$ o`qiga nisbatan simmetrik qilib pastga joylashtiramiz. (54g-chizma)

54g -chizma

4.1.5. Murakkab funksiya, algebraik va transendent funksiyalar.

Murakkab funksiyalar. Bizga ikkita y=F(u) va u=φ(x) funksiyalar berilgan bo‘lsin. Boshqacha aytganda y u ning funksiyasi bo‘lib u esa o‘z navbatida x o‘zgaruvchiga bog‘liq bo‘lsa, y ham x ga bog‘liq bo‘ladi, ya’ni y=F[φ(x)] funksiyani hosil qilamiz. Bu funksiya murakkab funksiya deyiladi.

y=F[φ(x)] funksiyaning aniqlanish sohasi u=φ(x) funksiyaning aniqlanish sohasi yoki u ning F(u) funksiya aniqlanish sohasidan tashqari chiqmaydigan qiymatlarida aniqlanadigan qismi bo‘ladi:

Misol: $u=1-x^2$, $y=\sqrt{u}$ bo‘lsin u holda murakkab funksiya $y=\sqrt{1-x^2}$, bo‘ladi. Bu funksiyani aniqlanish sohasi [-1;1] kesmadan iborat.

Ko‘phadlar. $P_n(x)= a_0x^n+ a_1x^{n-1}+ a_2x^{n-2}+...+a_{n-1}x+ a_n$ $x\in R,\ a_0 \neq 0$ ko‘rinishidagi funksiya n-darajali ko‘phad yoki butun ratsional funksiya deyiladi. Bu yerda $a_0, a_1, a_2... a_n$ koeffitsiyentlar deb ataladigan o‘zgarmas sonlar, n∈N; n-ko‘phadning darajasi deyiladi. Ko‘phadlar alfavitning bosh harflari *P, R, Q...* bilan belgilanib, uning pastida indeks bilan ko‘phadning darajasi ko‘rsatiladi.

Masalan: Uchinchi darajali ko‘phad $P_3(x)=a_0x^3+5x;$ Birinchi darajali ko‘phad. $P_1(x)=a_0x+a$ Ikkinchi darajali ko‘phad esa kvadrat uchhad deb ataladi. $P_2(x)=a_0x^2+a_1x+a_2;$ Ko‘phadlar chegaralanmagan davriymas funksiyalar bo‘ladi. Ayrim ko‘phadlargina toq va monoton funksiyalar bo‘lishi mumkin.

Ratsional funksiyalar.

Bu funksiya ikkita ko‘phadning nisbati kabi aniqlanadi.

$$y=\frac{\mathrm{P}_n(x)}{Q_m(x)}=\frac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n}{\mathrm{b}_0x^m+b_1x^{m-1}+\ldots+b_{m-1}x+b_m}$$

Bu funksiya aniqlanish sohasi sonlar o‘qining kasrni maxrajini nolga aylantiradigan nuqtalaridan boshqa barcha nuqtalar to‘plamidan iborat. Agar ratsional kasrning suratidagi ko‘phadning ko‘rsatkichi maxrajidagi ko‘phadning ko‘rsatkichidan kichik bo‘lsa , to‘g‘ri ratsional kasr, aks holda noto‘g‘ri ratsional kasr deyiladi. Noto‘g‘ri ratsional kasrni to‘g‘ri ratsional kasr bilan ko‘phadning yig‘indisi shaklida ifodalash mumkin.

Masalan: $y=\frac{x^3+2x^2+3}{x+1}$ suratni maxrajga bo‘lamiz. Natijada

$$y=\frac{x^3+2x^2+3}{x+1}=x^2+x-1+\frac{4}{x+1}$$ ga ega bo‘lamiz.

Algebraik funksiyalar. Transendent funksiyalar. Elementar funksiyalar.

1-Ta'rif: funksiyani aniqlovchi formuladagi argument x ustida faqat algebraik amallar (qo‘shish, ayirish, ko'paytirish, bo‘lish, darajaga ko‘tarish) bajarilgan bo‘lsa, u funksiyaga algebraik funksiya deyiladi. Algebraik funksiyaga ko‘phadlar va ratsional kasrlar misol bo‘ladi.

2-Ta'rif: Algebraik funksiyada ildiz chiqarish amali ham qatnashsa u irratsional funksiya deyiladi.

Masalan:

$$y=\frac{3x^5+\sqrt{x^3}}{2\sqrt[5]{x^2}+3x}$$

3-Ta'rif: Algebraik bo‘lmagan boshqa barcha funksiyalar transendent funksiyalar deyiladi.

10^x, $\log_a x$, $\sin x$, $\cos x$ va hokazo.

4-Ta'rif: Elementar funksiya deb y=f(x) ko‘rinishidagi birgina formula bilan berilishi mumkin bo‘lgan funksiyaga aytiladiki, bunda o‘ng tomonda turuvchi ifoda chekli sonda qo‘shish, ayirish ko‘paytirish, bo‘lish va murakkab funksiya elementlari yordamida asosiy elementar funksiyalardan va o‘zgarmaslardan tuzilgan.

Masalan:

$y=x^3+5\sin 4x$; $y=5^{\cos x}$; $x\in R$

$y=\log_3(\cos x)$; $y=\cos(5^x)$; $x\in R$

O‘z-o‘zini tekshirish uchun savollar.

1. Sonli funksiya deganda qanday funksiyani tushunasiz?
2. Funksiya nima?
3. Funksiyaning juft-toqligi, davriyligi qanday aniqlanadi?
4. Funksiyaning o‘suvchi, kamayuvchiligi, chegaralanganligi, monotonligi qanday aniqlanadi?
5. Sodda elementar funksiyalarga qaysi funksiyalar kiradi?
6. Ko‘phad deb nimaga aytiladi?
7. To‘g‘ri va noto‘g‘ri ratsional kasrlarni ta'riflang?
8. Algebraik va transendent funksiyalar deganda qanday funksiyalarni tushunasiz?

4.2. Sonli ketma-ketliklar, funksiyaning limiti, ajoyib limitlar.

4.2.1. Sonli ketma-ketliklar. Chegaralangan monoton ketma-ketliklar.

1-Ta'rif. Natural sonlar to‘plami N da aniqlangan $\alpha=f(n)$ funksiya sonli ketma-ketlik deyiladi.

Sonli ketma-ketlik *{x}* yoki *{f(n)}* $n \in N$ ko‘rinishida belgilanadi. Agar n ga 1,2,3,...va hokazo qiymatlar bersak, funksiyaning xususiy qiymatlarini olamiz.

$$x_1=f(1)\ ,\ x_2=f(2),...,x_n=f(n)$$

Bu qiymatlarga sonli ketma-ketlikning hadlari yoki elementlari deyiladi. Ketma-ketlikning *n*-hadi uning umumiy hadi deb ataladi. Umumiy had ma'lum bo‘lsa, ketma-ketlik berilgan hisoblanadi.

1-misol. $x_n=6^n$ $n \in N$ funksiya quyidagi sonlar ketma-ketlikni beradi:

$$\{x_n\} = \{6^n\} = \{6,36,216,...,6^n,..\}$$

***2-misol**.* $x_n = \dfrac{1+(-1)^n}{2}$, $n \in N$ funksiya quyidagi sonli ketma-ketlikni beradi:

$$\{x_n\} = \left\{\frac{1+(-1)^n}{2}\right\} = \{0,1,0,1,...\}$$

Misollardan ko‘rinadiki, barcha ketma-ketliklar cheksiz ketma-ketliklar bo‘lib, ularning har birida keyingi had mavjud emas.

Barcha hadlari bir xil qiymat qabul qiladigan *{x_n}* ketma-ketlik o‘zgarmas ketma-ketlik deb ataladi.

Agar ketma-ketlikning n-hadi ya’ni umumiy hadi ma'lum bo‘lsa uning hadlarini hisoblash mumkin.

3-misol. $x_n = \dfrac{(-1)^n}{n^2}$ berilgan. Bu ketma-ketlikning birinchi 6 ta hadini hisoblang.

$$x_1 = \frac{(-1)^1}{1^2} = -1; \qquad x_2 = \frac{(-1)^2}{2^2} = \frac{1}{4}; \qquad x_3 = \frac{(-1)^3}{3^2} = -\frac{1}{9};$$

$$x_4 = \frac{(-1)^4}{4^2} = \frac{1}{16}; \qquad x_5 = \frac{(-1)^5}{5^2} = \frac{1}{25}; \qquad x_6 = \frac{(-1)^6}{6^2} = \frac{1}{36};$$

Ketma-ketlik berilishini rekurrent usuli ham mavjud. Bu usulda ketma-ketlikning umumiy hadini, oldingi hadlardan foydalanib hisoblash qoidasi beriladi.Ketma-ketlikning umumiy hadini oldingi hadlari orqali hisoblash formulasi rekurrent munosabat deyiladi. Rekurrent munosabatga misol qilib quyidagi formulani ko‘rsatish mumkin.

$$x_n = x_{n-1} + 2x_{n-2}$$

Bu formula n=1 va n=2 qiymatlarda ma'noga ega emas,chunki bu qiymatlarda x_0, x_{-1} hadlar hosil bo‘ladi, ketma-ketlikda esa 0,-1 nomerli hadlar yo`q. Shuning uchun berilgan ketma-ketlikda x_1 va x_2 hadlarni boshlang‘ich hadlar deymiz. Shularga asosan keyingi hadlarni x_3 dan boshlab topamiz. Aytaylik, $x_1=0$, $x_2=1$

$$x_3 = x_2 + 2x_1=1, \qquad x_4 = x_3 + 2x_2=1+2= 3;$$

$$x_5 = x_4 + 2x_3=3+2=5, \qquad x_6 = x_5 + 2x_4=5+6= 11;...$$

Shunday qilib 1,3,5,11,....... ko‘rinishdagi ketma-ketlikga ega bo‘ldik.

2-Ta'rif. Shunday musbat M soni mavjud bo‘lib, barcha $n \in N$ uchun $|x_n|<M$ tengsizlik bajarilsa, $\{x_n\}$ ketma-ket chegaralangan deyiladi. Aks holda chegaralanmagan deyiladi.

4-misol. $x_n = \dfrac{1}{n^3}$ ketma-ketlik chegaralangan, chunki $0 < |\frac{1}{n^3}| < 1$;

3-Ta'rif. Agar istalgan $n \in N$ uchun $x_n \le x_{n+1}$ tengsizlik bajarilsa, $\{x_n\}$ ketma-ketlik o‘suvchi deyiladi. Agar $x_n < x_{n+1}$ tengsizlik bajarilsa, $\{x_n\}$ ketma-ketlik monoton o‘suvchi ketma-ketlik deyiladi.

$x_n = \dfrac{2n-1}{n}$; $n \in N$ kamaymaydigan, chunki $x_{n+1}-x_n = \frac{2n+1}{n+1} - \frac{2n-1}{n} = \frac{1}{n(n-1)} > 0$

4-Ta'rif. Agar istalgan $n \in N$ uchun $x_n \ge x_{n+1}$ tengsizlik bajarilsa, $\{x_n\}$ ketma-ketlik kamayuvchi deyiladi. Agar $x_n > x_{n+1}$ tengsizlik bajarilsa, $\{x_n\}$ ketma-ketlik monoton kamayuvchi ketma-ketlik deyiladi.

$x_n = \dfrac{1}{n^5}$ ketma-ketlik o`smaydigan, chunki $\frac{1}{(n+1)^5} < \frac{1}{n^5}$

4.2.2 Ketma-ketlikning limiti.

$$x_n = 1 - \frac{1}{n} \qquad n \in N \tag{1}$$

$$x_n = 1 + \frac{1}{n} \qquad n \in N \tag{2}$$

ketma-ketliklarni qaraylik. Bunda (1) ketma-ketlik n ning o‘sib borishi bilan o‘suvchi bo‘lib, (2) ketma-ketlik esa n ning o‘sib borishi bilan kamayuvchi ketma-ketlik bo‘lib 1 ga yaqinlashadi. Buni matematik nuqtai nazaridan ta'riflash uchun quyidagi savolga javob izlaymiz. n ning qiymati qanday bo‘lganda x_n-*1* ayirmaning absolut qiymati 0,001 dan kichik bo‘ladi ?

$$|x_n - 1| = \frac{1}{n}$$

bo‘lganidan $|x_n-1| < 0.001$ tengsizlik ixtiyoriy $n > N = 1000$ da bajariladi.

U holda ixtiyoriy musbat ε soni uchun (3) tengsizlik ixtiyoriy $n > N = \left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right]$ uchun bajariladi.

Mana shunday bo‘lganda (1) va (2) ko‘rinishidagi ketma-ketliklarni limiti 1 ga teng deyiladi va tubandagicha yoziladi.

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right) = 1 \qquad \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right) = 1$$

Endi ketma-ketlik limitiga ta'rif beramiz. a o‘zgarmas son va $\{x_n\}$ ketma-ketlik berilgan bo‘lsin.

Ta'rif. Agar istalgan $\varepsilon > 0$ son uchun shunday $N = N(\varepsilon)$ son mavjud bo‘lsaki, barcha $n \ge N$ lar uchun $|x_n - a| < \varepsilon$ tengsizlik bajarilsa, a o‘zgarmas son $\{x_n\}$ ketma-ketlikning limiti deyiladi va quyidagicha yoziladi:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a$$

Yuqoridagi misollardan ko‘rinadiki, N natural sonini tanlanishi oldindan berilgan musbat ε soniga bog‘liq. Bu bog‘lanish $N = N(\varepsilon)$ yoki $N = N\varepsilon$

ko‘rinishida yoziladi. Agar ketma-ketlik limitga ega bo‘lsa, u yaqinlashuvchi, limitga ega bo‘lmasa, uzoqlashuvchi deyiladi.

4.2.3. Cheksiz kichik va cheksiz katta sonli ketma-ketliklar.

1-Ta'rif. Agar ixtiyoriy musbat A soni uchun (A ni qancha katta qilib tanlamaylik) shunday N nomer mavjud bo‘lib, n>N qiymatlarida $|x_n|>A$ tengsizlik o‘rinli bo‘lsa, $\{x_n\}$ ketma-ketlik cheksiz katta deyiladi.

Masalan: $\{n^2\}$ ketma-ketlik cheksiz katta. Shuning bilan birga chegaralanmagan ketma-ketlik cheksiz katta ketma-ketlik bo‘lmasligi ham mumkin.

Masalan 1,2,1,3,1,4,....1,n,..1,n+1...

ketma-ketlik cheksiz katta emas,chunki A>1 qiymatida $|x_n|>A$ tengsizlik n ning toq qiymatlarida ma'noga ega emas.

2-Ta'rif. Agar ixtiyoriy musbat ε soni uchun (ε-etarlicha qilib tanlanganda ham) shunday N nomer mavjud bo‘lib, n>N qiymatlarida $|x_n|<\varepsilon$ tengsizlik bajarilsa, $\{x_n\}$ ketma-ketlik cheksiz kichik ketma-ketlik deyiladi.

Masalan $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ cheksiz kichik ketma-ketlik $|x_n|=\left|\frac{1}{n}\right|<\varepsilon$ tengsizlikdan $n>\frac{1}{\varepsilon}$ ga ega bo‘lamiz. Agar $N=\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$ bo‘lsa, u holda ixtiyoriy n>N uchun $|x_n|<\varepsilon$ bajariladi ($\varepsilon=\frac{1}{10}$ uchun N=[10]=10 ni olamiz).

Cheksiz katta va cheksiz kichik ketma-ketliklar orasidagi bog‘lanishni quyidagi teorema aniqlab beradi. (teorema isbotsiz keltiriladi).

Teorema. Agar $\{x_n\}$ ketma-ketlikning barcha hadlari noldan farqli bo‘lib, ya’ni x_n cheksiz katta ketma-ketlik bo‘lsa $(\alpha_n)=\left(\frac{1}{x_n}\right)$ ketma–ketlik cheksiz kichik ketma-ketlik bo‘ladi va aksincha.

Cheksiz kichik ketma-ketliklar quyidagi xossalarga ega:

1) Ikkita cheksiz kichik ketma-ketliklar yig‘indisi va ayirmasi cheksiz kichik ketma-ketlik.

$$|\alpha_n \pm \beta_n| < \varepsilon$$

2) Ikkita cheksiz kichik ketma-ketliklar ko‘paytmasi cheksiz kichik ketma-ketlik

$$|\alpha_n \cdot \beta_n| < \varepsilon$$

3) Cheklangan ketma-ketlikni cheksiz kichikka ko‘paytmasi yana cheksiz kichik ketma-ketlik

$$|x_n \cdot \beta_n| < \varepsilon$$

Agar $\{x_n\}$ ketma-ketlik yaqinlashuvchi bo‘lib,uning limiti a ga teng bo‘lsa,u holda $|x_n-a|=\{x_n\}$ ayirma cheksiz kichik ketma-ketlik bo‘ladi,chunki ixtiyoriy $\varepsilon>0$ son uchun shunday N nomer topiladiki, $|x_n|=|x_n-a|<\varepsilon$ tengsizlik bajariladi. Bundan esa yaqinlashuvchi ketma-ketlik biror a limitga ega bo‘lsa, uning ixtiyoriy elementini $x_n=a+\alpha_n$ ko‘rinishida yozish mumkin degan natijaga kelamiz.

4.2.4. Yaqinlashuvchi sonli ketma-ketliklar limitlarining arifmetik xossalari

Yaqinlashuvchi sonli ketma-ketliklarning limitlarini hisoblashda yig‘indini, ayirmani, ko‘paytmani va bo‘linmani limitlari to‘g‘risidagi quyidagi teoremalardan foydalanishga to‘g‘ri keladi (bu teoremalar arifmetik xossalar deb ham yuritiladi).

1.Teorema. Agar $\{a_n\}$ va $\{b_n\}$ ketma-ketliklar yaqinlashuvchi bo‘lsa,ularning yig‘indisi bo‘lgan $\{a_n + b_n\}$ ketma-ketlik ham yaqinlashadi va yig‘indining limiti qo‘shiluvchilarning limitlari yig‘indisiga teng bo‘ladi.

$$\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n)=\lim_{n\to\infty}a_n+\lim_{n\to\infty}b_n;$$

Isboti: Aytaylik $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a,\ \lim\limits_{n\to\infty}b_n=b$ bo‘lsin. U holda $a_n=a+\alpha_n,\ b_n=b+\beta_n$ deb yozamiz. Bu yerda α_n va β_n lar $n\to\infty$ da nolga intiladi. $a_n+b_n=(a+b)+(\alpha_n+\beta_n);$

$n\to\infty$ da $\alpha_n\to 0$, $\beta_n\to 0$ ga intiladi.

bundan $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n+b_n)=(a+b)=\lim\limits_{n\to\infty}a_n+\lim\limits_{n\to\infty}b_n;$

2.Teorema. Agar $\{a_n\}$ va $\{b_n\}$ ketma-ketliklar yaqinlashuvchi bo‘lsa, ularning ko‘paytmasi ham yaqinlashadi va ko‘paytmaning limiti, ko‘payuvchilar limitlari ko‘paytmasiga teng.

$$\lim_{n\to\infty}(a_n b_n)=(\lim_{n\to\infty}a_n)(\lim_{n\to\infty}b_n);$$

1-Natija. O‘zgarmas ko‘paytuvchini limit belgisidan tashqariga chiqarish mumkin.

2-Natija. Agar $\{a_n\}$ va $\{b_n\}$ ketma-ketliklar yaqinlashuvchi bo‘lsa, ularning ayirmasi $\{a_n-b_n\}$ ham yaqinlashadi va ayirmani limiti limitlar ayirmasiga teng bo‘ladi.

$$\lim_{n\to\infty}(a_n-b_n)=\lim_{n\to\infty}a_n-\lim_{n\to\infty}b_n;$$

3.Teorema. Agar $\{a_n\}$ va $\{b_n\}$ ketma-ketliklar yaqinlashuvchi bo‘lsa, va $b_n\neq 0$ bo‘lsa, ularning bo‘linmasi $\{a_n/b_n\}$ ketma-ketlik ham yaqinlashadi va uning limiti, limitlar bo‘linmasiga teng bo‘ladi.

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{b_n}\right)=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}a_n}{\lim\limits_{n\to\infty}b_n};\qquad \text{Misol. } \lim_{n\to\infty}\frac{7-5n}{3-4n}=\frac{5}{4}$$

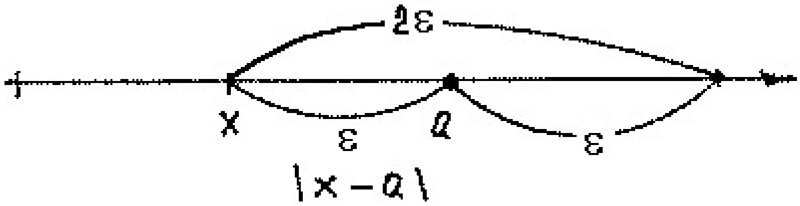
4.2.5. O‘zgaruvchi miqdorning limiti. Cheksiz katta o‘zgaruvchi miqdor.

Biz tartiblangan o‘zgaruvchi miqdorlarni tekshiramiz. Bundan keyin o‘zgaruvchan miqdorni o‘zgaruvchi *x* ning deb ishlatamiz.

1 - Ta'rif. Agar har bir oldindan berilgan kichik $\varepsilon>0$ son uchun x ning shunday qiymatini topish mumkin bo‘lsaki, *x* ning keyingi qiymatlarida $x-a<\varepsilon$ tengsizlik o‘rinli bo‘lsa, o‘zgarmas *"a"* son o‘zgaruvchi *x* ning limiti (oxirgi marrasi) deyiladi. ("*lim*" - qisqartirilgani, lotincha *limes* so‘zidan olingan bo‘lib, marra (chek) degan so‘zdir).

Agar *a* son o‘zgaruvchi *x* ning limiti bo‘lsa, u holda *x* o‘zgaruvchi *a* ga intiladi deyiladi va *lim x=a* ko‘rinishda yoziladi.

Geometrik nuqtai nazardan limit ta'rifini quyidagicha ifodalash mumkin: Markazi *a* nuqtada va radiusi ε bo‘lgan oldindan berilgan ixtiyoriy har qancha kichik atrof uchun x ning shunday qiymati topilsaki, o‘zgaruvchining keyingi qiymatlariga tegishli barcha nuqtalar shu atrofda bo‘lsa, o‘zgarmas a son o‘zgaruvchi x ning limiti bo‘ladi (55-chizma).



55-chizma.

Misol: o‘zgaruvchi miqdor *x* ketma - ket quyidagi qiymatlarni qabul qiladi:

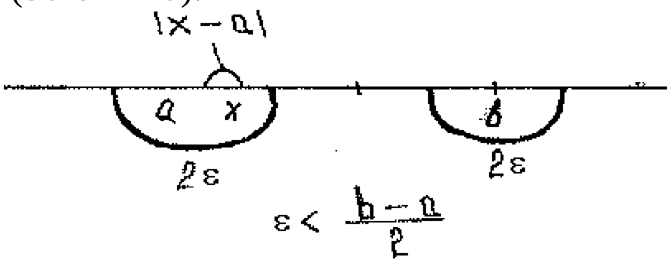
$$x_1 = 3+\frac{1}{2},\ x_2 = 3+\frac{1}{2^2},\ \ x_3 = 3+\frac{1}{2^3},\ldots,\ x_n = 3+\frac{1}{2^n},$$

Bu o‘zgaruvchi miqdorning limiti 3 ga tengligini isbotlaymiz. Quyidagi tenglikni yozamiz: $|x_n - 3| = \left|\left(3+\frac{1}{2^n}\right)-3\right| = \frac{1}{2^n}$

Har qanday ε uchun o‘zgaruvchining *n* nomeridan boshlanadigan barcha keyingi qiymatlari (bu yerda $\frac{1}{n^2}<\varepsilon$ yoki $n>\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$) $|x_n - 3|<\varepsilon$

tengsizlikni qanoatlantiradi. Bu esa talab qilingan isbotdir, ya'ni $\lim\limits_{n\to\infty}\left(3+\frac{1}{2^n}\right)=3$.

O‘zgarmas miqdorning limiti shu o‘zgarmas miqdorning o‘ziga teng, chunki $\mathcal{E}$ har qanday bo‘lganda ham *|x-c|=|c-c|=0<*$\mathcal{E}$ tengsizlik bajariladi. Limitning ta'rifidan o‘zgaruvchi *x* ikkita limitga ega bo‘la olmasligi kelib chiqadi. Haqiqatan ham, agar *limx=a , limx=b(a<b)* bo‘lsa, u holda ε ixtiyoriy kichik bo‘lgan holda x birdaniga ushbu ikkita tengsizlikni qanoatlantirishi lozim: $|x-a|<\varepsilon$ *ва* $|x-b|<\varepsilon$ bu esa $\varepsilon<\frac{b-a}{2}$ bo‘lgan holda bo‘lishi mumkin, bu esa mumkin emas. (56-chizma).



56-chizma.

2 - Ta'rif. Agar oldindan berilgan har bir *M>0* son uchun *x* ning shunday qiymatini topish mumkin bo‘lsaki, o‘zgaruvchining shu qiymatidan boshlab, barcha keyingi qiymatlari uchun $|x| > M$ tengsizlik o‘rinli bo‘lsa o‘zgaruvchi x cheksizlikga intiladi deyiladi.

Agar o‘zgaruvchi x cheksizlikga intilsa, u cheksiz katta o‘zgaruvchi miqdor deyiladi va $x \to \infty$ ko‘rinishida yoziladi. Misol: o‘zgaruvchi miqdor x

$$x_1 = -1;\ x_2 = 4\ ;\ x_3 = -9\ ;\ x_4 = 16, \ldots, x_n = (-1)^n n^2, \ldots.,$$

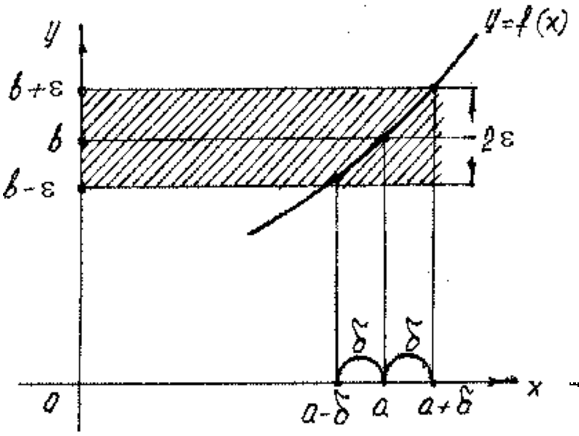
qiymatlarni qabul qilsin. Bu cheksiz katta o‘zgaruvchi miqdor, chunki ixtiyoriy $M>0$ da o‘zgaruvchining biror qiymatidan boshlab, hamma keyingi qiymatlari absolyut miqdor bo‘yicha M dan katta bo‘ladi.

4.2.6. Funksiyaning nuqtadagi limiti.

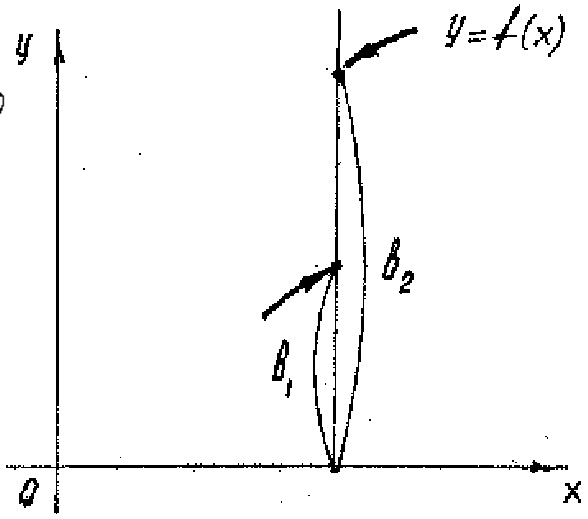
Endi x argument biror a limitga yoki cheksizlikga intilganda funksiya o‘zgarishini qaraymiz.

1-Ta'rif. Agar, $y=f(x)$ funksiya a nuqtaning biror atrofida aniqlangan bo‘lib ($x=a$ nuqtaning o‘zida aniqlanmagan bo‘lishi mumkin) musbat ε son uchun shunday musbat b sonni ko‘rsatish mumkin bo‘lsaki, x ning a dan farqli va $|x-a|<\delta$ tengsizlikni qanoatlantiradigan barcha $x \neq a$ nuqtalar uchun $|f(x)-b|<\varepsilon$ tengsizlik o‘rinli bo‘lsa, x argument a ga intilganda $(x \to a)$, $y=f(x)$ funksiya b limitga intiladi $(y \to b)$ va b son funksiyaning $x=a$ nuqtadagi limiti deyiladi.

Agar b son funksiyaning a nuqtadagi limiti bo‘lsa, quyidagicha yoziladi: $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$ yoki $x \to a$ da $f(x) \to b$ deb yoziladi. Agar $x \to a$ da $f(x) \to b$ bo‘lsa, u holda $y=f(x)$ funksiyaning grafigida bu quyidagicha tasvirlanadi. $|x-a|<\delta$ tengsizlikdan $|f(x)-b|<\varepsilon$ tengsizlik chiqar ekan, u holda bu, a nuqtadan δ yiroq bo‘lgan masofada turuvchi barcha x nuqtalar uchun $y=f(x)$ funksiya grafigining M nuqtalari $y=b-\varepsilon$ va $y=b+\varepsilon$ to‘g‘ri chiziqlar bilan chegaralangan, eni 2ε bo‘lgan yo'l (polosa) ichida yotadi (57-chizma) .



57-chizma.



58-chizma.

1. Eslatma. Agar x biror a sondan kichik qiymatlarnigina qabul qilib, shu a songa intilganda $f\ (x)$ funksiya b_1 limitga intilsa, u holda $\lim\limits_{x\to a-0} f(x) = b_1$ deb yoziladi va b_1 ga *f (x)* funksiyaning *a* nuqtadagi chap limiti deyiladi. Agar *x* funksiya *a* dan katta qiymatlarnigina qabul qilsa, u holda $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)=b_2$ deb yoziladi va b_2 funksiyaning *a* nuqtadagi o‘ng limiti deyiladi. (58-chizma).

Agar o‘ng va chap limitlar mavjud bo‘lib $b_1 = b_2 = b$ bo‘lsa, u holda limitning ta'rifiga ko‘ra *a* nuqtada limitning o‘zi bo‘ladi .

Misol: $\lim\limits_{x\to 3}(3x+1)=10$ ekanini isbotlaymiz. Haqiqatan ixtiyoriy $\varepsilon>0$ berilgan bo‘lsin; ushbu $|(3x+1)-10|<\varepsilon$ tengsizlik bajarilishi uchun quyidagi tengsizliklarning bajarilishi zarur:

$$|3x-9|<\varepsilon,\ |(x-3)|<\frac{\varepsilon}{3},\ -\frac{\varepsilon}{3}<x-3<\frac{\varepsilon}{3}$$

Shunday qilib, istalgan ε da x ning $|x-3|<\frac{\varepsilon}{3}=\delta$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi barcha qiymatlari uchun *3x+1* funksiya qiymatining 10 dan farqi ε dan kichik bo‘ladi. Bu esa x→3 da intilganda funksiyaning limiti 10 demakdir.

2.Eslatma. Funksiyaning limiti *x→a* da mavjud bo‘lishi uchun funksiya *x=a* nuqtada aniqlangan bo‘lishi talab qilinmaydi. Limitni topishda *a* nuqtaning *a* dan farqli atrofida funksiyaning qiymatlari qaraladi;

Misol: $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x^2-2x}=2$ ekanini isbotlaymiz.

Bu yerda funksiya *x=2* da aniqlanmagan. Ixtiyoriy ε da δ shunday topiladiki, agar $|x-2|<\delta$ bo‘lsa,

$$\left|\frac{x^2-4}{x^2-2x}-2\right|<\varepsilon \qquad (1)$$

tengsizlik bajarilishini isbotlash kerak. Ammo $x\neq 2$ da (1) tengsizlik

$$\left|\frac{(x-2)(x+2)}{x(x-2)}-2\right|=\left|\frac{(x+2)}{x}-2\right|=\frac{x-2}{x}$$

yoki $|x-2|<\varepsilon$ (2) tengsizlikga ekvivalentdir.

Shunday qilib, ixtiyoriy ε da (2) tengsizlik bajarilsa, (1) tengsizlik bajariladi (bunda $\varepsilon=\delta$). Buning o‘zi berilgan funksiya x→2 da 2 sonidan iborat limitga ega demakdir.

4.2.7. Cheksizlikka intiluvchi funksiyalar.

Endi argument o‘zgarganda *y=f(x)* funksiya cheksizlikka intilgan holni qaraymiz.

1-Ta'rif. Agar *f(x)* funksiya *a* nuqtaning biror atrofida aniqlangan va istalgan *M>0* son uchun shunday son topish mumkin bo‘lsaki, *x* ning $|x-a|<\delta$ shartni qanoatlantiradigan barcha $x\neq a$ lar uchun $|f(x)|>M$ tengsizlik o‘rinli bo‘lsa, *x→a* da *f(x)* funksiya cheksizlikka intiladi deyiladi (ya'ni $x \to a$ da funksiya cheksiz katta miqdor bo'ladi).

Agar $x \to a$ da *f(x)* funksiya cheksizlikka intilsa va bunda faqat musbat yoki manfiy qiymatlar qabul qilsa, mos ravishda bunday yoziladi:

$$\lim_{x\to a} f(x) = +\infty\ , \quad \lim_{x\to a} f(x) = -\infty$$

Misol: $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{1}{1+x} = \infty$ ekanligini isbotlang.

Yechish. $f(x) = \dfrac{1}{1+x}$ funksiyani qaraymiz.

Ixtiyoriy M>0 sonini olamiz. $|f(x)| > M$ ni almashtiramiz. $\left|\dfrac{1}{1+x}\right| > M$ bo'lsin.

Bundan $|x+1| < \dfrac{1}{M}$ bo'lishi kelib chiqadi. Agar $\delta = \dfrac{1}{M}$ deb olinsa, $|x+1| < \delta$ tengsizlikni qanoatlantiradigan x lar uchun quyidagi tengsizlik bajariladi: $\left|\dfrac{1}{1+x}\right| > \dfrac{1}{\delta} = M \quad yoki \quad \left|\dfrac{1}{1+x}\right| > M$

Bundan esa x→-1 da $f(x) = \dfrac{1}{1+x} \to \infty$ bo'lishi kelib chiqadi. Agar $x\to\infty$ da *f(x)* funksiya cheksizlikka intilsa, u holda bunday yoziladi: $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$ va jumladan $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$, $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = \infty$, $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = -\infty$ bo'lishi mumkin.

Masalan: $\lim\limits_{x\to -\infty} x^2 = +\infty$; $\lim\limits_{x\to -\infty} x^3 = -\infty$ va shunga o'xshash.

Eslatma. $x\to a$ da yoki $x\to\infty$ da *y=f(x)* funksiya chekli limitga yoki cheksizlikka intilmasligi ham mumkin.

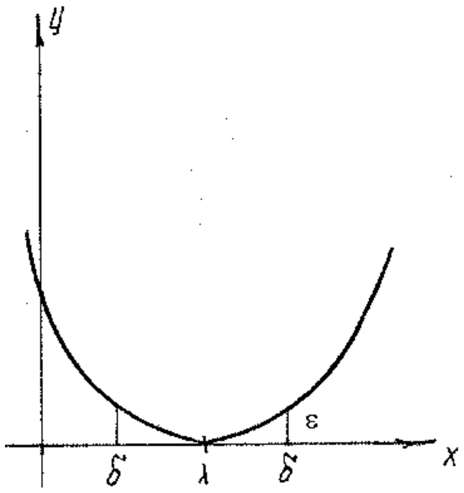
4.2.8. Cheksiz kichik funksiyalar.

Endi argumentning biror o'zgarishida nolga intiluvchi funksiyalarni tekshiramiz.

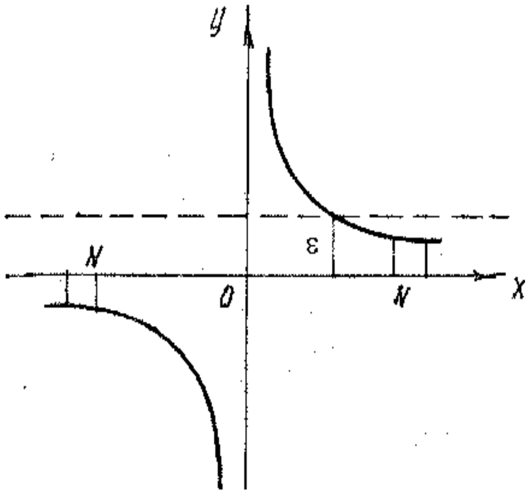
Ta'rif: Agar $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$ yoki $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$ bo'lsa, $x\to a$ da yoki $x\to\infty$ da *f(x)* funksiya cheksiz kichik funksiya deyiladi.

Ta'rifdan ko'rinadiki, ya'ni $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$ bo'lsa, bu oldindan berilgan har qanday ixtiyoriy kichik $\varepsilon > 0$ son uchun shunday $\delta > 0$ son topiladiki, x ning $|x-a| < \delta$ shartni qanoatlantiruvchi x ning barcha qiymatlari uchun $|f(x)| < \varepsilon$ sharti o'rinli bo'ladi.

Misol: *1. $f(x)=(x-1)^2$* funksiya $x\to 1$ da cheksiz kichikdir, chunki $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = \lim\limits_{x\to 1}(x-1)^2 = 0$ (59a-chizma)



59a-chizma.



59b-chizma

2. $\alpha = \frac{1}{x}$ funksiya x→∞ da cheksiz kichikdir. (59b-chizma).

Endi quyidagi teoremalarni isbotsiz keltiramiz.

1-Teorema. Agar *y=f(x)* funksiya o‘zgarmas son b bilan cheksiz kichik funksiya $\alpha(x)$ ning yig‘indisi $y = b + \alpha(x)$....(*) ko‘rinishda berilsa u holda, *x→a* yoki *x*→ ∞ da $\lim y = b$ bo‘ladi.

Aksincha, agar *limy=b* bo‘lsa, $y = b + \alpha(x)$ deb yozish mumkin, bu yerda $\alpha(x)$ cheksiz kichik funksiya.

Isboti: (*) tenglikdan: $|y-b| = |\alpha(x)|$ kelib chiqadi. Ammo ixtiyoriy ε da, biror qiymatdan boshlab, x ning barcha qiymatlari $|\alpha(x)| < \varepsilon$ munosabatni qanoatlantiradi, demak, biror qiymatdan boshlab, y ning barcha qiymatlari uchun $|y-b| < \varepsilon$ tengsizlik qanoatlantiriladi. Buning o‘zi *limy=b* demakdir.

Misol: $y = 1 + \frac{1}{x}$ funksiya berilgan bo‘lsin, u holda $\lim\limits_{x\to\infty} y = 1$ va aksincha $\lim\limits_{x\to\infty} y = 1$ bo‘lgani uchun o‘zgaruvchi y ni 1 bilan cheksiz kichik funksiyaning yig‘indisi ya’ni $y = 1 + \alpha(x)$ ko‘rinishda yozish mumkin.

2-Teorema. Agar *x→a* da (yoki x→∞ da) *α=α(x)* nolga intilsayu, lekin nolga aylanmasa, u holda $y = \frac{1}{\alpha(x)}$ cheksizlikka intiladi.

3-Teorema. Ikki, uch va umuman ma'lum sondagi cheksiz kichik funksiyalarning algebraik yig‘indisi cheksiz kichik funksiyadir.

4-Teorema. Cheksiz kichik *α=α(x)* funksiyaning cheklangan *z=z(x)* funksiya bilan ko‘paytmasi *x→a* (yoki x→∞) da cheksiz kichik miqdordir.

4.2.9 Limitlar haqida asosiy teoremalar.

1-Teorema. Chekli sondagi funksiyalar algebraik yig‘indisining limiti bu funksiyalar limitlarining algebraik yig‘indisiga teng.

$$\lim(U_1 + U_2 + ... + U_n) = \lim U_1 + \lim U_2 + ... + \lim U_n$$

Isboti: Isbotni ikki qo‘shiluvchi uchun keltiramiz, qo‘shiluvchilar soni har qancha bo‘lganda ham isbot o‘z kuchida qoladi.

Aytaylik, $\lim U_1 = b_1$; $\lim U_2 = b_2$ bo‘lsin. U holda 4.2.8 mavzudagi 1-teoremaga asosan $U_1 = b_1 + \alpha_1(x)$, $U_2 = b_2 + \alpha_2(x)$; $\alpha_1(x)$, $\alpha_2(x)$, lar cheksiz kichik miqdorlar. Demak, $U_1 + U_2 = (b_1 + b_2) + (\alpha_1 + \alpha_2)$; $(b_1 + b_2)$-o'zgarmas miqdor, $(\alpha_1 + \alpha_2)$ esa cheksiz kichik miqdor.

$$\lim(U_1 + U_2) = b_1 + b_2 = \lim U_1 + \lim U_2$$

Misol:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^3 + 2x^2}{x^3} = \lim_{x\to\infty}\left(1 + \frac{2}{x}\right) = \lim_{x\to\infty} 1 + \lim_{x\to\infty}\frac{2}{x} = 1 + 0 = 1$$

2-Teorema. Chekli sondagi funksiyalar ko‘paytmasining limiti bu funksiyalar limitlarining ko‘paytmasiga teng.

$$\lim U_1 U_2 \ldots U_n = \lim U_1 . \lim U_2 \ldots . \lim U_n$$

Isboti:

$$\lim U_1 = b_1 \qquad \lim U_2 = b_2$$

$$U_1 = b_1 + \alpha_1 \qquad U_2 = b_2 + \alpha_2$$

$$U_1 U_2 = (b_1 + \alpha_1)(b_2 + \alpha_2) = b_1 b_1 + b_1\alpha_2 + b_2\alpha_1 + \alpha_1\alpha_2$$

bo‘lsin. $b_1 b_2$ ko‘paytma o‘zgarmas miqdor.

Demak, $\lim U_1 U_2 = \lim U_1 \lim U_2$

Natija: o‘zgarmas ko‘paytuvchini limit ishorasidan tashqariga chiqarish mumkin. $\lim cU_1 = c\lim U_1$ Agar $\lim U_1 = b_1$, c –o‘zgarmas. *limc =c,*

$$\lim(cb_1) = \lim c \cdot \lim b_1 = c\lim b_1$$

3-Teorema. Ikkita funksiya bo‘linmasining limiti, maxraj limiti noldan farqli bo‘lsa, bu funksiyalar limitlarining bo‘linmasiga teng.

Agar $\lim V \neq 0$ bo‘lsa, $\lim \frac{U}{V} = \frac{\lim U}{\lim V}$

Isboti: $\lim U = a$, $\lim V \neq b \neq 0$

DEMAK, U=*A*+*A* , V=*B*+*B* , BU YERDA *A* VA *B* CHEKSIZ KICHIK MIQDORLAR.

$$\frac{U}{V} = \frac{a+\alpha}{b+\beta} = \frac{a}{b} + \left(\frac{a+\alpha}{b+\beta} - \frac{a}{b}\right) = \frac{a}{b} + \frac{\alpha b - a\beta}{b(b+\beta)}$$

$$\lim \frac{U}{V} = \frac{a}{b} = \frac{\lim U}{\lim V} \quad ;$$

4-Teorema (*teorema isbotsiz keltiriladi*) Agar uchta *f₁(x), f₂(x)* va $\varphi(x)$ funksiyalarning qiymatlari orasida $f_1(x) \leq \varphi(x) \leq f_2(x)$) tengsizliklar bajarilsa, bunda $x \to a$ da (yoki $x \to \infty$ da) $f_1(x)$, va $f_2(x)$ birgina b limitga intilsa, u holda $x \to a$ da (yoki $x \to \infty$da) $\varphi(x)$ ham shu limitga intiladi, ya’ni $\lim \varphi(x) = b$ bo‘ladi.

Bu teorema oraliq funksiyaning limiti haqida teorema deyiladi.

O‘z-o‘zini tekshirish uchun savollar.

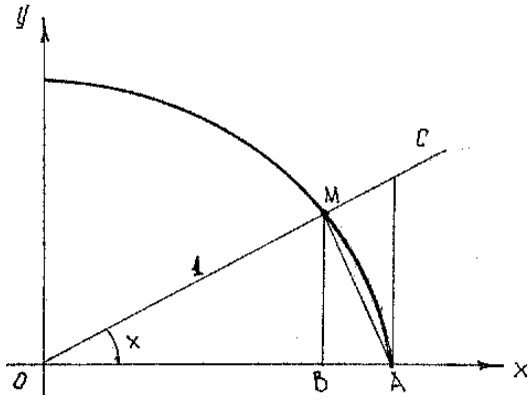
1. Sonli ketma-ketliklar deb nimaga aytiladi?
2. Ketma-ketliklarning berilish usullarini ayting va misollar keltiring.
3. Qanday ketma-ketliklar yuqoridan (quyidan) chegaralangan deb ataladi? Misollar keltiring.
4. Qanday ketma-ketliklar monoton o‘suvchi (kamayuvchi, o'smaydigan, kamaymaydigan) deb ataladi?
5. Ketma-ketliklarning limiti ta'rifini aytib bering.Yaqinlashuvchi ketma-ketlikka misol keltiring.
6. Yaqinlashuvchi sonli ketma-ketliklarning limitlari haqidagi teoremalarni aytib, isbotlab bering.
7. O'zgaruvchi miqdorning limiti ta'rifini tengsizlik yordamida ifodalang va uni geometrik nuqtai nazardan tushuntiring.
8. Funksiyaning $x \to a$ dagi limiti ta'rifini tengsizlik yordamida ifodalang va uni geometrik nuqtai nazardan tushuntiring.
9. Qanday holatda o‘zgaruvchi x miqdor cheksizlikka intiladi deyiladi?
10. Funksiyaning o‘ng va chap limitlari nima?
11. Cheksiz katta va cheksiz kichik funksiyalar orasida qanday bog‘lanish bor?
12. Limitga ega bo‘lgan funksiya bilan cheksiz kichik funksiya orasida qanday bog‘lanish bor?
13. Funksiyalar yig‘indisining, ko'paytmasining limiti haqidagi teoremalarni isbotlang.
14. Bo‘linmaning limiti haqidagi teoremani isbotlang.
15. Oraliq funksiyaning limiti haqidagi teoremani aytib bering.

4.3.Ajoyib limitlar.

4.3.1. $x \to 0$ da $\frac{\sin x}{x}$ funksiyaning limiti.

Teorema. $\frac{\sin x}{x}$ funksiya $x \to 0$ da 1 ga teng limitga ega.

Isboti. $\frac{\sin x}{x}$ funksiya x=0 da aniqlanmagan, chunki kasrning surat va maxraji nolga aylanadi. Bu funksiyaning $x \to 0$ limitini topamiz. Radiusi 1 bo‘lgan aylanani qaraymiz (60-chizma).



60-chizma.

Markaziy burchakni x bilan belgilaymiz, bunda $0 < x < \frac{\pi}{2}$

Chizmadan quyidagilar chiqadi:

$$\Delta MOA \text{ yuzi} < MOA \text{ sektor yuzi} < \Delta COA \text{ yuzi.}$$

$$\Delta MOA \text{ yuzi} \quad S = \frac{1}{2} OA \cdot MB = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \sin x = \frac{1}{2} \sin x$$

$$MOA \text{ sektor yuzi} \quad S = \frac{1}{2} OA \cdot \overset{\cup}{MA} = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot x = \frac{1}{2} x$$

$$\Delta COA \text{ yuzi} \quad S = \frac{1}{2} OA \cdot AC = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot tgx = \frac{1}{2} tgx$$

Demak, $\sin x < x < tg\, x$

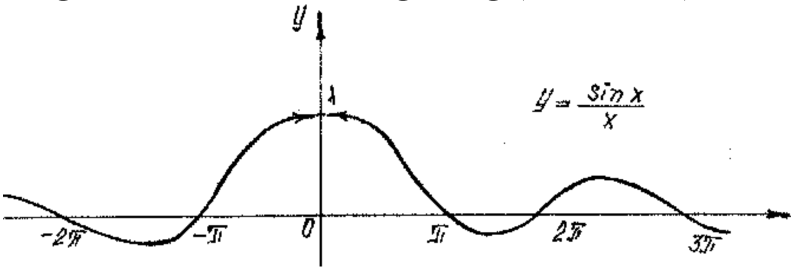
Hamma hadlarni *sinx* ga bo‘lamiz.

$1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}$ yoki $1 > \frac{x}{\sin x} > \frac{1}{\cos x}$ Bu tengsizliklarni *x>0* deb chiqardik.

$\frac{\sin(-x)}{-x} = \frac{\sin x}{x}$; $\cos(-x) = \cos x$ ekanini e'tiborga olsak, x < 0 bo‘lsa ham tengsizlik to‘g‘ri bo‘lib chiqadi.

$$\lim_{x \to 0} \cos x = 1 \qquad \lim_{x \to 0} 1 = 1$$

Demak, $\frac{\sin x}{x}$ funksiya shunday ikki funksiya oraliqidaki, ularning ikkalasi ham birgina limitga intiladi va u limit 1 ga teng (61-chizma).



61-chizma.

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

Misol. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{tg3x}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{3\sin 3x}{3x} \frac{1}{\cos 3x} = 3 \lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin 3x}{3x} \lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{\cos 3x} = 3\frac{1}{1} = 3$

4.3.2. $e-$soni.

Teorema. $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n -$ o‘zgaruvchi $n \to \infty$ da 2 bilan 3 orasida yotuvchi limitga ega. (Teoremaning isbotini talabalarga topshiramiz)

Izoh. Asosi *e* bo‘lgan ko‘rsatkichli funksiya $y=e^x$ matematika kursida juda ko'p qo‘llaniladi. Bu funksiyani ko‘pincha eksponental funksiya deb yuritishadi.

O‘z-o‘zini tekshirish uchun savollar.

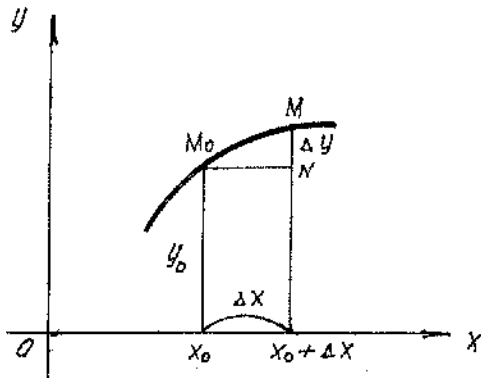
1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$ formulani isbotlang.
2. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n=e$ formulani isbotlang.
3. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=e$ formulani isbotlang.

4.4. Funksiyalarning uzluksizligi.

4.4.1. Funksiyalarning uzluksizligi.

y=f(x) funksiya *(a,b)* intervalda aniqlangan bo‘lsin. $x_0\in(a,b)$nuqtada, unga funksiyaning $y_0=f(x_0)$ qiymati to‘g‘ri kelsin. Boshqa biror $x\in(a,b)$ nuqtani olaylik. Agar x biror musbat yoki manfiy (farqi yo'q) Δx orttirma olsa $x=x_0+\Delta x$ qiymatga ega bo‘lib qolsa, u holda y funksiya ham biror Δy orttirma oladi.

Funksiyaning yangi orttirilgan qiymati $y_0+\Delta y=f(x_0+\Delta x)$ bo‘ladi. (62-chizma) $\Delta x=x-x_0$ argument orttirmasi, funksiyaning orttirmasi esa $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$ formula bilan ifodalanadi.



62-chizma.

1-Ta'rif: Agar *y=f(x)* funksiya x_0 nuqtada va uning atrofida aniqlangan bo‘lib, $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y=0$ yoki $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\left[f(x_0+\Delta x)-f(x_0)\right]=0$ bo‘lsa, $x=x_0$ qiymatda (yoki x_0 nuqtada) funksiya uzluksiz deyiladi. Uzluksizlik shartini bunday yozish mumkin.

$$\lim_{\Delta x\to 0}f(x_0+\Delta x)=f(x_0) \qquad (1)$$

yoki $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$ ammo $x_0=\lim\limits_{x\to x_0}x$ yoki (1) tenglikni tubandagicha yozish mumkin. $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f\left(\lim\limits_{x\to x_0}x\right)$ya'ni $x\to x_0$ da uzluksiz funksiyaning limitini topish uchun funksiyaning ifodasida argument *x* o‘rniga uning x_0 qiymatini qo‘yish kifoya.

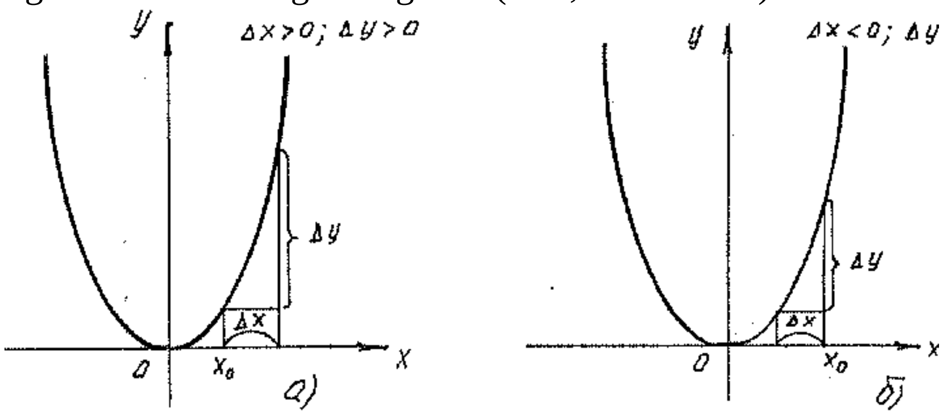
Berilgan nuqtada funksiya uzluksizligining geometrik tasviri shuni bildiradiki, agar faqat $|\Delta x|$ yetarli kichik bo‘lsa $x_0+\Delta x$va x_0 nuqtalarda funksiya grafigi ordinatalarining ayirmasi absolyut qiymat bo‘yicha ixtiyoriy kichik bo‘ladi.

Misol: $y = x^2$ funksiyaning ixtiyoriy x_0 va $x_0=2$, nuqtada uzluksizligini ko`rsating.

Yechish:

a) $y_0 = x_0^2$; $y_0 + \Delta y = (x_0 + \Delta x)^2$; $\Delta y = (x + \Delta x)^2 - x_0^2 = 2x_0\Delta x + \Delta x^2$;

x istalgan usul bilan nolga intilganda (63 a,b-chizmalar)



63-chizma.

$$\lim_{\Delta x\to o} \Delta y = \lim_{\Delta x\to o}\left(2x_0\Delta x + \Delta x^2\right) = 2x_0 \lim_{\Delta x\to o}\Delta x + \lim_{\Delta x\to o}\Delta x \cdot \lim_{\Delta x\to o}\Delta x = 0$$

b)

$$y_0 = 2^2 = 4; \quad \Delta y = (2+\Delta x)^2 - 4$$

$$\Delta y = 4 + 4\Delta x + (\Delta x)^2 - 4 = 4\Delta x + (\Delta x)^2$$

$$\lim_{\Delta x\to o} \Delta y = \lim_{\Delta x\to o}\left(4\Delta x + (\Delta x)^2\right) = 4\lim_{\Delta x\to o}\Delta x + \lim_{\Delta x\to o}\Delta x \cdot \lim_{\Delta x\to o}\Delta x = 0$$

1-Teorema. Chekli sondagi funksiyalar x_0 nuqtada uzluksiz bo‘lsa unda ularning yig‘indisi ham x_0 nuqtada uzluksiz bo‘ladi.

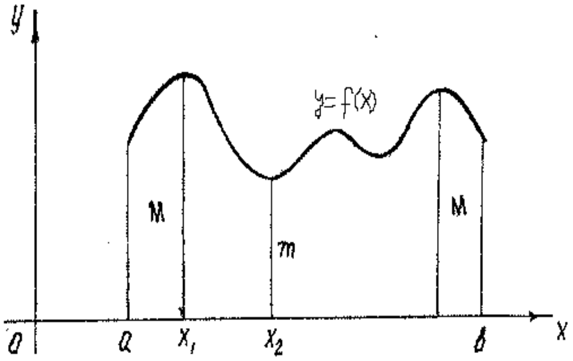
2-Teorema. Har qanday elementar funksiya o‘zi aniqlangan har bir nuqtada uzluksizdir. (Teoremalarni mustaqil isbotlash talabalarda topshiriladi).

4.4.2. Uzluksiz funksiyalarning ba'zi xossalari.

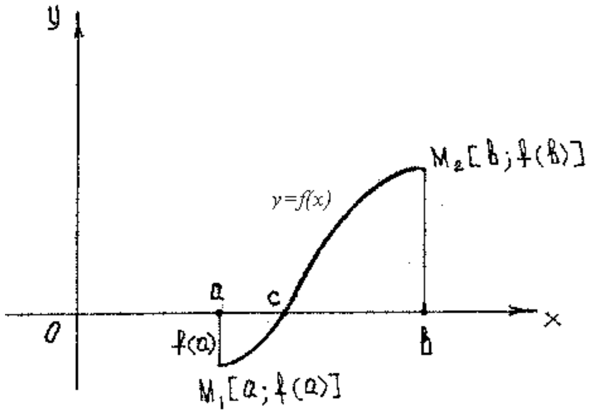
Xossalar quyidagi teoremalar bilan ifodalanadi.

1-Teorema. Agar $y=f(x)$ funksiya $[a,b]$ kesmada uzluksiz bo‘lsa, u holda $[a;b]$ kesmada funksiya o'zining eng kichik va eng katta qiymatiga erishadi, ya’ni shunday $x_1, x_2 \in (a,b)$ nuqtalar mavjudki, barcha $x \in (a,b)$ lar uchun $f(x_1) \geq f(x)$ va $f(x_2) \leq f(x)$ tengsizliklar o‘rinli bo‘ladi.

Funksiyani $f(x_1)$ qiymatini $y=f(x)$ funksiyaning $[a,b]$ kesmadagi eng katta qiymati deb, $f(x_2)$ ni esa eng kichik qiymati deb ataymiz. Bu teorema qisqacha bunday ifodalanadi. Kesmada uzluksiz funksiya hech bo‘lmaganda bir marta eng katta M qiymatga va eng kichik m qiymatga erishadi (64-chizma).

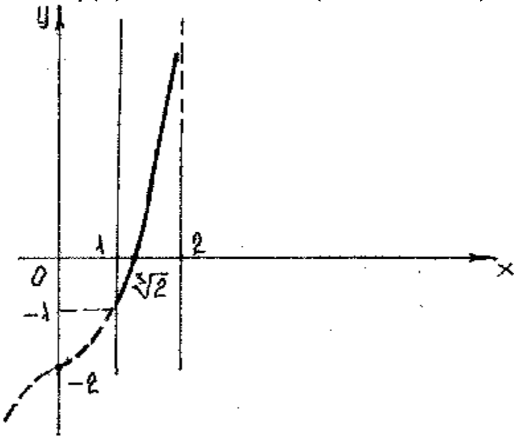


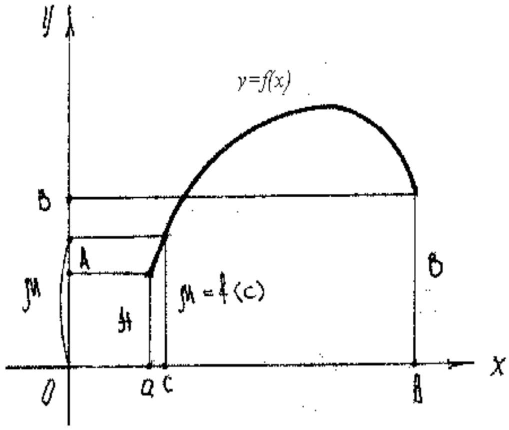
64-chizma.



65-chizma.

2-Teorema. Agar *y=f(x)* funksiya *[a,b]* kesmada uzluksiz bo‘lib, bu kesmaning uchlarida turli ishorali qiymatlarni qabul qilsa, u holda *[a,b]* kesmada hech bo‘lmaganda shunday bir *x=c* nuqta topiladiki, bu nuqtada funksiya nolga aylanadi *f(c)=0; a<c<b* (65-chizma).





66-chizma. 67-chizma.

Misol: $y = x^3 - 2$ funksiya berilgan. Bu funksiya *[1,2]* kesmada uzluksiz. Demak, bu kesmada $y = x^3 - 2$ nolga aylanadigan nuqta mavjud. Haqiqatan ham $x = \sqrt[3]{2}$ da *y=0* (66-chizma).

3-Teorema. y=*f(x)* funksiya *[a,b]* kesmada aniqlangan va uzluksiz bo‘lsin. Agar kesmaning uchlarida funksiya teng bo‘lmagan *f(a)=A, f(b)=B* qiymatlarni qabul qilsa, u holda funksiya *A* va *B* sonlar orasidagi barcha qiymatlarni qabul qiladi. U holda A< μ <B shartni qanoatlantiradigan ixtiyoriy μ son uchun kamida bitta c$\in$*[a;b]* nuqta mavjudki, unda $f(c)=\mu$ tenglik to‘g‘ri bo‘ladi (67-chizma). 2 - teorema bu teoremani xususiy holi, chunki *A* va *B* lar turli ishoralarga ega bo‘lsa, u holda μ ni o‘rnida O ni olish mumkin.

O‘z-o‘zini tekshirish uchun savollar.

1. $y=f(x)$ funksiyaning x_0 nuqtadagi uzluksizligi ta'rifini keltiring va geometrik talqin eting.
2. Kesmada uzluksiz funksiyalarning xossalarini ta'riflab bering.

4.5. HOSILA

4.5.1 Hosila tushunchasiga olib keladigan masalalar.

Hosila tushunchasiga olib keladigan masalalar jumlasiga qattiq jismni to‘g‘ri chiziqli harakatini, yuqoriga vertikal holda otilgan jismning harakatini yoki dvigatel silindridagi porshen harakatini tekshirish kabi masalalarni kiritish mumkin. Bunday harakatlarni tekshirganda jismning konkret o'lchamlarini va shaklini e'tiborga olmay, uni harakat qiluvchi moddiy nuqta shaklida tasavvur qilamiz. Biz bitta masalani olib qaraymiz.

Harakat tezligi masalasi. Aytaylik, M moddiy nuqtaning to‘g‘ri chiziqli harakat qonuniga ko‘ra uning $t=t_0$ paytdagi tezligini (oniy tezligini) topish talab qilinsin. Nuqtaning t_0 *ва* $t_0+\Delta t$ $(\Delta t \neq 0)$ vaqtlar orasidagi bosib o‘tgan yo‘li $\Delta S = f(t_0+\Delta t)-f(t_0)$ bo‘ladi. Uning shu vaqtdagi o‘rtacha tezligi $\frac{\Delta S}{\Delta t}=\frac{f(t_0+\Delta t)-f(t_0)}{\Delta t}$ ga teng.

Ma'lumki, Δt qanchalik kichik bo‘lsa, $\frac{\Delta S}{\Delta t}$ o'rtacha tezlik nuqtaning t_0 paytdagi tezligiga shunchalik yaqin bo‘ladi. Shuning uchun nuqtaning t_0 paytdagi tezligi quyidagi limitdan iborat. $V(t_0)=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta S}{\Delta t}$

4.5.2. FUNKSIYANING HOSILASI.

y=f(x) funksiya *(a,b)* intervalda aniqlangan bo‘lsin *(a,b)* intervalga tegishli x_0 va $x_0+\Delta x$ nuqtalarni olamiz.

Argument biror (musbat yoki manfiy - bari bir) Δx orttirmasini olsin, u vaqtda *y* funksiya biror Δy orttirmani oladi. Shunday qilib argumentning x_0 qiymatida $y_0=f(x_0)$ ga, argumentning $x_0+\Delta x$ qiymatda $y_0+\Delta y = f(x_0+\Delta x)$ga ega bo‘lamiz. Funksiya orttirmasi Δy ni topamiz.

$$\Delta y = f(x_0+\Delta x)-f(x_0) \qquad (1)$$

Funksiya orttirmasini argument orttirmasiga nisbatini tuzamiz.

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} \qquad (2)$$

Bu – nisbatning $\Delta x \to 0$ dagi limitini topamiz.

Agar bu limit mavjud bo‘lsa, u berilgan *f(x)* funksiyaning x_0 nuqtadagi hosilasi deyiladi va $f'(x_0)$ bilan belgilanadi. Shunday qilib, ta'rifga ko‘ra

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} \quad \text{yoki} \quad f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} \qquad (3)$$

Demak, berilgan *y=f(x)* funksiyaning argument x bo‘yicha hosilasi deb, argument orttirmasi Δx ixtiyoriy ravishda nolga intilganda funksiya orttirmasi Δy ning argument orttirmasi Δx ga nisbatining limitiga aytiladi.

Umumiy holda x ning har bir qiymati uchun $f'(x)$ hosila ma'lum qiymatga ega, ya'ni hosila ham x ning funksiyasi bo'lishini qayd qilamiz. Hosilada $f'(x)$ belgi bilan birga boshqacha belgilar ham ishlatiladi. $y';\, y'_x,\, \frac{dy}{dx}$

Hosilaning $x=a$ dagi konkret qiymati $f'(a)$ yoki $y'\Big|_{x=a}$ bilan belgilanadi.

Berilgan $f(x)$ funksiyadan hosila topish amali shu funksiyani differensiallash deyiladi. Funksiya hosilasini hosila ta'rifiga ko'ra hisoblashni ko`rsatamiz.

Misol: $y = x^2$ funksiya berilgan: uning:

1) ixtiyoriy x nuqtadagi va 2) $x=5$ nuqtadagi hosilasi y' topilsin.

Yechish:

1) argumentning x ga teng qiymatida $y = x^2$ ga teng. Argument $x + \Delta x$ qiymatida $y + \Delta y = (x + \Delta x)^2$ ga ega bo'lamiz.

$\Delta y = (x + \Delta x)^2 - x^2 = 2x(\Delta x) + (x)^2,$ $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ nisbatni tuzamiz.

$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2x + \Delta x(\Delta x)^2}{\Delta x} = 2x + \Delta x$ Limitga o'tib, berilgan funksiyadan hosila topamiz. $y' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0}(2x + \Delta x) = 2x$

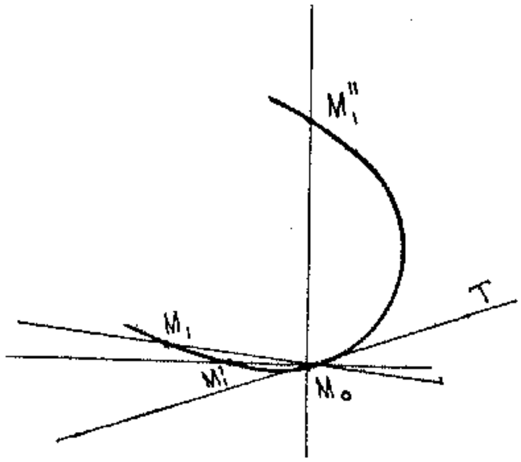
Demak, $y = x^2$ funksiyaning ixtiyoriy nuqtadagi hosilasi $y' = 2x$

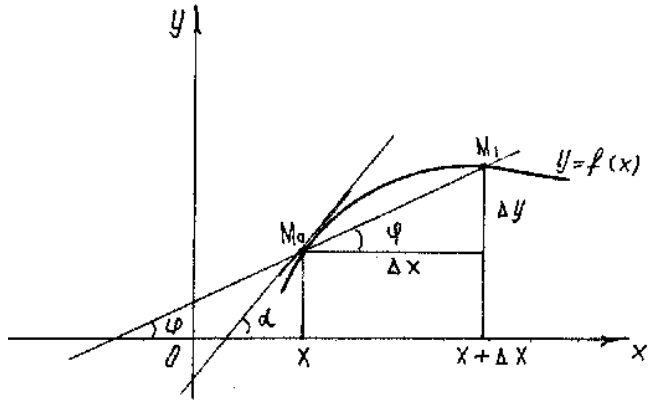
2) $x=5$ da $y'\Big|_{x=5} = 2 \cdot 5 = 10$

4.5.3. Hosilaning geometrik va mehanik ma'nosi.

Harakat qiluvchi jismning tezligini tekshirish natijasida, ya'ni mexanik tasavvurlardan chiqib borib, hosila tushunchasiga keldik. Endi hosilaning geometrik ma'nosini beramiz. Buning uchun avval egri chiziqga uning berilgan nuqtasida o'tkazilgan urinmani ta'riflab berishimiz kerak. Biror egri chiziq va unda tayin M_0 nuqta berilgan bo'lsin. Egri chiziqda bir M_1 nuqtani olamiz va $M_0 M_1$, kesuvchini o'tkazamiz. Agar M_1 nuqta egri chiziq bo'yicha M_0 nuqtaga cheksiz yaqinlasha borsa, u holda $M_0 M_1$, kesuvchi M_0M_1', M_0M_1'' va hokazo vaziyatlarni oladi.

Agar nuqta egri chiziq bo'yicha istalgan tomondan M_0 nuqtaga cheksiz yaqinlasha borganda kesuvchi ma'lum M_0T to'g'ri chiziq vaziyatini egallashga intilsa, u holda bu to'g'ri chiziq M_0 nuqtada egri chiziqqa urinma deyiladi (68-chizma).





68-chizma. 69-chizma.

To‘g‘ri burchakli koordinatalar sistemasida *y=f(x)* ga mos egri chiziqni qaraylik, x ning biror qiymatida funksiya *y=f(x)* qiymatga ega. Egri chiziqda x va *y* ni bu qiymatlariga $M_0(x,y)$ nuqta to‘g‘ri keladi. Argument *x* ga orttirma beramiz. Argumentning yangi $x+\Delta x$ orttirilgan qiymatiga funksiyaning orttirilgan $y+\Delta y = f(x+\Delta x)$ qiymati to‘g‘ri keladi.

Egri chiziqning bunga mos nuqtasi $M_1(x+\Delta x, y+\Delta y)$ nuqta bo‘ladi.

M_0 M_1 kesuvchini o‘tkazamiz va uni *Ox o‘qi*ning musbat yo‘nalishi bilan hosil qilgan burchagini φ bilan belgilaymiz. $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ nisbatni tuzamiz. Shakldan: $\frac{\Delta y}{\Delta x} = tg\varphi$ ekanligi ko‘rinadi. Agar Δx nolga intilsa, u holda kesuvchi M nuqta atrofida aylanadi (69-chizma).

Agar $\Delta x \to 0$ *da* φ burchak biror α limitga intilsa, u holda M_0 nuqtadan o'tuvchi va abssissalar o‘qining musbat yo‘nalishi bilan α burchak tashkil qiluvchi to‘g‘ri chiziq izlangan urinma bo‘ladi. Uni burchak koeffitsiyentini topish qiyin emas.

Demak, $tg\alpha = \lim\limits_{\Delta x \to 0} tg\varphi = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x)$ - (1) ya'ni argument *x* ning berilgan qiymatida *f'(x)* hosilaning qiymati *f(x)* funksiyaning grafigiga uning $M_0(x,y)$ nuqtasidagi urinmaning *(ox)* o‘qining musbat yo‘nalishi bilan hosil qilgan burchak koeffitsiyentiga teng ekan. Hosilaning mehanik ma`nosi tezlikni bildiradi.

4.5.4. Funksiyaning differensiallanuvchanligi.

Ta'rif: Agar *y=f(x)* funksiya $x=x_0$ nuqtada chekli hosilaga ega bo‘lsa, ya’ni $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$ mavjud bo‘lsa, u holda berilgan $x=x_0$ qiymatda funksiya differensiallanuvchi yoki hosilaga ega deyiladi. Agar funksiya biror *[a,b]* kesmaning yoki *(a,b)* intervalining har bir nuqtasida differensiallanuvchi bo‘lsa, u holda funksiya kesmada yoki intervalda differensiallanuvchi deyiladi.

Teorema: Agar $y=f(x)$ funksiya biror $x=x_0$ nuqtada differensiallanuvchi bo‘lsa, u holda funksiya shu nuqtada uzluksizdir.

Isboti: $y=f(x)$ funksiya x_0 nuqtada differensiallanuvchi bo‘lgani uchun $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x_0)$- chekli son.

Limitga ega bo‘lgan funksiya o‘zgarmas va cheksiz kichik funksiya yig‘indisiga teng bo‘lgani uchun quyidagicha yoza olamiz:

$\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x_0)+\gamma$ bu yerda $\Delta x\to 0$da γ nolga intiluvchi funksiya, u holda $\Delta y=f'(x_0)\Delta x+\gamma\Delta x$ bo‘ladi. Bundan $\Delta x\to 0$ da $\Delta y\to 0$, bu esa x_0 nuqtada $f(x)$ funksiya uzluksiz demakdir.

Shunday qilib, uzilish nuqtasida funksiya hosilaga ega bo‘la olmaydi. Teskari xulosa to‘g‘ri emas, ya’ni biror $x=x_0$ nuqtada $y=f(x)$ funksiya uzluksiz bo‘lishidan bu nuqtada u differensiallanuvchi ham bo‘ladi degan xulosa chiqmaydi, x_0 nuqtada funksiya hosilaga ega bo‘lmasligi ham mumkin.

4.5.5. O‘zgarmas miqdorning hosilasi. O‘zgarmas miqdor bilan funksiya ko‘paytmasining hosilasi, yig‘indining, ko‘paytmaning, bo‘linmaning hosilasi.

1. O‘zgarmas miqdorning hosilasi nolga teng, ya’ni agar $y=c$ bo‘lsa ($c=const$) $y'=0$ bo‘ladi.

2. O‘zgarmas ko‘paytuvchini hosila ishorasidan tashqariga chiqarish mumkin $y=cu(x)$ bo‘lsa $y'=cu'(x)$ bo‘ladi.

3. Chekli sondagi differentsiallanuvchi funksiyalar yig‘indisining hosilasi shu funksiyalar hosilalarining yig‘indisiga teng.

$$y=U(x)+V(x)+W(x);\quad y'=U'(x)+V'(x)+W'(x)$$

4. Ikkita differensiallanuvchi funksiyalar ko‘paytmasining hosilasi birinchi funksiya hosilasining ikkinchi funksiya bilan ko‘paytmasi plyus birinchi funksiyaning ikkinchi funksiya hosilasi bilan ko‘paytmasiga teng.

$y=u\vartheta$ bo‘lsa $y'=u'\vartheta+u\vartheta'$.

5. Kasrning hosilasi kasrga teng bo‘lib, uning maxraji berilgan kasr maxrajining kvadratidan, surati esa maxrajining surat hosilasi bilan va suratning maxraj hosilasi bilan ko‘paytmalari orasidagi ayirmadan iborat. Agar

$y=\dfrac{u}{\vartheta}$ bo‘lsa $y=\dfrac{u'\vartheta-u\vartheta'}{\vartheta^2}$

4.5.6. Murakkab funksiyaning hosilasi.

Aytaylik, $y=F(u)$ murakkab funksiya bo‘lsin ya’ni $y=F(u)$, $u=\varphi(x)$ yoki $y=F[\varphi(x)]$, u - o‘zgaruvchi, oraliq argumenti deyiladi. $y=F(u)$ va $u=\varphi(x)$ differensiallanuvchi funksiyalar bo‘lsin.

Murakkab funksiyani differensiallash qoidasini keltirib chiqaramiz.

Teorema: Murakkab *F(u)* funksiyaning erkli o‘zgaruvchi *x* bo‘yicha hosilasi bu funksiyaning oraliq argumenti bo‘yicha hosilasining oraliq argumentining erkli o‘zgaruvchi *x* bo‘yicha hosilasiga ko‘paytmasiga teng, ya’ni

$$y'_x = F'_u(u)\cdot u'_x(x)\text{.......}(1)$$

Misol: $y=\left(x^5+4x^4+3x^2+2\right)^5$ funksiyaning hosilasini toping.

Yechish: berilgan funksiyani murakkab funksiya deb qaraymiz ya’ni $y=u^5;\quad u=x^5+4x^4+3x^2+2$ (1) formulaga asosan

$$y'_x=y'_u\cdot u'_x=\left((x^5+4x^4+3x^2+2)^5\right)'=5\left(x^5+4x^4+3x^2+2\right)^4\cdot\left(5x^4+16x^3+6x\right);$$

4.5.7. Ba'zi bir elementar funksiyalarning hosilalari.

1) Logarifmik funksiyaning hosilasi.

1-Teorema: $y=\log_a x$ funksiyaning hosilasi $\frac{1}{x}\log_a e$ ga teng ya’ni agar $y=\log_a x$ bo‘lsa, $y'=\frac{1}{x}\log_a e$ bo‘ladi.

Isboti: *x* ga Δx ga orttirma beramiz, u holda y ham Δy orttirma oladi; ya’ni $y+\Delta y=\log_a(x+\Delta x)$

$$\Delta y=\log_a(x+\Delta x)-\log_a x=\log_a\left(\frac{x+\Delta x}{x}\right)=\log_a\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right):$$

Tenglikning har ikkala tomonini Δx ga bo‘lamiz.

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{1}{\Delta x}\cdot\log_a\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right);\quad \frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{1}{x}\frac{x}{\Delta x}\cdot\log_a\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)=\frac{1}{x}\cdot\log_a\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}}$$

$\frac{\Delta x}{x}=\alpha$ bilan belgilaymiz. $\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{1}{x}\cdot\log_a(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}$

$\frac{\Delta x}{x}=\alpha$ bo‘lgani uchun, $y'=\lim\limits_{\alpha\to 0}\frac{1}{x}\cdot\log_a(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}=\frac{1}{x}\log_a e$ bo‘ladi.

$\log_a e=\frac{1}{\ln a}\qquad y'=\frac{1}{x}\frac{1}{\ln a}.$

Agar *y*=*lnx* bo‘lsa $y'=\frac{1}{x}$ bo‘ladi. $y'=\frac{1}{x}$

2) n butun va musbat bo‘lganda $y=x^n$ funksiyaning hosilasi.

2-Teorema: $y=x^n$ funksiyaning hosilasi (bunda n butun musbat) nx^{n-1} ga teng, ya’ni $y=x^n$ bo‘lsa $y'=n\cdot x^{n-1}$ ga teng.

1) $y+\Delta y=(x+\Delta x)^n$

2) $\Delta y = (x+\Delta x)^n - x^n = x^n + \frac{n}{1}x^{n-1}\Delta x + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}x^{n-2}(\Delta x)^2 + \ldots . + (\Delta x)^n - x^n$

yoki $\Delta y = nx^{n-1}\ \ \Delta x + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}x^{n-2}\ (\Delta x)^2 + \ldots .. + (\Delta x)^n$

3) $\frac{\Delta y}{\Delta x} = nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}x^{n-2}\Delta x + \ldots .. + (\Delta x)^{n-1}$

4) $y' = \lim\limits_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0}\left[nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}x^{n-2}\Delta x + \ldots .. + (\Delta x)^{n-1}\right] = nx^{n-1}$

Demak, $y' = nx^{n-1}$. Bu formulani n kasr va manfiy bo‘lgan holda ham to‘g‘riligini ko‘rsatish mumkin.

3) *y=sinx* , *y=cosx* funksiyaning hosilalari.

3-Teorema: sinx ning hosilasi cosx, ya’ni agar *y=sinx* bo‘lsa *y'=cosx* ga teng.

Isboti:

1) $y + \Delta y = \sin(x+\Delta x)$

2)

$$\Delta y = \sin(x+\Delta x) - \sin x = 2\sin\frac{x+\Delta x - x}{2}\cdot\cos\frac{x+\Delta x + x}{2} = 2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)$$

3) $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x} = \frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}\cdot\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)$

4) $y' = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}\cdot\lim\limits_{\Delta x\to 0}\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)$

ammo $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\sin{}^{\Delta x}/_{2}}{{}^{\Delta x}/_{2}} = 1$ bo‘lgani uchun $y' = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right) = \cos x$.

4-Teorema: cosx ning hosilasi *(cosx)' = -sinx* ga teng.

Isboti: (yuqoridagiga o‘xshash, isbot qilinadi, isbot qilish talabalarni o'zlariga topshiriladi)

5-Teorema: *tg x* ning hosilasi.

$(tgx)' = \frac{1}{\cos^2 x}$ ga teng.

6-Teorema: *ctgx* ning hosilasi. $(ctgx)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$ ga teng.

Bu teoremalarni mustaqil isbot qilish ham talabalarning o'zlariga topshiriladi.

4.5.8. Differensiallashning asosiy formulalari jadvali.

Oldingi mavzularda chiqarilgan barcha formulalar va qoidalarni tubandagicha jadval qilamiz.

1) y=const ; $y' = 0$

2) $y = x^{\alpha}$; $y = \alpha x^{\alpha-1}$

3) $y = \sqrt{x}$; $y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

4) $y = \frac{1}{x}$; $y = -\frac{1}{x^2}$

5) $y = a^x$; $y' = a^x \ln a$

6) $y = e^x$; $y' = e^x$

7) $y = \log_a x$; $y' = \frac{1}{x}\log_a e$

8) $y = \ln x$; $y' = \frac{1}{x}$

9) $y = \sin x$; $y' = \cos x$

10) $y = \cos x$; $y' = -\sin x$

11) $y = tgx$; $y' = \frac{1}{\cos^2 x}$

12) $y = ctgx$; $y' = -\frac{1}{\sin^2 x}$

O‘z-o‘zini tekshirish uchun savollar.

1. Funksiyaning berilgan nuqtadagi hosilasi ta'rifini bering.
2. Funksiyaning berilgan nuqtadagi hosilasining geometrik ma'nosi nimadan iborat?
3. Hosilaning mexanik ma'nosi nimadan iborat?
4. Funksiya differensiallanuvchanligini zaruriy sharti nimadan iborat?
5. O'zgarmas sonning hosilasini keltirib chiqaring.
6. Yig‘indi, ko‘paytma va bo‘linmaning hosilasini hisoblash formulalarini keltirib chiqaring.
7. Murakkab funksiyani differensiallash formulasini keltirib chiqaring.
8. Ko'rsatkichli, trigonometrik funksiyalar hosilalari uchun formulalar chiqaring.

4.6. Hosilani funksiyalarni tekshirishga tadbiqi.

4.6.1. Funksiyaning o‘sishi va kamayishi.

Hosila tushunchasini funksiyani o‘sishi va kamayishini tekshirishga tadbiq etamiz.

1-Teorema: 1) agar *[a;b]* kesmada hosilaga ega bo‘lgan *f(x)* funksiya shu kesmada o‘suvchi bo‘lsa, uning hosilasi *[a,b]* kesmada manfiy bo‘lmaydi ya'ni $f'(x) \geq 0$

2) agar *f(x)* funksiya *[a;b]* kesmada uzluksiz *(a,b)* oraliqda differensiallanuvchi bo‘lsa va $a<x<b$ uchun $f'(x)>0$ bo‘lsa, bu funksiya *[a;b]* kesmada o‘sadi.

Isboti: Teoremaning birinchi qismini isbotlaymiz.

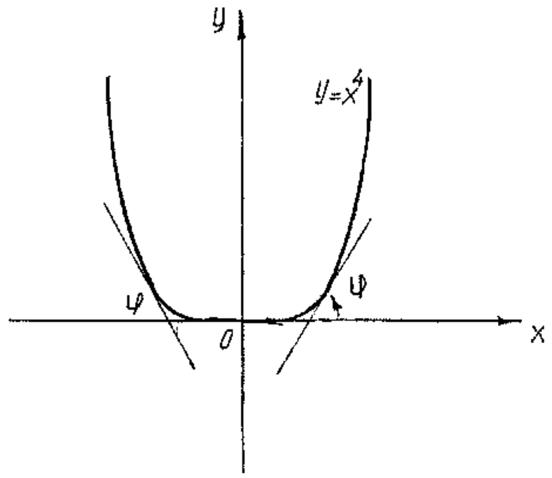
f(x) funksiya *[a;b]* kesmada o‘sadi deb faraz qilamiz x ga Δx orttirma beramiz $\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$ nisbatni tuzamiz. *f(x)* o‘suvchi funksiya, shunga ko‘ra

$\Delta x>0$ bo‘lganda $f(x+\Delta x)>f(x)$

$\Delta x<0$ bo‘lganda $f(x+\Delta x)<f(x)$

Ikkala holda ham $\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}>0$

Demak, $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}\geq 0$ Endi ikkinchi qismini isbotlaymiz. *[a;b]* oraliqda *f'(x)>0* deb faraz qilamiz. *[a;b]* kesmaga tegishli ikkita ixtiyoriy x_1 va x_2 $(x_1< x_2)$ qiymatini ifodalaymiz. Lagranjning chekli orttirmalar haqidagi teoremasiga ko‘ra



$f(x_2)-f(x_1)=f'(\xi)(x_2-x_1)$ $\qquad x_1<\xi<x_2$

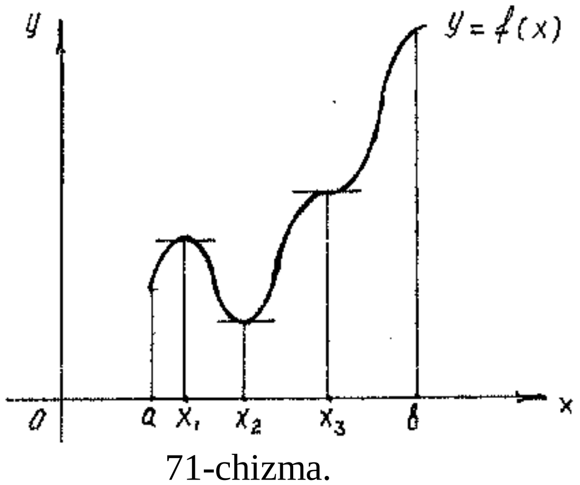
70-chizma.

Shartga ko‘ra, $f'(\xi)>0$ demak $f(x_2)-f(x_1)>0$ bu esa *f(x)* o‘suvchi funksiya demakdir. Agar *f(x)* funksiya *[a;b]*kesmada kamaysa shu kesmada $f'(x)\leq 0$ bo‘ladi. Agar *(a,b)* oraliqda $f'(x)<0$ bo‘lsa *[a;b]* kesmada *f(x)* kamayadi. Funksiya faqat kamayuvchi yoki faqat o‘suvchi bo‘ladigan intervallar monotonik intervallar deyiladi.

Misol: $y=x^4$ funksiyaning o‘sish va kamayish sohalari topilsin. Hosilani topamiz. $y'=4x^3$ *x>0* bo‘lsa $y'>0$ funksiya o‘sadi. *x<0* bo‘lsa $y'<0$ funksiya kamaydi (70-chizma).

4.6.2. Funksiyaning maksimumi va minimumi.

1-Ta'rif: Agar *f(x)* funksiyaning x_1 nuqtasidagi qiymati x_1 ni o‘z ichiga olgan bironta intervalning hamma nuqtalardagi qiymatlaridan katta bo‘lsa f(x) funksiya x_1 nuqtada maksimum (max) ga ega bo‘ladi. Boshqacha aytganda, agar absolyut miqdori bo‘yicha yetarli darajada kichik bo‘lgan har qanday musbat(yoki manfiy) Δx uchun $f(x_1+\Delta x)<f(x_1)$ bo‘lsa, f(x) funksiya $x=x_1$ nuqtada maksimumga ega bo‘ladi. 71-chizmada y=f(x) funksiya $x=x_1$ nuqtada maksimumga ega.



71-chizma.

2-Ta'rif: Agar absolyut miqdori bo‘yicha yetarli darajada kichik bo‘lgan har qanday Δx uchun $f(x_2 + \Delta x) > f(x_2)$ bo‘lsa f(x) funksiya $x=x_2$ nuqtada minimumga ega bo‘ladi.

Masalan: $y=x^4$ funksiya $x=0$ da minimumga ega.

Maksimum va minimum ta'riflari munosabati bilan quyidagi hollarga e'tibor berish kerak.

1) kesmada aniqlangan funksiya x ning faqat qaralayotgan kesmaning ichidagi qiymatlarida maksimal va minimal qiymatlariga yetishi mumkin;

2) funksiyaning maksimumi va minimumini qaralayotgan kesmada uning eng katta va eng kichik qiymatlari deb qarash xato bo‘ladi.

Funksiyaning maksimum va minimumlari funksiyaning ekstremumlari yoki ekstremal qiymatlari deyiladi. Ekstremal qiymatlar topish metodi quyidagicha:

1-Teorema: (ekstremum mavjudligi zaruriy sharti). Agar differensiallanuvchi y=f(x) funksiya $x=x_1$ nuqtada maksimumga yoki minimumga ega bo‘lsa uning hosilasi shu nuqtada nolga aylanadi, ya’ni $f'(x_1) = 0$ bo‘ladi. Agar f(x) funksiya maksimum va minimum nuqtalarda hosilaga ega bo‘lsa, y=f(x) egri chiziqning shu nuqtalaridagi o‘tkazilgan urinma *Ox* o‘qiga parallel bo‘ladi.

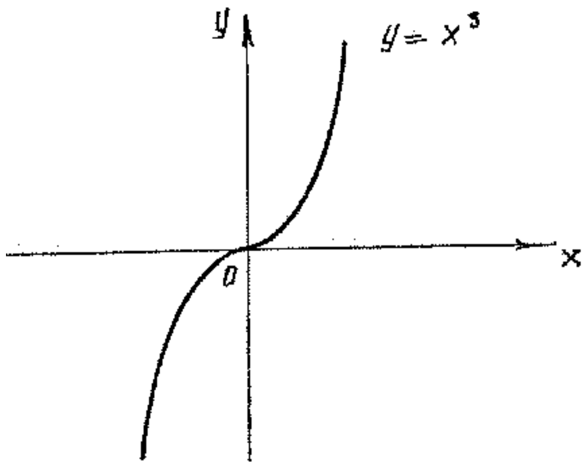
Haqiqatan ham $tgx = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x)$ tenglikdan, (bu yerda α urinma bilan Ox o‘qi orasidagi burchak) α =0 ekanligi kelib chiqadi. 1-teoremadan bevosita ushbu natija kelib chiqadi, agar argument x ning qaralayotgan hamma qiymatlarida *f(x)* funksiya hosilaga ega bo‘lsa, u holda funksiya x ning faqat hosilani nolga aylantiradigan qiymatlarida ekstremumga ega bo‘ladi.

Bunga teskari fikr to‘g‘ri emas. Hosilani nolga aylantiradigan har qanday qiymatda ham funksiya maksimum yoki minimum bo‘lavermaydi.

Masalan: $y = x^3$

$$y' = 3x^2; \quad x = 0$$

Funksiya hosilasi $x=o$ nuqtada nolga teng bo‘ladi, ammo bu nuqtada funksiya maksimumga yoki minimumga ega emas (72-chizma).



72-chizma

Funksiya hosilasi mavjud bo‘lmagan nuqtalarda ham funksiya ekstremumga ega bo‘lishi mumkin.

Agar biror nuqtada hosila mavjud bo‘lmasa, shu nuqtada hosila uzilishini ko‘ramiz. Argumentning hosila nolga aylanadigan yoki uziladigan qiymatlari kritik yoki kritik qiymatlar deyiladi.

Har qanday kritik qiymatda funksiya maksimum yoki minimumga ega bo‘lavermasligi mumkin. Funksiyaning ekstremumini topish uchun, hamma kritik nuqtalar topiladi, so'ngra har bir kritik nuqtani ayrim tekshirib, u nuqtada funksiya maksimum yoki minimumga ega bo‘lishi yoki bo‘lmasligi aniqlanadi.

2-Teorema: (Ekstremum mavjudligini yetarli sharti).
f(x) funksiya kritik nuqta x_1 ni o‘z ichiga olgan bironta intervalda uzluksiz va shu intervalning hamma nuqtalarida differensiallanuvchi bo‘lsin. Agar shu nuqtaning chap tomonidan o‘ng tomoniga o'tishda hosilaning ishorasi musbatdan manfiyga o‘zgarsa funksiya $x=x_1$ nuqtada maksimumga ega bo‘ladi, ya’ni

agar $\begin{cases} x < x_1 \text{ bo`lganda } f'(x) > 0 \\ x > x_1 \text{ bo`lganda } f'(x) < 0 \end{cases}$ bo‘lsa funksiya x_1 nuqtada maksimumga ega

agar $\begin{cases} x < x_1 \text{ bo`lganda } f'(x) < 0 \\ x > x_1 \text{ bo`lganda } f'(x) > 0 \end{cases}$ bo‘lsa funksiya x_1 nuqtada minimumga ega bo‘ladi.

Agar funksiya hosilasi ishorasini o‘zgartirmasa u maksimumga ham minimumga ham ega bo‘lmaydi, u o‘sadi yoki kamayadi.

4.6.3. Differensiallanuvchi funksiyani birinchi hosila yordamida ekstremumga tekshirish.

1. Funksiyaning birinchi hosilasini topamiz. Ya’ni, $f'(x)$ ni topamiz.
2. Argument x ning kritik qiymatlarini topamiz. Buning uchun:
a) birinchi tartibli hosilani nolga tenglaymiz va haqiqiy ildizlarini topamiz.
b) *x* ning $f'(x)$ hosila uzilishiga duchor bo‘ladigan qiymatlarini topamiz.
3. Hosilaning kritik nuqtadan chapdagi va o‘ngdagi ishorasini tekshiramiz. Ikkita kritik nuqta orasidagi intervalda hosilaning ishorasi o‘zgarmaydi. Shunga ko‘ra , masalan: x_2 kritik nuqtaning chap va o‘ng tomonidagi hosila ishorasini tekshirish uchun, hosilaning α va β nuqtalardagi ishorasini aniqlash kerak. $\begin{pmatrix} x_1 < \alpha < x_2 \\ x_2 < \beta < x_3 \end{pmatrix}$
4) Argumentning kritik qiymati $x=x_1$ da funksiyaning qiymatini hisoblaymiz.

kritik nuqta x_1 dan o'tishda f'(x) hosilaning ishorasi			kritik nuqtaning xarakteri
$x<x_1$	$x=x_1$	$x>x_1$	
+	$f'(x_1)=0$ yoki uziluvchi	-	maksimum nuqtasi
-	$f'(x_1)=0$	+	minimum nuqtasi
+	$f'(x_1)=0$	+	funksiya o‘sadi
-	$f'(x_1)=0$	-	funksiya kamayadi

4.6.4. Funksiyaning differensiali

Aytaylik, $y=f(x)$ funksiya $[a,b]$ kesmada differensiallanuvchi bo‘lsin. Shu funksiyaning $[a,b]$ kesmaga tegishli biror *x* nuqtasidagi hosilasi $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x)$ bo‘lsin, $\Delta x \to 0$ da nisbat ma'lum songa intiladi. Bundan ko‘rinadiki, $\Delta y \to 0$

nisbat $f'(x)$ hosiladan cheksiz kichik miqdorga farq qiladi, ya'ni $\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) + \alpha$ ikkala tomonini Δx ga ko'paytirsak

$$\Delta y = f'(x)\Delta x + \alpha\Delta x, \ldots \qquad (1)$$

Bunda, $f'(x)\Delta x, \Delta x$ ga nisbatan birinchi tartibli cheksiz kichik miqdor, $\alpha \cdot \Delta x, \Delta x$ ga nisbatan yuqori tartibli cheksiz kichik miqdor, chunki

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\alpha\Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \alpha = 0$$

Demak, Δy orttirma ikki qismdan iborat. Birinchisi bosh qismi, $f'(x) \cdot \Delta x\left(f'(x) \neq 0\right)$ ko\`paytma funksiyaning differensiali deyiladi va u dy bilan belgilanadi.

$$dy = f'(x)\Delta x \qquad (2)$$

Bundan foydalanib yuqoridagi ifodani quyidagicha yozish mumkin.

$$\Delta y = dy + \alpha\Delta x \qquad (3)$$

Funksiyaning orttirmasi funksiya differensialidan Δx ga nisbatan yuqori tartibli cheksiz kichik miqdorga farq qiladi.
Agar $f'(x) \neq 0$ bo'lsa, u holda $\alpha \cdot \Delta x$ ko'paytma dy ga nisbatan ham yuqori tartibli cheksiz kichik miqdordir.

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{dy} = 1 + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\alpha\Delta x}{f'(x)\Delta x} = 1 + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\alpha}{f'(x)} = 1 \qquad (4)$$

Shuning uchun taqribiy hisoblarda $\Delta y = dy$ deb olinadi.
Misol. $y=x^3$ funksiyaning dy differensiali va Δy orttirmasi topilsin.
1) x va Δx qiymatlarda; 2) $x = 10$, $\Delta x = 0{,}1$ qiymatlarida;

Yechish: 1) $\Delta y = (x + \Delta x)^3 - x^3 = 3x\ \Delta x + 3x(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3$

$$dy = (x^3)'\Delta x = 3x^2\Delta x$$

2) agar $x = 10$; $\Delta x = 0{,}1$ bo'lsa,

$$\Delta y = 3 \cdot 10^2 \cdot 0{,}1 + 3 \cdot 10 \cdot (0{,}1)^2 + (0{,}1)^3 = 30{,}301$$

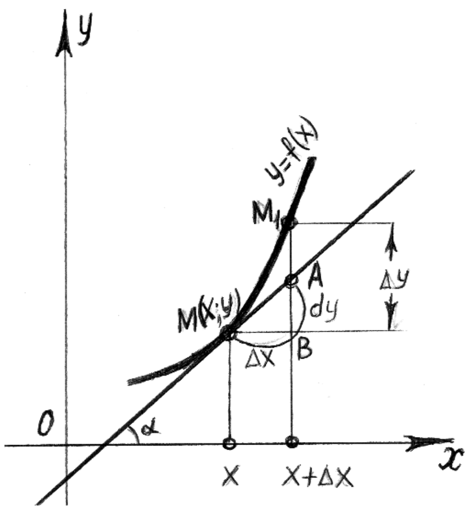
$$dy = 3 \cdot 10^2 \cdot 0{,}1 = 30$$

Δy ni dy ga almashtirganda natija 0,301 ga farq qiladi. Hosilaga tegishli teoremalar va formulalar differensiallar uchun ham o'z kuchini saqlaydi.

Misol. $y = ctg^2 x,\qquad dy = -2ctgx\frac{1}{\sin^2 x}dx;$

Differensialning geometrik ma'nosi.

$y = f(x)$ funksiya va unga xos egri chiziqni qaraylik. Egri chiziqni ixtiyoriy $M(x, y)$ nuqtasini olib, unga shu nuqtada urinma o‘tkazaylik, urinmaning Ox o‘qining musbat yo‘nalishi bilan hosil qilgan burchagini α bilan belgilaymiz. x ga Δx orttirma beramiz, u holda $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$ bo‘ladi. 73-chizmada $\Delta y = M_1B$; A nuqta esa $A(x + \Delta x\,; f(x + \Delta x))$ yoki $A(x + \Delta x; y + \Delta y)$ ΔMBA dan: $AB = MBtg\alpha$; $tg\alpha = f'(x)$; $MB = \Delta x$; $BA = f'(x)\Delta x$ bo‘lganidan differensial ta'rifiga asosan $dy = f'(x)\Delta x$. Shunday qilib $BA = dy$. (73-chizma).



73- chizma

Bundan ko‘rinadiki, $f(x)$ funksiyaning x va Δx ning berilgan qiymatlariga mos keluvchi differensiali $y = f(x)$ egri chiziqqa x nuqtada o‘tkazilgan urinmaning ordinatasi orttirmasiga teng ekan.

4.6.5. Funksiyaning differensialini taqribiy hisoblashlarga tadbiqi.

Oldingi mavzudagi (3), (4) formulalarga asosan taqribiy hisoblashlarda $f(x + \Delta x) - f(x) \approx f'(x)\Delta x$ (1) tenglikdan foydalaniladi. (1) formulani quyidagicha yozamiz.

$$f(x + \Delta x) \approx f(x) + f'(x)\Delta x \qquad (2)$$

1-Misol. $\sqrt{4{,}325}$ ni hisoblang.

Yechish. (2)-formuladan foydalanamiz.

$$\sqrt{4{,}325} \approx \sqrt{4} + \frac{1}{2\sqrt{4}} \cdot (4{,}325 - 4) = 2 + \frac{0{,}325}{4} = 2 + 0{,}081 = 2{,}081.$$

2-Misol. $\cos 48^0$ ni hisoblang.

Yechish. $f(x) = \cos x$ bo‘lsin, u holda $f'(x) = -\sin x$ (2) formulaga asosan

$\cos(x + \Delta x) \approx \cos x - \sin x\Delta x \quad x = \dfrac{\pi}{4}$ deb olamiz.

$$\Delta x = 3^0 = \frac{\pi}{180} \cdot 3\ ; \qquad x + \Delta x = \frac{\pi}{4} + \frac{3\pi}{180}\ ;$$

$$\cos 48^0 = \cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{3\pi}{180}\right) \approx \cos\frac{\pi}{4} - \frac{3\pi}{180} \cdot \sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{3\pi}{180} =$$

$$= 0{,}7071 + 0{,}7071 \cdot 0{,}052 = 0{,}7071 + 0{,}037 = 0{,}7441;$$

O‘z-o‘zini tekshirish uchun savollar.

1. Kesmada o‘suvchi va kamayuvchi funksiya ta'rifini izohlab bering.
2. Funksiyaning o‘suvchi va kamayuvchi bo‘lishining zaruriy va yetarlik shartlarini isbotlab bering.
3. Funksiyaning ekstremum nuqtalarini, funksiyaning ekstremal qiymatlarini ta'riflang.
4. Ekstremumning zaruriy va yetarlik shartlarini isbotlang.
5. Funksiyani umumiy tekshirish va grafigini yasash sxemasini bayon qiling.
6. Funksiya differensiali deb nimaga aytiladi?
7. Funksiyaning differensiali uning hosilasi orqali qanday ifodalanadi?
8. Funksiya differensialining geometrik ma'nosi nimadan iborat?
9. Qanday funksiyalar uchun differensial aynan orttirmaga teng bo‘ladi?

4.7. ANIQMAS INTEGRAL

4.7.1. Boshlanғich funksiya tushunchasi

Biz *F(x)* funksiya berilganda uning hosilasini yoki differensiali $f(x) = F'(x)$ ni topishni ko`rdik.

Endi esa teskari masalani qaraymiz. *f(x)* funksiya berilgan, shunday *F(x)* funksiyani topish kerakki, uning hosilasi *f(x)* ga teng bo`lsin, ya’ni

$$F`(x) = f(x) \qquad (1)$$

bo`lsin

1-Ta’rif. Agar *[a,b]* kesmada aniqlangan *f(x)* funksiya uchun bu kesmaning barcha nuqtalarida $F^1(x)=f(x)$ tenglik bajarilsa, *F(x)* funksiya shu kesmada *f(x)* funksiyaga nisbatan boshlang`ich funksiya deb ataladi.

Masalan: Boshlang`ich funksiya ta’rifiga asosan, $F(x)=\frac{x^4}{4}$ funksiya $f(x)=x^3$ funksiyasi uchun boshlang`ich ekani kelib chiqadi, chunki $\left(\frac{x^4}{4}\right)'=x^3$

Agar *f(x)* funksiya uchun boshlang`ich funksiya mavjud bo`lsa, u boshlang`ich yagona bo`lmasligini ko`rish oson. $F(x) = \frac{x^4}{4} + 6; F(x) = \frac{x^4}{4} + 7$. Umuman $F(x) = \frac{x^4}{4} + c$.

Agar $F_1(x)$ va $F_2(x)$ funksiyalar *f(x)* funksiyadan *[a,b]* kesmada boshlang`ich funksiyalari bo`lsa, ular orasida ayirma o`zgarmas songa teng bo`ladi. Agar berilgan *f(x)* funksiya uchun qanday bo`lmasin birgina *F(x)* boshlang`ich funksiya topilgan bo`lsa, *F(x)* funksiya uchun har qanday boshlang`ich funksiya *F(x)+C* ko`rinishga ega bo`ladi.

4.7.2. Aniqmas integral va uning xossalari

2-Ta’rif. Agar *F(x)* funksiya biror kesmada *f(x)* funksiya uchun boshlang`ich bo`lsa, *F(x)+C* ifoda *f(x)* funksiyadan aniqmas integral deb ataladi va ushbu $\int f(x)dx$ ko`rinishda belgilanadi. Ta’rifga ko`ra *F`(x)=f(x)* bo`lsa, $\int f(x)dx = F(x) + c$

Bunda f(x) funksiya integral ostidagi funksiya, f(x)dx integral ostidagi ifoda, $\int$ belgi - integral belgisi deb ataladi.

Shunday qilib, aniqmas integral y=F(x)+C funksiyalar to`plamidan iborat. Geometrik nuqtai nazaridan qaraganda, aniqmas integral egri chiziqlar to`plamidan (oilasidan) iborat bo`lib, ularning har biri egri chiziqlardan bittasini o`z-o`ziga parallel holda yuqoriga yoki pastga, ya’ni Oy o`q bo`ylab siljitish yo`li bilan hosil bo`ladi. Har qanday *f(x)* funksiya uchun ham boshlang`ich funksiya mavjud bo`laveradimi? Tekshirishlar har qanday funksiya uchun ham boshlang`ich funksiya mavjud bo`lavermasligini ko`rsatadi. Agar *f(x)* funksiya *[a,b]* kesmada uzluksiz bo`lsa, bu funksiya uchun boshlang`ich funksiya mavjud bo`ladi. Berilgan *f(x)* funksiya bo`yicha uning boshlang`ich funksiyasini topish *f(x)* funksiyani integrallash deyiladi.

Aniqmas integral quyidagi xossalarga ega:

1. Aniqmas integralning hosilasi integral ostidagi funksiyaga teng, ya'ni *F`(x)=f(x)* bo`lsa, u holda

$$\left(\int f(x)dx\right)' = \left(F(x)+c\right)' = f(x)$$

2. Aniqmas integralning differensiali integral ostidagi ifodaga teng.

$$d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx$$

3. Biror funksiya differensialining aniqmas integrali shu funksiya bilan ixtiyoriy o`zgarmas sonning yig`indisiga teng.

$$\int dF(x) = F(x) + c$$

4. Biror funksiyaning hosilasidan olingan aniqmas integral shu funksiya bilan ixtiyoriy o`zgarmasning yig`indisiga teng, ya'ni

$$\int F'(x)dx = F(x) + c$$

5. Chekli sondagi funksiyalar algebraik yig`indisining aniqmas integrali, shu funksiyalar aniqmas integrallarining algebraik yig`indisiga teng.

$$\int \left[f_1(x) + f_2(x)\right]dx = \int f_1(x)dx + \int f_2(x)dx$$

6. O`zgarmas ko`paytuvchini integral ishorasi ostidan chiqarish mumkin, ya'ni a=const bo`lsa,

$$\int af(x)dx = a\int f(x)dx$$

7.

Aniqmas integrallarni hisoblaganda quyidagi qoidalarni nazarda tutish foydali:

1. Agar $\int f(x)dx = F(x) + c$ *булса*, $\int f(ax)dx = \frac{1}{a}F(ax) + c$

2. Agar $\int f(x)dx = F(x) + c$ *булса* $\int f(x+b)dx = F(x+b) + c$

3. Agar $\int f(x)dx = F(x) + c$ *булса* $\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + c$

Misol:

$$\int (5x^4 + 4\sqrt{x})dx = 5\int x^4 dx + 4\int \sqrt{x}dx = 5\frac{x^{4+1}}{4+1} + 4\frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + c = x^5 + \frac{8}{3}x\sqrt{x} + c;$$

Asosiy formulalar jadvali

Aniqmas integralning ta'rifi, xossalari, shuningdek differensiallashning asosiy formulalaridan foydalanib, eng sodda elementar funksiyalarning integrallarini jadvalini keltiramiz:

$1)\int dx = x + c;$ $\qquad$ $11)\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx + c$

$2)\int x^{\alpha}dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c \ (\alpha \neq -1);$ $\qquad$ $12)\int tgxdx = -\ln(\cos x) + c$

$3)\int \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x} + c;$ $\qquad$ $13)\int ctgxdx = \ln|\sin x| + c$

$4)\int \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} + c$ $\qquad$ $14)\int \frac{dx}{1+x^2} = arctgx + c$

$5)\int \frac{dx}{x} = \ln(x) + c$

$6)\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$

$7)\int e^x dx = e^x + c$

$8)\int \sin xdx = -\cos x + c$

$9)\int \cos xdx = \sin x + c$

$10)\int \frac{dx}{\cos^2 x} = tgx + c$

Yuqoridagi formulalarni to`g`riligi differensiallash yo`li bilan isbotlanadi.

4.7.3. Integrallash usullari

a). O`zgaruvchilarni almashtirish usuli bilan yoki o`rniga qo`yish usuli bilan integrallash

$\int f(x)dx$ ni hisoblash talab qilinsin. Ayrim hollarda x o`zgaruvchini yangi o`zgaruvchiga almashtirish yordamida ya’ni $x = \varphi(t)$ deb olib, integral ostidagi ifodani soddalashtirish mumkin.

$$dx = \varphi'(t)dt \qquad \int f(x)dx = \int f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt \qquad (1)$$

Integrallashdan so`ng $t$ o`rniga uning x orqali ifodasi qo`yiladi. (1) ni to`g`riligini ko`rsatamiz.

$$\left(\int f(x)dx\right)_x' = f(x)$$

O`ng tomonini $x$ bo`yicha murakkab funksiya kabi differensiallaymiz. t oraliq argument $\frac{dx}{dt} = \varphi'(t)$ teskari funksiya differensialiga asosan

$$\frac{dt}{dx} = \frac{1}{\varphi'(t)}$$

$$\left(\int f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt\right)_x' = \left(\int f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt\right)_t' \frac{dt}{dx} = f[\varphi(t)]\varphi'(t)\frac{1}{\varphi(t)} = f[\varphi(t)] = f(x)$$

Integrallashda o`zgaruvchining almashtirish ba’zan $x = \varphi(t)$ ko`rinishda emas, balki $t = \psi(x)$ ko`rinishda qulayroq bo`ladi.

Agar integral $\int \frac{\psi'(x)dx}{\psi(x)}$ ko`rinishda bo`lsa, quyidagi ko`rinishda almashtirish bajaramiz.

$\psi(x) = t; \psi'(x)dx = dt$

$$\int \frac{\psi'(t)dx}{\psi(x)} = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + c = \ln|\psi(x)| + c$$

Misol. $\int \frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}} dx$ integral hisoblansin.

Yechish: $x = \frac{1}{t}$ deb olamiz. U holda $dx = -\frac{1}{t^2} dt$

$$\int t^2 e^t \left(-\frac{1}{t^2} \right) dt = -\int e^t dt = -e^t + c = -e^{\frac{1}{x}} + c$$

b). Bo`laklab integrallash

Ko`paytmaning differentsiali formulasiga ko`ra:

$d(u\vartheta) = ud\vartheta + \vartheta du; \quad u\vartheta = \int ud\vartheta + \int \vartheta du$

$\int ud\vartheta = u\vartheta - \int \vartheta du$

Bu formula bo`laklab integrallash formulasi deb ataladi.

Misol: $\int x\cos x dx$ integral hisoblansin.

Yechish:

$u = x; du = dx; d\vartheta = \cos x dx; \vartheta = \sin x$

$$\int x\cos x dx = x\sin x - \int \sin x dx = x\sin x + \cos x + c;$$

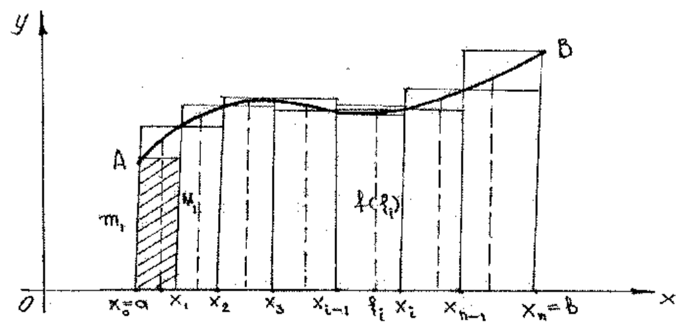
O‘z-o‘zini tekshirish uchun savollar.

1. Boshlang`ich funksiyaga ta`rif bering.
2. Aniqmas integral nima?
3. Aniqmas integralning xossalarini aytab bering.
4. Aniqmas integralni hisoblash usullarini keltirib chiqaring.

4.8. ANIQ INTEGRAL

4.8.1. Aniq integral tushunchasiga olib keluvchi masala. [a,b] kesmada $y=f(x)$ uzluksiz funksiya berilgan bo`lsin. Berilgan $y=f(x)$ funksiya grafigi, abssissa o`qi, $x=a$ va $x=b$ vertikal to`g`ri chiziqlar bilan chegaralangan *aABb* tekis figura egri chiziqli trapetsiya deyiladi. Shu egri chiziqli trapetsiya yuzini topamiz. Buning uchun $y=f(x)$ funksiyaning kesmadagi eng katta va eng kichik qiymatlarini mos ravishda M va m bilan belgilaymiz. [$a;b$] kesmani $x_i=a+\frac{b-a}{n}i, \quad i=0,1,\ldots,n$ nuqtalar bilan n ta kesmachalarga ajratamiz, bunda $x_0<x_1<x_2<. . .<x_n$ deb hisoblaymiz va $x_1-x_0=\Delta x_1,\ldots,x_2-x_1=\Delta x_2$, $x_n-x_{n-1}=\Delta x_n$ deb faraz qilamiz, so`ngra $f(x)$ funksiyaning eng kichik va eng katta qiymatlarini

[$x_0;x_1$] kesmada m_1 va M_1 bilan
[$x_1;x_2$] kesmada m_2 va M_2 bilan
……………………………
[$x_{n-1};x_n$] kesmada m_n va M_n bilan belgilaymiz. (74-chizma)



74-chizma

Endi quyidagi yig`indilarni tuzamiz:

$$\underline{s_n} = m_1\Delta x_1+ m_2\Delta x_2+\ldots+ m_n\Delta x_n= \sum_{i=1}^{n} m_i\Delta x_i$$

$$\overline{s_n} = M_1\Delta x_1+ M_2\Delta x_2+\ldots+ M_n\Delta x_n= \sum_{i=1}^{n} M_i\Delta x_i$$

Bu yig`indilar integral yig`indi deyilib, mos ravishda ichki va tashqi chizilgan zinapoyasimon shaklni siniq chiziq bilan chegaralangan yuziga teng bo`ladi. Bundan esa $\underline{s_n} \le S_{aABb} \le \overline{s_n}$ tengsizlik o`rinli bo`ladi. Agar [$a;b$] kesmalarni yana ham kichiklashtirib bo`laklarga ajratsak, n etarlik darajada bo`lganda $\underline{s_n}$ va $\overline{s_n}$ lar bir-biridan kam farq qiladi va egri chiziqli trapetsiyaning yuzini aniqlaydi.

Ta'rif. Aytaylik, $y=f(x)$ $x\in[a;b]$ manfiy bo`lmagan, uzluksiz funksiya bo`lsin. Bu holda, agar $\{\underline{s_n}\}$ va $\{\overline{s_n}\}$ ketma-ketliklar limitlari mavjud bo`lib, bir-biriga teng bo`lsa, limitning qiymati egri chiziqli trapetsiyaning yuzi deyiladi.

4.8.2. Integral yig`indi. Aniq integralning ta'rifi

Endi [$x_0;x_1$],[$x_1;x_2$],...,[x_{n-1},x_n] kesmalarning har birida bittadan nuqta olamiz. Bu nuqtalarni $\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n$ bilan belgilaymiz.

Bu nuqtalarni har birida $f(\xi_1), f(\xi_2),\ldots,f(\xi_n)$ qiymatlarni hisoblaymiz.

$$s_n = f(\xi_1)\Delta x_1 + f(\xi_2)\Delta x_2 + \ldots + f(\xi_n)\Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$

yig`indini tuzamiz.

Bu yig`indi [$a;b$] kesmada $f(x)$ funksiyaning integral yig`indisi deb ataladi. [$x_{i-1};x_i$] kesmaga tegishli bo`lgan har qanday $\xi_i$ nuqta uchun $m_i \le f(\xi_i) \le M_i$ va barcha $\Delta x_i > 0$ bo`lganda $m_i\Delta x_i \le f(\xi_i)\Delta x_i \le M_i\Delta x_i$, demak, $\sum_{i=1}^{n} m_i\Delta x_i \le \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \le \sum_{i=1}^{n} M_i\Delta x_i$ yoki $\underline{s_n} \le s_n \le \overline{s_n}$

Bundan ko`rinadiki, yuzi $s_n$ ga teng bo`lgan shakl ichki va tashqi chizilgan siniq chiziq orasida yotuvchi siniq chiziq bilan chegaralangan degan ma'noni beradi. s_n yig`indining qiymati [$a;b$] kesmani [$x_{i-1};x_i$] kesmalarga ajratish usuliga hamda hosil qilingan kesmani ichida $\xi_i$ nuqtalarni tanlab olishga bog`liq. Endi max [$x_{i-1};x_i$] bilan kesmalarni eng uzunini belgilaymiz va max[$x_{i-1};x_i$] nolga intiladigan holni qaraymiz. Har bir ajratish uchun ξ_i ning mos qiymatini tanlab $s_n = \sum_{i=x}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$ integral yig`indisini tuzamiz.

$n \to \infty$ intilganda $\max \Delta x_i \to 0$ bo`ladigan ketma-ketlikni qaraymiz va u biror limitga ega bo`lsin. $\lim\limits_{\max \Delta x_i \to 0} s_n = \lim\limits_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = s$

1-Ta'rif. Agar [$a;b$] kesma $\max \Delta x_i \to 0$ shartni qanoatlantiradigan har qanday bo`laklarga ajratilganda va [$x_{i-1};x_i$] kesmada $\xi_i$ ni istalgancha tanlab olganda $S_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$ integral yig`indi birgina limitga intilsa, u holda,bu limit [$a;b$] kesmada $f(x)$ funksiyaning aniq integrali deb ataladi va $\int_a^b f(x)dx$ bilan belgilanadi. Shunday qilib, ta'rifga ko`ra:

$\lim\limits_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = \int_a^b f(x)dx$ a-son integralning quyi chegarasi b-son esa integralning yuqori chegarasi deyiladi. [a,b] integrallash kesmasi, x esa integrallash o`zgaruvchisi deyiladi.

2-Ta'rif. Agar $f(x)$ funksiya uchun yuqoridagi limit mavjud bo`lsa, u holda funksiya [a,b] kesmada integrallanuvchi funksiya deyiladi.

Agar integral ostidagi $y=f(x)$ funksiyaning grafigini chizsak $f(x) \ge 0$ bo`lgan holda $\int_a^b f(x)dx$ integralning son qiymati $y=f(x)$ egri chiziq, $x=a$, $x=b$ to`g`ri chiziqlar hamda O$x$ o`qi bilan chegaralangan egri chiziqli trapetsiya yuziga teng.

4.8.3. Aniq integralning asosiy xossalari

$y=f(x)$ funksiya [a,b] kesmada aniqlangan va uzluksiz bo`lsin.

U holda $\int_a^b f(x)dx$ mavjud va quyidagi xossalar o`rinli.

1-xossa. O`zgarmas ko`paytuvchini aniq integral belgisining tashqarisiga chiqarish mumkin, agar C=const bo`lsa, u holda

$$\int_a^b Cf(x)dx = C\int_a^b f(x)dx$$

2-xossa. Bir necha funksiyalar algebraik yig`indisining aniq integrali qo`shiluvchilar aniq integrallarining algebraik yig`indisiga teng.

$$\int_a^b [f_1(x) + f_2(x)]dx = \int_a^b f_1(x)dx + \int_a^b f_2(x)dx$$

3-xossa. (Bu xossa $a \geq b$ bo`lgandagina bajariladi) Agar [*a*,*b*] (*a*<*b*) kesmada $f(x)$va $\varphi(x)$ funksiyalar $f(x) \leq \varphi(x)$ shartni qanoatlantirsa, u holda $\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b \varphi(x)dx$ o`rinli.

4-xossa. Agar *M* va *m* sonlar *f(x)* funksiyaning [*a;b*] kesmadagi eng katta va eng kichik qiymatlari bo`lib, *a≤b* bo`lsa, u holda

$$m(b\text{-}a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a) \quad \text{bo`ladi.}$$

5-xossa. (o`rta qiymat haqida teorema). Agar *f(x)* funksiya [*a;b*] kesmada uzluksiz bo`lsa, u holda bu kesmada shunday bir c nuqta topiladiki, bu nuqta uchun $\int_a^b f(x)dx = (b-a)f(c)$ tenglik o`rinlidir.

6-xossa. Agar quyidagi uchta integralning har biri mavjud bo`lsa, u holda har qanday uchta *a, b, c* son uchun

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

tenglik o`rinli bo`ladi.

4.8.4. Aniq integralni hisoblash va hisoblash usullari.

Agar *f(x)* funksiya [*a*,*b*] kesmada uzluksiz va *F(x)* uzluksiz *f(x)* funksiyaning biror boshlang`ich funksiyasi bo`lsa, u holda

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

formula o`rinlidir. Bu aniq integralni hisoblash formulasi bo`lib, bunga Nyuton-Leybnits formulasi deyiladi. Hisoblash usullari ikkita:

a). Aniq integralda o`zgaruvchini almashtirish.

Aniq integralni hisoblashda ham aniqmas integralni hisoblashdagidek o`rniga qo`yish metodi yoki o`zgaruvchini almashtirish metodidan keng foydalaniladi.

$f(x)$ funksiya $[a;b]$kesmada berilgan va uzluksiz bo`lsin. $\int_a^b f(x)dx$ integralni hisoblash talab qilinsin. $x=\varphi(t)$ o`zgaruvchini kiritamiz. U holda, agar $\varphi(t)$ funksiya quyidagi shartlarni qanoatlantirsa:

1) $\varphi(t)$ funksiya $[\alpha;\beta]$ kesmada aniqlangan va uzluksiz;

2) $\varphi(\alpha)=a;\quad \varphi(\beta)=b$;

3) $\varphi(t)$ funksiya $[\alpha;\beta]$ kesmada uzluksiz $\varphi'(t)$ hosilaga ega bo`lsa, u holda $\int_a^b f(x)dx=\int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt\ldots(1)$ bo`ladi.

.

Misol: $\int_0^r \sqrt{r^2-x^2}dx$ integral hisoblansin.

Yechish: O`zgaruvchini almashtiramiz. $x=r\sin t,\ dx=r\cos tdt$ integrallashning yangi chegaralarini topamiz. $x=0$ bo`lganda $t=0,\quad x=r$ bo`lganda $t=\frac{\pi}{2}$. Demak,

$$\int_0^r \sqrt{r^2-x^2}dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{r^2-r^2\sin^2 t}\,r\cos tdt=$$

$$=r^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos 2t\right)dt=r^2\left[\frac{t}{2}+\frac{\sin 2t}{4}\right]\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi r^2}{4}$$

b). Bo`laklab integrallash

Aytaylik, $u=u(x)$ va $\vartheta=\vartheta(x)$ funksiyalar $[a;b]$ kesmada aniqlangan, uzluksiz $u'(x)$ va $\vartheta(x)$ hosilalarga ega bo`lsin.

U holda $[u(x)\vartheta(x)]'=u'(x)\vartheta(x)+u(x)\vartheta'(x)$ bo`ladi.

Bu erda, $u(x)\vartheta(x)$ funksiya $u'(x)\vartheta(x)+u(x)\vartheta'(x)$ funksiyaning boshlang`ich funksiyasi. Nyuton - Leybnits formulasiga asosan bu ayniyatning ikkala tomonini $a$ dan $b$ gacha chegaralarda integrallaymiz. $\int_a^b (u\vartheta)'dx=\int_a^b u'\vartheta dx+\int_a^b u\vartheta' dx$, bunda $\int (u\vartheta)'dx=u\vartheta+C$ bo`lgani sababli $\int_a^b (u\vartheta)'dx=u\vartheta\Big|_a^b$ o`rinli.

Demak, $u\vartheta\Big|_a^b=\int_a^b \vartheta du+\int_a^b ud\vartheta$ yoki $\int_a^b ud\vartheta=u\vartheta\Big|_a^b-\int_a^b \vartheta du$

Bu tenglik aniq integralni bo`laklab integrallash formulasi deyiladi.

Misol. $\int_0^1 xe^{-x}dx$ integralni hisoblang.

Yechish: Belgilashlar kiritamiz $u = x,\ d\vartheta = e^{-x}dx,\ du = dx;\ \ \vartheta = -e^{x};$ u holda bo`laklab integrallash formulasiga ko`ra

$$\int_0^1 xe^{-x}dx = -xe^{-x}\Big|_0^1 + \int_0^1 e^{-x}dx = -e^{-1} - e^{-x}\Big|_0^1 = -2e^{-1} + 1 = \frac{e-2}{e}$$ ga ega

bo`lamiz.

O‘z-o‘zini tekshirish uchun savollar.

1. *y=f(x)* egri chiziq *OX* o`qi, *x=a* va *x=b (a<b)* to`g`ri chiziqlar bilan chegaralangan tekis shakl yuzi qanday hisoblanadi?
2. Aniq integralga ta`rif bering.
3. Aniq integralni hisoblash usullarini misollar yordamida tushuntiring.

V-BOB.
ALGEBRA VA ANALITIK GEOMETRIYA ELEMENTLARI.

5.1. Sonli va harfiy ifodalar.

5.1.1. Sonli ifodalar.

Ayrim masalalarni yechishda sonli ifodalarga duch kelamiz. Quyidagi masalani qaraylik.

Masala: *A* va *B* punktlar orasidagi masofa 1760 km *A* punktdan *B* punktga qarab soatiga 80 km/s tezlik bilan yuk avtomashinasi chiqdi. 2 soat o‘tgandan keyin esa *B* punktdan soatiga 120 km\s tezlik bilan engil avtomashina A punkt tomon jo‘nadi. Engil avtomashina yo‘lga chiqqandan necha soatdan keyin yuk avtomashinasi bilan uchrashishdi.

Masalani yechish uchun dastlab yuk avtomashinasini 2 soatda bosib o‘tgan yo‘lini hisoblaymiz. Buning uchun 80 ni 2 ga ko‘paytiramiz. Bu amalni bajarmasdan uni 80x2 deb belgilaymiz.

Shundan keyin yuk avtomashinasi *B* punktdan qancha masofada ekanligini aniqlaymiz. 1760-80x2

Keyinchalik yuk va engil avtomashinalarning birgalikdagi tezligini topamiz. 80+120

Eng oxirida ikkita avtomobilning uchrashishi uchun ketgan vaqtni hisoblaymiz.

(1760-80x2):(80+120)

Masalani yechish jarayonida biz yuqoridagi ko‘rinishdagi sonli ifoda qiymatini sonli ifodada amallarni bajarish dasturiga asosan topamiz, ya’ni

(1760-80x2): (80+120)=(1760-160):200=1600:200=8

Demak, ikkita avtomashina 8 soatdan keyin uchrashadi. Bunda biz faqat sonlar bilan ish ko‘rdik.

1-ta’rif. Sonlar, arifmetik amallar va qavslar ishtirok etuvchi yozuv sonli ifoda deyiladi.

Umumiy holda sonli ifoda quyidagicha aniqlanadi:

1) Har bir son sonli ifodadir.
2) Agar A va B-lar sonli ifodalar bo‘lsa, u holda $(A)+(B)$, $(A)-(B), (A)\cdot(B), (A):(B)$ lar ham sonli ifodalar bo‘ladi.

Sonli ifodada ko‘rsatilgan har bir amalni ketma-ket bajarish natijasida hosil bo`lgan son sonli ifodaning qiymati deyiladi.

Agar yuqoridagi qoidaga amal qilsak, qavslar soni ko‘payib ketadi. Shuning uchun har bir sonni qavsga olmaslikga kelishib olinadi.

Shuningdek bir qancha ifodalar qo‘shilsa, ayirilsa, ko‘paytirilsa yoki bo‘linsa qavslar qo‘yilmasdan amallar chapdan o‘ngga qarab bajariladi. Masalan,

35-4+56-12-34 yoki 80:2·5·8:5

Amallarni bajarishda avvalo ikkinchi bosqich (ko‘paytirish va bo‘lish), keyinchalik birinchi bosqich (qo‘shish va ayirish) amallar bajariladi.

Shuni hisobga olsak sonli ifodalar qiymatlarini hisoblashda quyidagi qoidalarga amal qilinadi:

1) Agar sonli ifoda qavslarsiz berilgan bo‘lsa, sonli ifoda qo‘shish amallarini va ayirish amallarini o‘zida saqlovchi bo‘laklarga ajratiladi. Bu bo‘laklarni har birida ko‘paytirish va bo‘lish amallari chapdan o‘ngga qarab bajarilib, bo‘laklar qiymatlari hisoblanadi, keyinchalik hisoblangan qiymatlar o‘rniga qo‘yilib, sonli ifoda qiymati qo‘shish va ayirish amallarini chapdan o‘ngga hisoblab topiladi.

2) Agar sonli ifoda o‘zida qavsni saqlasa, u holda chap va o‘ng qavs ichidagi ifoda 1) qoidaga asosan hisoblanadi va qavslarni o‘rniga hisoblangan qiymat qo‘yiladi, keyingi hisoblashlar 1) qoida asosida hisoblanadi, aks holda yana 2) qoida qo‘llaniladi.

Masalan:

1) $32\cdot 2-7\cdot 5+4:2-5\cdot 3+8:2$ ifoda berilsa,

$32\cdot 2-7\cdot 5+4:2-5\cdot 3+8:2=32\cdot 2+4:2+8:2-7\cdot 5-5\cdot 3=$

$=64+2+4-35-15=70-50=20$

2) $(24:2+12\cdot 3)-(44:11+5)+12=$ $(12+36)-(4+5)+12=$

$=48-9+12=48+12-9=60-9=51;$

Shuning bilan birga barcha sonli ifodalar qiymatga ega bo‘lavermasligini qayd etamiz. Masalan 9: (3-3) va (8-8): (3-3) lar qiymatlarga ega emas, chunki nolga bo‘lish mumkin emas.

2-ta’rif. Sonlar va harflardan tuzilib amal ishoralari bilan birlashtirilgan ifoda harfiy ifoda deyiladi. Masalan $\frac{2b}{a+c}-\frac{b-a}{2a+b};\quad 7a+\frac{3}{4}b;$ va hakoza.

Harfiy ifodada harflarning o‘rniga qo‘yish mumkin bo‘lgan sonlar to‘plami harfiy ifodaning aniqlanish sohasi deyiladi.

5.1.2. Sonli ifodalarning tengligi va tengsizligi.

1.Ta’rif: «Teng» (=) belgisi bilan birlashtirilgan ikki ifoda tenglik deyiladi (agar ifoda sonlardan iborat bo‘lsa sonli tenglik deyiladi).

Ikkita A va B sonli ifoda berilgan bo‘lsin. Biz bu ifodalardan $A=B$ tenglikni hosil qilishimiz mumkin. Bular mulohazalar bo‘lib, chin yoki yolg‘on bo‘lishi mumkin. $A=B$ tenglik faqat va faqat A va B ifodalar son qiymatlarga ega bo‘lib, bu qiymatlar teng bo‘lsagina chin bo‘ladi.

Masalan: 3+8=4+7 chin; 7:(3-3)=6 yolg‘on, chunki 7: (3-3) son qiymatga ega emas.

Shuningdek natural sonlar to‘plamida 2-5+11=2·4 yolg‘on, chunki N to‘plamda 2-5 ifoda aniqlangan emas.

Ammo sonlar to‘plami kengaytirilgandan keyin, ya’ni manfiy sonlar to‘plami kiritilgandan keyin yuqoridagi tenglik o‘rinli, chunki tenglikning ikkala tomoni ham 8 ga teng qiymatga ega bo‘ladi.

Sonli ifodalarning tenglik munosabati refleksivlik, simmetriklik va tranzitivlik xossalariga ega, shu sababli ekvivalentlik munosabatidir.

Shuning uchun bir xil qiymatlarga ega bo‘lgan sonli ifodalar to‘plami ekvivalentlik sinflarga bo‘linadi.

Masalan: 7+2, 6+3, 11-2, 18:2, 3·3 va hakozo – bularni barchasi 9 qiymatiga ega.

Yuqoridagi ta’riflardan, agar A, B, C, D lar sonli ifodalar bo‘lib, $A=B$ va $C=D$ tengliklar chin bo‘lsa, u holda quyidagi tengliklar ham chin bo‘ladi.

$$(A)+(C)=(B)+(D); \quad (A)-(C)=(B)-(D)$$

$$(A)\cdot(C)=(B)\cdot(D); \quad (A):(C)=(B):(D)$$

2.Ta’rif. «Katta» (>), «kichik»(<), «katta yoki teng» ($\geq$), «kichik yoki teng»($\leq$) belgisi bilan birlashtirilgan ikki ifoda tengsizlik deb ataladi. Agar A va B lar sonli ifodalar bo‘lsa, $A<B$ tengsizlik, A va B ifodalar son qiymatlarga ega bo‘lib, A ifodaning sonli qiymati B ifodaning sonli qiymatidan kichik bo‘lganda chin bo‘ladi.

Masalan: (16-4):3<2+5 tengsizlik chin chunki (16-4):3 ning qiymati 4, 2+5 ning qiymati 7, shu sababli 4<7;

$A=B, C<D \ \ (A, B, C, D - \text{сонли ифодалар})$ ko‘rinishidagi yozuvlarni mulohazalar deganimiz uchun ularni ustida kon’yunksiya, diz’yunksiya, implikatsiya va boshqa mantiqiy amallarni bajarish mumkin.

Masalan: $A\leq B=(A<B)\vee(A=B)$

Bu munosabat $A<B;\ A=B$ mulohazalardan biri chin bo‘lganda chin.

Masalan: $(12:3+5)\cdot 2\leq 25+13$ chin, chunki $(12:3+5)\cdot 2$ ifoda qiymati 18, 25+13 ifoda qiymati 38, 18<38 tengsizlik esa chin.

$A<B<C$ qo‘shtengsizlik esa $A<B$ va $B<C$ tengsizliklar kon’yunksiyasini ifodalaydi. Bu kon’yunksiya ikkita tengsizlik chin bo‘lganda chin.

Masalan: 5+12<441:21<2·17 chin, chunki 5+12 ning qiymati 17, 441:21 ning qiymati 21, 2·17 ning qiymati 34. Shunday qilib 17<21 va 21<34 bo‘lgani uchun qo‘sh tengsizlik chin. Biz endi tengsizlik tushunchasiga tartib munosabati orqali kelamiz.

Bizga ma'lumki haqiqiy sonlar to'plamidagi kichik munosabati tartib munosabatiga misol bo'la oladi. Kichik munosabati «<» belgi bilan ifodalanadi. Bu munosabat qattiq chiziqli tartiblangan munosabat boshqacha aytganda, u asimmetrik va tranzitiv. Haqiqiy sonlar to'plamidagi ixtiyoriy x va y sonlari uchun x<y yoki y>x munosabatlardan faqat bittasi bajariladi.

Shuningdek x<y munosabat faqat va faqat y-x>0 bo'lganda o'rinli bo'lishini ko'rsatish mumkin. Shu sababli *a>0* va *b>0* bo'lganda $a+b>0$ va $ab>0$ tengsizliklar o'rinli bo'lishi kelib chiqadi.

Tengsizlikni shu xossasidan qolgan xossalarini ham keltirib chiqarish mumkin.

1) Tengsizlikni ikkala tomoniga bir xil sonni qo'shsa x<y munosabati saqlanadi bu munosabatga qo'shishga nisbatan tartib munosabatining monotonligi deyiladi. Boshqacha aytganda, agar $x<y$ bo'lsa, u holda ixtiyoriy a soni uchun $x+a<y+a$ tengsizlik bajariladi. Haqiqatan ham $x<y$ tengsizlikdan $y-x>0$ kelib chiqadi. Ammo $(y+a)-(x+a)=y-x>0$ bo'lganidan $x+a<y+a$ bo'ladi.

2) Agar $x<y$ va $a<b$ bo'lsa, u holda $x+a<y+b$ bo'ladi. Haqiqatan ham, bu holda $y-x>0$ va $b-a>0$ bo'lganidan

$(y+b)-(x+a)=(y-x)+(b-a)>0$ bo'ladi.

3) Tengsizlikni ikkala tomoni bir xil musbat songa ko'paytrilsa x<y munosabat saqlanadi, ya'ni x<y va $a>0$ munosabatdan $ax<ay$ tengsizlik kelib chiqadi.

Haqiqatan ham x<y tengsizlikdan $y-x>0$ kelib chiqadi. Ikkita musbat son ko'paytmasi musbat son bo'lishidan $a(y-x)>0$ bo'lishi ravshan.

$a(y-x)=ay-ax$ bo'lishidan $ax<ay$ kelib chiqadi.

4) Agar x,y,a,b - sonlari musbat sonlar bo'lsa, $x<y$ va $a<b$ tengsizliklardan $ax<by$ tengsizlik kelib chiqadi.

Haqiqatan ham $x<y$ va a sonining musbatligidan $ax<ay$ ga ega bo'lamiz. Tengsizlik munosabatini tranzitivlik xossasidan esa $ax<ay$ *ва* $ay<by$ tengsizliklardan $ax<by$ ga ega bo'lamiz.

$y>x$ *ва* $x<y$ tengsizliklar ekvivalent bo'lganligidan bu ikkala tengsizlik bir vaqtda chin yoki bir vaqtda yolg'on. Shu sababli «>» va «<» tengsizlik belgilari o'zaro teskari belgilar.

5) Tengsizlikda sonlarning ishoralarini o'zgartirsak, tengsizlik belgisi teskarisiga o'zgaradi, ya'ni $x<y$ bo'lsa , $-x>-y$ bo'ladi. Haqiqatan ham $x<y$ bo'lishi $y-x>0$ bo'lishini bildiradi. Ammo $y-x=(-x)-(-y);$ Shu sababli $(-x)-(-y)>0,$ ya'ni $-y<-x;$

6) Tengsizlikni ikkala tomoni manfiy songa ko'paytirilsa, tengsizlik belgisi teskarisiga o'zgaradi, ya'ni $x<y$ va a manfiy son bo'lsa , u holda $ax>ay$ bo'ladi.

7) Agar $0<x<y$ yoki $x<y<0$ bo'lsa, u holda $\frac{1}{y}<\frac{1}{x}$ bo'ladi.

Buni isbotlash uchun $\frac{1}{x}-\frac{1}{y}=\frac{y-x}{xy}$ munosabatdan foydalanamiz. Shartga ko‘ra x va y sonlari bir xil ishoralarga ega, shuning uchun xy- ham musbat son, shu sababli $\frac{1}{x}-\frac{1}{y}$ ham musbat, bundan esa $\frac{1}{y}<\frac{1}{x}$;

$x>y$ va $x<y$ munosabatlar bilan birgalikda $x\le y, x\ge y$ munosabatlar ham qo‘llaniladi $x\le y$ tengsizlik $x<y$ tengsizlik va $x=y$ tenglik dizyunksiyasini ifodalaydi. Ularni bittasi chin bo‘lsa, diz’yunktsiya chin bo‘ladi.

$x\le y=(x<y)\vee(x=y)$; Masalan: $5\le 9$ chin, chunki $5<9$ chin

$x<y<z$ tengsizlik. $x<y$ va $y<z$ tengsizliklar kon’yunksiyasi bo‘lib, u ikkala tengsizlik chin bo‘lganda chin bo‘ladi.

Masalan: $5<7<9$ chin, chunki $5<7$ va $7<9$ tengsizliklar chin, $3<7<6$ bu yolg‘on, chunki $3<7$ tengsizlik chin bo‘lsa ham, $7<6$ tengsizlik yolg‘on.

O‘z-o‘zini tekshirish uchun savollar.

1. Sonli, harfiy ifodalarga ta’rif bering, ularni aniqlanish sohasiga misollar keltiring.
2. Sonli ifodalarning tengligi va tengsizligiga ta’rif bering
3. Sonli tengsizlik xossalarini aytib, tushuntiring.

5.2. O‘zgaruvchili ifoda.

O‘zgaruvchili ifoda tushunchasi ham sonli ifoda tushunchasi kabi aniqlanadi va unda sonlar bilan birga harflar ham ishlatiladi.

Agar x va y o‘zgaruvchilarga ega bo‘lgan ifoda berilgan bo‘lsa, u holda har bir sonli (a, b) kortejga sonli ifoda mos keladi. U ifoda x ni a ga y ni b ga almashtirish natijasida hosil bo‘ladi. Hosil bo‘lgan ifoda qiymatga ega bo‘lsa, u holda bu qiymat $x=a$ va $y=b$ bo‘lganda ifodani qiymati deyiladi. O‘zgaruvchili ifoda $A(x)$, $B(x;y)$ va hakozo ko‘rinishda belgilanadi. Agar o‘zgaruvchili ifoda $B(x;y)$ da $x=16$, $y=5$ sonlariga almashtirilsa, $B(16;5)$ sonli ifoda hosil bo‘ladi.

O‘zgaruvchili ifoda predikat hisoblanmaydi, chunki harflarni o‘rniga son qo‘yganda mulohaza hosil bo‘lmasdan, sonli ifoda hosil bo‘ladi. Bu ifodaning qiymati chin yoki yolg‘on bo‘lmasdan, son kelib chiqadi.

x o‘zgaruvchini o‘zida saqlovchi ifodada x ni o‘rniga qo‘yganda ifoda aniq qiymatga ega bo‘luvchi sonlar to‘plami mavjud. Bu sonlar to‘plamiga berilgan ifodani aniqlanish sohasi deyiladi. Masalan: $7:(x-5)$ ifodani aniqlanish sohasi 5 sonidan boshqa barcha sonlardan iborat.

Ayrim hollarda x faqat natural sonlar to‘plamidan qiymatlar qabul qilishi mumkin, Masalan, guruhdagi talabalar to‘plami. Shuningdek o‘zgaruvchili ifoda o‘zida bir qancha o‘zgaruvchini saqlasa, aytaylik, ifoda x va y o‘zgaruvchini o‘zida saqlasin, u holda ifodaning aniqlanish sohasi $(a;b)$ juft sonlar to‘plamidan iborat bo‘lishi mumkin. Masalan: $8:(x-y)$ buni aniqlanish sohasi barcha sonlarning $(a;b)$ juftliklardan iborat bo‘lib, bunda faqat $a \neq b$.

O‘zgaruvchili ifodada o‘zgaruvchini faqat sonlar bilan emas, balki boshqa harfiy ifodalar bilan ham almashtirish mumkin. Masalan, $2x+3y$ ifodada x ni $3a+2b$ y ni $2a-4b$ bilan almashtirsak $2(3a+2b)+3(2a-4b)$ ko‘rinishdagi ifodaga ega bo‘lamiz.

Agar $A(x)$ va $B(x)$ o‘zgaruvchili ifoda ifodaga kiruvchi harflarni qabul qiliishi mumkin bo‘lgan qiymatlarida bir xil qiymatlar qabul qilsa, $A(x)$ va $B(x)$ lar bilan aynan teng deyiladi.

Ta’rif: Agar o‘zgaruvchilarning aniqlanish sohasidan olingan ixtiyoriy qiymatida ikki ifodaning mos qiymatlari teng bo‘lsa, bu ikki ifoda aynan teng deyiladi.

Masalan, $(x+5)^2$ va $x^2+10x+25$ aynan teng.

$\frac{x}{3}$ va $\frac{x^2}{3x}$ aynan teng emas, chunki $x=0$ da birinchi 0 qiymatga, ikkinchisi esa son qiymatga ega bo‘lmaydi. Ammo noldan farqli sonlar to‘plamida u aynan teng. O‘zgaruvchili ikkita ifodaning aynan tengligi tasdig‘i mulohoza hisoblanadi, Yuqoridagi $(x+5)^2$ va $x^2+10x+25$ ifodalarning aynan tengligini $(\forall x)((x+5)^2=x^2+10x+25)$ ko‘rinishida yozish mumkin. Odatda qisqalik uchun $\forall x$ ni tashlab quyidagicha yoziladi $(x+5)^2=x^2+10x+25$;

O‘zgaruvchining ixtiyoriy qiymatida to‘g‘ri bo‘lgan tenglik ayniyat deyiladi. Barcha haqiqiy sonlarning ko‘paytirish va qo‘shish qonunlari, yig‘indidan sonni ayirish, sondan yig‘indini ayirish qoidalari, yig‘indini songa bo‘lish va boshqalar ayniyat hisoblanadi. Shuningdek, 0 va 1 lar bilan bajariladigan amallar qoidalari ham ayniyat hisoblanadi. Ifodaning ayniy shakl almashtirish deganda, umumiy qoidalarga tayanib, berilgan ifodani unga aynan teng bo‘lgan boshqa ifodaga ketma-ket o‘tish tushuniladi. Masalan,

$\frac{x-y}{(x+y)^2}\cdot\left(\frac{x}{x-y}-\frac{x^2+y^2}{y^2-x^2}-\frac{x}{x+y}\right)$ ifodani soddalashtiring.

$$\frac{x-y}{(x+y)^2}\cdot\left(\frac{x}{x-y}-\frac{x^2+y^2}{y^2-x^2}-\frac{x}{x+y}\right)=\frac{x-y}{(x+y)^2}\cdot\left(\frac{x(x+y)+x^2+y^2-x(x-y)}{x^2-y^2}\right)=$$

$$=\frac{x-y}{(x+y)^2}\cdot\frac{x^2+xy+x^2+y^2-x^2+xy}{x^2-y^2}=\frac{x-y}{(x+y)^2}\cdot\frac{x^2+2xy+y^2}{x^2-y^2}=$$

$$=\frac{(x-y)(x+y)^2}{(x+y)^2(x-y)(x+y)}=\frac{1}{x+y};$$

Demak, $\frac{x-y}{(x+y)^2}\cdot\left(\frac{x}{x-y}-\frac{x^2+y^2}{y^2-x^2}-\frac{x}{x+y}\right)=\frac{1}{x+y}$

O‘z-o‘zini tekshirish uchun savollar.

1. O‘zgaruvchili ifodani ta’riflang
2. O‘zgaruvchili ifoda qachon aynan teng bo‘ladi
3. Ayni shakil almashtirishni misollar yordamida tushuntiring.

5.3. Tenglama va tengsizliklar.

5.3.1. Bir o`zgaruvchili tenglama.

Bizga x o‘zgaruvchini o‘zida saqlovchi, aniqlanish sohasi X to‘plamdan iborat $f_1(x)$ va $f_2(x)$ ifodalar berilgan bo‘lsin.

Ta’rif. $f_1(x)=f_2(x)$ bir o‘rinli predikatga bir o‘zgaruvchili tenglama deyiladi, bunda $x\in X$. Tenglamani yechish deganda x o‘zgaruvchini tenglamani chin tenglikga aylantiruvchi qiymatini yoki boshqacha aytganda berilgan predikatni chinlik to‘plami T ni topish tushuniladi. Demak, $f_1(x)=f_2(x)$ $x\in X$ predikatni chinlik to‘plamiga tenglamani yechimi, to‘plamga kiruvchi sonlarga esa tenglamaning ildizlari deyiladi.

Misol. $(x-2)(x+3)=0$ tenglama ikkita 2 va –3 ildizlarga ega. Bu tenglamani yechimlar to‘plami $T=\{2;-3\}$. Cheksiz ko‘p yechimlar to‘plamiga ega bo‘lgan tenglamalar ham mavjud.

Masalan: $x=|x|$ tenglamaning yechimlar to‘plami barcha nomanfiy sonlardan iborat.

X to‘plamdan olingan biror δ qiymatda $f_1(x)$ va $f_2(x)$ ma’noga ega bo‘lmasligi mumkin. Bu holda $f_1(x)=f_2(x)$ tenglik yolgon hisoblanadi va δ $f_1(x)=f_2(x)$ tenglamani ildizi bo‘laolmaydi.

Masalan: $\frac{1}{x-3}+5=\frac{1}{x-7}+6$ tenglama uchun 3 va 7 sonlari ildiz bo‘la olmaydi, chunki $x=3$ da $\frac{1}{x-3}$ kasr, $x=7$ da $\frac{1}{x-7}$ kasr ma’noga ega emas.

Shuning uchun $f_1(x)=f_2(x)$ tenglamani yechishdan oldin $f_1(x)$ va $f_2(x)$ aniq qiymatlarga ega bo‘lgan A to‘plamni topish kerak. Bu A to‘plamga x o‘zgaruvchini qabul qilishi mumkin bo‘lgan qiymatlar to‘plami yoki tenglamani aniqlanish sohasi deyiladi. Yuqoridagi tenglama uchun bunday soha 3 va 7 sonlaridan tashqari barcha haqiqiy sonlar to‘plami hisoblanadi va u quyidagicha yoziladi.

$$A=]-\infty;3[\cup\ ]3;7[\cup]7;+\infty[$$

$f_1(x)=f_2(x)$ predikatni aniqlanish sohasi X to‘plam chekli bo‘lsa, u holda tenglama ildizini topish uchun X to‘plamdagi sonlarni birin-ketin qo‘yish yordamida tenglama ildizlarini topish mumkin. Agar X to‘plam cheksiz bo‘lsa, u holda tenglamalar tengkuchliligidan foydalanamiz.

Ta’rif. Agar ikkita $f_1(x)=f_2(x)$, va $g_1(x)$ = $g_2(x)$ tenglamaning yechimlar to‘plami teng bo‘lsa, bu ikki tenglama teng kuchli deyiladi.

Masalan, $(x-1)^2=9$ va $(x-2)(x+4)=0$ tenglamalar haqiqiy sonlar to‘plamida teng kuchli, chunki birinchi va ikkinchi tenglamaning yechimlar to‘plami $\{-4;2\}$. Bunda ikki tenglama ham bir xil aniqlanish sohasiga ega.

Boshqacha aytganda $f_1(x)=f_2(x)$, $g_1(x)=g_2(x)$ predikatlar ekvivalent bo‘lsa, ikkita tenglama teng kuchli bo‘ladi.

Agar $f_1(x)=f_2(x)$ tenglamaning yechimlar to‘plami $g_1(x)=g_2(x)$ tenglama yechimlar to‘plamining to‘plam ostisi bo‘lsa, $g_1(x)=g_2(x)$ tenglama $f_1(x)=f_2(x)$ tenglamaning natijasi deyiladi. Ikkita tenglama faqat va faqat biri-birining natijasi bo‘lgan holdagina tengkuchli bo‘ladi.

Agar $g_1(x)=g_2(x)$ tenglama $f_1(x)=f_2(x)$ tenglamani qanoatlantirmaydigan ildizlarga ega bo‘lsa, bu ildizlar $f_1(x)=f_2(x)$ tenglama uchun begona (chet) ildizlar bo‘ladi.

Umuman olganda, agar tenglamani yechishda uni natija bilan olmashtirilsa (teng kuchli tenglama bilan emas), u holda natija tenglamaning barcha ildizlarini topish kerak va ularni berilgan tenglamaga qo‘yib tekshirish va begona ildizlarni tashlab yuborish kerak.

5.3.2. Teng kuchli tenglamalar haqida teoremalar.

1-teorema $f_1(x)=f_2(x)$ (1) tenglama X to‘plamda berilgan va F (x) esa shu to‘plamda aniqlangan ifoda bo‘lsin. U holda $f_1(x)=f_2(x)$ (1) va $f_1(x)+F(x)=f_2(x)+F(x)$ (2) tenglamalar X to‘plamda teng kuchli bo‘ladi.

Bu teoremani boshqacha ta’riflash mumkin ya’ni, aniqlanish sohasi X bo‘lgan tenglamaning ikkala qismiga shu X to‘plamda aniqlangan o‘zgaruvchili bir xil ifoda qo‘shilsa, berilgan tenglamaga teng kuchli bo‘lgan yangi tenglama hosil bo‘ladi.

Isboti: (1) tenglamaning yechimlari to‘plamini T_1 bilan (2) tenglamaning yechimlar to‘plamini T_2 bilan belgilaymiz.

Agar $T_1 = T_2$ bo‘lsa, (1) va (2) tenglamalar teng kuchli bo‘ladi. Ammo bunga ishonch hosil qilish uchun T_1 dagi istalgan ildiz (2) tenglamaning ham ildizi bo‘lishini va aksincha, T_2 dagi istalgan ildiz (1) tenglama ildizi bo‘lishini ko‘rsatish lozim.

Aytaylik a soni (1) tenglamaning ildizi bo‘lsin. U holda $a \in T_1$ va u (1) tenglamaga qo‘yilganda uni $f_1(a)=f_2(a)$ to‘g‘ri sonli tenglikka, F (x) ifodani sonli ifoda F(a) ga aylantiradi. $f_1(a)=f_2(a)$ to‘g‘ri tenglikning ikkala qismiga F(a) sonli ifodani qo‘shamiz. Natijada to‘g‘ri sonli tenglikning xossasiga ko‘ra to‘g‘ri sonli tenglik hosil bo‘ldi:

$f_1(a) + F(a) = f_2(a) + F(a)$

Bu tenglikdan ko‘rinib turibdiki, a soni (2) tenglamaning ham ildizi ekan.

Shunday qilib, (1) tenglamaning har bir ildizi (2) tenglamaning ham ildizi bo‘lishi isbotlandi. ya’ni $T_1 = T_2$.

Tenglamalarni yechishda ko‘pincha bu teoremaning o‘zi emas, balki undan kelib chiqqadigan natijalar qo‘llaniladi:

1. Agar tenglamaning ikkala qismiga ayni bir xil son qo‘shilsa, berilgan tenglamaga teng kuchli tenglama hosil bo‘ladi.
2. Agar tenglamaning birorta qo‘shiluvchisini bir qismidan ikkinchi qismiga ishorasini qarama-qarshisiga o‘zgartirib o‘tkazilsa, berilgan tenglamaga teng kuchli tenglama hosil bo‘ladi.

2- teorema . $f_1(x)= f_2(x)$ tenglama X to‘plamda berilgan hamda F (x) shu to‘plamda aniqlangan va X to‘plamdagi x ning hech bir qiymatida nolga aylanmaydigan ifoda bo‘lsin. U holda $f_1(x) = f_2(x)$ va $f_1(x) \cdot F(x)= =f_2(x) \cdot F(x)$ tenglamalar X to‘plamida teng kuchli bo‘ladi. (teorema isboti mustaqil ish sifatida qoldiriladi).

2-teoremadan tenglamalarni yechishda ko‘p qo‘llaniladigan natija kelib chiqadi.

Natija: Agar tenglamaning ikkala qismi noldan farqli ayni bir songa ko‘paytirilsa, berilgan tenglamaga teng kuchli tenglama hosil bo‘ladi.

O‘z-o‘zini tekshirish uchun savollar.

1. Tenglamaga ta’rif bering. Tenglamani yechimi deganda nimani tushinasiz.
2. Teng kuchli tenglamani misollar yordamida tushuntiring.
3. Teng kuchli tenglamalar haqidagi teoremalarni ayting va isbotlang.

5.4. Bir o‘zgaruvchili tengsizlik.

Bizga x o‘zgaruvchini o‘zida saqlovchi aniqlanish sohasi X to‘plamdan iborat $f_1(x)$ va $f_2(x)$ ifodalar berilgan bo‘lsin.

Ta’rif: $f_1(x) < f_2(x), \quad x \in X$; yoki $f_1(x) > f_2(x) \quad x \in X$; bir o‘rinli predikatlarga bir o‘zgaruvchili tengsizlik deyiladi.

Bunday tengsizliklarni yechish deganda *x* ni o‘rniga qo‘yganda tengsizlikni chin tengsizlikga aylantiruvchi sonlar to‘plami T ni topish tushuniladi. Bu sonlar to‘plami tengsizlikni yechimlar to‘plami deyiladi. Bir tengsizlikni har bir yechimi ikkinchi tengsizlikni yechimi bo‘lishi mumkin. U holda ikkinchi tengsizlik birinchi tengsizlikning natijasi deyiladi. Masalan, x>3 va x>6 tengsizliklarni olaylik. Bundan 6 dan katta son 3 sonidan ham katta bo‘ladi. Shuning uchun x>3 tengsizlik x>6 tengsizlikning natijasi. Shu sababli berilgan tengsizlik natijasi bo‘lgan tengsizlikni yechimlar to‘plami Q berilgan tengsizlik yechimlar to‘plami T ni o‘z ichiga oladi ya’ni $T \subset Q$. Agar ikkita tengsizlik bir xil yechimlar to‘plamiga ega bo‘lsa u tengsizliklar teng kuchli deyiladi. U holda bu tengsizliklar bir-birining natijasi bo‘ladi.

Masalan, biror a soni 7 dan katta deyish bilan a+1 soni 8 dan katta deyish teng kuchli. Shuning uchun x>7 x+1>8 tengsizliklari teng kuchli. x ni o‘zida saqlovchi tengsizliklar predikatlar bo‘lgani uchun, ularni kon’yunksiyasi va diz’yunksiyasi to‘g‘risida gapirish mumkin.

Masalan a soni 3x-8>1 va 2x+5<15 tengsizliklarni qanoatlantirsa, u son tengsizliklarning (3x-8>1)$\wedge$(2x+5<15) kon’yunksiyasini ham qanoatlantiradi. Bu a soni esa 4 sonidan iborat. Maktab kursida kon’yunksiya deb aytmasdan, uni quyidagi sistema ko‘rinishida yozish qabul qilingan:

$$\begin{cases} 3x-8>1 \\ 2x+5<15 \end{cases}$$

Agar biror a sonida ikki va undan ortiq tengsizliklardan kamida bitta tengsizlik chin qiymatga ega bo‘lsa, u tengsizliklar diz’yunksiyasi shu a sonida chin qiymatga ega bo‘ladi.

Masalan, - 2 soni $(2x>8)\vee(3x<-3)(1)$ tengsizliklar diz’yunksiyasi yechimlar to‘plamiga tegishli. Haqiqatan ham bu sonni birinchi tengsizlikga qo‘ysak, u holda $2\cdot(-2)>8$ degan yolgon tengsizlik kelib chiqadi. Ikkinchi tengsizlikga qo‘ysak, $3(-2)<-3$ degan chin tengsizlik hosil bo‘ladi. Demak, – 2 soni (1) tengsizliklar diz’yunksiyasi yechimlar to‘plamiga tegishli.

Agar 0 sonini olsak, bu son tengsizliklar diz’yunksiyasi yechimlar to‘plamiga tegishli emas, chunki 0 sonini (1) ga kiruvchi tengsizliklarga qo‘ysak $2\cdot 0>8$ va $3\cdot 0<-3$ degan yolg‘on tengsizliklarga ega bo‘lamiz. Qoidaga ko‘ra tengsizliklar yechimlar to‘plami cheksiz, buni koordinatalar o‘qida ko‘rgazmali tasvirlaydilar. Bunda yechimlar to‘plami bir qancha jufti-jufti bilan kesishmaydigan nuqtalar, kesmalar, oraliqlar va nurlar orqali ifodalanadi.
Teng kuchli tengsizliklar uchun quyidagi teoremalar o‘rinli.(teoremalar isbotsiz keltiriladi).

1-Teorema. Agar $F(x)$ ifoda ixtiyoriy $x\in X$ qiymatlarda aniqlangan bo‘lsa, u holda $f_1(x)<f_2(x)$ va $f_1(x)+F(x)<f_2(x)+F(x)$ tengsizliklar teng kuchli.

2-Teorema. Agar $F(x)$ ifoda barcha $x\in X$ larda aniqlangan hamda X sohada musbat bo‘lsa, u holda $f_1(x)<f_2(x)$ va $f_1(x)F(x)<f_2(x)F(x)$ tengsizliklar teng kuchli. Boshqacha aytganda, $F(x)$ manfiy bo‘lmasa, u holda $f_1(x)\le f_2(x)$ va $f_1(x)F(x)\le f_2(x)F(x)$ tengsizliklar ham teng kuchli.
Bu teoremadan quyidagi natijalar kelib chiqadi:

1-Natija. Agar a soni musbat ya’ni a>0 bo‘lsa, u holda $f_1(x)<f_2(x)$ va $af_1(x)<af_2(x)$ tengsizliklar teng kuchlidir.

2-Natija. Agar a<0 bo‘lsa, $f_1(x)<f_2(x)$ va $af_1(x)>af_2(x)$ tengsizliklar teng kuchli. Demak, tengsizlik manfiy songa ko‘paytirilsa, tengsizlik belgisi teskariga olmashadi.

3-Teorema. $0<f_1(x)<f_2(x)$ va $0<\frac{1}{f_2(x)}<\frac{1}{f_1(x)}$ tengsizliklar bir-biriga teng kuchli.

1-Misol. 3x-4>x+6 tengsizlik yechilsin.
Yechish:1-teoremaga asosan 3x –x>6+4 yoki 2x>10
2-teorema natijalariga ko‘ra x>5.
Demak tengsizlik yechimlar to‘plami $]5;+\infty[$ nurdan iborat.
2-Misol. $(2x-3<5)\wedge(3x-5>1)$ tengsizliklar kon’yunksiyasi yechilsin.

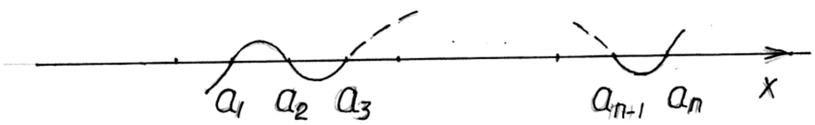
Yechish: Dastlab birinchi keyin ikkinchi tengsizlikni yechamiz.

$$2x-3<5 \Leftrightarrow 2x<8 \Leftrightarrow x<4$$

$$3x-5>1 \Leftrightarrow 3x>6 \Leftrightarrow x>2$$

Bu tengsizlik kon’yunksiyasini qanoatlantiruvchi sonlar ikkita tengsizlikni ham qanoatlantirishi kerak. Shu sababli kon’yunksiya yechimlar to‘plami topilgan yechimlar to‘plamining kesishmasidan iborat bo‘ladi, ya’ni x<4 va x>2 nurlarning kesishmasidan iborat bo‘ladi. Demak, yechimlar to‘plami 2<x<4 sonlar intervalidan iborat.

$(x-a_1)(x-a_2)...(x-a_n)>0$ $(бунда\ \ a_1<a_2<...<a_n)$ ko‘rinishdagi tengsizliklarni yechish quyidagicha olib boriladi. $(x-a_1)(x-a_2)...(x-a_n)>0$ ko‘paytma o‘z ishorasini ko‘paytuvchilardan biri ishorasini o‘zgartirganda o‘zgartiradi, boshqacha aytganda $a_1, a_2, ... a_n$ nuqtalardan o‘tishda o‘zgartiradi. Bu nuqtalar sonlar o‘qini $]-\infty; a_1[,\ ]a_1; a_2[, ...]a_n; +\infty[$ oraliqlarga bo‘ladi (75-chizma)



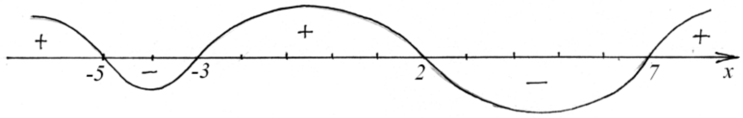
75-chizma

Har bir oraliqda ko‘paytma o‘zgarmas ishoraga ega. Shu sababli ko‘paytmani har bir oraliqdagi bitta nuqtada ishorasini bilish etarlik. Shunday qilib barcha ko‘paytmaning barcha oraliqlardagi ishoralarini aniqlaymiz. Ko‘paytma musbat bo‘lgan oraliqlarni birlashtiramiz. Bu birlashma $(x-a_1)(x-a_2)...(x-a_n)>0$ tengsizlikning yechimlar to‘plami bo‘ladi.

3-Misol. $(x-2)(x+3)(x-7)(x+5)>0$ tengsizlikning yechimlar to‘plami topilsin.

Yechish: 2, -3, 7, -5 nuqtalar sonlar o‘qini $]-\infty;-5[,\ ]-5;-3[,\ ]-3;2[,\ ]2;7[,\ ]7;+\infty[$ oraliqlarga bo‘ladi.

Oraliqlarda ko‘paytma ishorasini aniqlaymiz. $]-\infty;-5[$ oraliqdagi ishorani aniqlash uchun shu oraliqdan –10 sonini olib, ko‘paytmadagi x o‘rniga qo‘yamiz, ya’ni (-10-2)(-10+3)(-10-7)(-10+5)>0 musbat, qolgan oraliqlardagi ishoralarni ham aniqlab sonlar o‘qiga joylashtiramiz (76- chizma).



76- chizma

Musbat oraliqlar: $]-\infty;-5[,\ ]-3;2[,\ ]7;+\infty[$. Bu oraliqlarni birlashtirsak, u tengsizlikni yechimlar to‘plami bo‘ladi.

$T =]-\infty;-5[\cup]-3;2[\cup]7;+\infty[$. Chizmadagi chiziqga ishoralar egrisi deyiladi.

O‘z-o‘zini tekshirish uchun savollar.

1. Bir o‘zgaruvchili tengsizlikni ta’riflang.
2. Tengsizliklar kon’yuksiyasi va diz’yunksiyasini misollar yordamida yechib ko‘rsating.

3. Tengsizliklarni tengligi, tengsizligini tushuntiring.
4. Teng kuchli tengsizliklar haqidagi teoremalarni aytib bering.
5. Bir o‘zgaruvchili tengsizliklarni intervallar metodi bilan yechishni misol yordamida tushuntiring.

5.5. Ikki o‘zgaruvchili tenglama va tenglamalar sistemasi.

5.5.1. Ikki o`zgaruvchili tenglama.

$ax+by=c$ ko‘rinishdagi tenglamaga birinchi darajali ikki o‘zgaruvchili tenglama deyiladi. Ikkita x va y o‘zgaruvchiga ega bo‘lgan tenglama ikki o‘rinli predikat hisoblanadi. Ikki o‘zgaruvchili tenglamaning yechimi deb, shu tenglamani to‘g‘ri tenglikka aylantiradigan o‘zgaruvchilarning qiymatlari juftiga aytiladi.

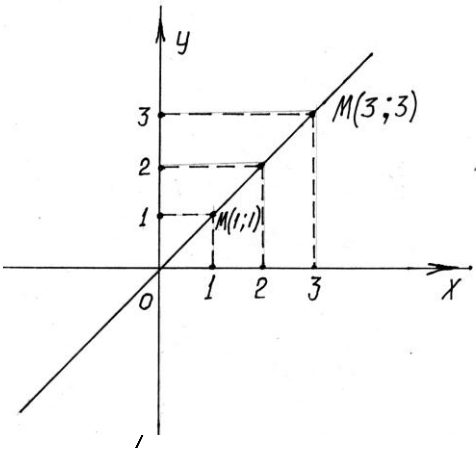
Masalan, (3;14) juftlik 2x+4y=62 tenglamaning bitta yechimi hisoblanadi. Bu yechimdan boshqa (1;15), (5; 13) va boshqa juftliklar ham bu tenglamaning yechimlari bo‘la oladi. Bundan ko‘rinadiki, ikki o‘zgaruvchili tenglamaga uning juftliklardan tashkil topgan ko‘pgina yechimlari mos keladi. Bu juftliklar esa x va y o‘zgaruvchilarni aniqlanish sohasi X va Y lardan olingan bo‘lishi kerak. (a; b) juftliklarni ($a \in$ X va $b \in$ Y) tekislikda a va b koordinatalarga ega bo‘lgan M=M(a;b) nuqta bilan tasvirlash mumkin.

Ikki o‘zgaruvchili tenglama yechimlar to‘plamini tekislikda joylashtirib tekislik nuqtalar to‘plamining to‘plam ostiga ega bo‘lamiz. Bu to‘plam ostiga tenglamaning grafigi deyiladi.

Odatda ikki o‘zgaruvchili tenglama cheksiz ko‘p yechimlarga ega. Shu sababli uning grafigi cheksiz ko‘p nuqtalarga ega.

Misol. y-x=0 tenglamani yechimi abssissasi va ordinatasi bir-biriga teng bo‘lgan $(a;a), a \in R$ juftliklardan iborat. Agar tekislikda M(a;a) ko‘rinishdagi nuqtalardan bir nyechtasini olsak, ya’ni M(1;1), M(2;2), .. bu nuqtalarni koordinata boshidan o‘tib, abstsissa o‘qining musbat yo‘nalishi bilan 45^0 burchak hosil qiluvchi to‘g‘ri chiziqda yotishini ko‘ramiz. (77-chizma).

Agar ikki o‘zgaruvchili ikkita tenglamaning grafigi bir xil bo‘lsa, ular teng kuchli deyiladi. Masalan, 2x+y=7 va 6x+3y=21 tenglamalar teng kuchli.



77-chizma.

Teng kuchli tenglamalar to‘g‘risidagi teoremalarni keltiramiz. (isbotsiz)

1-Teorema. Agar $f(x;y)$ ifoda x va y larning barcha qiymatlari uchun aniqlangan bo‘lsa, u holda $F(x;y)=\Phi(x;y)$ va $F(x;y)+f(x;y) = \Phi(x;y)+f(x;y)$ tenglamalar tengkuchli.

2-Teorema: Agar $f(x;y)$ ifoda x va y larning barcha qiymatlari uchun aniqlangan, hamda x va y ning hech bir qiymatida nolga aylanmasa, u holda $F(x;y) = \Phi(x;y)$ va $F(x;y)\cdot f(x;y) = \Phi(x;y)\cdot f(x;y)$ tenglamalar teng kuchli.

5.2. Ikki o‘zgaruvchili tenglamalar sistemasi va ularni yechish usullari

$$\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1 \\ a_2x+b_2y=c_2 \end{cases} \qquad (1)$$

ko‘rinishdagi tenglamalar sistemasi ikki o‘zgaruvchili chiziqli tenglamalar sistemasi deyiladi. bunda a_1,b_1,c_1, va a_2,b_2,c_2, lar haqiqiy sonlar.
Agar (1) sistemada $c_1 = c_2 = 0$ bo‘lsa, tenglama

$$\begin{cases} a_1x+b_1y=0 \\ a_2x+b_2y=0 \end{cases} \qquad (2)$$

ko‘rinishga keladi. (2) tenglamalar sistemasi bir jinsli sistema deyiladi.
Boshqacha aytganda $a_1x+b_1y=c_1$ tenglamaning yechimlar to‘lami B_1 va $a_2x+b_2y=c_2$ tenglamaning yechimlar to‘plami B_2 bo‘lsa, har ikkala tenglamaning qanoatlantiradigan, har ikki tenglama uchun umumiy bo‘lgan yechimlar B_1 va B_2 to‘plamlarning kesishmasidan, ya’ni $B_1 \cap B_2$ to‘plamdan iborat bo‘ladi.

Tenglamalar sistemasini yechish uning barcha yechimlar to‘plamini topish demakdir.

Kamida bitta yechimga ega bo‘lgan sistema birgalikdagi sistema deb, bironta ham yechimga ega bo‘lmagan sistema birgalikda bo‘lmagan sistema deyiladi.
Ikki o‘zgaruvchili chiziqli tenglamalar sistemasini yechishning quyidagi usullari mavjud: 1) algebraik qo‘shish usuli:
Bu usulda (1) sistemaning birinchi tenglamasini b_2 ga, ikkinchisini $-b_1$ ga ko‘paytirib, o‘zaro qo‘shsak

$$(a_1b_2- a_2b_1)\, x= b_2 c_1- b_1 c_2$$

tenglama hosil bo‘ladi. Bu tenglamadan x topiladi.

$$x = \frac{b_2c_1 - b_1c_2}{a_1b_2 - a_2b_1} \qquad (3)$$

birinchi tenglamani$-a_2$ ga, ikkinchisini a_1 ga ko‘paytirib o‘zaro qo‘shsak

$$(a_1\ b_2 - a_2\ b_1) = a_1\ c_2 - a_2\ c_1$$

tenglama hosil bo‘ladi bu tenglamadan y topiladi.

$$y = \frac{a_1c_2 - a_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1} \qquad (4)$$

topilgan x va y lar (1) sistemaning yechimi bo‘ladi.
2) O‘rniga qo‘yish usuli. (1) sistemani o‘rniga qo‘yish usuli bilan yechish uchun tenglamadan biror o‘zgaruvchini ikkinchi o‘zgaruvchi orqali ifodalab, bu ifoda ikkinchi tenglamaga qo‘yiladi (odatda koeffitsienti kichik son bo‘lgan o‘zgaruvchi topiladi)
Masalan, birinchi tenglamadan y ni topamiz

$$y = \frac{c_1 - a_1 x}{b_1}$$ $(b_1 \neq 0)$ buni (1) sistemaning

ikkinchi tenglamasiga qo‘ysak $a_2 x + b_2 \frac{c_1 - a_1 x}{b_1} = c_2$

Bir o‘zgaruvchili tenglama hosil bo‘ladi. Bundan x o‘zgaruvchi aniqlanadi. x ning aniqlangan qiymatini $y = \frac{c_1 - a_1 x}{b_1}$ ifodaga qo‘yib, y topiladi.

3) Grafik usulda yechish

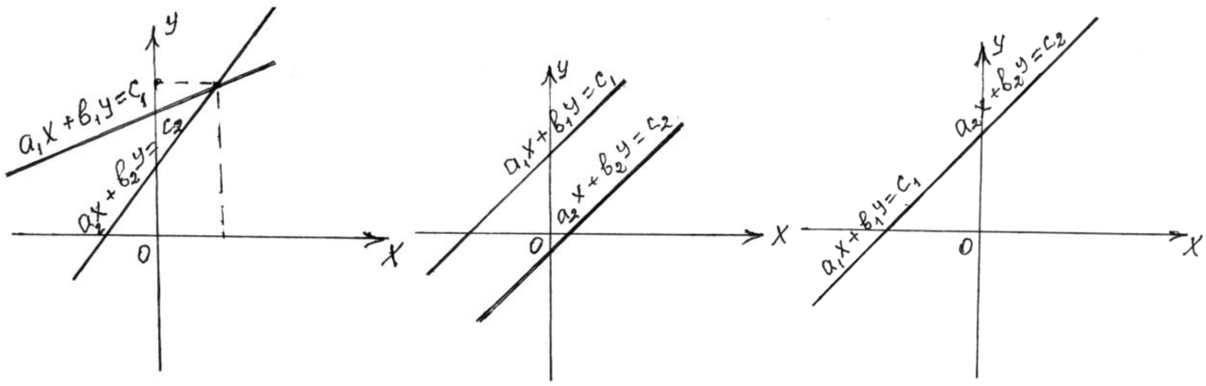
(1) sistemani grafik usulda yechish uchun sistemadagi har bir tenglamani quyidagi ko‘rinishda yozamiz.

$$y = \frac{c_1 - a_1 x}{b_1} \qquad (5)$$

$$y = \frac{c_2 - a_2 x}{b_2} \qquad (6)$$

(5) va (6) lar chiziqli funksiyalarni ifodalaydi. Bu chiziqli funksiyalarni koordinata sistemasida grafiklarini yasaymiz, ular to‘gri chiziqlarni ifodalaydi.

Ikkita to‘gri chiziq kesishsa, kesishish nuqtasining koordinatalari $(x_1; y_1)$ lar sistemani yechimi bo‘ladi. Agar to‘gri chiziklar parellel joylashsa, sistema yechimga ega bo‘lmaydi, ular ustma-ust tushsa, sistema cheksiz ko‘p yechimga ega bo‘ladi. (78-chizma)



a) b) v)

78-chizma.

Ikki noma’lumli chiziqli tenglamalarni determinantlar yordamida yechish usuli ham mavjud. Bu usul keyinroq ko‘rib o‘tiladi.

O‘z-o‘zini tekshirish uchun savollar.

1. Ikki o‘zgaruvchili tenglamani ta’riflang. Uni yechimi deganda nimani tushunasiz.
2. Ikki o‘zgaruvchili tenglamalar sistemasini yechish usullarini misollar yordamida tushuntiring.

5.6. Ikki o‘zgaruvchili tengsizlik va uning grafigi.

Ta’rif: $f(x,y) \geq 0$ yoki $f(x,y) \leq 0$ ko‘rinishdagi o‘zgaruvchili ifodalarga ikki o‘zgaruvchili tengsizlik deyiladi.

Ikki o‘zgaruvchili $f(x,y) \geq 0$ yoki $f(x,y) \leq 0$ tengsizlikning yechimi deb, sonlarning tartiblangan barcha (a,b) juftlariga aytiladiki, bu sonlar tengsizlikdagi noma’lumlar o‘rniga qo‘yilgandan keyin chin tengsizlik hosil bo‘ladi. Qisqa qilib, sonlarning (a;b) jufti berilgan tengsizlikni qanoatlantiradi, deyiladi.

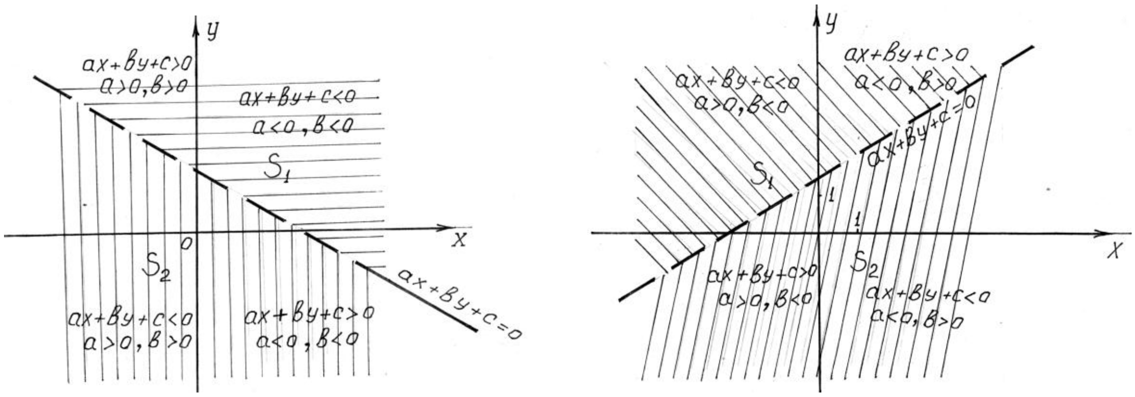
Masalan: (4;2) juftlik $x^2 + y^2 < 25$ tengsizlikni yechimlar to‘plamiga tegishli, chunki x ni 4 ga y ni 2 ga almashtirsak $4^2 + 2^2 < 25$ chin tengsizlik hosil bo‘ladi. Agar tengsizlikning yechimlari to‘plamidan olingan har bir (x;y) juftga mos ravishda tekislikning M(x;y) nuqtasini qo‘ysak, u holda berilgan tengsizlikka mos tekislik nuqtalar to‘plamiga ega bo‘lamiz. Bunga berilgan tengsizlikning grafigi deyiladi.

Odatda tengsizlik grafigi tekislik sohalaridan iborat bo‘ladi. $F(x,y) > 0$ tengsizlikni yechimlar to‘plamini tasvirlashda quyidagiga amal qilinadi: Dastlab tengsizlik belgisi tenglik belgisi bilan almashtiriladi va $F(x;y) = 0$ tenglamaga mos chiziq chiziladi. Bu chiziq tekislikni bir qancha bo‘laklarga bo‘ladi. Bu bo‘laklarni har birida bitta nuqta olinib, bu nuqtada $F(x,y) > 0$ tengsizlik bajarilishi tekshiriladi. Agar tengsizlik shu nuqtada bajarilsa, bu tengsizlik tekislikning shu bo‘lagida to‘la bajariladi. Shunday qismlar birlashtirilib berilgan tengsizlikning yechimlar to‘plami hosil qilinadi.
Uni koordinata tekisligida tasvirlash mumkin. Masalan,

$$ax + by + c > 0 \quad (1) \qquad ax + by + c < 0 \quad (3)$$

$$ax + by + c \geq 0 \quad (2) \qquad ax + by + c \leq 0 \quad (4)$$

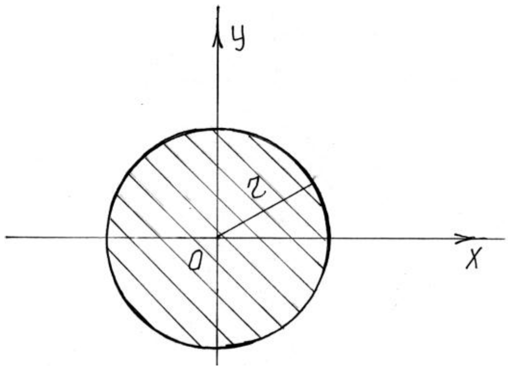
chiziqli tengsizliklar yechimlari to‘plami (1) va (3) tengsizliklar uchun a va b koeffitsientlar ishoralariga bog‘liq ravishda ochiq yarim tekisliklarni ifodalaydi. (79 a,b - chizmalar). Agar tengsizliklar noqat’iy bo‘lsa, ya’ni (2) va (4) ko‘rinishda bo‘lsa, yechimlar to‘plami yarim tekisliklardan iborat bo‘ladi, boshqacha aytganda yechimlar to‘plamiga $ax + by + c = 0$ tenglamani qanoatlantiruvchi nuqtalar to‘plami ham kiradi.



a) b)

79-chizma

$x^2 + y^2 \leq r^2$ tengsizlikning yechimlari to‘plami markazi koordinatalar boshida va radiusi r bo‘lgan doiradan iborat (qat’iy tengsizlikda aylana chiziqidagi nuqtalar yechimlar to‘plamiga tegishli emas), noqat’iy tengsizlikda aylana chiziqidagi nuqtalar bu to‘plamga tegishli (80-chizma).



80-чизма

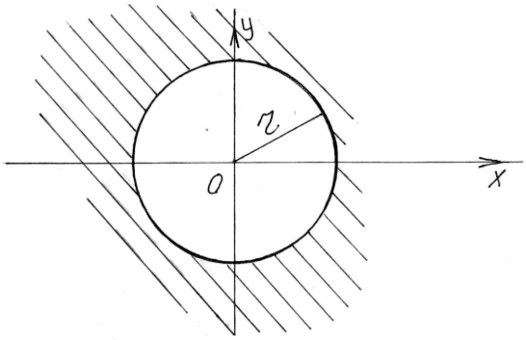
$x^2 + y^2 > r^2$ tengsizlikning yechimlari to‘plami esa bu doiraning to‘ldirmasidir (81-chizma).

Umumiy holda $f(x,y) > 0$ yoki $f(x,y) \geq 0$ tengsizlikning yechimlari to‘plami tekislikdagi figuradir. Masalan,

$$y + x^2 - 2x - 2 \leq 0$$

tengsizlikning yechimlari to‘plamini topish uchun tengsizlikni standart ko‘rinishiga keltiramiz, buning uchun esa teng kuchli shakl almashtirishlarni bajaramiz.

$y + x^2 - 2x - 2 \leq 0 \Leftrightarrow y \leq -x^2 + 2x + 2 \Leftrightarrow$
$y \leq -(x-1)^2 + 3;$



81-чизма

Oxirgi tengsizlikni ya’ni berilgan tengsizlikni $y = -(x-1)^2 + 3$ parabola va uning ichki sohasiga tegishli tekislik nuqtalari to‘plami qanoatlantiradi. (82 chizmadagi shtrixlangan soha).

Ikki o‘zgaruvchili tengsizlik yechimlar to‘plamini topishga doir misollar.

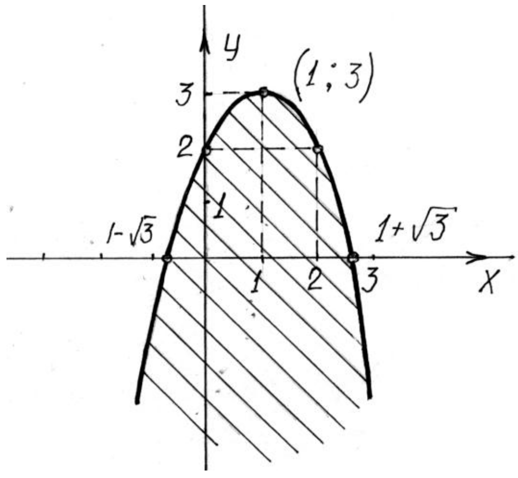
1-misol. Tekislikda a) $x(x-y) > 0$ b) $|x| + |y| \leq 1$ tengsizliklarning yechimlar to‘plamini ko‘rsating.

Yechimi: a) $x(x-y) > 0$ tengsizlikni yechishda quyidagi ikki hol b o‘lishi mumkin:

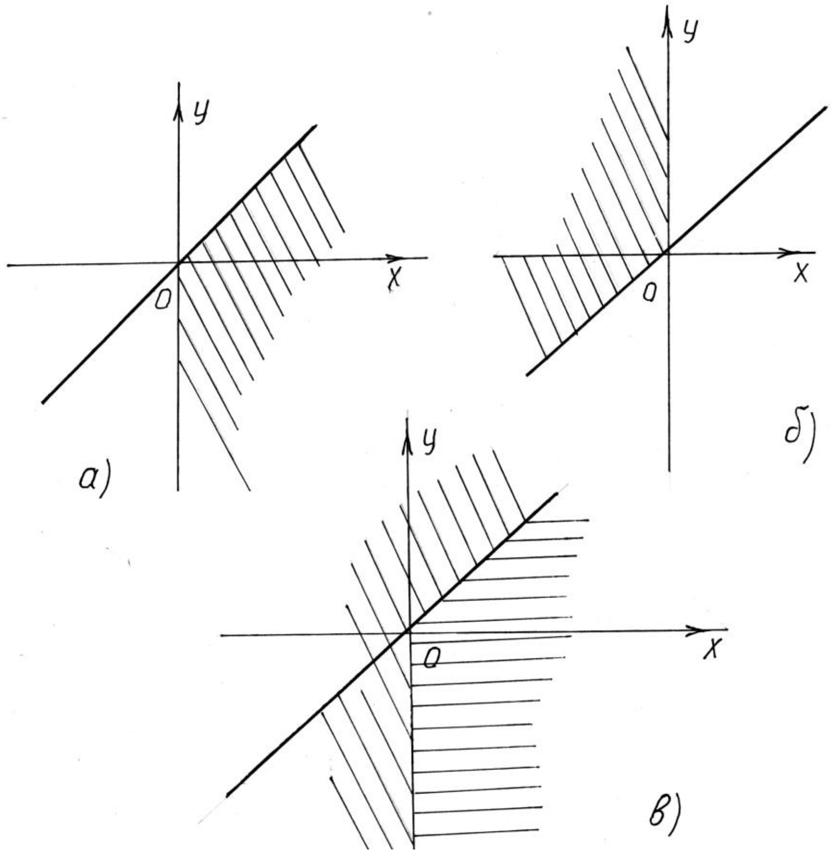
1) $x > 0$ va $x > y$ bo‘lgan hol, 2) $x < 0, x < y$ bo‘lgan hol

1) holda tengsizlik $y = x$ to‘g‘ri chiziqdan pastdagi $x > 0$ o‘ng yarim tekislikni tasvirlaydi. (83-a chizma);

2) holda esa tengsizlik $y = x$ to‘g‘ri chiziqdan yuqoridagi chap yarim tekislikni tasvirlaydi (83-b chizma).



82-chizma.



83-chizma.

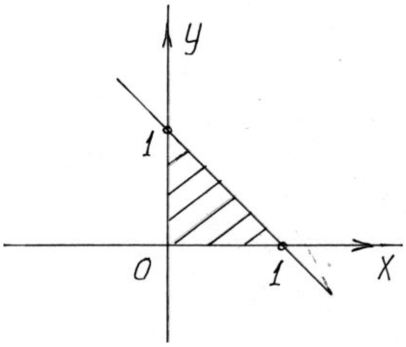
Tengsizlikning barcha yechimlar to‘plami esa chizmada ko‘rsatilgan shtrixlangan soha (83-b chizma). Shtrixlangan sohani chegaralovchi $x=0$ va $y=x$ chiziqlar sohaga kirmaydi (chunki tengsizlik qat’iy tengsizlik).

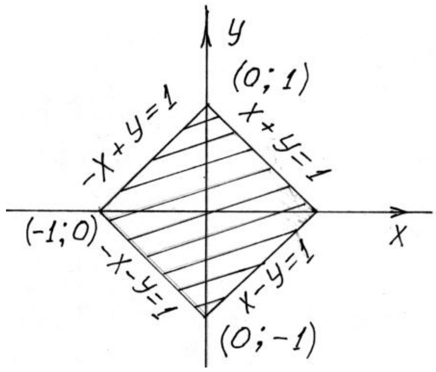
b) dastlab $x\geq 0$ va $y\geq 0$ bo‘lsin. U holda quyidagi sistemaga ega bo‘lamiz.

$$\begin{cases} x\geq 0 \\ y\geq 0 \\ x+y\leq 1 \end{cases}$$

$x+y=1$ koordinata o‘qlaridan 1 birlik kesma kesuvchi to‘g‘ri chiziq bo‘lgani uchun yuqoridagi tenglamalar sistemasi $x+y=1$ to‘g‘ri chiziq va koordinata o‘qlari bilan chegaralangan shtrixlangan sohani ifodalaydi (84-a chizma). Qolgan choraklardagi sohalar ham yuqoridagi uchburchaklarga simmetrik bo‘ladi. Bu esa

$(x;y)$ nuqtaga simmetrik bo‘lgan $(-x;y),(x;-y)$ va $(-x;y)$ nuqtalar tengsizlikni qanoatlantirishidan yaqqol ko‘rinadi.(84-b chizma)

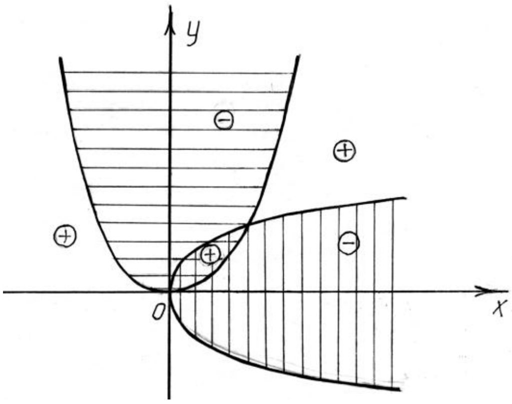




a) 84-chizma b)

2-misol. $z=(y-x^2)(x-y^2)$ funktsiyaning xoy tekislikda musbat yoki manfiy sohalarini ko‘rsating.

Yechimi: xoy tekislikda $y>x^2$ va $y<x^2$ shuningdek $x>y^2$ va $x<y^2$ sohalarni bir-biridan ajratuvchi $y=x^2$ va $x=y^2$ parabolalarni yasaymiz



85 –

(85- chizma). Ikkita chizmani bir-biri ustiga joylashtiramiz. U holda kesishgan shtrixlar joylashgan, shtrixlanmagan soha musbat soha, qolganlari manfiy soha bo‘ladi. Umuman 5 ta soha mavjud bo‘lib undan ikkitasi manfiy, uchtasi musbat hisoblanadi.

Ikki o‘zgaruvchili tengsizlikni ikki o‘zgaruvchili predikat sifatida qarash mumkin. Shu sababli

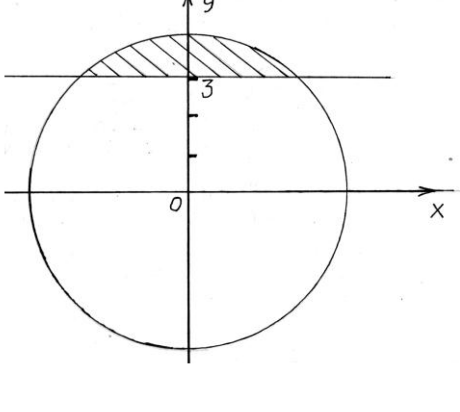
$$\begin{cases} f(x;y)>0 \\ g(x;y)<0 \end{cases}$$

ko‘rinishdagi ikki noma’lumli tengsizliklar sistemasini bu tengsizliklarning $(f(x;y)>0)\Lambda(g(x;y)<0)$ kon’yunksiyasi ko‘rinishida yozish mumkin.

Bu kon’yunksiyani yechimlar to‘plami har bir predikat chinlik to‘plamlari kesishmasidan iborat bo‘ladi.

3-misol. $(y>3)\wedge(x^2+y^2)=25$ yoki $\begin{cases} y>3 \\ x^2+y^2=25 \end{cases}$

Buni grafigi markazi koordinatalar boshida radiusi 5 ga teng doirani abssissa o‘qiga parallel va undan 3 birlik yuqoridan o‘tuvchi to‘g‘ri chiziq bilan kesishgan yuqorigi qismini ifodalaydi (86-chizma).



86-chizma

O‘z-o‘zini tekshirish uchun savollar.

1. Ikki o‘zgaruvchili tengsizlikni ta’rifini ayting.
2. Ikki o‘zgaruvchili tengsizlik yechimini misollar yordamida koordinatalar sistemasida tasvirlab bering.

5.7.Ikki va uch noma'lumli chiziqli tenglamalar sistemasining matritsasi.

Dastlab matritsalar va ular ustida bajariladigan amallarni ko'rib o'tamiz.

5.7.1. Matritsalar va ular ustida amallar.

$m \cdot n$ ta sondan tuzilgan, quyidagi to'g'ri burchakli jadvalga

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots a_{2n}. \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots a_{mn} \end{pmatrix}$$

m ta satrli va n ta ustunli matritsa yoki mxn o'lchamli matritsa deb ataladi.

a_{ij} $(i=1,2,\dots\text{m},\ j=1,2,\dots\text{n})$ sonlar matritsaning elementlari deb ataladi. Elementning birinchi indeksi i matritsa elementi turgan satr nomerini ikkinchi indeksi j esa ustun nomerini ko'rsatadi.

Qisqalik maqsadida matritsalar A, B, . . . harflar bilan belgilanadi.

Masalan,

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots a_{2n}. \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots a_{mn} \end{pmatrix}, \qquad B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & \dots b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & \dots b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{m1} & b_{m2} & b_{m3} & \dots b_{mn} \end{pmatrix}$$

Satrlari soni ustunlari soniga teng ya'ni m=n ga matritsa (tarkibli) kvadrat matritsa deb ataladi.

Ikkita A va B matritsaning satrlari va ustunlari soni mos ravishda teng hamda bir xil o'rinda turgan sonlari teng , ya'ni $i=k$ va $j=l$ bo'lganda $a_{\text{ij}}=b_{kl}$ bo'lsa ular teng matritsalar deb ataladi.

Matritsalar ustidagi asosiy arifmetik amallar matritsani songa ko'paytirish, matritsalarni qo'shish va matritsalarni ko'paytirish amallaridir.

a) Matritsani songa ko'paytirish:

λ son va A matritsani ko'paytmasi deb $b_{\text{ij}}=\lambda \cdot a_{ij}$ qoida bo'yicha hisoblanadigan B matritsaga aytiladi, ya'ni bu matritsaning har bir b_{ij} elementi λ son bilan matritsaning a_{ij} elementi ko'paytmasidan iboratdir.

Masalan:

$$\lambda\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} \end{pmatrix}$$

Barcha elementlari nolga teng matritsa nol matritsa deb ataladi, va odatda 0 bilan belgilanadi.
Matritsani songa ko‘paytirish quyidagi xossalarga ega:
1) kommutativlik xossasiga:
$$\lambda \cdot A = A \cdot \lambda$$
2) assotsiativlik xossasiga:
$$(\alpha \cdot B) \cdot A = \alpha \cdot (B \cdot A)$$
b) Matritsalarni qo‘shish:
Satrlari va ustunlari soni $(i,k = 1,2...m \quad ва \quad j,l = 1,2...n)$ mos ravishda teng A va B matritsalarni yigindisi deb elementlari A va B matritsalarning mos elementlari yig‘indisi $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ ga teng bo‘lgan $m \times n$ o‘lchovli C matritsaga aytiladi.
A va B matritsalarni yigindisi A+B bilan belgilanadi.
Matritsalarni qo‘shish amali quyidagi xossalarga ega:
1). Matritsalarni qo‘shish kommutativlik xossasiga ega.
$$A + B = B + A$$
2). Matritsalarni qo‘shish assotsiativlik xossasiga ega.
$$(A + B) + C = A + (B + C)$$
3). Matritsalarni qo‘shish qo‘shish amaliga nisbatan distributivlik xossasiga ega.
$$\lambda \cdot (A + B) = \lambda A + \lambda B$$
4). Matritsalarni qo‘shish sonlarni qo‘shishga nisbatan distributivlik xossasiga ega.
$$(\alpha + \beta) \cdot A = \alpha \cdot A + \beta \cdot A$$
Matritsani songa ko‘paytirish va matritsalarni qo‘shish amalining yuqorida aytilgan xossalari bu amallarning ta’riflari, haqiqiy sonlarni qo‘shish va ko‘paytirish amallarining kommutativlik va assotsiativlik xossalari hamda ko‘paytirishning qo‘shishga nisbatan distributuvlik xossasining natijasidir.

v) Matritsalarni ayirish.

A va B matritsani ayirmasi deb, berilgan A va B matritsalarni mos elementlari ayirmasidan tuzilgan C matritsaga aytiladi.
Ayirma quyidagicha yoziladi:
$$C = A - B$$
g) Matritsalarni ko‘paytirish.

A va B ikkita matritsa, shu bilan birga birinchi matritsaning ustunlari soni ikkinchi matritsaning satrlari soniga teng bo‘lsin, ya’ni bu matritsalar ushbu ko‘rinishga ega bo‘lsinlar:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11}\, a_{12} \ldots a_{1n} \\ a_{21}\, a_{22} \ldots a_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}\, a_{m2} \ldots a_{mn} \end{pmatrix} \qquad \text{va} \qquad B = \begin{pmatrix} b_{11}\, b_{12} \ldots b_{1k} \\ b_{21}\, b_{22} \ldots b_{2k} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ b_{m1}\, b_{m2} \ldots b_{mk} \end{pmatrix}$$

A va B matritsalarning ko‘paytmasi deb elementlari

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + ... + a_{in}b_{nj}, \quad i = 1,2,..m, \quad j = 1,2,..k \qquad (*)$$

qoida bo‘yicha hisoblanadigan $m \times k$- tartibli C matritsaga aytiladi, ya’ni ikkita matritsa ko‘paytmasining i- satri va j- ustunida turgan elementi A matritsa i - satrining birinchi elementini B- matritsa j - ustunining birinchi elementiga ko‘paytirish, A matritsa i- satrining ikkinchi elementini B matritsa j - ustunining ikkinchi elementiga ko‘paytirish va hokazo, so‘ngra A va B matritsalar elementlari juftlarining barcha shunday ko‘paytmalarini qo‘shish natijasida hosil bo‘ladi. A va B matritsalarning ko‘paytmasi $A \cdot B$ bilan belgilanadi. Yuqorida berilgan ta’rifga asoson matritsalar ko‘paytmasi $A \cdot B$ berilgan A matritsaning satrlari soni B matritsaning ustunlari soniga teng bo‘lganda mavjuddir.

Matritsalarni ko‘paytirish amali umuman aytganda nokommutativdir.

Masalan:

$$\begin{pmatrix} 1\,2 \\ 3\,4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1\,1 \\ 0\,1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\,3 \\ 3\,7 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 1\,1 \\ 0\,1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1\,2 \\ 3\,4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4\,6 \\ 3\,4 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 7 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Ya’ni matritsalarning ko‘paytmasi ko‘paytuvchilarning kelish tartibiga bog‘liqdir. Yana buning ustiga nokvadrat matritsalar ko‘paytiriladigan bo‘lsa, u holda ikki matritsaning ko‘paytmasi bir tartibda ko‘paytirilganda mavjud bo‘lishi, ikkinchi tartibda ko‘paytirilganda esa mavjud bo‘lmay qolishi mumkin.

Matritsalarning ko‘paytirish quyidagi xossalarga ega.

$$(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C) \quad \text{(assotsiativlik)}$$

Matritsalarni ko‘paytirish amalining asosiy xossalari:

$\alpha(A \cdot B) = (\alpha \cdot A) \cdot B$, $A \cdot (\alpha \cdot B) = (A \cdot \alpha) \cdot B$

$(A \cdot B) \cdot \alpha = A \cdot (B \cdot \alpha)$, $(A + B) \cdot C = AC + BC$;

$C \cdot (A + B) = CA + CB$

Tayinlangan n- tartibli (chiziqli) kvadrat matritsalar to‘plamida qo‘shish va ko‘paytirish amallari istalgan ikkita matritsa uchun aniqlangan. Ikkita n- tartibli kvadrat matritsalarning yigindisi va ko‘paytmasi yana n- tartibli kvadrat matritsalar bo‘ladi,ya’ni tayinlangan tartibli barcha kvadrat matritsalar to‘plami qo‘shish va ko‘paytirish amallariga nisbatan yopiq, shu bilan birga ko‘paytirish amali assotsiativ ammo, nokomutativ bo‘lishini eslatmoq zarur.

n- tartibli kvadrat matritsaning $a_{11}, a_{22}, ...a_{nn}$ elementlari diagonal elementlari deb ataladi.

Barcha diagonal elementlari 1 ga, qolgan elementlari nolga teng kvadrat matritsa birlik matritsa deb ataladi va E bilan belgilanadi.

Istalgan n- tartibli A kvadrat matritsa uchun ushbu tenglik o‘rinli.

$$E\cdot A=A\cdot E=A$$

Barcha $i\neq j$ лар учун $a_{ij}=0$ bo‘lgan n- tartibli quyidagi ko‘rinishdagi

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & 0 \\ . & . & . & \dots & . \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

matritsalar diagonal matritsalar deb ataladi.

Diagonal matritsalarni xossasi: Ikkita diagonal matritsani yigindisi va ko‘paytmasi yana diagonal matritsadir.

A matritsadan uning satrlarini ustunlari bilan almashtirishdan hosil bo‘lgan matritsa A matritsaga nisbatan transponirlangan matritsa deb ataladi va A_T bilan belgilanadi.

Agar $A_T=A$ bo‘lsa A kvadrat matritsa simmetrik matritsa agar $A_T=-A$ bo‘lsa, qiya simmetrik matritsa deb ataladi.

Simmetrik matritsaning bosh diagonalga nisbatan simmetrik joylashgan elementlari teng, qiya simmetrik matritsaning bunday elementlari esa qarama-qarshidir. Qiya simmetrik matritsaning barcha diagonal elementlari nolga teng.

Misol. A va B matritsalarni ko‘paytiring.

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{va} \quad B=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 1 & 3 & -2 \\ 3 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

Echish. (*) formulaga ko‘ra:

$$A\cdot B=\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 1 & 3 & -2 \\ 3 & -1 & 3 \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} 2\cdot 2+3\cdot 1+(-1)\cdot 3 & 2\cdot 1+3\cdot 3+(-1)\cdot(-1) & 2\cdot 5+3\cdot(-2)+(-1)\cdot 3 \\ 1\cdot 2+(-2)\cdot 1+3\cdot 3 & 1\cdot 1+(-2)\cdot 3+3\cdot(-1) & 1\cdot 5+(-2)\cdot(-2)+3\cdot 3 \\ 3\cdot 2+1\cdot 1+1\cdot 3 & 3\cdot 1+1\cdot 3+1\cdot(-1) & 3\cdot 5+1\cdot(-2)+1\cdot 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 & 12 & 1 \\ 9 & -8 & 18 \\ 10 & 5 & 16 \end{pmatrix}$$

O‘z-o‘zini tekshirish uchun savollar

1. Matritsa nima?
2. Matritsalarni turlarini aytib bering.
3. Matritsalarning xossalarini aytib tushuntirib bering.
4. Matritsalar ustida amallarni misollar yordamida tushuntiring.

5.7.2. Ikki va uch noma’lumli chiziqli tenglamalar sistemasining matritsasi. Ikkinchi va uchinchi tartibli determinantlar.

Bizga ma’lumki, o‘rta maktab kursida ikki va uch noma’lumli chiziqli tenglamalar sistemasini yechishning o‘rniga qo‘yish, no’malumlarni ketma-ket yo‘qotish usullari mavjud edi. Ammo chiziqli tenglamalar sistemalarini noma’lumlarni ketma-ket yo‘qotish usuli bilan yechishning muhim kamchiligi shundaki, u chiziqli tenglamalar sistemasining birgalikdagi va aniqlanganlik shartlarini uning koeffitsientlari va ozod hadlari orqali ifodalashga imkon bermaydi.

Determinant tushunchasi chiziqli tenglamalar sistemalarining yechimlarini uning koeffitsientlari va ozod hadlari orqali ifodalaydigan umumiy formulalar topish masalasini hal etish jarayonida yuzaga keldi. Ikkita x va y noma’lumli ikkita chiziqli tenglama sistemasini qaraymiz.

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2 \end{cases} \tag{1}$$

(1) tenglamalar sistemasining o‘zgaruvchilari oldidagi koeffitsentlari va ozod hadlaridan tuzilgan ushbu jadvallarni qaraymiz.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_2 \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \qquad A' = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \end{pmatrix}$$

A ва A' matritsalarga (1) sistemaning mos ravishda asosiy va kengaytirilgan matritsalari deb ataladi.

(1) sistemaning birinchi tenglamasini a_{22} ga ikkinchi tenglamasini $(-a_{12})$ ga ko‘paytiramiz va bu tenglamalarni qo‘shamiz. Qo‘shish natijasida

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) \cdot x = b_1 a_{22} - b_2 a_{12} \tag{2}$$

tenglamani hosil qilamiz.

Shunga o‘xshash sistemaning birinchi tenglamasining ikkala qismini $(-a_{21})$ ga, ikkinchi tenglamasining ikkala qismini esa a_{11} ga ko‘paytirib va bu tenglamalarni qo‘shib

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) \cdot y = a_{11}b_2 - a_{21}b_1 \tag{3}$$

tenglamani hosil qilamiz.

$a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ ifoda A matritsaning determinanti deb ataladi va det A bilan belgilanadi. A matritsa ikkinchi tartibli bo‘lgani uchun $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ ifoda ikkinchi tartibli determinant bo‘ladi. (2), (3) tengliklarning o‘ng tomonlarida chap tomonlarda turgan koeffitsientga o‘xshash ko‘rinishdagi ifodalar turibdi, ular ham ikkinchi tartibli determinantlardir; (2) tenglikning o‘ng tomonida A matritsadan uning birinchi ustunini (1) sistemaning ozod hadlar ustuni bilan almashtirishdan hosil qilingan matritsaning determinanti turibdi, (3) tenglikning o‘ng tomonida esa A matritsadan uning ikkinchi ustunini (1) sistemaning ozod hadlar ustuni bilan almashtirishdan hosil bo‘lgan matritsaning determinanti turibdi.

(2), (3) tenglamalarni endi

$$\Delta \cdot x = \Delta_x \qquad \Delta \cdot y = \Delta_y$$

ko‘rinishda yozish mumkin, bu erda Δ, Δ_x va Δ_y orqali ushbu determinantlar belgilangan.

$$\begin{gathered}\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \\ \Delta_x = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix} = b_1 a_{22} - b_2 a_{12} \\ \Delta_y = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix} = a_{11}b_2 - a_{21}b_1 \\ x = \frac{\Delta_x}{\Delta}, \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta}\end{gathered} \tag{4}$$

Uch noma’lumli chiziqli tenglamalar sistemasini qaraymiz.

$$\begin{aligned} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z &= b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z &= b_2 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z &= b_3 \end{aligned} \tag{5}$$

Ushbu

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \quad A' = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & b_3 \end{pmatrix}$$

matritsalar (5) sistemaning asosiy va kengaytirilgan matritsalari deb ataladi. Ikki noma’lumli ikkita chiziqli tenglama sistemasidagidek x noma’lum uchun koeffitsientlari sistemaning koeffitsientlari va ozod hadlari orqali ifodalangan ushbu tenglamani hosil qilish mumkin.

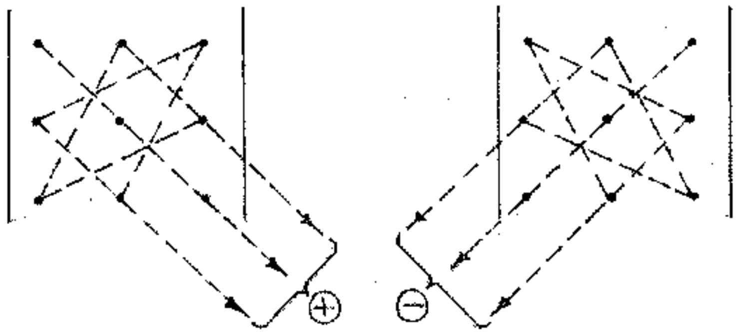
$$\begin{gathered}(a_{11}\, a_{22}\, a_{33} + a_{12}\, a_{23}\, a_{31} + a_{13}\, a_{32} a_{21} - a_{13}\, a_{22}\, a_{31} - a_{12}\, a_{21}\, a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}) \cdot x = \\ b_1\, a_{22}a_{33} + a_{12}\, a_{23}b_3 + a_{13}b_2a_{32} - a_{13}a_{22}\, b_3 - a_{12}\, b_2\, a_{33} - b_1a_{23}a_{32}\end{gathered} \tag{6}$$

(6) tenglamada x oldidagi koeffitsient uchinchi tartibli A kvadrat matritsaning determinanti deb ataladi va Δ bilan belgilanadi.

Shunday qilib, uchinchi tartibli matritsaning determinanti ushbu qoida bo‘yicha hisoblanadi:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\, a_{22}\, a_{33} + a_{12}\, a_{23}\, a_{31} + a_{13}\, a_{21}\, a_{32} - a_{13}\, a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$$

Uchinchi tartibli matritsaning determinantini hisoblash qoidasini grafik usulida quyidagicha tasvirlash mumkin. (87-chizma)



87-chizma

(6) tenglikning o‘ng tomoni ham A matritsadan uning birinchi ustunini (5) sistemaning ozod hadlar ustuni bilan almashtirishdan hosil bo‘lgan uchinchi tartibli matritsaning determinanti bo‘ladi. Agar A matritsaning determinanti Δ orqali (6) tenglikning o‘ng tomonida turgan determinantni Δ_x orqali belgilasak, u holda (6) tenglama

$$\Delta \cdot x = \Delta_x$$

ko‘rinishni oladi.

Shunga o‘xshash (5) sistemadan y va x noma’lumlarni topish uchun quyidagi tenglamani hosil qilamiz.

$$\Delta \cdot y = \Delta_y \qquad \Delta \cdot z = \Delta_z$$

bu erda Δ_y va Δ_z orqali Δ matritsadan uning ikkinchi ustunini (mos ravishda uchinchi ustunnini) ozod hadlar ustuni bilan almashtirish bilan hosil qilingan uchinchi tartibli matritsalarning tegishli determinantlari olingan, ya’ni,

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \Delta_y = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \Delta_z = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}; \tag{7}$$

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta}, \; y = \frac{\Delta_y}{\Delta}, \; z = \frac{\Delta_z}{\Delta}$$

ikki va uch noma’lumli chiziqli tenglamalar sistemasini determinantlardan foydalanib yechish qoidasiga Kramer qoidalari, (4) va (7) formulalarga Kramer formulalari deyiladi.

Yuqori tartibli (uchdan yuqori) determinantlarni hisoblashda, ularni tartibi pasaytirilib hisoblanadi. Buning uchun determinantni satr bo‘yicha yoyish degan qoidaga asoslaniladi.

$n-$ tartibli A matritsa berilgan bo‘lsin. Bu matritsaning determinanti

$$\det(A) = a_{11}\,|A_{11}| - a_{12}\,|A_{12}| + \ldots + (-1)^{n-1} a_{1n}\,|A_{1n}|$$

ko‘rinishda yozish mumkin, bu erda $|A_{ij}|$ orqali (A) matritsadan uning birinchi satri va $j-$ustunini o‘chirishdan hosil bo‘lgan $(n-1)-$tartibli matritsaning determinanti belgilangan.

Misol. Quyidagi sistemalarni Kramer formulalaridan foydalanib yeching.

$$a) \qquad \begin{cases} x + 3y = 5 \\ 2x - y = 3 \end{cases}$$

Yechish: Sistemaning determinantlarini topamiz.

$$\Delta=\begin{vmatrix}1 & 3\\ 2 & -1\end{vmatrix}=-1-6=-7$$

bo‘lgani uchun, sistema yagona yechimga ega.

$$\Delta_x=\begin{vmatrix}5 & 3\\ 3 & -1\end{vmatrix}=-14 \quad \Delta_y=\begin{vmatrix}1 & 5\\ 2 & 3\end{vmatrix}=-7$$

(4) formulalarga ko‘ra

$$x=\frac{\Delta_x}{\Delta}=\frac{-14}{-7}=2, \quad y=\frac{\Delta_y}{\Delta}=\frac{-7}{-7}=1$$

Javob: (2;1)

$$б)\begin{cases}5x+2y-4z=38\\ 4x+3z=-7\\ x-3y=-10\end{cases}$$

determinantlarni tuzamiz va hisoblaymiz.

$$\Delta=\begin{vmatrix}5 & 2 & -4\\ 4 & 0 & 3\\ 1 & -3 & 0\end{vmatrix}=99, \quad \Delta_x=\begin{vmatrix}38 & 2 & -4\\ -7 & 0 & 3\\ -10 & -3 & 0\end{vmatrix}=198, \quad \Delta_y=\begin{vmatrix}5 & 38 & -4\\ 4 & -7 & 3\\ 1 & -10 & 0\end{vmatrix}=396$$

$$\Delta_z=\begin{vmatrix}5 & 2 & 38\\ 4 & 0 & -7\\ 1 & -3 & -10\end{vmatrix}=-495.$$

$$x=\frac{\Delta_x}{\Delta}=\frac{198}{99}=2, \quad y=\frac{\Delta_y}{\Delta}=\frac{396}{99}=4, \quad z=\frac{\Delta_z}{\Delta}=\frac{-495}{99}=-5$$

Javob: (2;4;-5)

O‘z-o‘zini tekshirish uchun savollar.

1. Ikki va uch noma’lumli tenglamalar sistemasining matritsalarini yozib ko‘rsating.
2. Kramer formulalaridan foydalanib ixtiyoriy sistemalarni yozing.

5.7.3. Determinantning xossalari.

1. Determinantning hamma ustunlarini uning mos satrlari bilan o‘rnini almashtirishdan determinant o‘zgarmaydi, ya’ni

$$\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{21} & a_{31}\\ a_{12} & a_{22} & a_{32}\\ a_{13} & a_{23} & a_{33}\end{vmatrix}$$

Isbot. $\Delta-$berilgan determinant, $\overset{*}{\Delta}$ esa Δ dan uning satrlarini mos ustunlar bilan almashtirishdan hosil bo‘lgan determinant bo‘lsin. Δ ni birinchi satr elementlari bo‘yicha yoyib chiqamiz:

$$\Delta=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}=a_{11}\begin{vmatrix}a_{22}&a_{23}\\a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}-a_{12}\begin{vmatrix}a_{21}&a_{23}\\a_{31}&a_{33}\end{vmatrix}+a_{13}\begin{vmatrix}a_{21}&a_{22}\\a_{31}&a_{32}\end{vmatrix}$$

Endi Δ^* ni birinchi ustun elementlari bo‘yicha yoyib chiqamiz:

$$\Delta^*=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{21}&a_{31}\\a_{12}&a_{22}&a_{32}\\a_{13}&a_{23}&a_{33}\end{vmatrix}=a_{11}\begin{vmatrix}a_{22}&a_{23}\\a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}-a_{12}\begin{vmatrix}a_{21}&a_{23}\\a_{31}&a_{33}\end{vmatrix}+a_{13}\begin{vmatrix}a_{21}&a_{22}\\a_{31}&a_{32}\end{vmatrix}$$

Demak, $\Delta=\Delta^*$

(Determinantni satr va ustun elementlari bo‘yicha yoyib hisoblashni mustaqil o‘rganish talabalarga topshiriladi.)

2. Determinantning istalgan ikkita satrining (yoki ikki ustunining) o‘rinlari almashtirilsa, determinantning faqat ishorasi o‘zgaradi. Masalan, agar birinchi va uchinchi satrlarning o‘rinlarini almashtirsak:

$$\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}a_{31}&a_{32}&a_{33}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{11}&a_{12}&a_{13}\end{vmatrix}$$

3. Ikkita satri yoki ikkita ustuni bir xil bo‘lgan determinantning qiymati nolga teng.

4. Biror satr (yoki ustun) elementlarining umumiy ko‘paytuvchisini determinant belgisidan tashqariga chiqarish mumkin.

Isbot. Aytaylik, determinantning ikkinchi satr elementlari umumiy ko‘paytuvchiga ega bo‘lsin:

$$\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\ka_{21}&ka_{22}&ka_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}$$

Bu determinantni ikkinchi satr elementlari bo‘yicha yoyamiz.

$$\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\ka_{21}&ka_{22}&ka_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}=ka_{21}A_{21}+ka_{22}A_{22}+ka_{23}A_{23}=k\Delta$$

5. Agar determinant biror $i-$satr (ustuni)ning har bir elementi ikkita qo‘shiluvchining yig‘indisidan iborat, ya’ni $a_{ik}=b_k+c_k\ \left(k=\overline{1,n}\right)$ bo‘lsa, u holda berilgan determinant shunday ikkita determinantning yig‘indisiga teng bo‘ladiki, bu determinantlarning $i-$satridan boshqa satrlari dastlabki determinantnikiday bo‘ladi, ularning biridagi $i-$satr elementlarning, ikkinchisi esa c_k elementlardan iborat bo‘ladi.

Masalan:

$$\begin{vmatrix} a_1+m_1 & a_2+m_2 & a_3+m_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} m_1 & m_2 & m_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

6. Determinantning biror ustun (satr) elementlariga boshqa ustunning (satrning) bir xil songa ko‘payttirilgan mos elementlarini qo‘shishdan determinantning qiymati o‘zgarmaydi.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11}+ka_{13} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21}+ka_{23} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31}+ka_{33} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} +$$

$$+k\begin{vmatrix} a_{13} & a_{12} & a_{13} \\ a_{23} & a_{22} & a_{23} \\ a_{33} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

O‘z-o‘zini tekshirish uchun savollar.

1. Determinantlarning xossalarini sanab, aytib bering.

5.7.4. Teskari matritsa

Bizga ma’lumki E birlik matritsa va

$$A\cdot E = E\cdot A = A$$

tenglik o‘rinli.

1-Ta’rif. A matritsa uchun $A\cdot B = E$ tenglikni qanoatlantiruvchi B matritsa A ga *teskari* matritsa deyiladi va u $B = A^{-1}$ ko‘rinishda belgilanadi.

2-Ta’rif. Barcha satr vektorlari chiziqli erkli matritsa *xosmas* (aynimagan) matritsa, barcha satr vektorlari chiziqli bog‘langan matritsa *xos* (aynigan) matritsa deb ataladi.

Xosmas matritsalarga doir quyidagi ikkita teoremani isbotsiz keltiramiz.

1-Teorema. Xosmas matritsani elementar almashtirishlar yordamida birlik matritsaga keltirish mumkin.

2-Teorema. Xosmas matritsaga teskari matritsa mavjud va yagonadir. (Teoremaning isbotlari A.G.Kuroshning «Oliy algebra kursi» kitobida keltirilgan).

Teskari matritsani topish.

Aytaylik, $n-$tartibli kvadrat, xosmas A matritsa berilgan bo‘lsin:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \dots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \dots a_{2n} \\ \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} \dots a_{nn} \end{pmatrix}$$

A matritsaga teskari B matritsani topish uchun, uni quyidagi ko‘rinishda yozamiz:

$$\left(\begin{array}{llll|llll} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & 0 & 0 & \dots & 1 \end{array}\right) \tag{1}$$

Chap tomonida berilgan A matritsa, o‘ng tomonda E birlik matritsa yozilgan. Bu matritsalarning ikkalasiga bir vaqtda A matritsani birlik E matritsaga keltiradigan satrlar bo‘yicha elementar almashtirishlar qo‘llaymiz.

$$\left(\begin{array}{llll|llll} 1 & 0 & \dots & 0 & b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ 0 & 1 & \dots & 0 & b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{array}\right) \tag{2}$$

(2) ning o‘ng tomonidagi matritsa xuddi A ga teng teskari B matritsani ifodalaydi, ya’ni

$$A \cdot B = E$$

bo‘ladi. A matritsa o‘z navbatida B ga teskari bo‘lganligi sababli $B \cdot A = E$ ham bajariladi.

Misol. Berilgan

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & -3 & 7 \\ 2 & -3 & 5 \end{pmatrix}$$

matritsaga teskari bo‘lgan A^{-1} matritsani toping.

Yehish. Buning uchun quyidagi matritsani tuzamiz:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -3 & 7 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Birinchi ustunni 1 ga, so‘ngra -2 ga ko‘paytirib, mos ravishda ikkinchi va uchinchi ustunga qo‘shamiz:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & -2 \\ 3 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Ikkinchi ustunni 2 ga va 1 ga ko‘paytirib, mos ravishda birinchi va uchinchi ustunga qo‘shamiz:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 3 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Uchinchi ustunni –3 ga ko‘paytirib, birinchi ustunga qo‘shamiz va ikkinchi ustunni –1 ga ko‘paytiramiz:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 6 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Ikkinchi va uchinchi ustunlarni almashtiramiz:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 6 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

Natijada A ga teskari A^{-1} matritsaga ega bo‘lamiz:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 6 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

O‘z-o‘zini tekshirish uchun savollar.

1. Berilgan matritsaga teskari matritsa tuzishni misollar yordamida tushuntiring

5.7.5. Chiziqli tenglamalar sistemasini matritsalar ko‘rinishida ifodalash.

Bizga n noma’lumli n chiziqli tenglamalar sistemasi berilgan bo‘lsin:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases} \tag{3}$$

Bu sistema koeffitsientlaridan tuzilgan matritsa quyidagicha bo‘ladi:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \ldots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \ldots a_{2n} \\ \ldots & \ldots\ldots \\ a_{n1} & a_{n2} \ldots a_{nn} \end{pmatrix}$$

Biz faqat A xosmas matritsa bo‘lgan holnigina qaraymiz. (3) sistemaning chap tomonida A matritsani

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ . \\ x_n \end{bmatrix}$$

matritsaga ko‘paytirishdan kelib chiqadigan n satrli va bir ustunli matritsaning elementlari, sistemani o‘ng tomonida esa

$$B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ . \\ . \\ . \\ b_n \end{bmatrix}$$

matritsaning elementlari turibdi. Shu sababli ikki matritsaning tenglik ta’rifiga asosan, (3) ni tubandagicha

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \ . \ . \ . & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \ . \ . \ . & a_{2n} \\ . \ . \ . & . \ . \ . & . \ . \ . \\ a_{n1} & a_{n2} \ . \ . \ . & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ . \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ . \\ . \\ . \\ b_n \end{bmatrix}$$

yoki qisqacha

$$A \cdot X = B \tag{4}$$

ko‘rinishda yozish mumkin. Bu tenglama matritsaviy tenglama (chiziqli tenglamalar sistemasini matritsali ko‘rinishi) deyiladi. A xosmas matritsa bo‘lgani sababli, unga teskari bo‘lgan A^{-1} matritsa mavjud, shuning uchun (4) ni chap tomonini A^{-1} ko‘paytiramiz:

$A^{-1} \cdot (A \cdot X) = A^{-1} \cdot B,$ lekin $A^{-1} \cdot (A \cdot X) = (A^{-1} \cdot A) \cdot X = EX = X$, demak,

$$X = A^{-1} \cdot B$$

yoki

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ . \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} a'_{11} & a'_{12} \ . \ . \ . & a'_{1n} \\ a'_{21} & a'_{22} \ . \ . \ . & a'_{2n} \\ . \ . \ . & . \ . \ . & . \ . \ . \\ a'_{n1} & a'_{n2} \ . \ . \ . & a'_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ . \\ . \\ . \\ b_n \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} a'_{11}b_1 + a'_{12}b_2 + \ldots + a'_{1n}b_n \\ a'_{21}b_1 + a'_{22}b_2 + \ldots + a'_{2n}b_n, \\ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \\ a'_{n1}b_1 + a'_{n2}b_2 + \ldots + a'_{nn}b_{n.} \end{pmatrix}$$

bundan esa, ikki matritsaning tenglik shartiga asosan (4) yoki (3) ning echimiga ega bo‘lamiz:

$$x_i = a'_{i1}b_1 + a'_{i2}b_2 + \ldots + a'_{in}b_n, \ \left(i = \overline{1,n}\right). \tag{5}$$

Misol.

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 5 \\ 5x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 1 \\ 7x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 4 \end{cases}$$

tenglamalar sistemasini matritsaviy ko‘rinishda yozing va uning echimini toping.

Yechish. Berilgan sistemaning matritsasini yozamiz:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 5 & 2 & 4 \\ 7 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

va

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

deb belgilasak, u holda sistemaning «matritsaviy» ko‘rinishi

$$A \cdot X = B \quad . \; . \; . \; . \quad (*)$$

ko‘rinishda bo‘ladi. A ga teskari A^{-1} matritsa

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -8 & -5 & 6 \\ 18 & 11 & -13 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

bo‘lgani sababli (*) ni chap tomondan A^{-1} ko‘paytiramiz: u vaqtda

$$A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} B$$

yoki

$X = A^{-1} \cdot B$ ga egamiz, bundan $A^{-1} \cdot B$ ni topamiz:

$$A^{-1} \cdot B = \begin{pmatrix} -8 & -5 & 6 \\ 18 & 11 & -13 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-8)\cdot 5 + (-5)\cdot 1 + 6 \cdot 4 \\ 18 \cdot 5 + 11 \cdot 1 + (-13) \cdot 4 \\ 1 \cdot 5 + 1 \cdot 1 + (-1) \cdot 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -21 \\ 49 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Demak, tenglamalar sistemasini yechimi:

$$x_1 = -21; \; x_2 = 49; \; x_3 = 2$$

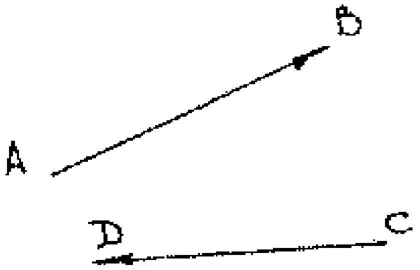
O‘z-o‘zini tekshirish uchun savollar.

1. Ixtiyoriy ikki yoki uch noma’lumli tenglamalar sistemasini olib uni matritsaviy ko‘rinishda yozing va yechib ko‘rsating.

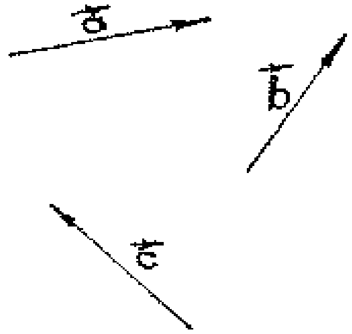
5.8. Vektorlar. Vektorlar ustida amallar. Vektor va nuqtaning koordinatalari

5.8.1. Vektor. Nol vektor. Vektor uzunligi,qiymati va yo'nalishi.

Agar kesma oxirlarining tartibi e'tiborga olinsa, u yo'nalgan hisoblanadi. Agar oldin A nuqta keyin B nuqta berilgan bo'lsa, u holda A nuqta $\overline{AB}$ yo'nalgan kesmaning boshi B nuqta esa oxiri deyiladi. $\overline{AB}$ yo'nalgan kesma ustiga chiziq qo'yish bilan belgilanadi. Oddiy kesmaning uchlari teng huquqli bo'lib, ularning tartibini ahamiyati yo'q. Yo'nalgan kesmada esa boshi oxirining o'rinlari almashtirilishi bilan ularning yo'nalishi o'zgaradi. Yo'nalgan $\overline{AB}$ kesmaning uzunligi deb, $[AB]$ kesmaning uzunligini aytiladi va $|\overline{AB}|$ bilan belgilanadi. Yo'naltirilgan kesma vektor deyiladi. Vektorlarni belgilashda biz ustiga strelka qo'yilgan kichik harflardan foydalanamiz: $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$,...... . Ba'zan vektorlarni kesma oxirlarini ko'rsatuvchi o'sha harflar bilan ham belgilanadi.

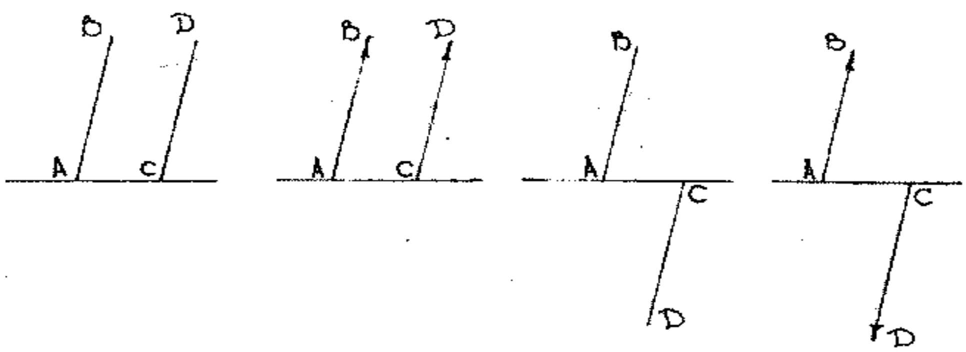


88 – chizma



89 - chizma

Masalan: Vektorni 88,89-chizmada ko'rsatilgandek, $\overrightarrow{AB}$ ko'rinishda belgilash mumkin. A nuqta vektorning boshi, B nuqta vektorning oxiri deyiladi. Agar $\overline{AB}$ va $\overline{CD}$ yo'nalgan kesmalar bir xil (qarama-qarshi) yo'nalishli bo'lsa $\overrightarrow{AB}$ va $\overrightarrow{CD}$ vektorlar bir xil (qarama-qarshi) yo'nalishli vektorlar deyiladi. (90-chizma).



90-chizma

$\vec{a}$ vektorning absolyut qiymati (uzunligi) yoki moduli deb shu vektorni tasvirlovchi kesma uzunligiga aytiladi. $\vec{a}$ vektorning absolyut qiymati $|\vec{a}|$ bilan,

$\overrightarrow{AB}$ vektorning absolyut qiymati esa $|\overrightarrow{AB}|$ bilan belgilanadi. Moduli birga teng bo‘lgan vektor birlik vektor deyiladi. Vektorning boshi uning oxiri bilan ustma - ust tushishi mumkin. Bunday vektorlar nol vektor deb ataladi. Nol vektor ustiga strelka qo‘yilgan nol $(\vec{0})$ bilan belgilanadi. Nol vektorning yo‘nalishi haqida so‘z yuritilmaydi - u aniqlanmagan. Nol vektorning moduli nolga teng deb hisoblanadi. Noldan farqli ikkita vektor bir to‘g‘ri chiziqda yoki parallel to‘g‘ri chiziqlarda yotsa, bunday vektorlar kollinear vektorlar deyiladi. $\vec{a},\vec{b}$ vektorlarning kollinearligi $\vec{a}\,||\,\vec{b}$ ko‘rinishida belgilanadi. Uzunliklari teng, kollinear va bir xil yo‘nalishli ikkita $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlar teng vektorlar deyiladi va $\vec{a}=\vec{b}$ ko‘rinishida belgilanadi. Bir tekislikka parallel bo‘lgan yoki shu tekislikda yotuvchi vektorlar komplanar vektorlar deyiladi.

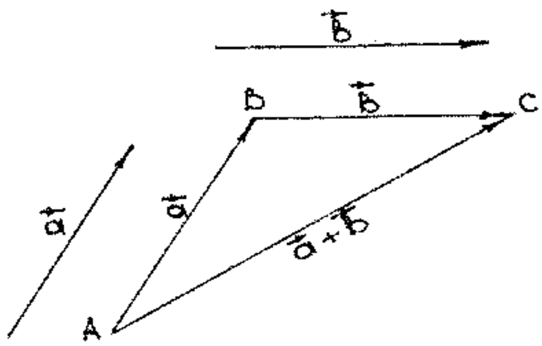
O‘z - o‘zini tekshirish uchun savollar.

1. Vektor nima?
2. Kollinear, komplanar va nol vektorlarni tushuntiring.

5.8.2. Vektorlar ustida amallar.

a). Vektorlarni qo‘shish.

Ta’rif. Ikkita $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlarning yig‘indisi deb istalgan A nuqtadan $\vec{a}$ vektorni qo‘yib, uning oxiri B ga $\vec{b}$ vektorni qo‘yganda boshi $\vec{a}$ vektorning boshi A da, oxiri $\vec{b}$ vektorning oxiri C da bo‘lgan $\overrightarrow{AC}$ vektorga aytiladi. (91-chizma).

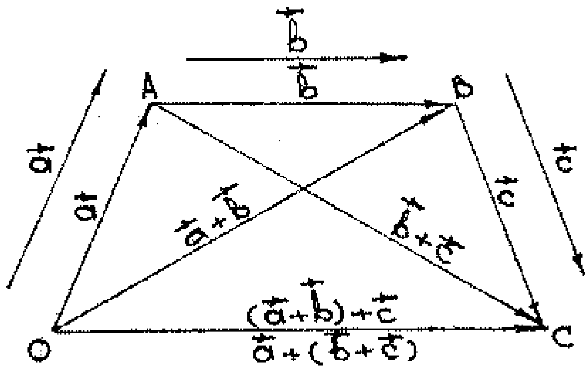


91-chizma

$\vec{a},\vec{b}$ vektorlarning yig‘indisi $\vec{a}+\vec{b}$ bilan belgilanadi. Vektorni qo‘shish ta’rifidan istalgan A, B va C uch nuqta uchun

$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC} \qquad (1)$$

tenglik o‘rinli bo‘lishi kelib chiqadi. (1) tenglik vektorlarni qo‘shishning uchburchak qoidasi deyiladi. Ikki kollinear vektorni qo‘shish ham shu qoida bo‘yicha bajariladi.



92-chizma

Vektorlarni qo‘shish amali quyidagi xossalarga ega:

1).Qo‘shishning gruppalash (assotsiativlik) xossasi. Har qanday $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ vektorlar uchun $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$ munosabat o‘rinli.

Isbot. Vektorlarni qo‘shishning uchburchak qoidasidan (92-chizma):

$$\vec{a}+\vec{b}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}$$

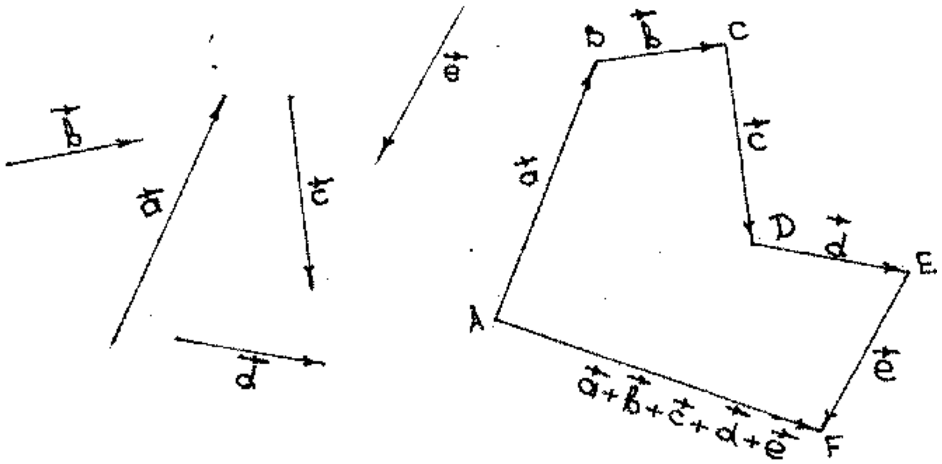
$(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c} = \overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{OC}$

$\vec{b}+\vec{c}= \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$

$\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})=\overline{OA}+\overline{AC}=\overline{OC}$

bundan $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$ ekani kelib chiqadi.

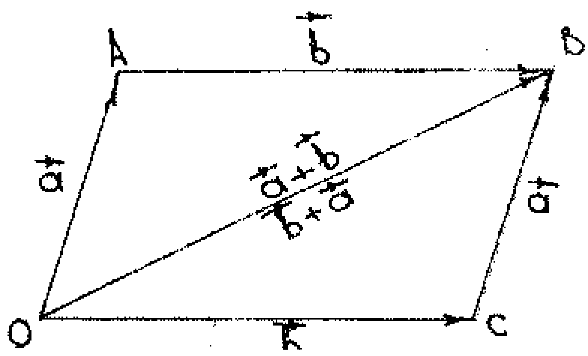
Qo‘shiluvchi vektorlarning soni ikkitadan ortiq bo‘lganda ularni qo‘shish quyidagicha bajariladi. Berilgan $\vec{a},\vec{b},\vec{c},...l$ vektorlarning yig‘indisini hosil qilish uchun $\vec{a}$ vektorning oxiriga $\vec{b}$ vektorning boshini qo‘yish keyin $\vec{b}$ vektorning oxiriga $\vec{c}$ vektorning boshini qo‘yish va h.k. Bu ishni oxirgi vektor ustida bajarilguncha davom ettirish kerak. Yig‘indi vektor yani $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+...+l$ yig‘indisi bo‘lgan vektor boshi $\vec{a}$ vektorning boshidan, oxiri esa l vektorning oxiridan iborat vektor bo‘ladi.



93-chizma

Masalan, 93-chizmadagi $\overrightarrow{AF}$ vektor berilgan $\vec{a},\vec{b},\vec{c}\ \vec{d},\vec{e}$ vektorlarni qo‘shishdan hosil bo‘lgan vektordir.

2) Qo‘shishning o‘rin almashtirish (kommutativlik) xossasi. Har qanday ikkita $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektor uchun $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$ tenglik o‘rinlidir.



94-chizma

Isbot: $\vec{a}=\overrightarrow{OA}$ va $\vec{b}=\overrightarrow{AB}$ bo‘lsin. Ikki hol bo‘lishi mumkin:

a) $\vec{a},\vec{b}$ vektorlar kollinear emas. Bu holda O,A,B nuqtalar bitta to‘g‘ri chiziqda yotmaydi(94-chizma) OAB uchburchakni OABC parallelogrammga to‘ldirsak, vektorlarni qo‘shishning uchburchak qoidasiga ko‘ra:

$$\vec{a}+\vec{b}= \overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB} \qquad \vec{b}+\vec{a} =\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{OB}$$

bu ikki tenglikdan esa $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$ kelib chiqadi.

b) $\vec{a} \,||\, \vec{b}$ bo‘lsin. Bu holda O,A,B nuqtalar bitta d to‘g‘ri chiziqda yotadi. d to‘g‘ri chiziqda yotmaydigan C nuqta olaylik, u holda

$$\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{OB} \qquad (2)$$

a) holga ko‘ra $\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{OC}$.

Lekin $\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AC}$ bo‘lgani uchun:

$$\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{OA} \qquad (3)$$

qarama-qarshi vektorlar y ig‘indisi $\vec{0}$ ga teng bo‘lgani uchun $\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AC}=\vec{0}$ ikkinchi tomondan,

$$\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB} \qquad (4)$$

(3) va (4) tengliklardan $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$ tenglikka ega bo‘lamiz.

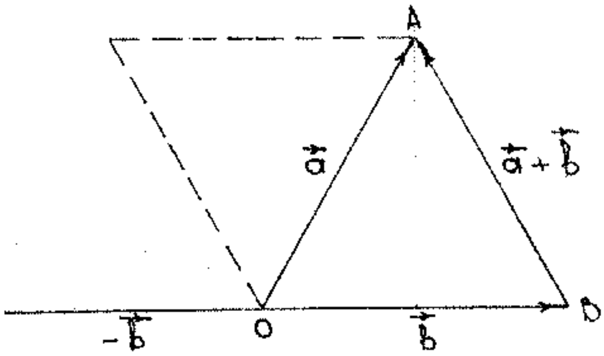
3) har qanday $\vec{a}$ vektorga nol vektor qo‘shilsa, $\vec{a}$ vektor hosil bo‘ladi, ya’ni $\vec{a}+\vec{0}=\vec{a}$. Uchburchak qoidasiga ko‘ra istalgan $\vec{a}=\overrightarrow{OA}$ vektor uchun $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AA}=\overrightarrow{OA}$ tenglik yoki $\vec{a}+\vec{0}=\vec{a}$ tenglik o‘rinli.

4) har qanday $\vec{a}$ vektor uchun shunday $\overrightarrow{a'}$ vektor mavjudki, uning uchun:

$$\vec{a}+\vec{a}'=0 \qquad (5)$$

b). Vektorlarni ayirish.

Ta’rif. $\vec{a},\vec{b}$ vektorlarning ayirmasi deb, $\vec{a}$ vektor bilan $\vec{b}$ vektorga qarama-qarshi $-\vec{b}$ vektorning yig‘indisiga aytiladi. Bu ta’rifdan ko‘rinadiki, $\vec{c}=\vec{a}-\vec{b}$ ayirma vektorni yasash uchun $\vec{c}=\vec{a}+(-\vec{b})$ vektorni yasash kerak ekan. Agar $\vec{a},\vec{b}$ vektorlar bitta O nuqtaga qo‘yilgan. (95-chizma) hamda $\vec{a}=\overrightarrow{OA}$ va $\vec{b}=\overrightarrow{OB}$ deb belgilangan bo‘lsa, u holda



95-chizma

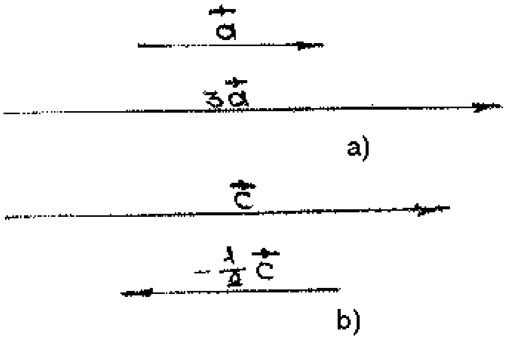
$$\vec{c}=\vec{a}-\vec{b}=\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{BO}=\overrightarrow{BO}+\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{BA}$$

Bu holda $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlarning ayirmasini topish uchun boshi $\vec{B}$ nuqtada oxiri $\vec{A}$ nuqtada bo‘lgan $\overrightarrow{BA}$ vektorni yasash etarli bo‘ladi.

v). Vektorlarni songa ko‘paytirish.

$\vec{a}\neq 0$ vektor va α son berilgan bo‘lsin, bu erda $\alpha \in R$.

Ta’rif. Vektorning α songa ko‘paytmasi deb shunday $\vec{b}$ vektorga aytiladiki $\alpha>0$ bo‘lganda $\vec{b}$ ning yo‘nalishi $\vec{a}$ ning yo‘nalishi bilan bir xil, $\alpha<0$ da $\vec{b}$ ning yo‘nalishiga teskari bo‘lib, $\vec{b}$ vektorning



96-chizma

uzunligi esa $\vec{a}$ vektorning uzunligi bilan α son modulining ko‘paytmasiga teng, $\vec{a}$ ning α songa ko‘paytmasi $\vec{b}=\alpha\vec{a}$ shaklida belgilanadi. Bu ta’rifdan bevosita quyidagi xulosalar kelib chiqadi:

1) ixtiyoriy $\vec{a}$ vektor uchun:

$$0\cdot\vec{a}=0$$

2) ixtiyoriy $\alpha\in R$ son uchun: $\alpha\cdot\vec{0}=\vec{0}$

3) ixtiyoriy $\vec{a}$ vektor uchun:

$$1\cdot\vec{a}=\vec{a}\ ;\ (-1)\cdot\vec{a}=-\vec{a}$$

4) $\vec{a}$ va $\alpha\vec{a}$ vektorlar o‘zaro kollineardir:

96-a chizmada $\vec{a}$ vektor 3 soniga ko‘paytirilgan: $\vec{b}=3\vec{a}$; 96-b chizmada $\vec{c}$ vektor $-\frac{1}{2}$ soniga ko‘paytirilgan: $\vec{b}=-\frac{1}{2}\vec{c}$. Biror $\vec{a}\neq 0$ vektorni o‘zining uzunligiga teskari $\frac{1}{|\vec{a}|}$ songa ko‘paytirilsa, shu vektor yo‘nalishidagi birlik vektor (ort) hosil bo‘ladi, ya’ni $\frac{1}{|\vec{a}|}\cdot\vec{a}=\vec{a}_0\,(|\vec{a}_0|=1)$

Teorema: Agar $\vec{a}\,\|\,\vec{b}$ ($\vec{a}\neq0$) bo‘lsa, u holda shunday α son mavjudki, $\vec{b}=\alpha\vec{a}$ bo‘ladi. (4)

Isbot. $\vec{a}\,||\,\vec{b}$ bo‘lgani uchun quyidagi uch hol bo‘lishi mumkin:

1) $\vec{a}\uparrow\uparrow\vec{b}$ bo‘lsa, $\frac{1}{|\vec{a}|}\cdot\vec{a}=\frac{1}{|\vec{b}|}\vec{b}$ bo‘lib, bundan $\vec{b}=\frac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|}\vec{a}$

bu holda $\alpha=\frac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|}$ bo‘ladi:

2) $\vec{a}\uparrow\downarrow\vec{b}$ bo‘lsa $\frac{1}{|\vec{a}|}\cdot\vec{a}=-\frac{1}{|\vec{b}|}\vec{b}$ bo‘lib, bundan $\vec{b}=-\frac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|}\vec{a}$; bu holda $\alpha=-\frac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|}$ bo‘ladi.

3) $\vec{b}=0$ bo‘lganda $\vec{b}=0\cdot\vec{a}$ bundan $\alpha=0$. Demak, vektorni songa ko‘paytirish ta’rifidan va yuqoridagi teoremadan quyidagi xulosani chiqarish mumkin:

$$\vec{a}\,\|\,\vec{b}\Leftrightarrow\vec{b}=\alpha\vec{a}\qquad(\alpha\in R)$$

Shunday qilib (4) munosabat $\vec{a},\vec{b}$ vektorlar kollinearligining zaruriy va etarli shartidir.

Vektorni songa ko‘paytirish quyidagi xossalarga ega

a) $1\cdot\vec{a}=\vec{a};(-1)\cdot\vec{a}=-\vec{a}$

b) $\alpha(\beta\cdot\vec{a})=(\alpha\cdot\beta)\vec{a}$ (gruppalash qonuni).

v) $\alpha(\vec{a}+\vec{b})=\alpha\cdot\vec{a}+\alpha\cdot\vec{b}$ (vektorlarni qo‘shishga nisbatan taqsimot qonuni).

g) $(\alpha+\beta)\cdot\vec{a}=\alpha\cdot\vec{a}+\beta\cdot\vec{a}$ (skalyarni qo‘shishga nisbatan taqsimot qonuni).

Ikkinchi xossani, ya’ni tenglikning o‘rinli ekanini ko‘rsatish bilan cheklanamiz.

Isbot. Ma’lumki, $\alpha(\beta\cdot\vec{a})$ va $(\alpha\cdot\beta)\vec{a}$ vektorlar bir xil $|\alpha|\cdot|\beta|\cdot|\vec{a}|$ uzunlikka ega. Vektorni songa ko‘paytirish amali ta’rifiga ko‘ra agar $\alpha\cdot\beta>0$ bo‘lsa, $\alpha(\beta\cdot\vec{a})$ va $(\alpha\cdot\beta)\vec{a}$ vektorlar bir xil yo‘nalgan, agar $\alpha\cdot\beta<0$ bo‘lsa, vektorlar $\vec{a}$ ga qarama-qarshi yo‘nalgan bo‘ladi. Shunday qilib, agar $\alpha=0,\beta\neq 0,\vec{a}\neq 0$ bo‘lsa, $\alpha(\beta\cdot\vec{a})$ $(\alpha\cdot\beta)\vec{a}$ ga ega bo‘lamiz. Agar $\alpha=0,\beta=0,\vec{a}=0$ bo‘lsa, u holda $\alpha(\beta\cdot 0)=0$ va $(\alpha\cdot\beta)\vec{a}=0$ bo‘ladi.

O‘z - o‘zini tekshirish uchun savollar.

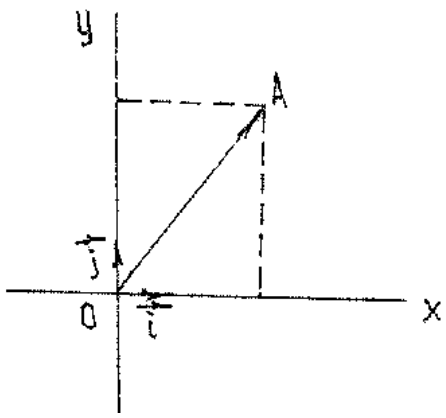
1. Vektorlar ustidagi amallarni geometrik nuqtai nazardan tushuntirib bering.
2. Vektorning skalyarga ko‘paytmasi deganda nimani tushunasiz?

5.8.3. To‘g‘ri burchakli dekart koordinatalari sistemasi. Nuqtaning va vektorning koordinatalari

Tekislikda koordinatalar sistemasini kiritish.

Tekislikda nuqta, chiziq, kesma, shuningdek, boshqa geometrik ob’ektlarni o‘rinlarini tasvirlash uchun to‘g‘ri burchakli koordinatalar sistemasi kiritiladi. Buning uchun tekislikda biror 0 nuqtada kesishuvchi o‘zaro perpendikulyar ikkita o‘qni olamiz. Bu o‘qlarning har birida 0 nuqtadan boshlab kollinear bo‘lmagan $\vec{i},\vec{j}$ vektorlarni ajratamiz.(97-chizma).

1-Ta’rif. Musbat yo‘nalishlari mos ravishda $\vec{i},\vec{j}$ vektorlar bilan aniqlanuvchi o‘zaro perpendikular ikkita o‘qdan tashkil topgan sistema tekislikda to‘g‘ri burchakli koordinatalar sistemasi deyiladi va R={o, $\vec{i},\vec{j}$} ko‘rinishda belgilanadi. O nuqta koordinatalar boshi, $\vec{i},\vec{j}$ birlik vektorlar esa koordinata vektorlari deyiladi. Ta’rifga asosan, $\vec{i},\vec{j}$ vektorlar ortogonal va birlik vektorlardir: $|\vec{i}|=|\vec{j}|=1;$ $\vec{i}\perp\vec{j}$. Musbat yo‘nalishlari $\vec{i},\vec{j}$ vektorlar bilan aniqlangan o‘qlar mos ravishda abssissalar va ordinatalar o‘qlari deb ataladi.(97-chizma)



97-chizma

Tekislikda R={0,$\vec{i},\vec{j}$ } koordinata sistemasi berilgan bo‘lsin. Shu tekislikning A nuqtasi uchun $\vec{OA}$ vektor A nuqtaning radius - vektori deyiladi. $\vec{OA}$ vektor uchun quyidagi munosabatni yozish mumkin:

$$\vec{OA} = x\vec{i} + y\vec{j}$$

2 - Ta’rif: OA radius - vektorning x,y koordinatalari A nuqtaning R={0,$\vec{i}$, $\vec{j}$ } koordinata sistemasida koordinatalari deyiladi va u A (x;y) ko‘rinishda belgilanadi. Bunda x A nuqtaning abssissasi y esa A nuqtaning ordinatasi deyiladi.

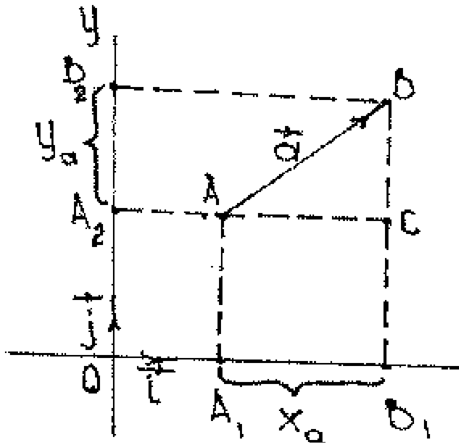
Endi vektorning koordinatalarini qaraymiz:

3-Ta'rif: Vektorning koordinata o'qlaridagi proeksiyalari vektorning koordinatlari deb aytiladi.

Vektorni Ox o'qidagi proeksiyasi uning birinchi koordinatasi yoki x koordinatasi, Oy o'qidagi proeksiyasi uning ikkinchi koordinatasi yoki *y* koordinatasi deyiladi. Shunga ko'ra $\vec{a}$ vektorning koordinatalarini x_a , y_a bilan belgilasak, u holda ta'rifga asosan

$x_a = pr_{ox}\vec{a} = |\vec{a}| \cdot \cos(\vec{a} \wedge \vec{i})$

$y_a = pr_{oy}\vec{a} = |\vec{a}| \cdot \cos(\vec{a} \wedge \vec{j})$



98-chizma

Aytaylik, tekislikda $\vec{a} = \vec{AB}$ vektori berilgan bo'lsin. A nuqtadan Ox o'qiga parallel, B nuqtadan Oy o'qiga parallel to'g'ri chiziqlar o'tkazamiz (98-chizma). Ularning kesishish nuqtasi C bo'lsin. U holda

$$\vec{AC} = x_a \cdot \vec{i}\,, \quad \vec{CB} = y_a \cdot \vec{j} \text{ va}$$

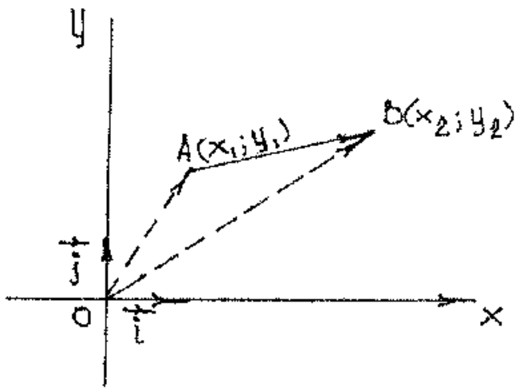
$$\vec{a} = \vec{AB} = \vec{AC} + \vec{CB} = x_a \cdot \vec{i} + y_a \cdot \vec{j} \quad \text{bo'ladi.}$$

Bundan quyidagi xulosa kelib chiqadi: agar x_a, y_a lar $\vec{a}$ vektorining koordinatalari bo'lsa, $\vec{a}$ vektorni uning koordinatalari orqali tubandagi ko'rinishda yozish mumkin:

$$\vec{a} = x_a \cdot \vec{i} + y_a \cdot \vec{j} \quad (1)$$

(1) vektor tenglik ko'p hollarda $\vec{a} = \{x_a; y_a\}$ simvolik ko'rinishda yoziladi.

(1) tenglik tekislikdagi har qanday vektorni ikkita o'zaro



99-chizma

perpendikulyar vektorlarga yoyib yozish mumkinligini bildiradi. Umuman olganda tekislikdagi har qanday vektorni kollinear bo'lmagan ikkita vektorga yoyib yozish mumkin. Vektorning boshi va oxirini koordinatalari R={o, $\vec{i}$, $\vec{j}$ } ga nisbatan ma'lum bo'lsa, bu vektorning koordinatalarini topishni qaraylik.

Aytaylik, R={0, $\vec{i}$, $\vec{j}$ } ga nisbatan $A(x_1;y_1)$; $B(x_2;y_2)$ bo'lsin (99-chizma). Bu holda $\vec{OA} = x_1\vec{i} + y_1\vec{j}$; $\vec{OB} = x_2\vec{i} + y_2\vec{j}$; $\vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA}$; AB= $(x_2-x_1)\vec{i} + (y_2-y_1)\vec{j}$

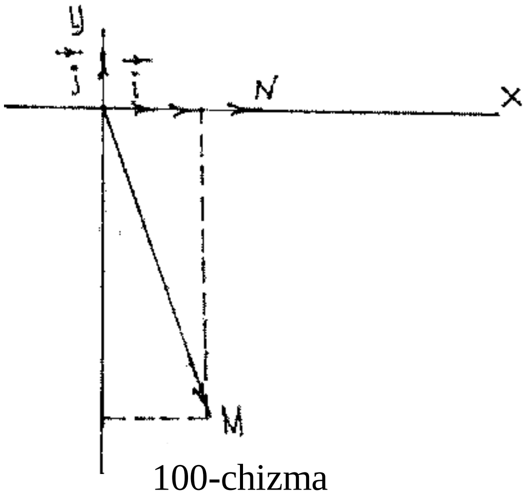
Bundan

$$\vec{AB} = \{x_2-x_1; y_2-y_1\} \qquad (2)$$

ya'ni vektorning koordinatalari shu vektor oxirining koordinatlaridan mos ravishda boshining koordinatlarini ayirish bilan hosil qilinadi.

Misol. R={0, $\vec{i}$, $\vec{j}$ } da M(1;-5), N(3;0) nuqtalarni yasang. $\overrightarrow{MN}$ vektorning koordinatalarini toping.

Echish. M (1:-5) nuqtani yasash uchun $\overrightarrow{OM}=1\vec{i}-5\vec{j}$ vektorni yasaymiz. Buning uchun O nuqtadan boshlab $\vec{i}$ ga kollinear $\vec{i}$ va $\vec{j}$ ga kollinear -5$\vec{j}$ vektorni yasaymiz. So'ngra bu vektorlarning yig'indisini topsak, $\overrightarrow{OM}$ vektor hosil bo'ladi va undan izlanayotgan M nuqtani topamiz. Xuddi shunday N(3;0) nuqtani yasash uchun $ON=3\vec{i}$ vektorni yasaymiz. N(3:0) (100-chizma).



100-chizma

O'z-o'zini tekshirish uchun savollar.

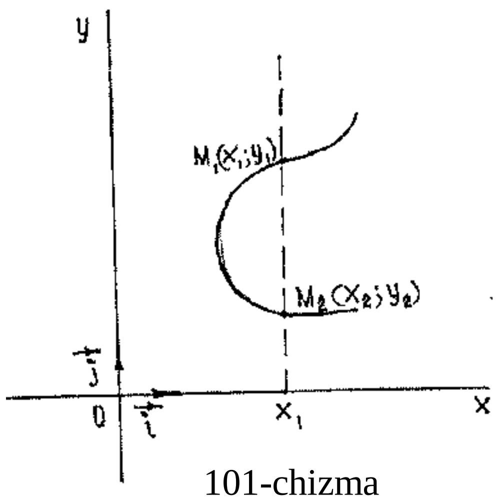
1. Tekislikda koordinatalar sistemasini kiritishni tushuntiring.
2. Nuqta va vektorning koordinatalarini formulalarini yozing va koordinata sistemasida misollar yordamida tushuntiring.

5.9. Tekislikda chiziq tenglamalari.

5.9.1. Ikki o'zgaruvchili tenglama va uning grafigi. Chiziq tenglamasi.

Aytaylik $F(x;y)=0$ (1) tenglama x,y o'zgaruvchilarni bir-biri bilan bog'lovchi biror tenglama bo'lsin. Bu tenglama o'zgaruvchilaridan birini, masalan *y* ni ikkinchisining funksiyasi kabi aniqlaydi. U holda (1) ni *y* ga nisbatan yechsak y=$\varphi(x)$...(2) (bu erda $a \le x \le b$) tenglama hosil bo'ladi. (2) da *x [a,b]* kesmada o'zgarganda $\varphi(x)$ funksiyani uzluksiz ravishda o'zgaradi deb qaraymiz.

Dastlab $\varphi(x)$ bir qiymatli funksiya deb qarab, *x* va y larni R=$\{0;\vec{i};\vec{j}\}$ koordinatalar tekisligidagi biror *M* nuqtaning koordinatalari deb faraz qilamiz. U vaqtda *x* ning har bir qiymati uchun (2) tenglama *y* ning yakka bitta qiymatini aniqlaydi. Demak, *x* ning har bir qiymatiga tekislikning koordinatalari $(x,\varphi(x))$ bo'lgan birgina nuqtasi to'g'ri keladi. Agar *x* uzluksiz ravishda o'zgarib turli qiymatlar olsa, *M* nuqta $\{0;\vec{i};\vec{j}\}$ koordinatalar tekisligida *x* va *y* ning qiymatlariga qarab o'rnini o'zgartira boradi va biror geometrik o'rinni tasvirlaydi. Bu geometrik o'rin chiziq deb ataladi. Agar $\varphi(x)$ funksiya ko'p qiymatli bo'lsa, yani *x* ning har bir qiymatiga



101-chizma

y ning bir necha $y_1; y_2;...; y_n$ qiymatlari mos kelsa, u holda x ning har bir qiymatiga $\{0;\vec{i};\vec{j}\}$ tekislikda $M_1; M_2;...; M_n$ nuqtalar to‘g‘ri keladi. Masalan, $y=\varphi(x)$ funksiya ikki qiymatli bo‘lsin.

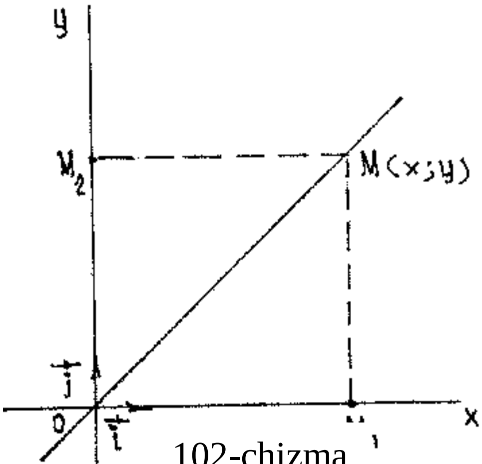
Bu holda x ning har bir qiymatiga y ning $y_1 = \varphi(x_1)$ va $y_2 = \varphi(x_1)$ qiymatlari mos kelib, $\{0;\vec{i};\vec{j}\}$ koordinatalar tekisligida x ning x_1 qiymati bilan ikkita $M_1(x_1; y_1)$ va $M_2(x_1; y_2)$ nuqta aniqlanadi (101-chizma).

[a,b] kesmada x uzluksiz o‘zgarganda M_1 va M_2 nuqtalar ham o‘rinlarini uzluksiz ravishda o‘zgartiradi va chiziq deb atalgan geometrik o‘rinni tasvirlaydi.

Ta’rif: Agar chiziq ixtiyoriy nuqtasining x va y koordinatalari (1) tenglamani qanoatlantirsa, va aksincha by tenglamani qanoatlantiradigan har bir juft *(x,y)* qiymat chiziq nuqtasini tasvirlasa, u holda (1) tenglamaga chiziqning oshkormas tenglamasi deb ataladi. Analitik geometriyada ikki xil masala qaraladi: 1) berilgan geometrik xossalariga ko‘ra chiziq tenglamasini tuzish; 2) tenglamasiga ko‘ra koordinatalari tenglamani qanoatlantiruvchi nuqtalarning geometrik obrazini yaratish;

Misol. Koordinata burchaklari bissektrisalarining tenglamalari tuzilsin.

Yechish. Dastlab bissektrisaga xos geometrik xossani ifodalaymiz. Burchak bissektrisasi bu burchak ichida yotuvchi va uning tomonlaridan barobar uzoqlikdagi nuqtalarning geometrik o‘rnini ifodalaydi. By xossaga asoslanib I va III koordinat burchaklarining bissektrisasi tenglamasini tuzamiz (102-chizma).



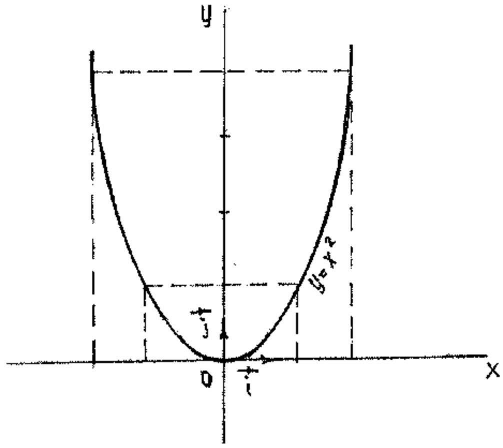
102-chizma

Agar *OM* birinchi koordinat burchagining bissektrisasi bo‘lib, *M(x,y)* uning ixtiyoriy nuqtasi bo‘lsa, xossaga ko‘ra

$|M_1M| = |M_2M|$ yoki y = x ... (3)

Agar M(x.y) uchinchi koordinat burchagining bissektrisasidagi ixtiyoriy nuqta bo‘lsa, x ham y ham manfiy son bo‘lib, ularning absolyut qiymatlari bir-biriga teng bo‘ladi va biz yana (3) tenglamaga kelamiz. Shynga o‘xshash II va IV koordinat burchaklarining bissektrisasi tenglamasi *y=-x* ....(4) ekanligini ko‘rish mumkin.

Endi chiziqning (1) tenglamasiga ko‘ra yasash masalasini qaraymiz. *x,y* koordinatlarni bog‘lovchi biror tenglamaning tekislikda qanday chiziqni tasvir etishini bilish uchun chiziqni shu tenglamaga asoslanib yasash kerak. Tekislikdagi nuqta esa o‘zining *(x,y)* koordinatalari bilan aniqlanadi. Shyning uchun (1) tenglamadagi x ga $x_1;$ ... qiymatlarni bersak



103-chizma

$$F_1(x_1;y)=0,\ F_2(x_2;y)=0,...,F_n(x_n;y)=0 \qquad (4)$$

tenglamalar hosil bo‘ladi. Bu tenglamalardan x ning $x_1;;x_2;..x_n$ qiymatlariga mos bo‘lgan y ning y_1; y_2;...y_n qiymatlarini topamiz, natijada koordinatalari (1) tenglamani qanoatlantiruvchi

$$(x_1;y_1);(x_2;y_2);....(x_n;y_n) \qquad (5)$$

nuqtalarga ega bo‘lamiz. Bu nuqtalarni

koordinatalar sistemasida yasab, ularni tutash chiziq bilan birlashtirsak (1) tenglamani tasvir etuvchi chiziq hosil bo‘ladi. Bu chiziqga ikki o‘zgaruvchili (1) tenglamani grafigi deyiladi.

Misol. $y=x^2$ tenglama tasvirlaydigan chiziq yasalsin. Yasash. Tenglamadagi x ga .. -3;-2;-1;0;1;2;3;... qiymatlarni beramiz va shunga mos y ni qiymatlarini topamiz. Buni jadval shaklda yozamiz.

x		-3	-2	-1	0	1	2	3	...
y		9	4	1	0	1	4	9	

Natijada ... (-3;9); (-2;4); (-1;1); (0;0); (1;1); (2;4); (3;9); ... nuqtalar hosil bo‘ladi. Bu nuqtalarni $\{0;\vec{i};\vec{j}\}$ sistemada joylashtirib, ularni birlashtirsak, $y=x^2$ funktsiyaning grafigi ya’ni parabola chizig‘i hosil bo‘ladi.(103-chizma)

O‘z-o‘zini tekshirish uchun savollar.

1. Chiziqqa ta’rif bering.
2. Chiziq tenglamasini tuzishga misollar keltiring.

5.9.2. Tekislikda to‘g‘ri chiziqning turli tenglamalari.

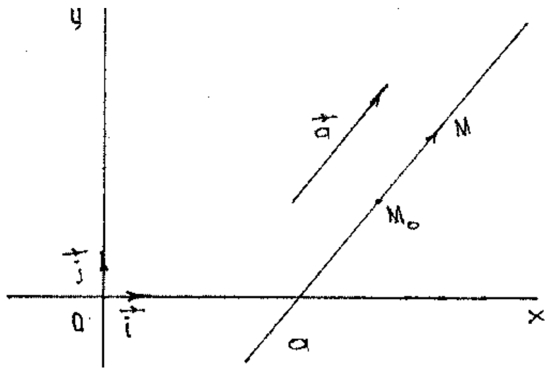
Ta’rif. To‘g‘ri chiziqqa parallel yoki shu to‘g‘ri chiziqda yotuvchi har qanday vektor uning yo‘naltiruvchi vektori deyiladi. Quyida biz to‘g‘ri chiziqning berilish usullariga qarab uning tenglamasini keltirib chiqaramiz.

1).To‘g‘ri chiziqning parametrik tenglamalari.

To‘g‘ri chiziq a biror $\{0;\vec{i};\vec{j}\}$ koordinata sistemasiga nisbatan o‘zining biror $M_0(x_0;y_0)$ nuqtasining va yo‘naltiruvchi $\vec{a}$ = $\{a_1;\ a_2\}$ vektorining berilishi bilan aniqlanadi. To‘g‘ri chiziqda ixtiyoriy $M(x,y)$ nuqta olamiz. U holda $\overrightarrow{M_0M}$ vektori $\vec{a}$ vektori bilan kollinear bo‘ladi. U holda shunday t soni topiladiki

$$\overrightarrow{M_0M}=t\vec{a};\qquad t\in R... \quad (1)$$

munosabat bajariladi. (104-chizma).



104-chizma

Aksincha, biror M nuqta uchun (1) munosabat o‘rinli bo‘lsa, u holda $\overrightarrow{M_0M}\,||\,\vec{a}$ demak (1) munosabat faqat to‘g‘ri chiziqqa tegishli M nuqtalar uchungina bajariladi. M,M_0 nuqtalarning radius vektorlarini mos ravishda $\vec{r}$,$\vec{r}_0$ bilan belgilasak ya’ni, $\vec{r}=\overrightarrow{OM}$, $\vec{r}_0=\overrightarrow{OM_0}$ bo‘lsa, u holda $\overrightarrow{M_0M}=\vec{r}-\vec{r}_0$ bo‘ladi. (1) tenglikdan $\vec{r}=\vec{r}_0+t\vec{a}$ (2)

(2) tenglamaga *a* to‘g‘ri chiziqning vektorli tenglamasi deyiladi. *t* ga turli qiymatlar berib, *a* ga tegishli nuqtalarning radius vektorlarini hosil qilamiz; (2) tenglamaga kirgan *t* o‘zgaruvchi parametr deyiladi. Endi (2) ni koordinatalarda yozaylik u holda quyidagi tenglamalar hosil bo‘ladi:

$$x = x_0 + a_1 t \qquad (3)$$
$$y = y_0 + a_2 t$$

Bu tenglamalar to‘g‘ri chiziqning parametrik tenglamalari deb ataladi. Agar a to‘g‘ri chiziq koordinata o‘qlaridan birortasiga ham parallel bo‘lmasa, ya’ni $a_1 a_2 \neq 0$ shart bajarilsa, (3) dan quyidagi

$$\frac{x - x_0}{a_1} = \frac{y - y_0}{a_2} \qquad (4)$$

tenglamani hosil qilamiz.

Bundan

$$a_2x - a_1y + (-a_2x_0 + a_1y_0) = 0 \qquad (5)$$

Bu erda shartga ko‘ra a_1, a_2 ning bittasi noldan farqli, shy sababli (5) birinchi darajali tenglamadir. Bundan esa har qanday to‘g‘ri chiziq birinchi darajali tenglama bilan ifodalanadi degan muhim xulosaga kelamiz.

Misol. $M_0(3;-2)$ nuqta orqali o‘tuvchi va yo‘naltiruvchi vektori $\vec{a}=\{2;4\}$ bo‘lgan to‘g‘ri chiziq tenglamasi tuzilsin.

Yechish: Masala shartiga ko‘ra $x_0=3;\ y_0=-2;\ a_1=2;\ a_2=4$ (3) formulaga asosan $x = 3 + 2t;\quad y = -2+4t$
tenglamalarga ega bo‘lamiz. Bu tenglamalar biz izlagan to‘g‘ri chiziqning parametrik tenglamalaridir.

2). Ikki nuqta orqali o‘tuvchi to‘g‘ri chiziq tenglamasi.

Bizga ma’lumki ikki nuqta orqali yagona to‘g‘ri chiziq o‘tadi. Agar M_1 va M_2 nuqtalarning $\{0;\vec{i};\vec{j}\}$ sistemaga nisbatan koordinatalari ma’lum bo‘lsa shu nuqtalar orqali o‘tuvchi to‘g‘ri chiziq tenglamasini topamiz.

Aytaylik $M_1(x_1;y_1);\ M_2(x_2;y_2)$ bo‘lsin. Izlanayotgan *a* to‘g‘ri chiziqda ixtiyoriy $M\ (x,y)$ nuqta olamiz.

Agar $\overrightarrow{M_1M_2}=(x_2-x_1;y_2-y_1)$ vektori $\overrightarrow{M_1M}=(x-x_1;y-y_1)$ vektoriga kollinear bo‘lsa, *M* nuqta to‘g‘ri chiziqda yotadi, bu deganimiz quyidagi munosabat o‘rinli bo‘ladi.

$$\overrightarrow{M_1M} = t\overrightarrow{M_1M_2} \qquad (6)$$

(6) munosabatda vektorlarni tengligiga asosan

$$x - x_1 = t(x_2 - x_1) \text{ va } y - y_1 = t(y_2 - y_1) \qquad (7)$$

ga ega bo‘lamiz.

Bundan esa

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} \qquad (8)$$

(8) - tenglama berilgan ikki nuqta orqali o‘tuvchi to‘g‘ri chiziq tenglamasi deyiladi. Bu tenglama $x_2-x_1\neq 0$ va $y_2-y_1\neq 0$ bo‘lganda o‘rinli. Agar $x_2-x_1=0$ bo‘lsa, u holda to‘g‘ri chiziq *(Oy)* o‘qqa parallel bo‘lib, tenglama quyidagi ko‘rinishni oladi.

$x-x_1=0$ yoki $x = x_1$

Misol. *ABC* uchburchakning uchlarining koordinatalari berilgan: *A (3,4), B(12,-6), C(13,14) AB* va *BC* tomonlarining tenglamasini tuzing.

Yechish: 1) *AB* tomonini tenglamasini tuzamiz. (8) formulaga murojaat qilamiz.

$$\frac{x-3}{9}=\frac{y-4}{-10};\ -10(x-3)=9(y-4);\ -10x+30=9y-36;\ 9y+10x-66=0 \quad (AB)$$

Endi B*C* tomonini tenglamasini tuzamiz.

$$\frac{x-12}{13-12}=\frac{y+6}{14+6};\ \frac{x-12}{1}=\frac{y+6}{20};\ 20x-240=y+6;\ y-20x+246=0\ (BC)$$

3). To‘g‘ri chiziqning koordinata o‘qlaridan kesgan kesmalari bo‘yicha tenglamasi.

d to‘g‘ri chiziqni aniqlovchi M_1 va M_2 nuqtalar koordinata o‘qlari *(Ox)* va *(Oy)* da yotsin.

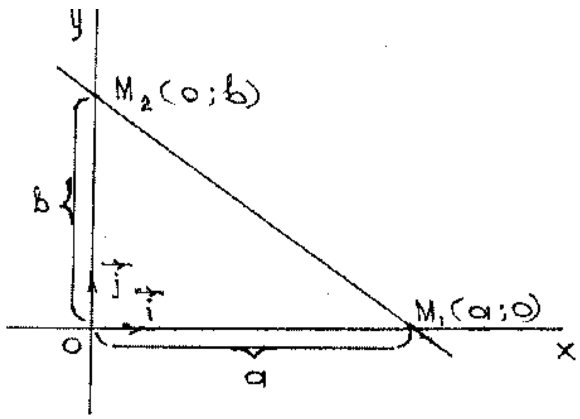
Aniqlik uchun $M_1(a:0)$ *(Ox*) o‘qda M_2 (*o;b*) (*Oy)* o‘qida yotsin.(105-chizma) Bu holda (8) tenglama quyidagi ko‘rinishni oladi.

$$\frac{x-a}{0-a}=\frac{y-0}{b-0} \quad \text{yoki} \quad \frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1 \qquad (9)$$

(9) tenglamaga to‘g‘ri chiziqning koordinata o‘qlaridan kesgan kesmalari bo‘yicha tenglamasi deyiladi, bu erda *a* va b lar to‘g‘ri chiziqni mos ravishda (Ox) va (Oy) o‘qlaridan kesgan kesmalarini ifodalaydi.

Misol. To‘g‘ri chiziq tenglamasi 6*x-4y-24=0.* Uning koordinata o‘qlari bilan kesishgan nuqtalarini toping.

Yechish*:* Kesishgan nuqtalarning koordinatalarini topish uchun, berilgan to‘g‘ri chiziq tenglamasini to‘g‘ri chiziqning koordinatalar o‘qlaridan ajratgan kesmalarga nisbatan tenglamasi (9) ko‘rinishiga keltiramiz.



105-chizma

$$\frac{x}{3}-\frac{y}{4}=1$$

Demak, koordinata o‘qlari bilan kesishish nuqtalari: *A(3;0)* va *B(0;-4)*

4). To‘g‘ri chiziqning burchak koeffitsientli tenglamasi.

Dastlab to‘g‘ri chiziqning burchak koeffitsienti tushunchasini kiritamiz.

Ta’rif: $\vec{a}$ vektor $\{0,\vec{i};\vec{j}\}$ koordinatalar sistemasida a_1,a_2 koordinatalarga ega va $a_1\neq 0$ bo‘lsa, u holda $a_2/a_1 = k$ son $\vec{a}$ vektorning burchak koeffitsienti deyiladi. To‘g‘ri chiziqni burchak koeffitsientli tenglamasini keltirib chiqaramiz. Izlanayotgan to‘g‘ri chiziqni bitta nuqtasi va burchak koeffitsienti tekislikda shu to‘g‘ri chiziq vaziyatini to‘la aniqlaydi. *(Oy) o*‘qqa parallel to‘g‘ri chiziqlar uchun burchak koeffitsient mavjud emas. Shyning uchun *(Oy)* o‘qqa parallel bo‘lmagan *a* to‘g‘ri chiziq $M_0\ (x_0,y_0)$ nuqtadan o‘tsin va *k* burchak koeffitsientga ega bo‘lsin. *a* to‘g‘ri chiziq tenglamasini tuzamiz. (4) ga asosan $a_1 \neq 0$ shartda

$$y - y_0 = \frac{a_2}{a_1}(x - x_0) \qquad \text{bu erda } \frac{a_2}{a_1} = k$$

demak $\quad y - y_0 = k(x-x_0) \qquad (10)$

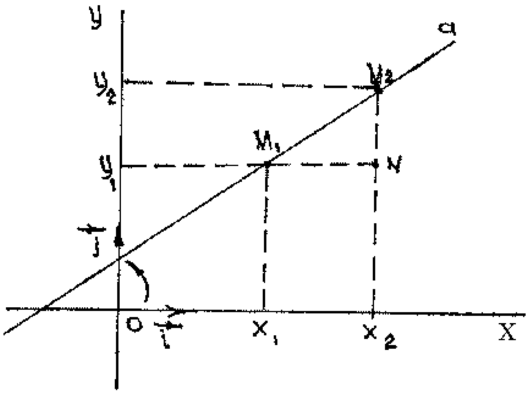
yoki $\quad y = kx + b \qquad (11)$

bu erda $\ b = y_0 - kx_0$

(11) tenglama to‘g‘ri chiziqning burchak koeffitsientli tenglamasi deyiladi. $M_1(x_1;y_1)$ va $M_2(x_2;y_2)$ nuqtalar orqali o‘tgan to‘g‘ri chiziqning burchak koeffitsienti, $k = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ formula bilan aniqlanadi.

To‘g‘ri chiziqning bunday berilishi, to‘g‘ri chiziq Oy o‘qiga parallel bo‘lmagan holda to‘g‘ridir. *k* ni ya’ni burchak koeffitsientni geometrik izohlaymiz. (106-chizma). M_1M_2N uchburchakdan, burchak koeffitsient $k=tg\alpha$ ekanligi ko‘rinadi,bu erda α -*(Ox)* o‘qini soat strelkasi yo‘nalishiga teskari yo‘nalishda burib *a* to‘g‘ri chiziq bilan ustma-ust tushgunga qadar burish burchagi, shuning uchun ham k - burchak koeffitsienti deyiladi.

1-Misol. $M_1(3;2)$ va $M_2(4;3)$ nuqtalar orqali o‘tuvchi to‘g‘ri chiziqning burchak koeffitsientini toping.



106-chizma

Yechish: $k = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ formulaga ko‘ra

$k = \dfrac{3-2}{4-3} = 1$ bundan $k=tga=1$

Demak, $\alpha = 45^0$

2-Misol. *(Ox)* o‘qi bilan 60^0 burchak tashkil etib $M_1(2;-3)$ nuqta orqali o‘tuvchi to‘g‘ri chiziq tenglamasini tuzing.

Yechish. Izlanayotgan to‘g‘ri chiziqning burchak koeffitsienti $k=\text{tg}\alpha=\text{tg}60^0=\sqrt{3}$ *ga* teng. (10) tenglamaga $x_0=2;\ y_0=-3$ qiymatlarni qo‘yib quyidagi tenglamaga ega bo‘lamiz.

$$y + 3 = \sqrt{3}(x-2) \qquad \text{yoki} \qquad x - \frac{1}{\sqrt{3}}y - \frac{5}{\sqrt{3}} = 0;$$

5). To‘g‘ri chiziqning umumiy tenglamasi.

Yuqoridagi tenglamalarning barchasi uchun xarakterli bo‘lgan narsa, ularning birinchi darajali bo‘lishligidir.

Shuning uchun, tubandagi birinchi darajali

$$Ax+By+C=O \qquad (12)$$

tenglama to‘g‘ri chiziqning umumiy tenglamasi deyiladi. (12) umumiy tenglama bilan berilgan to‘g‘ri chiziqning koordinata o‘qlariga nisbatan joylashuvida, tubandagi hollar bo‘lishi mumkin:

a) Agar $C=0$ bo‘lsa, (12) - to‘g‘ri chiziq koordinata boshidan o‘tadi.

b) Agar $A=0, C\neq 0$ bo‘lsa (12) to‘g‘ri chiziq Ox o‘qiga, agar $B=O, C\neq 0$ bo‘lsa (12) to‘g‘ri chiziq Oy o‘qiga parallel bo‘ladi.

To‘g‘ri chiziq umumiy tenglamasidan burchak koeffitsienti k ni topaylik. $k=-A/B=a_2/a_1$ demak to‘g‘ri chiziq $\vec{a}$ yo‘naltiruvchi vektorining koordinatalari sifatida $-B$, A sonlarini qabul qilish mumkin, ya’ni umumiy tenglamasi bilan berilgan to‘g‘ri chiziqning yo‘naltiruvchi vektori sifatida

$$\vec{a} = \{-B;A\} \tag{13}$$

vektorni olish mumkin.

Tekislikning (x,y) koordinatali barcha nuqtalarining (12) to‘g‘ri chiziqdan bir tomonda joylashishi uchun $Ax+By+C>0$ yoki $Ax+By+C<0$ tengsizlikni bajarilishi kerak. $M_1(x_1;y_1)$ va $M_2(x_2;y_2)$ nuqtalarning to‘g‘ri chiziqning turli tomonida joylashishlari uchun $Ax_1+By_1+C>0$ va $Ax_2+By_2+C<0$ lar turli xil ishoraga ega bo‘lishlari zarur va etarli.

1-Misol. $4x-3y+6=0$ to‘g‘ri chiziqning normal vektorini ko‘rsating.

Yechish. Normal vektor $\vec{N}=\{A;B\}$ ko‘rinishda bo‘lgani uchun berilgan to‘g‘ri chiziq tenglamasida $A=4; B=-3$.

Shuning uchun $\vec{N}=\{4;-3\}$

2-Misol. $2x+y-4=0$ va $x-y+1=0$ to‘g‘ri chiziqlarni kesishish nuqtasi orqali o‘tib $x+y-5=0$ to‘g‘ri chiziqqa perpendikular bo‘lgan to‘g‘ri chiziq tenglamasini tuzing.

Yechish. Dastlab ikki to‘g‘ri chiziqni kesishish nuqtasini topamiz, buning uchun kesishish nuqtasini koordinatalarini $x_1;y_1$ deb olamiz. u holda

$$\begin{cases} 2x_1 + y_1 - 4 = 0 \\ x_1 - y_1 + 1 = 0 \end{cases}$$

sistemadan $x_1=1; y_1=2$ ga ega bo‘lamiz.

Izlanayotgan to‘g‘ri chiziqni yo‘naltiruvchi vektori $\vec{a}$ sifatida x+y-5=0 to‘g‘ri chiziqning normal vektorini olsa bo‘ladi. $\vec{N}=\{1;1\}$ y holda izlanayotgan to‘g‘ri chiziq tenglamasi tubandagicha bo‘ladi.

$$1(x-1)+1(y-2)=0 \quad \text{yoki} \quad x+y-3=0$$

O‘z-o‘zini tekshirish uchun savollar.

1. To‘g‘ri chiziqning turli ko‘rinishdagi tenglamalarini yozing.
2. To‘g‘ri chiziqning umumiy tenglamasiga ko‘ra tekshiring.

5.9.3. Tekislikda ikki to‘g‘ri chiziqning o‘zaro joylashuvi.

Tenglamalari bilan berilgan d_1 va d_2 to‘g‘ri chiziqlarni olaylik.

$d_1 : Ax_1+By_1+C_2=0$ (1)

$d_2 : Ax_2+By_2+C_2=0$ (2)

Bu to‘g‘ri chiziqlarning tekislikda o‘zaro joylashuvini tekshirish uchun (1) va (2) ni sistema qilib tekshirish kerak. Sistemani tekshirish esa chiziqli tenglamalar sistemasini tekshirishda ko‘rib o‘tilgan edi. d_1 va d_2 to‘g‘ri chiziqlarning o‘zaro joylashuvida ushbu hollar bo‘lishi mumkin: a) d_1 va d_2 to‘g‘ri chiziqlar kesishadi (sistema yagona echimga ega); b) d_1 va d_2 to‘g‘ri chiziqlar parallel, bu holda

$A_1/A_2 = B_1/B_2$ bo‘ladi.; v) agar $A_1/A_2=B_1/B_2=C_1/C_2$ bo‘lsa, d_1 va d_2 to‘g‘ri chiziqlar ustma-ust tushadi.

Misol $x-4y+3=0$ va $2x-y+5=0$ to‘g‘ri chiziqlarning tekislikda joylashuvini tekshiring.

Yechish. Tekislikda joylashuvini tekshirish uchun tubandagi sistemani tekshiramiz

$$\begin{cases} 3x-4y-2=0 \\ x+y-3=0 \end{cases}$$

By sistemadan kesishish nuqtasini topamiz: $(2;1)$

Demak to‘g‘ri chiziqlar kesishadi.

O‘z-o‘zini tekshirish uchun savollar.

Tekislikda ikki to‘g‘ri chiziq joylashuvini tushuntirib bering..

5.9.4. Ikki to‘g‘ri chiziq orasidagi burchak.

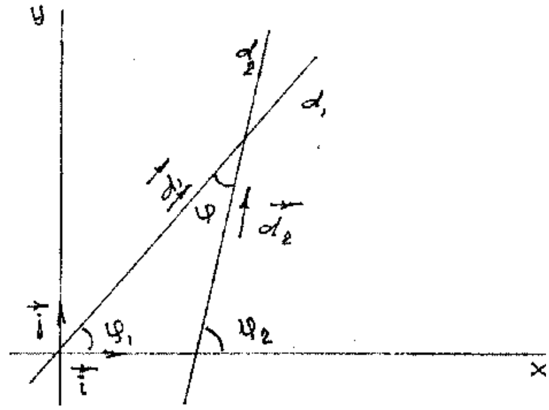
d_1 va d_2 to‘g‘ri chiziqlar orasidagi burchak deganda, bu to‘g‘ri chiziqlarning yo‘naltiruvchi vektorlari orasidagi burchakka aytiladi (φ burchak 0^0 dan 90^0 gacha oraliqda o‘zgaradi).

d_1 va d_2 to‘g‘ri chiziqlar quyidagi tenglamalar bilan berilgan bo‘lsin. (107-chizma).

d_1: $A_1x+B_1y+C_1=0$ (1)

d_2: $A_2x+B_2y+C_2=0$ (2)

$\vec{d}_1=\{-B_1;A_1\}$ vektor d_1 to‘g‘ri chiziqning $\vec{d}_2=\{-B_2;A_2\}$ vektor d_2 to‘g‘ri chiziqning yo‘naltiruvchi vektoridir. U holda ta’rifga asosan d_1 va d_2 to‘g‘ri chiziqlar orasidagi burchak quyidagi formuladan aniqlanadi:



107-chizma

$$\cos\varphi=\cos(\vec{d}_1\hat{\ }\vec{d}_2)=\frac{\vec{d}_1\cdot\vec{d}_2}{|\vec{d}_1|\cdot|\vec{d}_2|}=\frac{A_1A_2+B_1B_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2}\cdot\sqrt{A_2^2+B_2^2}} \quad (3)$$

Xususiy holda

$$\vec{d}_1\perp\vec{d}_2 <=> A_1A_2+B_1B_2=0 \quad (4)$$

(4) tenglik ikki to‘g‘ri chiziqning perpendikularlik sharti hisoblanadi. $\{0;\vec{i};\vec{j}\}$ sistemada *0y* o‘qqa parallel bo‘lmagan d_1 va d_2 to‘g‘ri chiziqlar burchak koeffitsientli tenglamalari bilan berilgan bo‘lsin
(33-chizma).

$$d_1:\ y=k_1x+b_1$$
$$d_2:\ y=k_2x+b_2$$

Bu holda ikki to‘g‘ri chiziq orasidagi burchak tubandagi formula bilan ifodalanadi:

$$tg\,\varphi=\frac{k_2-k_1}{1+k_1k_2} \qquad (5)$$

$$ctg\,\varphi=\frac{1+k_1k_2}{k_2-k_1} \qquad (6)$$

φ-bu erda ikki to‘g‘ri chiziq orasidagi burchak (5) formula to‘g‘ri chiziqlar perpendikular bo‘lmagan holda ishlatiladi. (5) va (6) formuladan $k_1=k_2$ to‘g‘ri chiziqlarning parallellik, $k_1k_2=-1$ to‘g‘ri chiziqlarning perpendikularlik shartlari kelib chiqadi.

Agar to‘g‘ri chiziqlar umumiy tenglamalar bilan berilsa, u holda

$$tg\varphi=\frac{\begin{vmatrix}A_1 & A_2\\ B_1 & B_2\end{vmatrix}}{A_1A_2+B_1B_2} \qquad (7)$$

To‘g‘ri chiziqlar umumiy tenglamalari bilan berilgan bo‘lsa, u holda

$$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2} \qquad (8)$$

ikki to‘g‘ri chiziqning parallellik sharti,

$$A_1A_2+B_1B_2=0 \qquad (9)$$

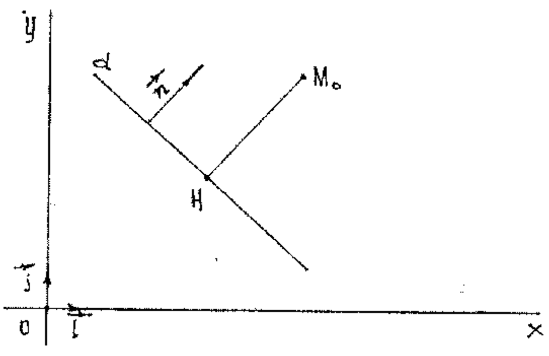
esa ikki to‘g‘ri chiziqning perpendikularlik sharti hisoblanadi.

O‘z-o‘zini tekshirish uchun savollar.

1. Ikki to‘g‘ri chiziq orasidagi burchak uchun formula keltirib chiqaring.
2. Ikki to‘g‘ri chiziqning perpendikularlik va parallellik shartlari nimadan iborat?

5.9.5. Nuqtadan to‘g‘ri chiziqqacha masofa.

$\{0;\vec{i};\vec{j}\}$ koordinata sistemasida d: $Ax+By+C=0$ *d* to‘g‘ri chiziq va $M_0(x_0;y_0)$ nuqta berilgan bo‘lsin. M_0 nuqtadan d to‘g‘ri chiziqqa perpendikular o‘tkazamiz va ularni kesishgan nuqtasini H bilan belgilaymiz (108- chizma). $\overrightarrow{HM_0}$ vektorning uzunligini M_0 nuqtadan d to‘g‘ri chiziqqacha bo‘lgan masofa deyiladi va $\rho(M_0,d)$ ko‘rinishda belgilanadi.



108-chizma

$\vec{n}=\{A,B\}$ vektor berilgan to‘g‘ri chiziqning normal vektori. Agar M_0 nuqta d to‘g‘ri chiziqni nuqtasi bo‘lsa, $\rho(M_0,d)=0$ bo‘ladi. Agar M_0 nuqta d to‘g‘ri chiziqqa tegishli bo‘lmasa, u holda $\rho(M_0,d)=\left|\overrightarrow{HM_0}\right|$; $\left|\overrightarrow{HM_0}\right|$ va $\vec{n}$ vektorlar kollinear, chunki $\vec{n}$ vektor d to‘g‘ri chiziqning normali. U holda nuqtadan to‘g‘ri chiziqqacha masofa tubandagicha bo‘ladi:

$$\rho(M_0,d)=\frac{\left|\overrightarrow{HM_0}\cdot\vec{n}\right|}{|\vec{n}|} \qquad (1)$$

Agar H nuqtaning koordinatalari $x_1;y_1$ bo‘lsa, u holda $\overrightarrow{HM_0}=\{x_0-x_1;y_0-y_1\}$ bo‘ladi. H nuqta d to‘g‘ri chiziqqa tegishli bo‘lgani uchun $A_1x+B_1y+C_1=0$, u holda (1) formula quyidagi ko‘rinishni oladi.

$$\overrightarrow{HM_0}\cdot\vec{n}=A(x_0-x_1)+B(y_0-y_1)=Ax_0+By_0-(Ax_1+By_1)=Ax_0+By_0+C=0 \qquad (2)$$

Shu bilan birga $|\vec{n}|=\sqrt{A^2+B^2}$ ekanini nazarda tutsak (1) formula quyidagi ko‘rinishni oladi.

$$\rho(M_0,d)=\frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}} \qquad (3)$$

(3) berilgan M_0 nuqtadan berilgan d to‘g‘ri chiziqqacha bo‘lgan masofani hisoblash formulasidir.

O‘z-o‘zini tekshirish uchun savollar.

Tekislikda nuqtadan to‘g‘ri chiziqqacha bo‘lgan masofa formulasini keltirib chiqaring.

5.9.6. To‘g‘ri chiziqlar dastasi.

To‘g‘ri chiziqlar dastasi ikki xil bo‘ladi: kesishuvchi to‘g‘ri chiziqlar dastasi va parallel to‘g‘ri chiziqlar dastasi. Agar 5.9.4-mavzudagi (1) va (2) tenglamalar bilan ifodalanuvchi to‘g‘ri chiziqlar biror nuqtada kesishsa, u nuqta orqali o‘tuvchi to‘g‘ri chiziqlar kesishuvchi to‘g‘ri chiziqlar dastasini tashkil qiladi. Shu nuqta dasta markazi deyiladi.

Agar (1) va (2) to‘g‘ri chiziqlarni yo‘naltiruvchi vektorlari parallel yoki ustma - ust tushsa, u holda shu yo‘nalishdagi to‘g‘ri chiziqlar parallel to‘g‘ri chiziqlar dastasini ifodalaydi. Kesishuvchi to‘g‘ri chiziqlar dastasining markazi orqali o‘tuvchi to‘g‘ri chiziq quyidagi tenglama bilan aniqlanadi:

$$\alpha(A_1x+B_1y+C_1)+\beta(A_2x+B_2y+C_2)=0$$

bu erda, α va β lar bir vaqtda nolga teng bo‘lmagan har xil qiymatlarni qabul qiladi. Agar kesishuvchi to‘g‘ri chiziqlar dastasi markazining koordinatlari $(x_0;y_0)$ berilgan bo‘lsa, u holda dasta tenglamasi tubandagi ko‘rinishga ega bo‘ladi.

$$\alpha(A_1x_0+B_1y_0+C_1)+\beta(A_2x_0+B_2y_0+C_2)=0 \qquad (1)$$

Misol. To‘g‘ri chiziqlar $2x+3y+10=0$ va $4x-5y-5=0$ tenglamalar bilan berilgan. Shu to‘g‘ri chiziqlar va $M(2;3)$ nuqta orqali o‘tuvchi to‘g‘ri chiziq tenglamasi tuzilsin.

Yechish: Dastlab berilgan to‘g‘ri chiziqlardan o‘tuvchi to‘g‘ri chiziqlar dastasi tenglamasini tuzamiz.

$$2x+3y+10+\lambda(4x-5y-5)=0 \qquad (*)$$

Bu to‘g‘ri chiziqlar dastasidan M (1;2) nuqtadan o‘tuvchi to‘g‘ri chiziqni ajratib olishimiz kerak. Biz izlayotgan to‘g‘ri chiziq tenglamasini *M* nuqta koordinatalari qanoatlantirishi kerak. Shuning uchun *M* nuqta koordinatalarini (*) tenglamaga qo‘yamiz.

$$4+9+10+\lambda(4\cdot 2-5\cdot 3-5)=0; \qquad \lambda=\frac{23}{12}$$

Bu qiymatni (*) tenglamaga qo‘yib izlanayotgan to‘g‘ri chiziq tenglamasini olamiz. $116x-79y+5=0$

O‘z-o‘zini tekshirish uchun savollar.

To‘g‘ri chiziqlar dastasini turlarini aytib bering va tushuntiring.

VI –bob
GEOMETRIYA ELEMENTLARI
6.1. Geometriyaning rivojlanishi haqida qisqacha tarixiy ma’lumot

Geometriya tarixi qadimgi dunyoning uzoq o‘tmishidan boshlanadi, leknn u shubhasiz, sharq mamlakatlarida paydo bo‘lgan. geometriya ning taraqqiyotini to‘rtta davr bilan xarakterlash mumkin, lekin uning chegarasini biror ma’lum yillar bilan ajratib bo‘lmaydi.

Birinchi davr —geometriyaning paydo bo‘lish davri eramizdan oldingi V asrgacha bo‘lgan davrni o‘z ichiga oladi va qadimgi Misr, Vaviloniya va Gretsiyada yer o‘lchash ishlarining taraqqiyoti bilan chambarchas bog‘liqdir (geometriya so‘zi ham grekcha: $\gamma\varepsilon\omega$ — yer va $\mu\varepsilon\tau\rho\varepsilon\omega$ — o‘lchayman so‘zlaridan olingan bo‘lib, lug‘aviy ma’nosi yer o‘lchash demakdir).

Grek tarixchisi Gerodatning (tahminan miloddan avvalgi 465-425 y) yozib qoldirgan ma’lumotlariga ko‘ra geometriyaga oid dastlabki ma’lumotlar Misrda tarkib topa boshlagan. Aytishlaricha Shohlar misrliklarga dehqonchilik qilish uchun to‘g‘ri to‘rtburchak shaklidagi yer maydonlarini taqsimlab berar va yer egasidan mos ravishda soliq undirishar ekan. Nil daryosining toshib ketishi oqibatida buzilib ketgan maydonlar qaytadan o‘lchanar va unga yarasha soliq miqdori qaytadan belgilanar ekan.

Yerlarni taqsimlash, soliq miqdorini belgilash, yuzlarni o‘lchash, sug‘orish inshoatlarini qurish kabi bir qator ehtiyojiy zaruriyatlar Misrda geometriyaning shakllanishiga omil bo‘lgan.

Antiq Misr geometriyasi haqidagi ma’lumotlar Raynd va Moskva papiruslarida keltirilgan.

Papirus Misr daryolari bo‘yida, bo‘yi 3 m gacha yetadigan ko‘p yillik o‘simlik po‘stloqlarini bir-biriga tekis yopishtirishdan hosil qilingan.

Papiruslarning birinchisini ingliz sayyohi va misrshunos Raynd 1858 yilda Nil daryosining o‘ng qirg‘og‘ida joylashgan Luqsor qishlog‘idan sotib olgan. Papirusning eni 30 sm, bo‘yi 20 m bo‘lib unda 80 masala berilgan. Papirus uni ko‘chirib yozgan Axmes nomi bilan ham ataladi. Uni yozib qoldirishicha papirus miloddan avvalgi 2000-1800 yillarga tegishlidir. Papirusda keltirilgan 20 ta geometrik masaladan 8 tasi hajmni, 7 tasi yuzani va 5 tasi qiya piramida hajmini hisoblashga bag‘ishlangan. Papirus matnini birinchi marta misrshunos Geydelberg universiteti olimi Avgust Eyzenlar (1805-1880) o‘qishga muyassar bo‘lgan va nemis tiliga tarjima qilgan va sharhlar keltirgan holda chop qilgan. Papirus bugungi kunda qisman Britaniya va Nyu-York davlat muzeylarida saqlanmoqda. Ikkinchi “Moskva” papirusini rus olimi, sharqshunos V.S.Golenishchev 1893 yilda Peterburg davlat Ermetajida saqlanayotganini aniqlagan. 1930 yilda manba sharqshunos B.A.To‘raev va V.V.Struve tamonidan nemis tiliga tarjima qilingan va nashr ettirilgan. Manbaning eni 8sm bo'yi 5,44m ni tashkil etib, u o'z ichiga 18ta arifmetik, 7ta geometrik masalani oladi.Papirus Moskva nafis san'at muzeyida saqlanmoqda.

Raynd va Moskva papiruslari qadimgi Misr yozuvida bitilgan. Misrliklar yozishda iyerogliflardan foydalanganlar. Iyerogliflar vazifasini xayvonlar, qushlar,xashorotlar, odamlar, anjomlarni ifoda qiluvchi rasmlar bajargan.

Qog'oz vazifasini o'tovchi papirus kashf qilingach iyerogliflar o'rnini ieratik yozuvlar egallagan. Raynd va Moskva papiruslari ieratik yozuvda bitilgan, faqat Raynd papirusining yakuni iyeroglif yozuvda bayon qilingan.

Papiruslar taxlili shuni ko'rsatadiki misrliklar kvadrat, teng yonli uchburchak, teng yonli trapetsiya, doira yuzasini, asosi kvadrat bo'lgan kesik piramida hajmini hisoblashni bilganlar. Ularni ekin maydonlari yuzini hisoblash, mahsulotlarni taqsimlash, omborlar, idishlar sig'imini o'lchashga tadbiq qila olganlar.

Shuningdek ular bir noma'lumli chiziqli tenglamani yechishni bilganlar. Raynd papirusuda shularga doir 15 masala, Moskva papirusida esa 3 masala keltirilgan.

Antiq davr madaniyati o'choqlaridan yana biri ikki Frot va Dajla (Tigr va Efrat) daryo oralig'i madaniyatidir. Bu madaniyat tarixda Shumer - Bobil madaniyati deb nom qozongan. Ikki daryo oralig'ida papirus o'smagani sababli bobilliklar yozuvlarni yumshoq loydan yasalgan taxtachalarga bombuq yoki suyak yordamida yozganlar va ularni oftob, yoki olovda quritganlar.

Quritilgan taxtachalar papiruslarga qaraganda mustahkam bo'lganidan bizgacha "mix xatlar" da yozilgan matnlar papiruslarga qaraganda ko'proq yetib kelgan. Hozirgi kunda dunyoning turli mamlakatlari muzeylarida miloddan avvalgi III mingliklarga taaluqli bo'lgan 560 mingga yaqin sopol matnlar saqlanmoqda.

Bobilliklar shuningdek tenglamalar sistemasi va ikkinchi darajali tenglamalarni yecha olganlar. Bobil matematikasi Misr matematikasi kabi ko'proq amaliy ahamiyat kasb etgan bo'lsada, ular algebraic shakl almashtirishlar bajara olganlar va ularni tenglamalarni echishga tadbiq qila bilganlar.

Bobil matematikasida abstraqtlashtirish jarayoni misrliklarga qaraganda ancha yuqori bo'lgan. Matematikaning keyingi rivoji Yunoniston bilan bog'liqdir. Misr va Bobilliklar bilan o'rnatilgan aloqalar Yunonistonga madaniyat bilan bir qatorda to'plangan matematik tushunchalarni ham olib keladi. Yunonlar ularni o'zlashtiribgina qolmay, balki ularni asoslash, hulosalash va isbotlashga harakat qilganlar.

Eramizdan oldingi VII asrda geometrik ma'lumotlar; grek tarixchilarishshg fikriga qaraganda, Misr va Vaviloniyadan Gretsiyaga o'tgan. Grek faylasuflari Misr va Vaviloniya donishmandlarining ishlari bilan tanisha boshlagan. Ana shu vaqtdan boshlab geometriya taraqqiyotining ikkinchi davri - geometriyani fan sifatida sistemali bayon qilish davri boshlanadi, bunda barcha jumlalar isbot qilinar edi.

Ular matematikani dunyoni bilish, borliqni anglash va unda insonning tutgan o'rnini aniqlash maqsadida o'rganganlar va rivojlantirganlar. Shuning uchun bo'lsa kerak Yunonistonda dastlab shakllangan maktablar falsafiy yo'nalish kasb etgan. Bu maktablarda matematika falsafa bilan uzviy aloqadorlikda rivojlangan. Ana shunday maktablardan dastlabkisi Milet maktabidir. Maktabga grek matematikasining otasi hisoblangan Miletlik savdogor Fales (640-556 e.o.) asos solgan, uning exrom balandligini uning soyasiga qarab o'lchay olganligi, dengizdagi kemadan qirg'oqqacha bo'lgan masofasini aniqlaganligi, sirqul asbobidan birinchi bo'lib foydalangaligi e'tirof etiladi. Shuningdek eramizdan avvalgi 585 yil 28-mayda bo'lib o'tgan quyosh tutilishini oldindan aytib berganligi tarixiy manbalarda qayd etilgan.

Yunon matematikasining rivojiga Pifogor va uning shogirdlari munosib hissa qo'shgan. Falsafiy yo'nalishdagi Pifogor maktabi yuqori mavqega ega bo'lgan. Pifogor va uning shogirdlari uchburchak ichki burchaklari yig'indisi, dunyoga Pifogor tioremasi nomi bilan mashhur bo'lgan teoremani isbot qilganlar, muntazam ko'pyoqlilar soni beshta ekanligi, o'lchovdosh bo'lmagan kesmalar mavjud ekanligini aniqlaganlar.

Demoqrit (330-275 e.o.) “Bo’linmas zarrachalar” metodini yaratadi, u dunyo bo’linmas zarrachalar-atomlardan tashkil topgan degan fikrni ilgari suradi. Uning fikricha har bir geometrik figura bir qancha elementar qismlardan iborat bo’lib, figura hajmi elementar figuralar hajmlarining yig’indisiga teng bo’ladi.

Pifogor “Dunyoni son boshqaradi” degan g’oyani ilgari surgan bo’lsa, Platon (429-348 e.o.) “Olloh eng buyuk va mashhur geometr” degan goyani ilgari surgan, Platon akademyasi qoshiga “Bu yerga geometryani bilmaganlarning kirishi man etiladi” degan yozuvni ilib qo’ygan va falsafa bilan shug’ullanishdan oldin geometrya bilan shug’ullanishni tavsiya etgan.

Platon maktabida yasashga doir geometrik masalalar ham yechilgan. Sirqul va chizg’ich yordamida yechib bo’lmaydigan qub hajmini ikkilantirish masalasini Platon tomonidan yaratilgan asbob yordamida yechganlar. yasashga doir geometrik masalalarni bosqichlab yechish metodi, geometrik o’rin g’oyasi shu maktabda asoslangan va bir qancha egri chiziqlar yasalgan.

Evdoks (410-355 e.o.) Platon maktabi vakili bo‘lib praporsiyalar nazaryasiga asos solgan. Pifogor izdoshlari yaratgan sonli nisbat tushunchasidan farqli o’laroq bu nazaryani u o’lchovdosh bo’lgan kesmalar bilan bir qatorda o’lchovdosh bo’lmagan kesmalar uchun ham qo’llagan, natijada irratsional son tushunchasiga asos solgan. Nisbatlar nazaryasi yordamida piramida, konus hajmini hisoblagan. Evdoksning shogirdi Menexm nomi esa konus kesimlar g’oyasi bilan bog’langandir. Buyuk faylasuf Aristotel mantiq ilmining rivojiga munosib hissa qo’shadi. Faxrli ravishda Aristotel, formalogika fani va deduktiv bayon asoschisi hisoblanadi.

Eramizdan oldingi III asrga kelib Yunonistonda shakllangan falsafiy maktab namoyondalari Misr va Bobilliklar yaratgan matematik tushunchalar va g’oyalarni tanqidiy o’rganish asosida ularni rivojlantirdilar, tushuncha va g’oyani asoslash, ilmiy bayon etish yo’llarini isbotlash (tahlil, sintez, hulosa chiqarish, hukm chiqarish) usullarini yaratishga harakat qildilar va bu metodlarni mujasamlashtirdilarki toki ular mavjud bo’lgan tushunchalarni tizimlashtirish tartibli bayon qilishni taqoza etdi.

Geometryani deduktiv prinsipda qurishni grek olimi Evklid o’z zamonasiga nisbatan qoniqarli hal qilib, 13ta kitobdan iborat “Negizlar” nomli asarini yaratdi. Evklid hayoti haqida to’la ma’lumotlar bizgacha yetib kelmagan u bizning eramizdan avvalgi 300 yillarda yashagan bo’lib, Ptolomey podshohlik qilgan davrda Aleksandriyada matematikadan dars bergan va shox tomonidan tashkil qilingan muzeyni matematika bo’limini yaratgan.

Aytishlaricha, kunlardan bir kun shoh Evklidni chaqirib “Geometryani o’rganishda “Negizlar”dan ko’ra qisqaroq yo’l bormi?” deb so’raganda Evklid mag’rurona shunday degan ekan : “Geometryada shohlar uchun mahsus yo’l yo’q”. Bundan tashqari Evklidning “Optika”va boshqa asarlari ham ma’lumdir. Insoniyat tarixida Evklidning “Negizlar” asari bilan taqqoslash mumkin bo’lgan va o’z qadr-qimmatini yo’qotmay kelgan, zamonasiga nisbatan chuqur ilmiy asosda yaratilgan birorta asarni ko’rsatish qiyin.

Evklid “Negizlar” kitobiga o’zidan oldin o’tgan olimlarning eng muhim ma’lumotlarini kiritdi va geometriyada unga qanoatlanarli bo’lmagan qoidalarni asosli isbotini berdi. “Negizlar “dagi ba’zi teoremalarni Evklid o’zi kashf qilganligi shubhasizdir. Lekin “Negizlar” kitobidagi mualifning asosiy xizmati shundaki, u asrlar davomida yig’ilib kelgan geometrik bilimlarni hammasini shunday bir sistemaga soldiki, bu sistema uzoq vaqtlargacha aniqlik va qat’iylik namunasi bo’lib keldi. Hech bir ilmiy kitob Evklidning “Negizlar” kitobi singari bunchalik ko’p umr ko’rgan emas.

Bu kitob avval juda ko’p marta qo’lda ko’chirilgan, so’ng dunyodagi hamma tillarda qayta-qayta nashr qilingan. Evklidning bu asari 1482-1880 yillar orasida dunyo tillarida 460 marta nashr qilingan. Shulardan 155 tasi lotin, 142 tasu ingiliz, 48 tasi nemis, 38 tasi fransus, 27 tasu italya, 14 tasu golland, 5 tasi rus, 2 tasi palyak, qolganlari esa boshqa tillarga tarjima qilingan.

“Negizlar”kitobining qisqacha mazmuni.

1-kitob 34ta qoida, 48 teoremadan iborat bo’lib, uchburchaklarning tenglik shartlari, uchburchak tomonlari bilan burchaklari orasidagi munosabatlari, parallelogram va uchburchakning yuzlari hamda Pifogor teoremasi haqida so’z yuritiladi.

2-kitob 2qoida va 14ta teoremadan iborat bo'lib, $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ va shu kabi ayniyatlar geometrik formada talqin qilinadi.

3-kitob aylanaga bag'ishlanadi. Bunda asosan aylanaga o'tkazilgan kesuvchi, urunma, markaziy burchaklar, ichki chizilgan burchaklar qaraladi.

4-kitobda aylanaga ichki va tashqi chizilgan ko'pburchaklar qaralib, muntazam to'rtburchak, beshburchak, oltiburchak va o'nburchaklarni yasash ko'rsatiladi.

5-kitobda asosan trapetsiyalar nazariyasi qaraladi.

6-kitobda praporsiyalar nazariyasining tadbiqi sifatida uchburchaklar o'xshashligi nazariyasi va ko'pburchak yuzlarini topish beriladi.

7-9 kitoblar arifmetika va sonlar nazariyasiga bag'ishlangan.

10- kitobda irratsional miqdorlar nazariyasi qaraladi.

11-13 kitoblar stereometriyaga bag'ishlangan bo'lib, ularda ko'pyoqlar va muntazam ko'pyoqlilar haqida ma'lumotlar beruladi.

Evklidning "Negizlar" asari matematika fanining tadrijiy taraqqiyoti uchun o'ta muhim ahamiyat kasb etadi. Yunon matematikasida o'lchovdosh bo'lmagan kesmalar va irratsionallik tushunchalarning vujudga kelishi bilan vujudga kelgan qiyinchiliklarni to'g'ri bartaraf qila olmaslik, ya'ni irratsional son tushunchasi, sonli to'plamlarni kengaytirish va haqiqiy sonlar nazaryasini yaratish muommosini to'g'ri yechaolmaslik, ularning yechimini geometriyadan, to'g'rirog'i geometriya yasashlardan izlashga olib keladi.

Qadimgi quldorchilik tuzumining emirilishi Gretsiyada geometriya taraqqiyotining to‘xtalishiga olib keldi, lekin geometriya arab sharqi mamlakatlari, O‘rta Osiyo va Hindistonda taraqqiy qila bordi.

Evropada kapitalizmning paydo bo‘lishi geometriya taraqqiyotining yangi, uchinchi davriga olib keldi; XVII asrning birinchi yarmida Dekart va Fermaning analitik geometriya yaratishi shu davrga mansubdir.

Analitik geometriya koordinatalar metodiga tayanib geometrik shakllar xossalarini ulariing algebraik tenglamalariga qarab tekshiradi. Differentsial hisob va geometrik shakllarning lokal xarakterdagi (berilgan nuqta atrofidagi) xossalarini tekshirish, munosabati bilan Eyler va Monj asarlarida XVIII asrda differentsial geometriya yaratildi. XVII asrning birinchi yarmida J. Dezarg va B. Paskal asarlarida proektiv geometriya paydo bo‘la boshladi, bu geometriya dastlab perspektivalarni tasvirlashni o‘rganishda, undan keyin esa fazoning biror nuqtasidan bir tekislikni ikkinchi tekislikka proektsiyalashda shakllarning o‘zgarmaydigan xossalarini o‘rganishda paydo bo‘ldi va nihoyat J. Ponsele asarlarida takomillashtirildi.

Geometriya taraqqiyotining to‘rtinchi davri noevklid geometriyalarning yaratilishi bilan nishonlanadi. Bu geometriyalardan birinchisi Lobachevskiy geometriyasi bo‘lib uni Lobachevskiy geometriyani asoslashni tekshirishda, jumladan parallel to‘g‘ri chiziklar haqidagi aksiomani tekshirishda yaratgan. O‘z geometriyasining mazmunini N. I. Lobachevskiy birinchi marta 1826 y. da Qozon universiteti fizika-matematika fakulteti majlisida bayon qildi. Uning asari esa 1829 y. da e'lon etildi. Venger matematigi Yanosh Boyan shu masala haqidagi biroz xomroq ishni 1832 y. da e'lon qildi. Lobachevskiy geometriya sining yaratilishidan boshlab matematikada, jumladan geometriyada aksiomatik metodning ahamiyati muhimlashib qoldi. Evklid geometriyasi (maktabda o‘qitiladigan odatdagi elementar geometriya) keyinchalik aksiomatik jihatdan asoslab berildi. Lobachevskiy geometriyasi, proektiv geometriya, affin geometriya, ko‘p o‘lchovli (n o‘lchovli) Evklid geometriyasi va boshqa geometriyalar ham aksiomatik asoslandi.

Hozirgi vaqtda geometriya ko‘p xil geometriya lar va nazariyalarni o‘z ichiga olgan bo‘lib, ular orasida aniq chegara yo‘q. Shu bilan birga ayrim geometrik nazariyalar analiz (differentsial geometriya) bilan, to‘plamlar nazariyasi (nuqtalar to‘plamlari nazariyasi, topologiya) bilan qo‘shilib ketgan. Har bir geometriya boshqasidan qanday fazoni tekshirishi bilan (Evklid, Lobachevskiy geometriyalari), qanday metodlardan foydalanishi bilan masalan, analitik geometriyada 2- tartibli egri chiziqlarning analitik nazariyasi,- yoki sintetik geometriyada 2-tartibli. egri chiziqlarning sintetik, sof geometrik nazariyasi, qanday ob'ektlarni (shakllarni) yoki ularning xossalarini tekshirishi bilan (masalan, ko'p yoqlilar va, ularniig xossalarini, egri chiziq va sirtlarni va h. k. larni tekshirish bilan farq qiladi. Metrika masalalari (kesmalar uzunliklari, burchaklar va yuzlarni o'lchash) metrik geometriya tushunchasiga olib keladi. Intsidentsiya (tegishlilik, joylanishlik) masalalari holat geometriyasi, ya'ni proektiv geometriya tushunchasiga olib keladi.

Geometriyani asoslash masalalari uning mantiqiy asoslarini, uning aksiomatikasi va tuzilishini o'rganuvchi elementar geometriya bo'limiga keltiradiki, bu ilmiy fan geometriya asoslari deb ataladi.

Geometriyalarning har birini Kleynning taklifiga ko'ra uning o'rganadigan almashtirishlar gruppasi orqali xarakterlash mumkin. Masalan, elementar geometriya Evklid harakatlari gruppasi bilan, affin geometriya affin almashtirishlar gruppasi bilan, proektiv geometriya barcha kollineatsiyalar (proektiv almashtirishlar) gruppasi bilan xarakterlanadi.

6.2. Maktabda o'rganiladigan geometrik tushunchalar sistemasi

Boshlang'ich ta'lim umumiy o'rta ta'lim tizimida muhim bo'g'in hisoblanib u mazmun va mohiyat jihatidan maktabgacha ta'lim jarayoni bilan ta'limning navbatdagi yuqori bosqichi bo'lgan o'rta ta'limni o'zaro bog'laydi.

Maktabgacha ta'lim yoshidagi bolalar egallashi lozim bo'lgan matematik bilim ko'lami o'ziga xos xususiyatlarga ega bo'lib u ilk matematik tasavvurlar ko'rinishida shakllantiriladi va maktabgacha yoshdagi bolalarning rivojlanishiga qo'yilgan davlat talablari asosida belgilanadi.

Davlat talablarini amaliyotga joriy etish borasida ishlab chiqilgan tayanch dasturlarda ilk matematik tasavvurlarni shakllantirish asosan son va sanoqqa, miqdor, shakl, fazoviy tasavvur va vaqtga oid tasavvurlarni shakllantirish yo'nalishlarida olib borish tavsiya etiladi.

Maktabgacha ta'lim yoshidagi bolalarda harakatli konkret va ko'rgazmali obrazli mantiqiy tafakkur vositasida uchburchak, to'rtburchak, kvadrat, aylana, doira, oval, ko'pburchak, kub, silindr, shar kabi geometrik figuralar ularning ba'zi bir xossa va xususiyatlari haqida tasavvurlar shakllantiriladi.

Boshlang'ich maktab matematika kursi arifmetika, algebra va geometrik materialni o'quvchilarni yosh xususiyatlarini hisobga olgan holda berilgan mavzu negizida mutanosib mujassamlashuvi asosida o'rgatiladi. Maktabgacha ta'lim jarayonida tasavvurlar shaklida egallangan geometrik material boshlang'ich ta'lim jarayonida o'tkir, o'tmas, to'g'ri burchak, uchburchak, to'g'ri to'rtburchak, kvadrat, ko'pburchak, kesma uzunligi, yuza, perimetr, ko'pyoqli va uning elementlari kub hajmiga oid tushunchalar qadar kengaytiriladi.

Boshlang'ich sinflarda tushuncha shaklida egallangan geometriyaga oid bilimlar yuqori sinflarda chuqurlashtiriladi, kengaytiriladi va aniqlashtiriladi. Yuqori sinflarda asosan geometriyaning sistemali kursi o'rgatiladi. Sistemali kurs ikki qismdan iborat bo'lib ular «Planimetriya» va «Stereometriya» deb yuritiladi.

Planimetriya kursida bir tekislikka tegishli bo'lgan figuralarning xossa va xususiyatlari, ularning elementlari orasidagi metrik munosabatlar, yuzalarni o'lchash masalalari o'rganiladi.

Barcha nuqtalari bilan bir tekislikka tegishli bo'lmagan figuralar xossa va xususiyatlari, ularning elementlari orasidagi metrik munosabatlarni, hajmlarni o'lchash masalalari stereometriya kursida o'rganiladi.

Planimetriya va stereometriyaning sistemali kurslarini o'rganish asosan boshlang'ich tushunchalar, boshlang'ich munosabatlar, boshlang'ich tushunchalar bilan boshlang'ich munosabatlar orasidagi bog'lanishlarni ifodalovchi aksiomalar sistemasini keltirish orqali boshlanadi.

Geometriyaning bu tariqa bayon qilinishi fanda mazmunli aksiomatik bayon deb yuritilib uning ibtidosi Evklidga borib taqaladi. Evklid «Negizlar» asarining har bir kitobini deduktiv bayon asosida yaratgan bo'lib kitobda dastlab ta'riflar, postulotlar, aksiomalar so'ngra esa ta'rif, postulot va aksiomalar yordamida isbotlanadigan xossa va xususiyatlarni ifodalovchi teoremalarni keltirgan. Shu tariqa izchil tizimli asosli mantiqiy bayonning dastlabki namunasini birinchilar qatorida yaratadi. O‘z davrining etuk asari hisoblangan «Negizlar» olimlar tomonidan tanqidiy o‘rganilishi natijasida qator kamchiliklar mavjudligi aniqlangan.

Evklid tomonidan berilgan ta’riflarni o‘rganish ularda uchraydigan «uzunlik» «kenglik» kabi tushunchalarning o‘zlari ta’rifga muhtoj ekanligi, kitoblarda keltirilgan ta’lif, aksioma va pastulotlar tegishli teorema va isbot talab qiluvchi matematik jumlalarni isbotlash uchun etarli emasligi, hamda ular nuqta, to‘g‘ri chiziq va tekisliklar orasidagi munosabatlarni asoslash uchun etarli emasligi aniqlangan.

Evklid sistemasini tanqidiy o‘rgangan David Gilbert, birorta ilmiy nazariyani asoslash uchun dastlab ta’riflanmaydigan boshlang‘ich tushunchalar, so‘ngra boshlang‘ich tushunchalar orasidagi bog‘lanishlarni izohlovchi boshlang‘ich munosabatlar, boshlang‘ich tushunchalar va boshlang‘ich munosabatlar orasidagi bog‘lanishlarni izohlovchi aksiomalar qabul qilish asosida mazkur ilmiy nazariyaga oid faktlarni isbotlash lozim degan g‘oyani ilgari suradi, g‘oyaga asoslangan holda fanda aksiomatik metod qabul qilingan. Mazkur g‘oyani u 1899 yilda yaratilgan «Geometriya asoslari» kitobida bayon qilgan.

D.Gilbert Ekvlid geometriyasini asoslash uchun boshlang‘ich tushunchalar sifatida «nuqta», «to‘g‘ri chiziq», «tekislik» ni boshlang‘ich munosabatlar sifatida, «yotadi», «orasida yotadi», «tegishli» munosabatlarini, aksiomalar sifatida esa 5 guruh aksiomalarni qabul qiladi. Birinchi guruh tegishlilik aksiomalari deb yuritilib, tarkibiga 8 ta aksioma, ikkinchi guruh tartib aksiomalari 4 ta, uchinchi guruh kongruentlik 5 ta, to‘rtinchi guruh uzluksizlik 2 ta, beshinchi guruh parallellik 1 ta aksiomadan iborat bo‘lib jami 20 ta aksiomani tashkil qiladi.

Planimetriyaning tizimli kursi ta’riflanmaydigan asosiy tushunchalar «nuqta» va «to‘g‘ri chiziq»ni, boshlangich munosabat sifatida “yotadi”, “tegishli” munosabatlarni, asosiy tushunchalar va asosiy munosabatlar orasidagi munosabatlar mohiyati va xususiyatini ochib beruvchi 2 ta tegishlilik, 2 ta tartib, 3 ta o‘lchash, 2 ta kongruentlik, 1 ta parallellik aksiomalari vositasida bayon qilinadi.

Planimetriya kursida burchaklar, uchburchak, to‘rtburchaklar, aylana, doira, ularning xossalari, perimetri, yuzlari, geometrik figuralarning xossalari, ularning elementlari orasidagi o‘zaro bog‘lanishlar teorema sifatida isbotlanadi.

Stereometriya kursida ta’riflanmaydigan asosiy tushunchalar sifatida “nuqta”, “to‘g‘ri chiziq”, “teksilik” tushunchalari olinadi. Asosiy tushunchalar qatoriga “tekislik” tushunchasining kiritilishi planimetriyada qabul qilingan aksiomalar sistemasini kengaytirishni talab etadi. Shuning uchun fazoviy figuralar xossa va xususiyatlarini o‘rganish, teoremalarni isbot qilish maqsadida stereometriya kursida quyidagi aksiomalar qabul qilinadi. Maktab geometriya kursida bu aksiomalar S gruppa aksiomalar deb yuritiladi.

S_1 : tekislik qanday bo‘lmasin, shu tekislikka tegishli nuqtalar va unga tegishli bo‘lmagan nuqtalar mavjud.

S_2 : agar ikkita turli tekislik umumiy nuqtaga ega bo‘lsa ular to‘g‘ri chiziq bo‘ylab kesishadi.

S_3 : agar ikkita turli to‘g‘ri chiziq umumiy nuqtaga ega bo‘lsa ular orqali bitta va faqat bitta tekislik o‘tkazish mumkin.

Planimetriya kursi aksiomalari faqat bitta tekislikda joylashgan nuqtalar va to‘g‘ri chiziqlar orasidagi munosabatlarni izohlagani va stereometriyada esa bunday tekisliklar ko‘p sonli ekanligini inobatga olib planimetriya kursi aksiomalari sistemasi streometriya kursiga moslashtirilgan holda qabul qilinadi. Bu aksiomalar quyidagilardir.

I_1 : To‘g‘ri chiziq qanday bo‘lmasin, bu to‘g‘ri chiziqqa tegishli va tegishli bo‘lmagan nuqtalar mavjud;

I_2 : Istagan ikki nuqtadan to‘g‘ri chiziq o‘tkazish mumkin va faqat bitta;

II_1: To‘g‘ri chiziqdagi uchta nuqtadan bittasi va faqat bittasi qolgan ikkitasining orasida yotadi;

II_2 : Tekislikka tegishli to‘g‘ri chiziq teksilikni ikkita yarim tekislikka ajratadi;

III_1 : Har bir kesma noldan katta tayin uzunlikka ega. Kesma uzunligi shu kesmaning har qanday nuqtasi ajratgan qismlari uzunliklarining yig‘indisiga teng;

III_2 : Har bir burchak noldan katta tayin gradus o‘lchovga ega. Yoyiq burchak 180^0 ga teng. Burchakning gradus o‘lchovi o‘zining tomonlari orasidan o‘tuvchi har qanday nur yordamida ajratilishidan hosil qilingan burchaklarning gradus o‘lchovlari yig‘indisiga teng;

III_3:Istalgan yarim to‘g‘ri chiziqqa uning boshlang‘ich nuqtasidan berilgan uzunlikda yagona kesma qo‘yish mumkin;

IV_1 : Tekislikka tegishli bo‘lgan yarim to‘g‘ri chiziqdan berilgan yarim tekislikka 180^0 dan kichik bo‘lgan berilgan gradus o‘lchovli burchak qo‘yish mumkin va faqat bitta;

IV_2 : qanday bo‘lmasin berilgan tekislikda undagi berilgan yarim to‘g‘ri chiziqqa nisbatan berilgan vaziyatda joylashgan shu uchburchakka teng uchburchak mavjud bo‘ladi;

V_1 : Tekislikda berilgan to‘g‘ri chiziqda yotmagan nuqtadan berilgan to‘g‘ri chiziqqa bittadan ortiq parallel to‘g‘ri chiziq o‘tkazib bo‘lmaydi.

Yuqorida qayd qilingan I-V guruh aksiomalari va S_1, S_2, S_3 aksiomalar birgalikda streometriya aksomalar sistemasini tashkil qiladi.

Maktab streometriya kursida to‘g‘ri chiziqlar va tekisliklarning parallellik, perpendikularligi, to‘g‘ri chiziq va teksilikning, to‘g‘ri chiziqlarning o‘zaro munosabatlari o‘rganiladi.

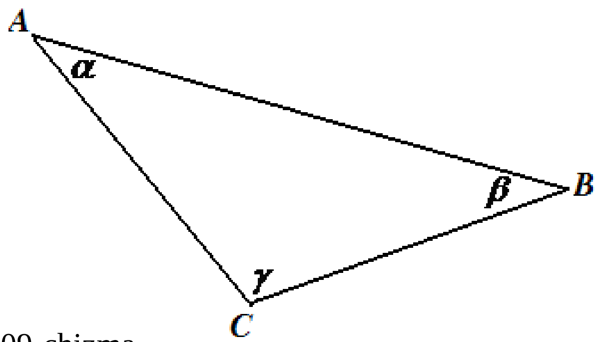
Fazoda Dekart koordinatalar sistemasini kiritish orqali ikki nuqta orasidagi masofa, vektor, koordinatalari bilan berilgan vektorlar ustida amallar, to‘g‘ri chiziq tenglamalari, to‘g‘ri chiziqlar va tekisliklar orasidagi burchak shuningdek, ko‘pyoqlilar ularning xossalari, yon va to‘la sirtlari, hajmlari o‘rganiladi.

6.3. Geometrik figuralar, ularning ta’rifi, hossalari va alomatlari.

6.3.1. UCHBURCHAKLAR

Ta’rif. Bir to‘g‘ri chiziqda yotmaydigan uchta nuqta va uchlari ularning har ikkalasiga tegishli bo‘lgan uchta kesmadan iborat geometrik shakl uchburchak deyiladi. A, B, C uchburchak uchlari, AB, BC, AC tomonlari $\angle BAC$, $\angle ABC$, $\angle ACB$ ichki burchaklardir. $\angle BAC=\alpha$, $\angle ABC=\beta$, $\angle ACB=\gamma$. (109-chizma).

Uchburchaklarni tomonlari va burchaklariga nisbatan klassifikatsiyalash mumkin. Agar uchburchakning uchta tomoni o‘zaro teng bo‘lsa teng tomonli, ikki tomoni o‘zaro teng bo‘lsa teng yonli, uch tomoni o‘zaro teng bo‘lmasa turli tomonli uchburchak hisoblanadi.

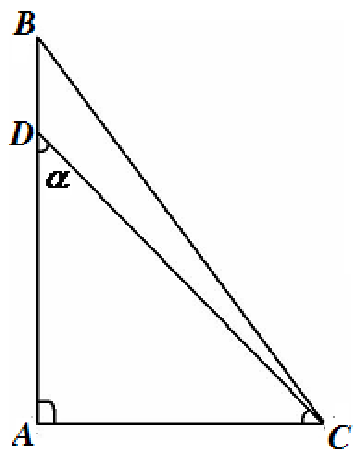


109-chizma

Agar uchburchakning ichki burchaklari o‘tkir burchakdan iborat bo‘lsa o‘tkir burchakli, bir burchagi o‘tmas burchak bo‘lsa o‘tmas burchakli, bir burchagi to‘g‘ri burchak bo‘lsa to‘g‘ri burchakli uchburchak deyiladi.

Har qanday uchburchak uchta tomoni, [illegible]ga yopishgan ikki burchagi yoki ikki tomoni va ular orasidagi bir burchagi bilan to‘la aniqlanadi.

Uchta a, b, c tomonlariga ko‘ra berilgan uchburchak mavjud bo‘lishi uchun uning ixtiyoriy ikki tomonining yig‘indisi uchinchi tomonidan katta bo‘lishi shart.



$a+b>c$; $a+c>b$; $c+b>a$ tengsizlik uchburchak tengsizligi deyiladi. Ikki tomoni va ular orasidagi burchagiga ko‘ra berilgan uchburchak mavjud bo‘lishi uchun $\alpha<180^0$ tengsizlik, bir tomoni va unga yopishgan ikki burchagiga ko‘ra berilgan uchburchak mavjud bo‘lishi uchun $\alpha+\beta<180^0$ tengsizlik bajarilishi zarur va etarlidir.

To‘g‘ri burchakli uchburchakda to‘g‘ri burchak qarshisida yotgan tomon gipotenuza, qolgan tomonlari katetlar deb ataladi. BC gipotenuza, AB va AC katetlar. (110-chizma).

Ikkala kateti teng bo‘lgan to‘g‘ri burchakli uchburchakka teng yonli to‘g‘ri burchakli uchburchak deyiladi va uning o‘tkir burchaklari 45^0 ga teng bo‘ladi.

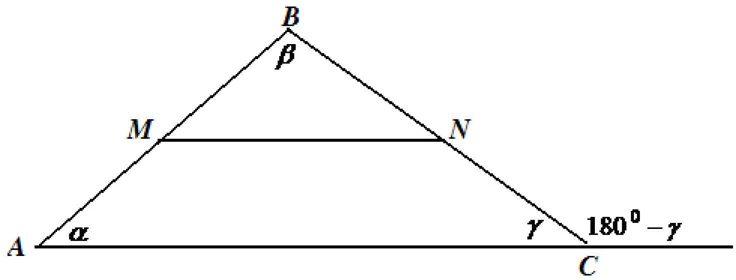
$\angle ADC = 45^0 \quad \angle ACD = 45^0$

chizma

Uchburchakda teng tomonlar qarshisida teng burchaklar, teng burchaklar qarshisida teng tomonlar, katta burchak qarshisida katta tomon, kichik tomon qarshisida esa kichik burchak yotadi. Uchburchakning ixtiyoriy ikkita ichki burchaklari yig‘indisi uning uchinchi burchagining qo‘shni burchagiga tengdir.(111-chizma).

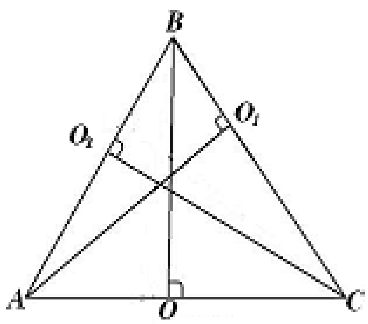
$$\angle\alpha + \angle\beta + \angle\gamma = 180^0$$

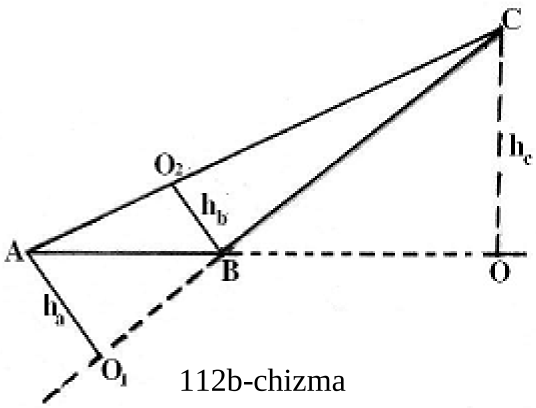
$$\angle\alpha + \angle\beta = 180^0 - \angle\gamma$$



111-chizma

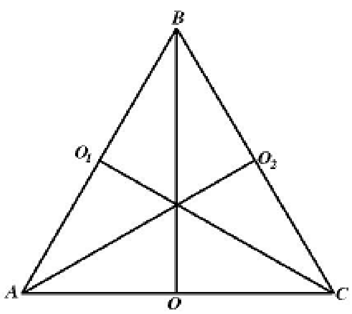
Uchburchakning bir uchidan chiqib qarshi yotgan tomoniga tushirilgan perpendikular uchburchakning balandligi deyiladi. (112a, 112b-chizmalar).
112a va 112b chizmalarda o‘tkir va o‘tmas burchakri uchburchak balandliklari ko‘rasatilgan. Uchburchakning bir uchidan chiqib qarshi yotgan tomonini teng ikkiga bo‘luvchi kesma mediana deyiladi. (113-chizma).

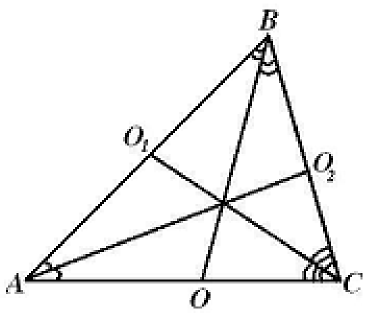




112a-chizma 112b-chizma

Uchburchakning bir uchidan chiqib shu burchakni teng ikkiga bo‘luvchi kesma bissektrisa deyiladi. (114-chizma). Uchburchakning ixtiyoriy ikkita tomoni o‘rtalarini tutashtiruvchi kesma uchubrchakning o‘rta chizig‘i deyiladi. Uchburchakning o‘rta chizig‘i uning uchinchi tomoniga parallel bo‘lib, parallel tomon uzunligi ning yarmiga teng bo‘ladi. (111-chizma).





113-chizma 114-chizma

Tengyonli uchburchakda asos qarshisidagi uchdan asosga tushirilgan balandlik mediana va bissektritsa vazifasini bajaradi.

To‘g‘ri burchakli uchburchak o‘tkir burchagi qarshisidagi katetning gipotenuzaga nisbati shu burchakning sinusi, o‘tkir burchakka yopishgan katetning gipotenuzaga nisbati shu burchakning kosinusi, o‘tkir burchak qarsishidagi katetning yopishgan katetga nisbati shu burchak tangensi, yopishgan katetning qarshi yotgan katetga nisbati shu burchak katangensi deyiladi. (110-chizma).

$$\frac{AC}{DC} = \sin\alpha \qquad \frac{AD}{DC} = \cos\alpha \qquad \frac{AC}{AD} = tg\alpha \qquad \frac{AD}{AC} = ctg\alpha$$

Uchburchakning tomonlari qarshisidagi burchaklarning sinuslariga proporsional $\frac{\sin\alpha}{a} = \frac{\sin\beta}{b} = \frac{\sin\gamma}{c}$. Bu munosabat sinuslar teoremasi deb yuritiladi. (113-chizma).

To‘g‘ri burchakli uchburchakda gipotenuzaning kvadrati katetlar kvadratlarining yig‘indsiga teng. $a^2=b^2+c^2$ bu munosabat Pifagor teoremasi deb nomlangan. Yuqorida keltirilgan munosabatlar isbotini talabaga havola qilamiz.

Uchburchaklar tengligi va o‘xshashligi alomatlari.

1 – alomati.

Agar bir uchburchakning bir tomoni va unga yopishgan ikki burchagi ikkinchi uchburchakning bir tomoni va unga yopishgan ikki burchagiga mos ravishda teng bo‘lsa, bunday uchburchaklar tengdirlar.

2-alomati.

Agar bir uchburchakning ikki tomoni va ular orasidagi bir burchagi ikkinchi uchburchakning ikki tomoni va ular orasidagi bir burchagiga mos ravishda teng bo‘lsa, bunday uchburchaklar tengdirlar.

3-alomati.

Agar bir uchburchakning uchta tomoni ikkinchi uchburchakning uchta tomoniga mos ravishda teng bo‘lsa, bunday uchburchaklar tengdirlar.

Agar bir uchburchakning uchta tomoni ikkinchi bir uchburchakning uchta tomoniga mos ravishda proporsional bo‘lsa bunday uchburchaklar o‘xshashdirlar. Agar bir uchburchakning ikki burchagi, ikkinchi bir uchburchakning ikki burchagiga mos ravishda teng bo‘lsa bunday uchburchaklar o‘xshashdirlar.

Agar bir uchburchakning ikki tomoni mos ravishda ikkinchi uchburchakning ikki tomoniga proporsional bo‘lib proporsional tomonlar orasidagi burchaklar teng bo‘lsa bunday uchburchaklar o‘xshashdirlar.

Uchburchakning medianalari uchburchak tomonlari orqali quyidagicha ifodalanadi:

$$m_a = \frac{1}{2}\sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}$$

$$m_b = \frac{1}{2}\sqrt{2a^2 + 2c^2 - b^2}$$

$$m_c = \frac{1}{2}\sqrt{2a^2 + 2b^2 - c^2}$$

Uchburchak balandligi uning tomonlari orqali quydigaicha ifodalanadi:

$$h_a = \frac{2\sqrt{p-(p-a)(p-b)(p-c)}}{a}$$

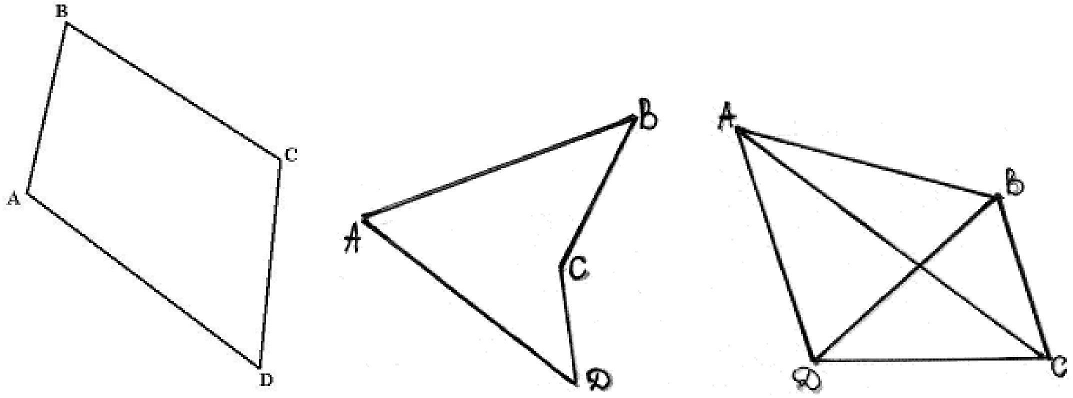
$$h_b = \frac{2\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{b}$$

$$h_c = \frac{2\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{c}$$

$$p = \frac{1}{2}(a+b+c)$$

6.3.2. TO‘RTBURCHAKLAR

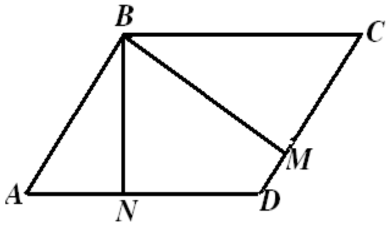
Tekislikda hech bir uchtasi bir to‘g‘ri chiziqda yotmaydigan to‘rtta nuqta va ularni har ikkalasini tutashtiruvchi, o‘zaro kesishmaydigan to‘rtta kesmadan tashkil topgan geometrik shakl to‘rtburchak deyiladi. A, B, C, D to‘rtburchak uchlari, AB, BC, CD, AD tomonlari, AC, BD dioganallar. (115-chizma)



15-chizma

To‘rtburchaklarning quyidagi turlari mavjud:

1. Parallelogramm tomonlari parallel to‘g‘ri chiziqlarda yotuvchi to‘rtburchak parallelogrammdir. (116-chizma)



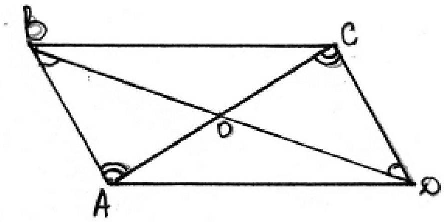
116-chizma

$AB \parallel CD \qquad |AB| = |CD| \qquad |AD| = |BC|$

Parallellogramning bir uchidan chiqib qarshi yotgan tomonga tushirilgan perpendikular uning balandligidir. BN, BM balandliklar.

Teorema. Parallelogramm diagonallari bir nuqtada kesishadi va kesishish nuqtasida teng ikkiga bo‘linadi. (117-chizma)

Isbot: AC va BD diagonallari o‘tkazamiz. Diagonallar bir nuqtada kesishadi.



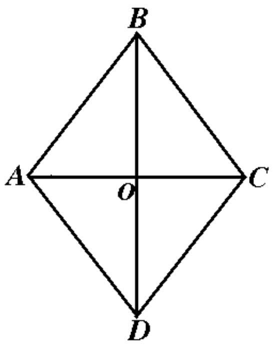
117-chizma

$$(AC)\bigcap(BD)=\{0\}$$

$$\left.\begin{aligned}&\angle BAO=\angle DCO\\&\angle CDO=\angle ABO\\&|AB|=|CD|\end{aligned}\right\}\Rightarrow \text{ga ko‘ra } \Delta BOA=\Delta COD \text{ bundan OB=OD OC=OA.}$$

Xuddi shuningdek $\Delta BOC=\Delta AOD$ tengliligini ko‘rsatish mumkin.

2) Romb



Hamma tomonlari teng bo‘lgan parallelogramm rombdir.(118-chizma) AC rombning kichik diagonali, BD rombning katta diagonali. $\Delta ABC=\Delta ADC$ ΔABC teng yonli uchburchak bo‘lganidan $OB\perp AC$, $AO=OC.$ $\Delta BAD=\Delta BCD$, ΔBCD teng yonli $BD\perp OC$, $OB=OD$ bundan esa quyidagi xossani o‘rinli ekanini ko‘rish mumkin. Rombning diagonallari kesishish nuqtasida o‘zaro perpendikular bo‘ladi va teng ikkiga bo‘linadi.

118-chizma

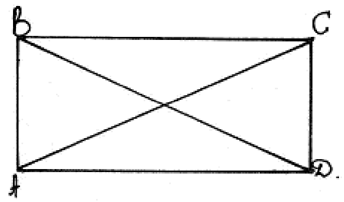
3) To‘g‘ri to‘rtburchak

Hamma burchaklari to‘g‘ri burchak bo‘lgan parallelogramm to‘g‘ri to‘rt burchakdir.(119-chizma)

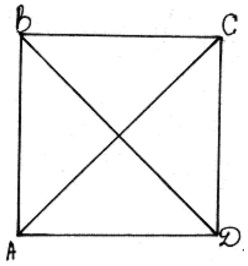
To‘g‘ri to‘rt burchakning AC diagonali uni o‘zaro teng ikkita ABC va ADC uchburchaklarga, BD diagonali esa BAD va BCD uchburchaklarga ajratadi.

Bu uchburchaklar ikkita tomoni va ular orasidagi burchagiga ko‘ra tengdirlar.

Bu esa bizga to‘g‘ri to‘rt burchakning diagonallari o‘zaro tengdir degan xulosani chiqarishga asos bo‘ladi.



119-chizma



120-chizma

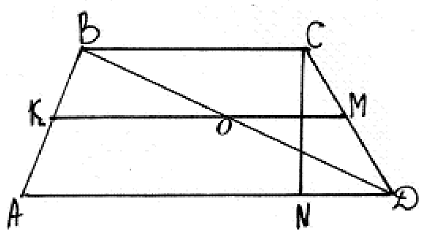
4) Kvadrat

Hamma tomonlari teng bo‘lgan to‘g‘ri to‘rt burchak kvadratdir. Kvadratning diagonallari ham to‘g‘ri burchak ostida kesishishini xossa sifatida isbotlash mumkin. (120-chizma)

Kvadratni hamma burchaklari teng romb sifatida ham qarash mumkin. Demak, kvadrat parallelogramm, romb, to‘g‘ri to‘rt burchakka xos bo‘lgan barcha xossalarga ega bo‘ladi.

5) Trapetsiya

Ikki tomoni parallel qolgan ikki tomoni parallel bo‘lmagan to‘rtburchak trapetsiya deyiladi.(121-chizma)



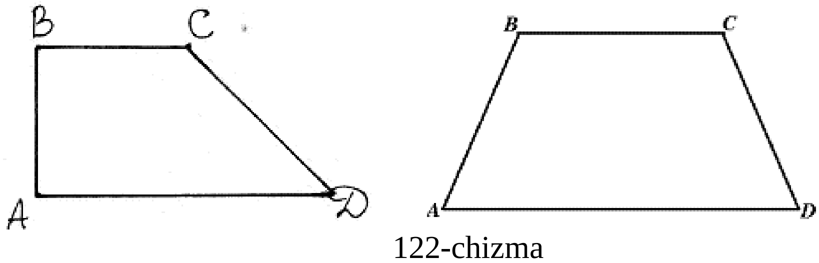
121-chizma

Trapetsiyaning parallel tomonlari uning asoslari (AD va BC), qolganlari yon tomonlaridir (AB va CD). Yon tomonlari o‘rtalarini tutashtiruvchi kesma trapetsiyaning o‘rta chizig‘i deyiladi va asoslariga parallel bo‘ladi. Trapetsiyaning bir asosi uchidan ikkinchi asosiga tushirilgan perpendikular trapetsiyaning balandligidir (CN). Trapetsiyaning o‘rta chizig‘i asoalar yig‘indisining yarmiga teng. Haqiqatan ham chizmadan:

$$KO = \frac{AO}{2} \quad OM = \frac{BC}{2} \quad KO + OM = KM$$

$$KM = \frac{AD}{2} + \frac{BC}{2} = \frac{AD + BC}{2}$$

122-chizmada teng yonli va to‘g‘ri burchakli trapetsiyalar tasvirlangan.

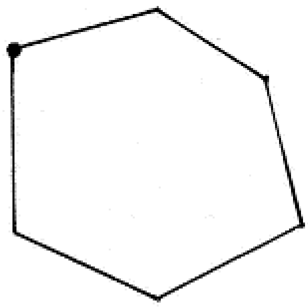


122-chizma

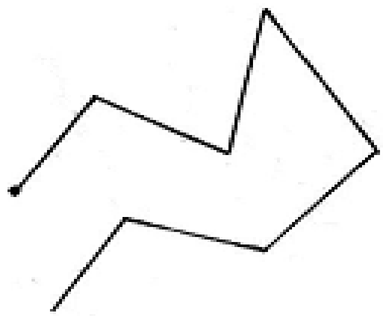
6.3.3. KO‘PBURCHAK

Birining oxiri bilan ikkinchisining boshi ustma ust tushuvchi kesmalar birlashmasiga siniq chiziq deyiladi. Siniq chiziqni hosil qilayotgan kesmalar uning bo‘g‘inlari, oxiri va boshi bir nuqtada bo‘lgan bo‘g‘inlar esa qo‘shni bo‘g‘inlar sanaladi. Birinchi bo‘g‘inning boshi va so‘ngi bo‘g‘inning oxiri ustma-ust tuchgan siniq chiziq yopiq siniq chiziqdir.

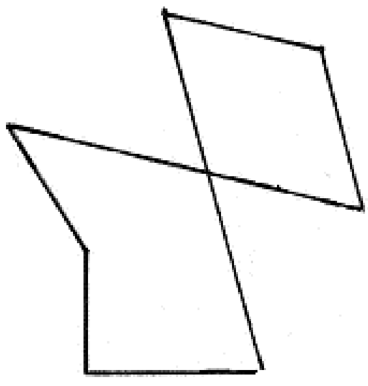
Har ikkila bo‘g‘ini faqatgina bitta umumiy nuqtaga ega bo‘lgan siniq chiziq oddiy siniq chiziq sanaladi. 123-a, 123-b chizmalarda oddiy siniq chiziqlar, 123-a chizmada yopiq siniq chiziq tasvirlangan. 123-v va123-g chizmalarda oddiy bo‘lmagan yopiq siniq chiziqlar tasvirlangan.



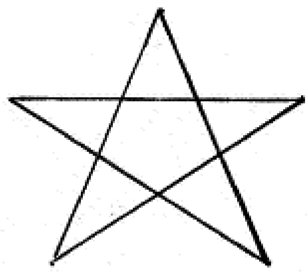
123a-chizma



123b-chizma



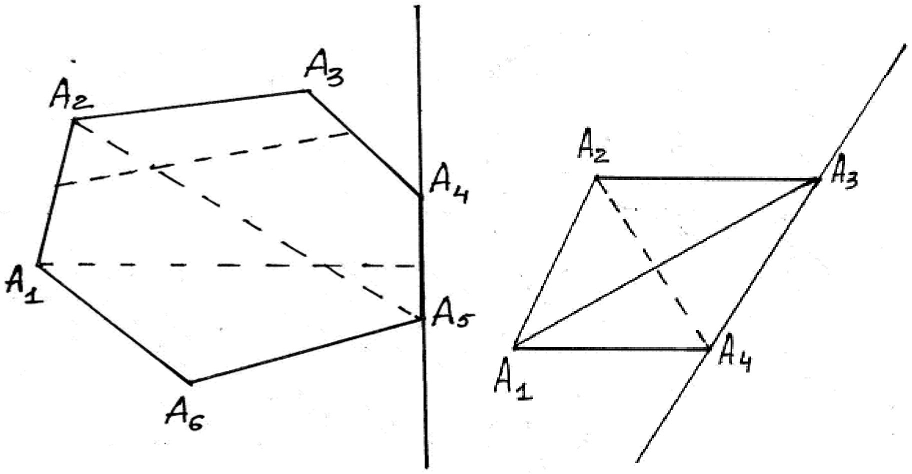
123v-chizma



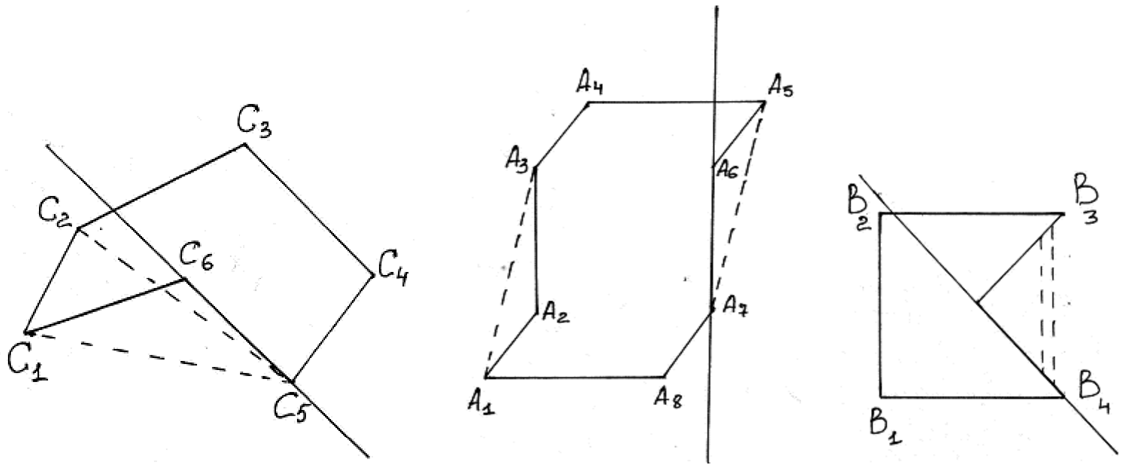
123g-chizma

Biz 123-a va 123-b chizmalarda tasvirlangan oddiy siniq chiziqlarning xossa va xususyaitlarni oʻrganamiz. Oddiy yopiq siniq chiziq oʻzi yotgan tekislikni ikkita ichki va tashqi sohalarga ajratadi. Oddiy yopiq siniq chiziq oʻzining ichki sohasi bilan birgalikda koʻpburchak deyiladi. Koʻpburchakni chegaralab turgan siniq chiziqlar uning chegarasidir. Koʻpburchakni hosil qilayotgan boʻgʻinlar uning tomonlari, boʻgʻinlarining kesishish nuqtalari esa uchlari hisoblanadi.

Koʻpburchakning tomonlari soni bilan uchlari soni teng, umumiy nuqtaga ega boʻlgan tomonlar qoʻshni tomonlar deyiladi. Koʻpburchaklar botiq va qabariq koʻpburchaklarga boʻlinadi. Agar koʻpburchakning har qanday ikkita nuqtasini tutashtiruvchi kesma toʻlaligicha koʻpburchakka tegishli boʻlsa yoki koʻpburchakning ixtiyoriy tomoni orqali oʻtgan toʻgʻri chiziqdan koʻpburchakning barcha nuqtalari bir tarafida yotsa koʻpburchak qabariq koʻpburchaklar deyiladi. (124a-chizma).



124a-chizma

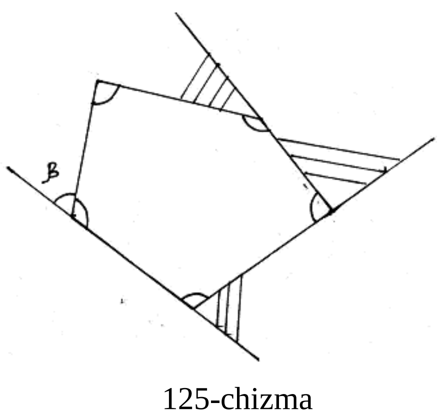


124b-chizma

124b chizmada botiq koʻpburchaklar tasvirlangan.

Koʻpburchakning qoʻshni tomonlari bilan chegaralangan ichki sohasi uning ichki burchagi ichki burchagiga qoʻshni boʻlgan burchak esa tashqi burchakdir. (125-chizma) $\angle\alpha$ - ichki burchak $\angle\beta$ - tashqi burchak

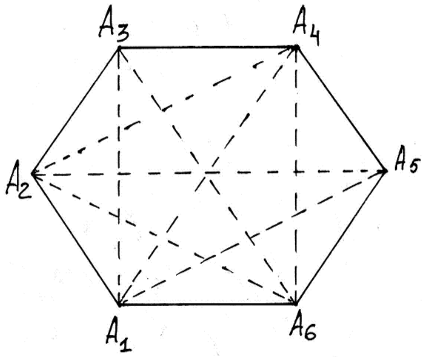
Koʻpburchak oʻzining burchaklari soni bilan nomlanadi. Agar koʻpburchakda burchaklar soni 3 boʻlsa uchburchak, 4 boʻlsa toʻrtburchak va hakozo. Koʻpburchak ichki burchaklar yigʻindisi $180^0(n-2)$ ga teng. Koʻpburchak tomonlari uzunliklari yigʻindisi perimetr deyiladi. Koʻpburchaklarning qoʻshni boʻlmagan uchlarini tutashtiriuvchi kesma diagonaldir. Qobariq n-burchakning



125-chizma

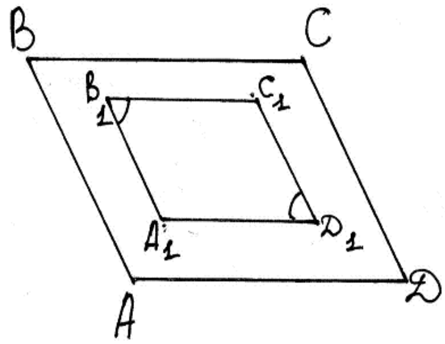
diagonallari soni $\frac{1}{2}n(n-3)$ ga teng. Hamma tomonlari, barcha ichki burchaklari teng bo‘lgan ko‘pburchak muntazam ko‘pburchak deyiladi.

Muntazam ko‘pburchak ichki burchagi $\frac{180^0(n-2)}{n}$ ga teng, n-ko‘pburchak tomonlari soni (126-chizma).

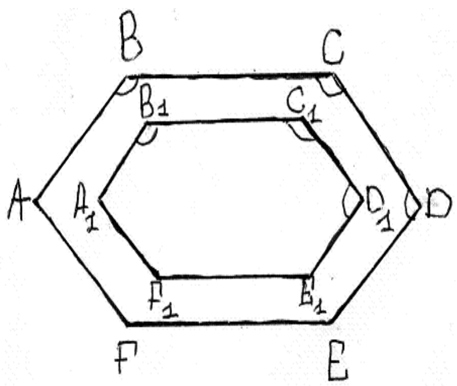


126-chizma

Ko‘pburchaklar o‘xshashligi va tengligi quyidagicha ta’riflanadi: agar bir ko‘pburchakning tomonlari va burchaklari mos ravishda ikkinchi ko’pburchakning tomonlari va burchaklariga teng bo’lsa bu ko’pburchaklar teng deyiladi. Agar bir ko’pburchakning tomonlari ikkinchi bir ko‘pburchakning tomonlariga mos ravishda proporsional bo‘lsa va proportsional tomonlar orasidagi burchaklar teng bo‘lsa bunday ko‘pburchaklar o‘xshashdirlar. (127a- 127b-chizmalar).



127a-chizma



127b-chizma

O‘z o‘zini nazorat qilish uchun savollar

1. Uchburchaklarni turlariga ta’rif berib, hossalarini ayting va ularni yasab ko‘rsating.
2. Uchburchaklar tengligi va o‘hshashligi alomatlarini tushuntiring
3. To‘rtburchaklarga ta’rif bering, hossalarini aytib, yasab ko‘rsating.
4. To‘rtburchaklarni turlarini aytib o‘hshash ko‘pburchaklar to‘g‘risida so‘zlab bering.

6.4. MATEMATIK MASALALAR VA ULARNI KLASSIFIKATSIYALASH

Matematika kursida yechiladigan barcha masalalarni masalada berilgan ob’ektlarning xarakter va xususiyatlariga ko‘ra, masalaning nazariy xarakteriga, masalada qo‘yilgan shartning xususiyatiga ko‘ra shartli ravishda klassifikatsiyalash mumkin. O‘z navbatida ob’ektlarning xarakter va xususiyatlariga ko‘ra berilgan masalalarni amaliy va matematik masalaga bo‘lish mumkin.

Agar masala shartidagi ob’ektlarning birortasi real predmetlardan tashkil topgan bo‘lsa, bunday masalaga amaliy masala deyiladi. Quyidagi masalani ko‘rib chiqaylik.

Masala. Uzunligi 15 m ga teng bo‘lgan telefon simi, yer satxidan 8 m balandlikda joylashgan simyog‘ochdan uy oldidagi balandligi 20 m ga teng simyog‘ochgacha tortilib mahkamlangan. Telefon simini tarang tortilgan hisoblab, uy bilan simyog‘och orasidagi masofani toping.

Masala ob’ekti real predmetlardan iborat. Bular telefon simi, simyog‘och va uy. Shuning uchun bu amaliy masaladir. Bu amaliy masalani matematik masalaga aylantirish uchun yoki masalani matematik ob’ektlar yordamida yechish uchun masala shartida berilgan real ob’ektlarni matematik o’ektlar bilan almashtirish lozim bo‘ladi. Bu masalada tarang tortilgan ip, simyog‘ochni, shartli ravishda kesmaga almashtiramiz.

Masala: Agar uzunliklari 8 va 20 m bo‘lgan kesmalar ularni asoslarini birlashtiruvchi kesmaga perpendicular va kesmalar uchlari orasaidagi masofa 15m bo‘lsa, perpendikularlar asoslari orasidagi masofani toping. Matematika kursida real masalalar matematik masalalarga keltirilgan holda echiladi. Demak, amaliy masalaning ob’ektlari real predmetlardan, matematik masalaning ob’ektlari esa matematik ob’ektlardan, iborat bo‘ladi.

Yechilish tartibi ma’lum qonun qoidalar asosida amalga oshiriladigan masalalar standart masalalar deb ataladi.

Ildiz chiqarish, darajaga ko‘tarish, kvadrat tenglama ildizlarini topish, arifmetik, geometrik progressiyaning hadini hisoblash, geometrik figuralar yuzlarini aniqlash, funksiyani differentsialini hisoblash, funksiya hosilasini, boshlang‘ich funksiyani hisoblashga doir masalalar, oldindan ma’lum bo‘lgan qoidalar, formulalar, teoremalar, ayniyatlar yordamida yechiladi.

Masala: Daryodan turistik bazagacha bo‘lgan masofani turistlar 6 soatda o‘tishni mo‘ljalladi. Lekin 2 soat yurgach ular tezlikni 0,5 km/s kamaytirishgan. Natijada ular turistik bazaga 30 daqiqa kech qolib kirib kelishdi. Turistlarning birinchi galgi tezligini toping.

Masala matnli amaliy masaladir. Bunday masalalar uchun oldindan aniqlangan yechish tartibi mavjud emas. Masalani yechishda qoida-so‘z, qoida-ta’rif, qoida—ayniyat, qoida-teorema, qoida-formula, ya’ni standart masalalar yechish qoidalarining birortasiga bo‘ysunmaydi. Bunday masalalarni yechish uchun tipik yo‘l mavjud emas. Bunday masala tipik bo‘lmagan nostandart masalalar jumlasiga kiradi.

Masalani yechish uchun quyidagi ishlarni amalga oshiramiz.

Turistlarning dastlabki tezligi x km/s bo‘lsin. U holda daryodan turistik bazaga bo‘lgan masofa 6x km/s bo‘ladi. Lekin ular 2 soatgina x tezlik bilan qolgan 4 soatida (x-0,5) km tezlik bilan yurishgan, 4 soat (x-0,5) km/s tezlik bilan yurib, turistik bazaga o‘z vaqtida etib kela olmaganlar, ular turistik bazaga etib kelish uchun yana yarim soat yurishgan. Bundan esa quyidagi tenglamaga ega bo‘lamiz:

$$6x = 2x + 4{,}5(x - 0{,}5)$$

$$6x = 2x + 4{,}5x - 2{,}25$$

$$0{,}5x = 2{,}25$$

$$x = 2{,}25 : \frac{1}{2} = 2{,}25\frac{2}{1} = 4{,}5$$

$$x = 4{,}5\,(km/s)$$

Demak, turistlar dastlab soatiga 4,5 km/s soat tezlik bilan yo‘l bosgan. Nostandart masalalarni yechish jarayonida bir qancha stantadrt masalalarni yechish lozim bo‘ladi. Yuqoridagi masalada tuzilgan 6x=2x+4,5(x-0,5) tenglamani yechishda bir noma’lumli chiziqli tenglamani yechish usulidan foydalanildi. Nostandart masalalarni, standart, tipik bo‘lgan masalalarga keltirish orqali yechishda yuqorida aytganimizdek umumiy qonun qoidalar yo‘q, lekin bu degan so‘z nostandart masalalarni yechishda biror metod yoki usul yo‘k degani emas.

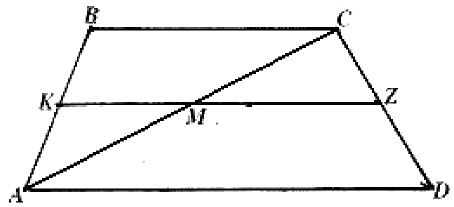
Nostandart masalalarni yechish jarayonida qoidali usullardan foydalanish imkoniyati bo‘lmagani bilan ularni yechish zaruriyati yechishning qoidasiz usullarini izlab topish imkoniyatini yaratib beradi. Bunday «qoidasiz» usullar «evristik» usullar yoki «evristik» qoidalar deb yuritiladi.

«Evristik» so‘zi yunon so‘zi bo‘lib «Haqiqatni topish san’ati» demakdir.

Bunday masalalarni yechish jarayonida yechishga tomon qilingan har bir qadam uchun qoidalarni yozish shart emas, lekin mazkur qoidalarni to‘g‘ri ishlata bilish malaka, ko‘nikmalari shakllanishi uchun juda ko‘p mashqlar bajarish lozim bo‘ladi.

Har qanday masalani yechish uchun uni elementlarga, ya’ni «Berilganlar» va «Izlanganlar» ga ajratish lozim bo‘ladi. Atroflicha tahlil qilish, o‘zingizga ma’lum bo‘lgan tushunchalar, xulosalar, formulalar, tasdiqlarni esga olish va ularni masala sharti bilan uyg‘unlashtirish, ya’ni ularning umumiy holatlarini, bog‘liqlik jihatlarini aniqlash, shular orqali deduktiv xulosalar chiqarish va masala yechimini izlash jarayonini vujudga keltiradi.

Masala: Asoslari 4 sm va 10 sm bo‘lgan trapetsiyani o‘rta chizig‘ini uning bir diagonali ikkita kesmaga ajratadi. Kesmalar uzunliklarini toping. Masalani yechish uchun masala matnini bir necha karra o‘qiymiz va masala shartida berilgan chizmani chizamiz. Masalada berilganlar va topilishi lozim bo‘lganlarni ajratamiz. Berilgan: ABCD – trapetsiya.(128-chizma)



$$AD \parallel BC;\ AK = KB;\ DZ = ZC;$$
$$AD = 10sm;\ BC = 4sm$$

T.k. $KM = ?,\quad MZ = ?$

128-chizma

Yechish: Ma’lumki trapetsiyaning o‘rta chizig‘i uning asoslariga parallel.

$KZ \parallel AD;\quad KZ \parallel BC$, Trapetsiyaning AC dioganali uni ikkita Δ ABC va ΔACD larga ajratadi. Uchburchak o‘rta chizig‘ining xossasiga ko‘ra, ABC uchburchakni o‘rta chizig‘i

$KM = \frac{1}{2}BC$ ga, ACD uchburchak o‘rta chizig‘i $MZ = \frac{1}{2}AD$ ga teng.

Demak, KM=2sm, MZ=5sm.

6.4.1. Geometrik masalalar va ularning turlari.

Maslada qo‘yilgan shartning xususiyati yoki mohiyatiga qarab geometrik masalarni hisoblashga oid, isbotlashga oid va yasashga oid geometrik masalalarga ajratish mumkin.

Yasashga oid geometrik masalalarga ayrim to‘xtalamiz.

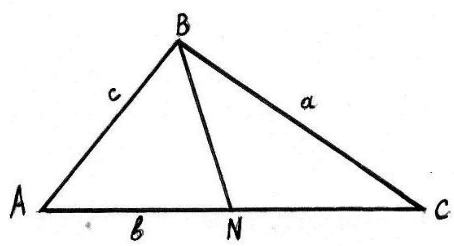
Geometrik masalalar ham har qanday masala kabi olingan nazariy bilimlarni mustahkamlash, ularni amaliyotga tadbiq eta bilish, geometrik figuralarning xossa va xususiyatlaridan o‘rinli va maqsadli foydalana olishga oid malaka va ko‘nikmalarni hosil qilishni maqsad qilib qo‘yadi. Malaka va ko‘nikmalar amaliy mashqlar bajarish jarayonida shakllantiriladi.

Hisoblashga oid masalalar geometriyaning har bir bo‘limida mavjud bo‘lib ular asosan egallangan nazariy bilimlar, ularni o‘rganish jarayonida chiqarilgan xulosalar, geometrik figuralar elementlari orasidagi bog‘lanishlarni ifodalovchi xossa va xususiyaylardan foydalangan holda burchak, uzunlik, yuza, hajm kabi kattaliklarni topishni maqsad qilib qo‘yadi. Masalan, uchburchakning tomonlari va burchakiga, tomon uzunliklari, asosi va balandligiga ko‘ra yuzasini hisoblash, asosining yuzi va balandligiga ko‘ra hajmini topish kabi masalalarni hisoblashga oid masalalar tarkibiga kiritish mumkin.

Hisoblashga oid quyidagi masalani ko‘raylik.

Masala

Uchburchakning asosi 26 ga, yon tomonlari 13 va 19 ga teng. Asosiga tushirilgan medianasini toping.



Ber.

AB=13 (bir)

BC=19 (bir)

AC=26 (bir)

T.k: BN=?

129-chizma

Uchburchak medianasini uning tomonlari orqali ifodalash formulasiga asosan

$$m_b = \frac{1}{2}\sqrt{2a^2 + 2c^2 - b^2} \qquad m_b = \frac{1}{2}\sqrt{2\cdot 19^2 + 2\cdot 13^2 - 26^2}$$

$$m_b = \frac{1}{2}\sqrt{384} = \frac{8\sqrt{6}}{2} = 4\sqrt{6} \quad \text{(bir)}$$

Isbotlashga oid geometrik masalalar tarkibiga geometrik figuralarni xossa va xususiyatlarini, geometrik figuralar elementlari orasidagi bog‘lanishlarni nazariy jihatdan asoslashga bag‘ishlangan masalalarni kiritish mumkun.

Isbotlashga oid geometrik masalalarni yechishda masalada berilgan va topilishi so‘ralganlarni, ya’ni masalaning sharti va xulosasini aniq ajratish, mustahkam nazariy bilimga ega bo‘lish, tafakkur amallaridan, tahlil va sintez metodlarini to‘g‘ri qo‘llay bilish lozim bo‘ladi.

Umuman matematika kursida isbotlashga oid masalalarni, teoremalarni isbotlash, ayniyatlarni isbotlash va tengsizlikni isbotlashga oid masalalarga ajratish mumkin.

O‘rta maktab matematika kursida ma’lumki deyarlik barcha teoremalar isbotlaniladi.

Tushunchalarning asosiy bo‘lmagan va ta’riflarga kiritilmagan xossalari odatda isbotlanadi.

O‘rta maktab geometriya kursida bunday masalalar tarkibiga quyidagilarni kiritish mumkin bo‘ladi:

Sinuslar teoremasini isbotlash.

$$\frac{\sin\alpha}{a} = \frac{\sin\beta}{b} = \frac{\sin\gamma}{c}$$

Kosinuslar teoremasini isbotlash.

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$$

Uchburchak yuzini hisoblash formulalarini isbotlash.

$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ - Geron formulasi (bu erda p–yarim perimetr)

$S = \frac{3}{4}\sqrt{m(m-m_a)(m-m_b)(m-m_c)}$ -Medianalar orqali

$S = \frac{a\cdot h_a}{2} = \frac{b\cdot h_b}{2} = \frac{c\cdot h_c}{2}$ - tomonlari va balandliklari orqali

Uchburchak medianasini hisoblash, formulalarini keltirib chiqarish

$$m_a = \frac{1}{2}\sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2} \quad m_b = \frac{1}{2}\sqrt{2a^2 + 2c^2 - b^2} \quad m_c = \frac{1}{2}\sqrt{2a^2 + 2b^2 - c^2}$$

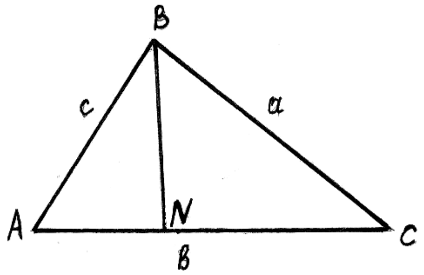
Uchburchak balandligini hisoblash formulalarini keltirib chiqarish.

$$\left.\begin{aligned} h_a &= \frac{2\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{a} \\ h_b &= \frac{2\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{b} \\ h_c &= \frac{2\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{c} \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Isbotlashga doir quyidagi masalani qarymiz.

Masala. Uchburchak balandligi uning tomonlari orqali (1) formulalar bilan ifodalanishini isbotlang.

Isbot. Faraz qilaylik bizga ABC uchburshak berilgan bo‘lib, uning tomonlari uzunliklari AB=c BC=a AC=b bo‘lsin. B uchdan b tomonga tushirilgan balandligi $BN = h_b$ bo‘lsin. Agar AN=x deb belgilasak NC=b-x bo‘ladi.



130-chizma

chizmadan:

$\Delta BNC \Rightarrow h_b^2 = a^2 - (b-x)^2$ (2) $\qquad \Delta BNA \Rightarrow h_b^2 = c^2 - x^2$ (3)

(2),(3) $\Rightarrow c^2 - x^2 = a^2 - (b^2 - 2bx + x^2) \Rightarrow c^2 - x^2 = a^2 - b^2 + 2bx - x^2) \Rightarrow$

$\Rightarrow a^2 - b^2 + 2bx - c^2 = 0 \Rightarrow 2bx = c^2 - a^2 + b^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow x = \frac{c^2 - a^2 + b^2}{2b}$ $\Rightarrow x^2 = \frac{(c^2 - a^2 + b^2)^2}{4b^2}$ $\Rightarrow$ $2bc - c^2 + a^2 - b^2 = a^2 - (b^2 - 2bc + c^2) = a^2 - (b-c)^2$ (

$h_b^2 = c^2 - \frac{(c^2 - a^2 + b^2)^2}{4b^2} = \frac{4b^2c^2 - (c^2 - a^2 + b^2)}{4b^2} = \frac{(2bc - c^2 + a^2 - b^2)(2bc + c^2 - a^2 + b^2)}{4b^2}$ $\quad 2bc + c^2 - a^2 + b$

$a - b + c = 2p - 2b = 2(p-b)$; $\quad a + b + c = 2p$; $\qquad b + c - a = 2(p-a)$;

$a + c - b = 2(p-b)$

$$h_b^2 = \frac{2p \cdot 2(p-b) \cdot 2(p-c) \cdot 2(p-a)}{4b^2}$$

$$h_b = \frac{1}{2b}\sqrt{2p \cdot 2(p-a) \cdot 2(p-b) \cdot 2(p-c)}$$

$$h_b = \frac{2}{b}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)};$$

6.4.2. Yasashga oid geometrik masalalar haqida tushuncha, yasash aksiomalari.

Geometriyada har qanday figura nuqtaviy obraz yoki nuqtalar to‘plami sifatida qaraladi. Barcha nuqtalari bir tekislikka tegishli bo‘lgan figura tekis, barcha nuqtalari bir tekislikka tegishli bo‘lmagan figuralar fazoviy figuralar deyiladi. Bir yoki bir nechta yasash qurollari vositasida ma’lum shartlarga javob beruvchi geometrik figura yasashni talab qiluvchi masalalar yasashga oid geometrik masalalar deb yuritildai.

Geometriyaning figuralar yasash hamda yasashga oid masalalar yechish metodlarini o‘rganuvchi bo‘limi konstruktiv geometriya deb ataladi.

Biz asosan tekislikda bajariladigan yasashga oid geometrik masalalar haqida so‘z yuritamiz. Tekislikda yasashga oid geometrik masalalar antik Misr, Bobil, Yunon matematikasida alohida o‘rin egallagan. Tekislikda yasashga oid geometrik masalalarni bir qancha yasash asboblari vositasida yasash mumkin. Biz esa faqat chizg‘ich va sirkul vositasida yasaladigan masalalarni ko‘rib chiqamiz.

Shuning uchun geometriyaning bu qismi konstruktiv geometriya yoki sirkul va chizg‘ich geometriyasi deb ham ataladi.

Tekislikda yasashga doir geometrik masalalarni yechish jarayonida yasashga oid quyidagi umumiy aksiomalardan foydalaniladi.

YaA_1. Har bir $F_1, F_2, F_3, \dots, F_n$ figura yasalgandir.

YaA_2. Agar F_1 va F_2 figura yasalgan bo‘lsa $F_1 \bigcup F_2$ yasalgandir.

YaA_3. Agar $F_1 \bigcap F_2$ bo‘lib F_1 va F_2 figuralar yasalgan bo‘lsa $F_1 \bigcap F_2$ figura yasalgandir.

YaA_4. Agar F_1 va F_2 figura yasalgan bo‘lib $F_2 \subset F_1$, $F_1 \neq F_2$ bo‘lsa, u holda $F_1 \backslash F_2$ yasalgandir.

YaA_5. Agar F_1 figura yasalgan bo‘lsa unga tegishli nuqta yasalgandir.

YaA_6. Agar F figura yasalgan bo‘lsa $(F \neq E)$ F ga tegishli bo‘lmagan nuqtani yasash mumkin. (E Evklid fazasi nazarda tutiladi).

YaA_7. Agar A va B $(A \neq B)$ nuqtalar yasalgan bo‘lsa $[AB)$ nurni yasash mumkin.

YaA_3 va YaA_7 ga asosan $[AB]$ kesmani yasash mumkin. $[AB) \bigcap [BA) = [AB]$

YaA_8. Agar 0 nuqta va $[AB]$ kesma yasalgan bo‘lsa markazi 0 nuqtada va radiusi AB kesmaga teng aylanani yasash mumkin.

$\{YaA_1, YaA_2, YaA_3, YaA_4, YaA_5, YaA_6, YaA_7, YaA_8\}$ yasash aksiomalarini sirkul va chizg‘ich yordamida yasash aksiomalari deb ataladi.

Mazkur yasash aksiomalari bizga sirkul va chizg‘ich vositasida quyidagi oddiy yasashlarni bajarish imkoniyatini beradi.

OyA_1. Agar A va B nuqtalar yasalgan bo‘lsa $[AB)$ nurni yasash mumkin.

OyA_2. Agar A va B nuqtalar yasalgan bo‘lsa $[AB]$ kesmani yasash mumkin.

OyA_3. Agar A va B nuqtalar yasalgan bo‘lsa (AB) to‘g‘ri chiziqni yasash mukin.

OyA_4. Agar 0 nuqta va aylana radiusiga teng $[AB] = r$ yasalgan bo‘lsa $S(0, AB)$ aylanani yasash mumkin.

OyA_5. O‘zaro parallel bo‘lmagan ikkita to‘g‘ri chiziqning kesishish nuqtasini yasash mumkin.

OyA_6. yasalgan $S(0, r)$ aylana va (AB) to‘g‘ri chiziqlarning kesishish nuqtasini topish mumkin (agar ular kesishsa).

OyA_7. yasalgan ikkita $S(0, r)$ va $S(0_1, r_1)$ aylanalarning kesishish nuqtalarini topish mumkin (agar ular kesishsa).

OyA_8. yasalgan F figuraga tegishli A nuqtani $A \in F$ yasash mumkin.

OyA_9. yasalgan F figuraga tegishli bo‘lmagan A nuqtani yasash mumkin $A \notin F$ (Bizga bu erda F figuraning figura yasalgan tekislikka teng bo‘lmasligi talab qilinadi).

Tekislikda birorta F figurani yasash uchun chekli sondagi oddiy yasashlarni chizg‘ich va sirkul yordamida bajarish lozim bo‘ladi. Agar lozim bo‘lgan figurani yasash uchun qo‘llaniladigan oddiy yasashlar soni ma’lum darajada chekli bo‘lsa bunday yasashlarni so‘zsiz bajarish mumkin, agar talab qilingan oddiy yasashlar ko‘p sonni tashkil qilsa bu yasashlarni bajarish ko‘p vaqtni olishi bilan bir qatorda zerikarli ham bo‘ladi.

Shuning uchun talab qilingan figurani yasashni oddiy yasashlarga emas balki, bir qancha oddiy yasashlar yordamida bajariladigan asosiy yasashlar deb nomlanadigan yasashlarga keltirish maqsadga muvofiq bo‘ladi.

Tekislikda yasashga oid masalalarni echishda quyidagi asosiy yasashlardan foydalaniladi.

AyA_1. Berilgan uch tomoniga ko‘ra uchburchak yasash.

AyA_2. Berilgan kesmani teng ikkiga bo‘lish.

AyA_3. Berilgan burchakka kongruent bo‘lgan burchak yasash.

AyA_4. Berilgan burchakni teng ikkiga bo‘lish.

AyA_5. Berilgan nuqtadan berilgan to‘g‘ri chiziqqa perpendikular o‘tkazish.

AyA_6. Berilgan bir tomoni va unga yopishgan ikki burchagiga ko‘ra uchburchak yasash.

AyA_7. Berilgan ikki tomoni va ular orasidagi bir burchakka ko‘ra uchburchak yasash.

AyA_8. Berilgan nuqtadan berilgan to‘g‘ri chiziqqa parallel chiziq o‘tkazish.

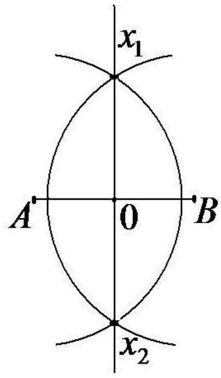
AyA_9. Berilgan gipotenuzasi va o‘tkir burchagiga ko‘ra to‘g‘ri burchakli uchburchak yasash.

AyA_{10}. Berilgan bir kateti va gipotenuzasiga ko‘ra to‘g‘ri burchakli uchburchak yasash.

AyA_{11}. Aylana tashqarisida olingan nuqtadan aylanaga urinma o‘tkazish.

Yuqorida qayd qilinganlarga asoslangan holda quyidagi masalalarni yasaymiz: 1) «Berilgan kesmani teng ikkiga bo‘lish» masalasi ya’ni AyA_2 ni yasaylik. Faraz qilaylik bizga $[AB]$ kesma berilsin. $[AB]$ kesmani o‘rtasini topish kerak. Buning uchun OyA_4 dan foydalanamiz. Kesmani A uchini markaz qilib taxminan kesma o‘rtasidan katta bo‘lgan kesmani radius qilib $S(A,r)$ aylanani, so‘ngra esa $S(B,r)$ aylanani chizamiz. Aylanalar kesishish nuqtalari orqali OyA_2 ga asosan kesma o‘tkazamiz. O‘tkazilgan kesma bilan berilgan $[AB]$ kesmani kesishish nuqtasi, $[AB]$ kesmani o‘rtasi bo‘ladi.

1. $[AB]$ yasaladi.
2. $S(A,r),\quad r > \dfrac{[AB]}{2}$
3. $S_1(B,r),\ r > \dfrac{[AB]}{2}$
4. $S \cap S_1 = \{x_1, x_2\}$
5. $[x_1, x_2]$
6. $[x_1x_2] \cap [AB] = \{0\}$
7. AO=OB



131-chizma

O nuqta AB kesmani teng ikkiga bo‘ladi

2) Berilgan burchakka kongruent bo‘lgan burchak yasash masalasi.

1. $\angle BAC$ berilgan bo‘lsin
2. $[A_1C_1)$ yasaymiz
3. $S(A,r),$ ni yasaymiz, bunda $r = Ax_1,$
4. $S(A,r) \cap \angle BAC = \{x_1, y_1\}$

5. $S_1(A_1, r)$ ni yasaymiz bunda $r = Ax_1$

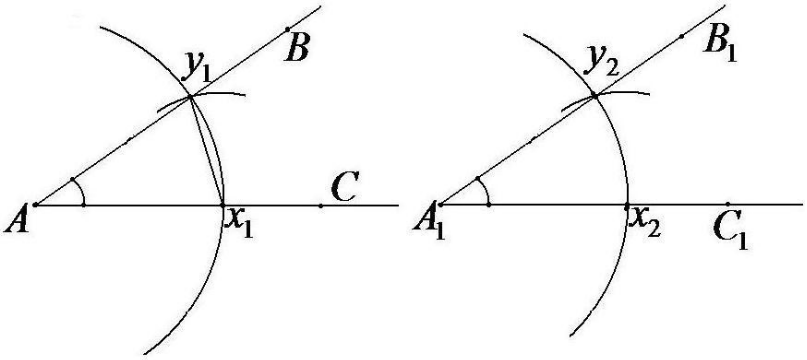
6. $S_1 \cap [A_1C_1) = \{x_2\}$ bunda $Ax_2 = Ax_1$

7. $S_2(x_1, r_1)$ ni yasaymiz bunda $r_1 = [x_1y_1]$

8. $S_3(x_2, r_1)$ ni yasaymiz

9. $S_3 \cap S_1 = \{y_2\}$

10. $\angle y_2A_1x_2 = \angle BAC$



132 - chizma

3) Berilgan burchakni teng ikkiga bo‘lish masalasi.

1. $\angle BAC$ berilgan bo‘lsin. Oldingi masalaga asoslanib:

2. $\angle BAC$ yasaladi

3. $S(A, r)$ aylana yasaladi, bunda $r < [AC]$

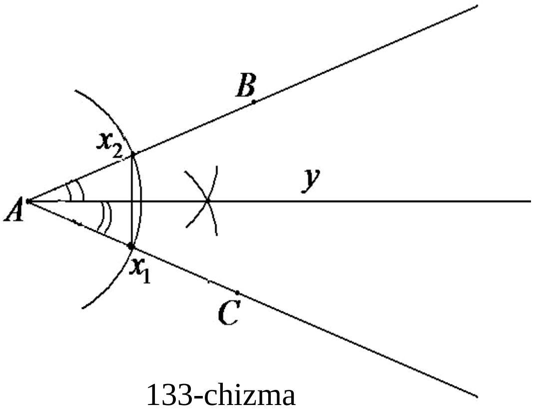
4. $S(A; r) \cap \angle BAC = \{x_1x_2\}$

5. $S_1(x_1, r_1)$ va $S_2(x_2, r_1)$ aylanalar o‘tkaziladi, bu yerda $r_1 > \frac{[x_1x_2]}{2}$

6. $S_1 \cap S_2 = \{y\}$

7. $[Ay)$

8. $\angle YAC = \angle YAB$



133-chizma

6.4.3. Yasashga oid geometrik masalalarni yechish bosqichlari.

Tekisliklarda echishga oid masalalarni sirqul va chizg‘ich yordamida yechishda geometrik tushuncha, xossa va xususiyatlarga tayanib ish ko‘ruvchi to‘g‘rilash, geometrik o‘rinlar, simmetriya, parallel ko‘chirish, o‘xshashlik yoki gomotetiya, inversiya hamda algebraik tushuncha, xossa va xususiyatlarga tayanib ish ko‘ruvchi algebraik metodlardan foydalaniladi.

Yasashga oid geometrik masalalarni yechish jarayoni qaysi metod bilan amalga oshirilishidan qat’iy nazar, u bir qancha bosqichlarda bajariladi va ular tekislikda yasashga oid masalalarni echish bosqichlari deb yuritiladi. Bular tahlil, yasash, isbot va tekshirish bosqichlari bo‘lib, har bir bosqich masala yechish jarayonida ma’lum bir maqsadni amalga oshirishni nazarda tutadi.

<u>Tahlil bosqichi</u>: Masala yechishning eng muhim, ijodiy bosqichi bo‘lib, bunda yasalishi lozim bo‘lgan F figura, masala talablariga mumkin qadar to‘la javob beradigan darajada

taxminan chizib olinadi. Tahlil chizmasida masala shartida berilganlar bor yoqligi aniqlanadi, agar ular chizmada aks etmagan bo‘lsa qo‘shimcha chizib olinadi. Natijada asosiy ya’ni yasalishi lozim bo‘lgan figura bilan hamjihatlikda bo‘lgan bir qancha yordamchi figuralar hosil bo‘ladi. Yordamchi figuralarda masala shartida berilganlar bilan bir qatorda, izlangan ya’ni yasalishi lozim bo‘lgan asosiy figuraning nuqtalari ham joylashadi. Shu tariqa berilganlar va izlanganlar orasidagi bog‘lanishlarni o‘rnatish natijasida asosiy figurani yasash imkoniyatlari axtariladi va aniqlanadi. yasash mumkin bo‘lgan yordamchi figura orqali izlangan figurani yasashga o‘tiladi.

Yasash bosqichi: Tahlil bosqichada aniqlanganlarni amaliy jihatdan bajarilishini nazarda tutadi.

Bunda yasalishi mumkin bo‘lgan yordamchi figuralar yasash vositalari yordamida yasaladi va ular orqali yasalishi lozim bo‘lgan asosiy figuraning nuqtalari va elementlari yasab olinadi.

Isbot bosqichi: Masala yechimining sinash bosqichi bo‘lib tahlil bosqichida taxminan chizib olingan asosiy figura bilan yasash bosqichida yasalgan figuraning masala shartlariga javob berishi isbotlanadi.

Tekshirish bosqichi: Masala yechishning yakunlash bosqichi hisoblanib, unda masala shartida berilganlarga asosan figura yasash mumkinmi, agar mumkin bo‘lmasa berilganlarni qanday tanlash lozim qanday hollarda echim mavjud, berilganlarga asoslanib nechta figura yasash mumkin, masala nechta yechimga ega ekanligi aniqlanadi.

Masala yechish bosqichlarini yanada chuqurroq o‘rgansak quyidagicha hulosaga kelamiz.

1-bosqich.

Yechilishi lozim bo‘lgan masala har tomonlama o‘rganiladi, masalada berilganlar, izlanganlar, ya’ni masalani sharti va talabi aniqlanadi.

Ushbu bosqich tahlil bosqichi deb yuritiladi.

2-bosqich.

Analiz bosqichida aniqlangan masala sharti va talabi, berilganlar, topilishi lozim bo‘lganlarni yozish, sxematik yozuvini berish bu masala yechishning ikkinchi bosqichi bo‘ladi. Bu bosqichni qayd qilish bosqichi deb atash mumkin.

3-bosqich.

Tahlil va qayd qilish bosqichlari masalani yechish uchun usullar tanlash maqsadida amalga oshiriladi. Masalani tahlil va qayd qilish bosqichlarida aniqlanganlarga aoslangan holda masalani yechish usullarini izlash bu uchinchi bosqichni tashkil etadi.

4-bosqich.

Masalani yechish usullari tanlangach, masalani yechish amalga oshiriladi. Masala yechimini axtarish, yechimni topish bu to‘rtinchi bosqich hisoblanadi.

5-bosqich.

Masalani yechimi masala shartini qanoatlantiradimi – yo‘qmi aniqlanadi. Bu bosqich masala yechimini tekshirish yoki tekshirish bosqichi bo‘ladi.

6-bosqich.

Ko‘p hollarda masala yechimi topilib, tekshirilib bo‘lgach ham masala ustida izlanish olib boriladi. Bu izlanishning maqsadi masala nechta yechimga ega bo‘ladi, qanday shartlarda masala yechimga ega bo‘lmasligiga qaratiladi. Bu bosqichni masala ustida izlanish olib borish bosqichi deb atash mumkin.

7-bosqich.

Yuqoridagi bosqichlar bajarilgach masala yechimini isbotlash bosqichi.

8-bosqich.

Masalani yechilish jarayoni tahlil qilinadi, masalani yechishda ratsional usullar ajratiladi, yechish usullari taqqoslanadi, yechishning qulay va oson usullari qayd qilinadi.

O‘z o‘zini nazorat qilish uchun savollar.

1. Matematik masalalarni tushuntirib, klasifikatsiyalab bering

2. Sirkul va chizg'ich aksiomalarini aytib bering
3. Yasash bosqichlarini masala tanlab yasashlarni bajarib tushuntiring

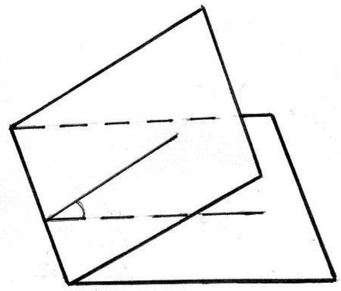
6.5. KO'PYOQLAR

Dastlab ko'pyoqli burchaklar bilan tanishamiz.

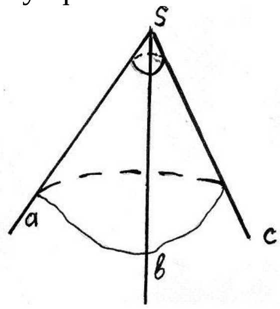
6.5.1 Ko'p yoqli burchaklar.

Ikkita yarim tekislikdan va ularni chegaralab turgan umumiy to'g'ri chiziqdan tashkil topgan figura ikki yoqli burchak deyiladi. (134-chizma). yarim tekisliklar ikki yoqli burchakning yoqlari, ularni chegaralovchi to'g'ri chiziq esa ikki yoqli burchakning qirrasi deyiladi. Ikki yoqli burchakning qirrasiga perpendikular tekislik o'tkazilsa, u yoqlarni ikkita yarim to'g'ri chiziqlar bo'yicha kesib o'tadi. Bu yarim to'g'ri chiziqlar tashkil qilgan burchak ikki yoqli burchakning chiziqli burchagi deyiladi.

Uchta yassi burchakdan tashkil topgan figura uch yoqli burchak deyiladi. (135-chizma) (ab), (bc), va (ac) lar yassi burchaklar, (abc) esa uch yoqli burchak.



134-chizma



135-chizma

yassi burchaklar uch yoqli burchakning yoqlari, ularning tomonlari esa uch yoqli burchakning qirralari, umumiy uch esa uch yoqli burchakning uchi deyiladi.

Uch yoqli burchak, uchta ikki yoqli burchakdan tashkil topgan.

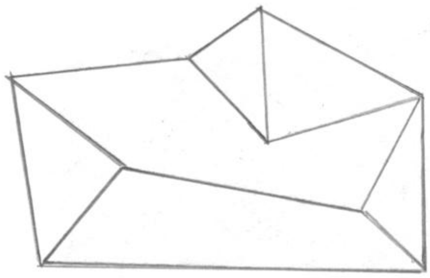
Shunga o'xshash ko'p yoqli burchak ham yassi burchaklardan tuzilganligini qayd qilish mumkin.

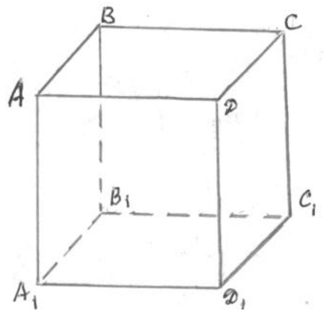
6.5.2. Ko‘pyoqlilar.

Sirti chekli miqdordagi yassi tekisliklardan iborat jism ko‘pyoq deyiladi (136-chizma). Agar ko‘pyoqning o‘zi uning sirtidagi har bir ko‘pburchak tekisligining bir tomonida yotsa, bunday ko‘pyoq qavariq ko‘pyoq deyiladi. Qavariq ko‘pyoqning sirti bilan bunday tekislikning umumiy qismi yoq deyiladi. Qavariq ko‘pyoqning yoqlari qavariq ko‘pburchaklardan iborat. Ko‘pyoq yoqlarining tomonlari uning qirralari, uchlari esa ko‘pyoqning uchlari deyiladi.

136-chizma 137-chizma

Bu ta’rifni biz kub misolida tushuntiramiz (137-chizma). Kub qavariq ko‘pyoqdir. Uning





sirti oltita kvadratdan tashkil topgan: ABCD, B B_1 C_1 C,... Bu kvadratlar kubning yoqlaridir. Bu kvadratlarning AB, BC, B B_1 ... tomonlari kubning qirralari bo‘ladi. Kvadratlarning A, B, C, D, A_1, ... uchlari kubning uchlari bo‘ladi.

Ko‘pyoqli turlaridan prizma va piramidani ko‘rib o‘tamiz.

Prizma.

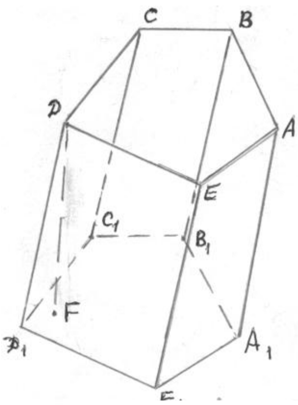
Ikki yog‘ining mos tomonlari bir-biriga parallel bo‘lgan teng ko‘pburchakdan iborat bo‘lib, boshqa yoqlari esa parallelogrammdan iborat bo‘lgan ko‘p yoqli prizma deyiladi (138-chizma).

Prizma ta’rifga asosan:

1). Prizmaning asoslari ikki teng ko‘pburchakdan iborat bo‘lib, ularning mos tomonlari paralleldir:

2). Prizmaning yon yoqlari parallelogrammdan iboratdir.

Yon qirralari asos tekisligiga og‘ma bo‘lgan prizma og‘ma prizma deyiladi. Yon qirralari asosga perpendikular bo‘lgan prizma to‘g‘ri prizma deb ataladi.



138-chizma

Asoslari muntazam n-burchaklar bo‘lgan to‘g‘ri prizma muntazam deyiladi. Parallel tekisliklardagi uchlarning biridan ikkinchi tekislikka tushirilgan perpendikular prizmaning balandligi deyiladi.

ABCDE va $A_1B_1C_1D_1E_1$-asoslar, AA_1, BB_1, CC_1, DD_1, EE_1- yon qirralar, D F- balandlik.

Prizmadagi asosiy munosabatlar:

1) Prizma hajmi $V=S_{as}\cdot H$, S_{as}-asos yuzasi, H- prizma balandligi, to‘g‘ri prizmaning hajmi $V=S_{yon}\,\ell$, ℓ-AA_1 yon qirra uzunligi.

2) Prizma yon sirti $S_{yon}=P_1\cdot\ell$, P_1 – perpendikular kesim perimetri, ℓ-yon qirrasi.

To‘g‘ri prizmaning yon sirti, $S_{yon} = P_{as}\cdot\ \ell$, P_{as}- asos perimetri.

3) Prizmaning to‘la sirti $S_{to‘la}=S_{yon}+2S_{as}$, S_{as}- asos yuzasi.

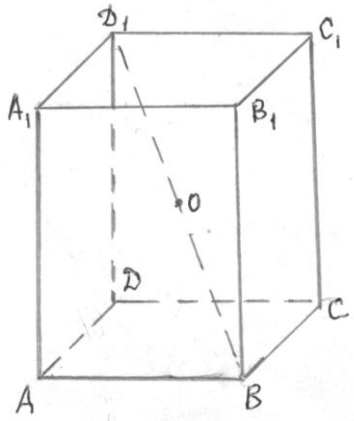
Parallelepiped.

Asosi parallelogramm bo‘lgan prizma parallelepiped deyiladi (139-chizma).

yOn qirralari asosga perpendikular bo‘lgan parallelepiped to‘g‘ri deyiladi..

Asosi to‘g‘ri to‘rtburchak bo‘lgan to‘g‘ri parallellepiped to‘g‘ri burchakli deyiladi.

Kub-barcha qirralari teng bo‘lgan to‘g‘ri burchakli parallellepiped.



Parallellepipedning xossalari:

1) Parallelepiped diaganalining o‘rtasi uning simmetriya markazidir.
2) Parallelepipedning qarama-qarshi yoqlari juft-juft kongurent va paralleldir.
3) Parallelepipedning barcha dioganallari bir nuqtada kesishadi va bu nuqtada teng ikkiga bo‘linadi.

139-chizma

To‘g‘ri burchakli parallelepipedning sirt yuzi yon sirtining yuzi bilan ikki asosi yuzlarining yig‘indisiga teng.

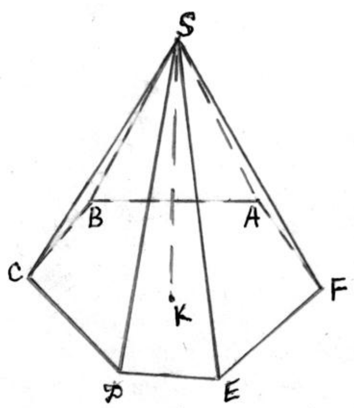
Yon sirtining yuzi esa asos perimetri bilan balandligining ko‘paytmasiga tengdir.

To‘g‘ri burchakli parallelepipedning barcha diagonallari teng uzunlikda bo‘ladi.

Piramida.

Agar ko‘p yoqli burchak uchidan o‘tmaydigan biror tekislik bilan kesilsa, kesuvchi tekislik va ko‘p yoqli burchak yoqlari bilan cheklangan jism piramida deyiladi (140-chizma).

Kesuvchi tekislikning ko‘p yoqli burchak yoklari orasidagi bo‘lagi piramidaning asosi deyiladi.



ABCDEF-asos, SAB, SBC, ...- yon yoqlari, S- umumiy uch.

SA, SB, … –yon qirralar; SK –balandlik (asosga tushirilgan perpendikular).

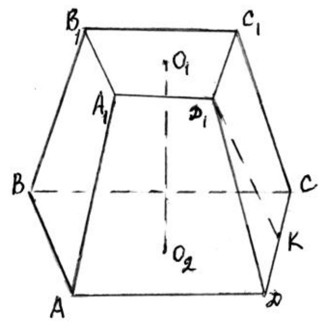
Piramidaning hajmi $V=\frac{1}{3}S_{as}\cdot H$, S_{as}-asos yuzasi, H-balandlik.

Muntazam piramida yon sirti $S_{yon}=\frac{1}{2}p\,h$, p-asos perimetri, h-apofema.

140-chizma

Asocga parallel tekislik piramidani ikki qismga ajratadi. U holda qismlardan biri yana piramida bo‘ladi, ikkinchi qism esa kesik piramida deyiladi (141-chizma).

Kesik piramidada ABCD va $A_1\ B_1\ C_1\ D_1$- asoslar, AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 –yon qirralar, $O_1\ O_2$ –balandlik, D_1 K-apofema.



Kesik piramida hajmi $V=\frac{1}{3}H\,(S_1+S_2+\sqrt{SS_2})$ H-balandlik, S_1 va S_2 asoslarning yuzalari. Muntazam kesik piramida yon sirti $S_{yon}=\frac{1}{2}h\,(p_1+p_2)$, h-apofema, p_1 va p_2 asoslarning perimetrlari.

141-chizma

6.5.3. Muntazam ko‘pyoqlilar.

Hamma yoqlari teng muntazam ko‘pburchaklardan tashkil topgan ko‘p yoqlilarni muntazam ko‘p yoqlilar deyiladi.

Ko‘pyoqlilarning uchlari-U, yoqlari-Yo, qirralari-Q orasidagi bog‘lanishni quyidagi Eyler teoremasi ifodalaydi.

Teorema: Muntazam ko‘pyoqli uchun quyidagi munosabat o‘rinli:

$$U + Yo - Q = 2$$

Bunga muntazam ko‘pyoqli uchun Eyler xarakteristikasi deyiladi. (Eyler xarakteristikasi 2 ga teng).

Biz bu teorema isbotini xususiy holda muntazam ko‘pyoqlilarda ko‘ramiz.

Muntazam ko‘pyoqlilarning 5 ta turi mavjud. Bular: tetraedr, kub, oktaedr, ikosaedr, dodekaedr.

Muntazan tetraedrning yoqlari muntazam uchburchaklardan iborat, har bir uchida uchtadan qirra birlashadi. Tetraedr hamma qirralari teng bo‘lgan uchburchakli piramidadan iborat. U 4 ta yoq, 6 ta qirra, 4 ta uchga ega (142-chizma).

Kubning hamma yoqlari kvadratlardan iborat, har bir uchida uchta qirra birlashadi. Kub qirralari teng bo‘lgan to‘g‘ri burchakli parallelepiped.

U 6 ta yoq, 12 ta qirra, 8 ta uchga ega (143-chizma).

Oktaedrning yoqlari muntazam uchburchaklar bo‘lib, tetraedrdan farqi shundaki, uning har bir uchida to‘rtta qirra birlashadi.

U 8 ta yoq, 12 ta qirra, 6 ta uchga ega (144-chizma).

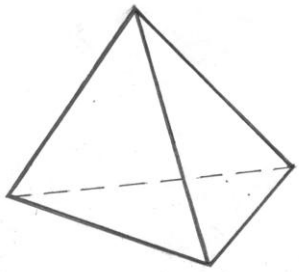
Dodekaedrning yoqlari muntazam beshburchaklardan iborat. Uning har bir uchida uchtadan qirra birlashadi.

U 12 ta yoq, 30 ta qirra, 20 ta uchga ega (145-chizma).

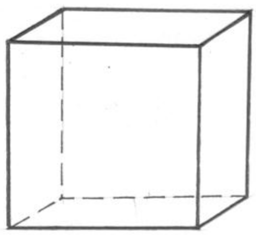
Ikosaedrning yoqlari muntazam uchburchaklardan iborat bo‘lib, tetraedr va oktaedrdan farqi shundaki, uning har bir uchida beshtadan qirra birlashadi.

U 20 ta yoq, 30 ta qirra 12 ta uchga ega (146-chizma).

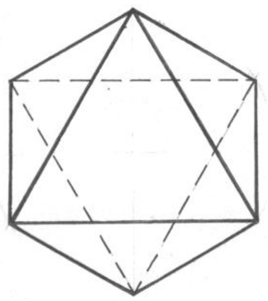
Eyler teoremasi yuqoridagi barcha muntazam ko‘pyoqlilar uchun o‘rinli.



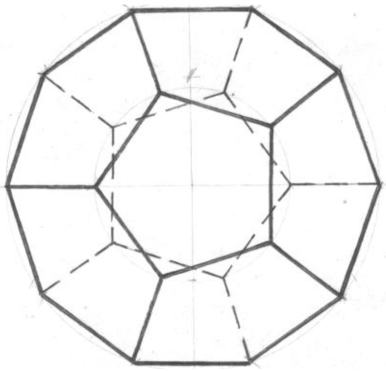
142-chizma.



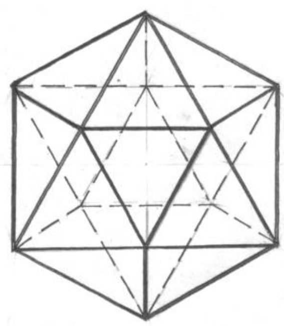
143-chizma.



144-chizma.



145-chizma.



146-chizma.

6.5.4. Muntazam ko‘pyoqlilar tarixi to‘g‘risida qisqacha ma’lumot

Evklidning «Negizlar» asarining 13 kitobida muntazam ko‘pyoqlilar haqida so‘z yuritilgan. Ammo muntazam ko‘pyoqlilar haqidagi ma’lumotlar antik yunon matematiklarining ishlarida ham o‘z aksini topgan. yunon matematigi Prokl (412-485) beshta muntazam ko‘pyoqlilarni Pifagor kashf qilganligini qayd qilgan. Ammo keyinchalik Pifagor, muntazam ko‘yoqlilardan faqat geksaedr tetraedr va dodekaedrnigina bilganligi, oktaedr va ikosaedr esa Tetet Afinskiy (e.o.IV) tomonidan kashf qilinganligi ma’lum bo‘lgan.

Yunon faylasufi Platon esa tabiatning to‘rtta unsuri yer, havo, suv va olovni muntazam ko‘pyoqlilarga qiyos qilgan va yer shaklini dodekaedrga o‘xshatgan. Keyinchalik esa Arximed tomonidan 13 ta yarimmuntazam ko‘yoqlilar kashf etilgan.

Sevimli mashg‘uloti muntazam ko‘pyoqlilar bo‘lgan Iogann Kepler Arximed sirtlarini muntazam o‘rgangan holda ikkita botiq, muntazam, yulduzsimon ko‘pyoqli mavjudligini kashf qiladi. Keyinchalik fransuz matematigi L.Puanso yana ikkita yarim botiq yulduzsimon muntazam ko‘yoqli mavjudligini kashf qiladi va 1812 yilda Koshi yulduzsimon muntazam ko‘pyoqlilarning faqatgina to‘rtta turi mavjudligini isbot qilgan.

Uyg‘onish davri vakillari Leonardo da Vinchi, Luka Pocholilar ham muntazam va yarimmuntazam ko‘yoqlilar ustida ish olib borganlar va o‘z tadqiqotlarini «Ilohiy nisbat haqida (1509)» degan asarda bayon etganlar.

Al Beruniy «Kitob at-tafkim» (1029-1034 yy) asarining geometriya bo‘limida muntazam ko‘pyoqlilarni o‘rganib ularni sfera ichiga joylashtirish mumkinligini aytib o‘tgan va tetraedrni «noriy» ya’ni olovnki, oktaedrni «havoiy» ya’ni havoniki, kubni «arziy» ya’ni yerniki, ikosaedrni «moiy» ya’ni suvniki, dodekvedrni «falakiy» ya’ni osmonniki deb atagan.

Platon olam tuzilishi bilan muntazam ko‘pyoqlilar orasidagi bog‘lanishlarni izlagan. Platon olamni tashkil etgan «to‘rtta element» «Olov», «er», «havo», «suv» zarralari tetraedr, kub, oktaedr va dodekaedr shaklida bo‘lishini ta’kidlagan.

O‘z-o‘zini nazorat qilish uchun savollar.

1. Ko‘p yoqli burchaklarga ta’rif bering.
2. Ko‘pyoqli deb qanday jismga aytiladi? Qavariq ko‘pyoqliga ta’rif bering.
3. Prizma deb qanday ko‘pyoqliga aytiladi?
4. Piramida deb qanday ko‘pyoqliga aytiladi?
5. Muntazam ko‘pyoqliga ta’rif bering va uning turlarini aytib, tushuntiring?

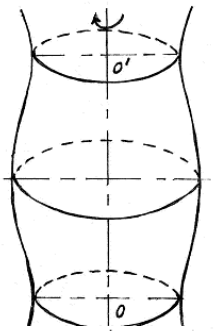
6.6. Aylanma jism va aylanma sirt haqida tushuncha.

Biror to‘g‘ri chiziqni yoki egri chiziqni bir to‘g‘ri chiziq atrofida aylantirishdan aylanma sirt hosil bo‘ladi.

Agar aylanma sirtni o‘q deb ataluvchi to‘g‘ri chiziqqa perpendikulyar bo‘lgan parallel ikkita tekislik bilan kessak aylanma sirt va doira bilan chegaralangan aylanma jism hosil bo‘ladi (147- chizma).

OO_1 - aylanma jismning o‘qi, jismning egri sirti aylanma sirt deyiladi.

Aylanma sirt parallel tekisliklar bilan kesilsa, kesim doiralardan iborat bo‘ladi.

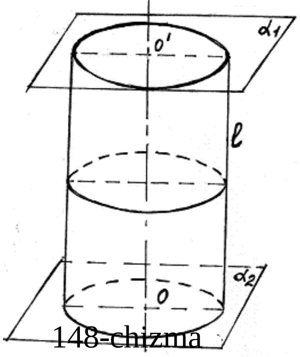


147-chizma

Silindr.

O‘q atrofida unga parallel bo‘lgan to‘g‘ri chiziq aylantirilsa, silindrik sirt hosil bo‘ladi. U o‘qqa perpendikular ikkita parallel tekislik bilan kesilsa ular orasida silindrik jism hosil bo‘ladi (148-chizma).

Doiralar silindrning asoslari deyiladi, doira aylanalari mos nuqtalarini tutashtiruvchi kesmalar silindrning yasovchilari deyiladi. Silindrning sirti asoslaridan va yon sirtidan tashkil topadi. yon sirt yasovchilardan tuzilgan.



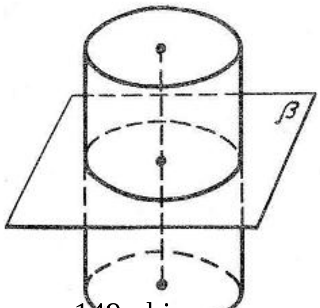
148-chizma

Silindrning yasovchilari asos tekisliklariga perpendikulyar bo‘lsa, bunday silindr to‘g‘ri silindr deyiladi. To‘g‘ri silindrni to‘g‘ri to‘rtburchakni aylantirish o‘qi vazifasini bajargan biror tomoni atrofida aylantirishdan hosil qilingan jism deb qarash mumkin.

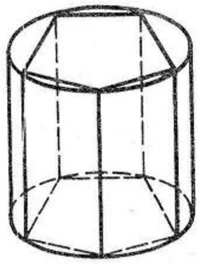
Silindr asosining radiusi silindrning radiusi deyiladi. Silindr asosining tekisliklari orasidagi masofa silindrning balandligi deyiladi. Asoslarining markazlaridan o‘tuvchi to‘g‘ri chiziq silindrning o‘qi deyiladi. bu o‘q yasovchilarga parallel bo‘ladi. Silindrning o‘qi orqali o‘tuvchi kesim o‘q kesim deyiladi. Silindrning yasovchisi orqali o‘tib, bu yasovchi orqali o‘tadigan o‘q kesimga perpendikulyar tekislik silindrning *urinma tekisligi* deyiladi.

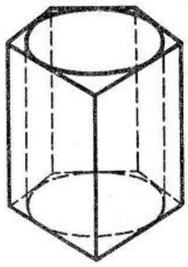
Teorema. Silindr o‘qiga perpendikulyar tekislik uning yon sirtini asos aylanasiga teng aylana bo‘yicha kesadi. (149-chizma) (teorema isboti mustaqil ish sifatida beriladi).

Silindrga *ichki chizilgan* prizma deb shunday prizmaga aytiladiki, uning asoslari silindrning asoslariga ichki chizilgan teng ko‘pburchaklardan iborat. Uning yon qirralari silindrning yasovchilari bo‘ladi (150- chizma).



149-chizma



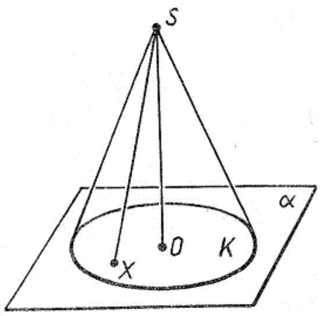


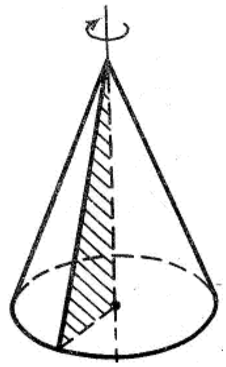
150-chizma 151-chizma

Silindrga *tashqi chizilgan* prizma deb shunday prizmaga aytiladiki, uning asoslari silindrning asoslariga tashqi chizilgan teng ko‘pburchaklardan iborat. Uning yon yoqlari tekisliklari silindrning yon sirtiga urinadi (151-chizma).

KONUS

Konus (aniqrog‘i doiraviy konus) deb shunday jismga aytiladiki, u doira – konus asosidan, shu doira tekisligidagi yotgan nuqta-konusning uchidan va konusning uchini asosining hamma nuqtalari bilan tutashtiruvchi kesmalardan iborat bo‘ladi (152-chizma). Konus uchini asos aylanasi nuqtalari bilan tutashtiruvchi kesmalar konusning yasovchilari bo‘ladi. Konusning sirti asosidan va yon sirtidan iborat.





152-chizma 153-chizma

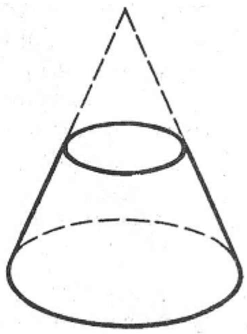
Konusning uchi bilan asos aylanasining markazini tutashtiruvchi to‘g‘ri chiziq asos tekisligiga perpendikulyar bo‘lsa, bunday konus *to‘g‘ri konus* deyiladi.

To‘g‘ri konusni to‘g‘ri burchakli uchburchakni kateti atrofida aylantirishdan hosil qilingan jism deb qarash mumkin (153-chizma).

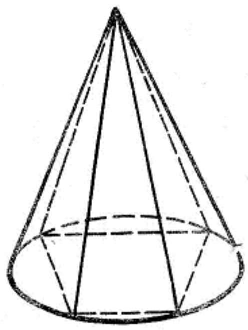
Konusning uchidan uning asosiga tushirilgan perpendikulyar konusning balandligi deyiladi. To‘g‘ri konus balandligining asosi asos markazi bilan ustma-ust tushadi. To’g’ri konusning balandligidan o’tuvchi to’g’ri chiziq uning *o’qi* deyiladi. Konusning o’qi orqali o’tuvchi tekislik bilan kesimi *o’q kesim* deyiladi. konusning yasovchisi orqali o’tuvchi va bu yasovchi orqali o’tkazilgan o’q kesimga perpendikulyar tekislik konusning *urinma tekisligi* deyiladi.

Toerema: Konusning o’qiga perpendikulyar tekislik konusni doira bo’yicha kesadi, yon sirtini esa markazi konusning o’qida joylashgan aylana bo’yicha kesib o’tadi. (teoremani isbot qilish talabalarga mustaqil ish sifatida topshiriladi).

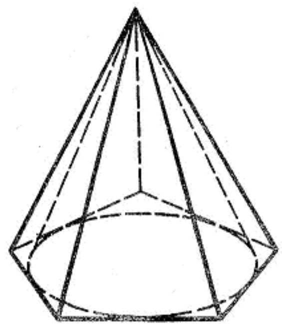
Konusning o’qiga perpendikulyar tekislik undan kichik konus ajratadi. Qolgan qismi *kesik konus* deyiladi. (154-chizma).



154-chizma



155-chizma



156-chizma

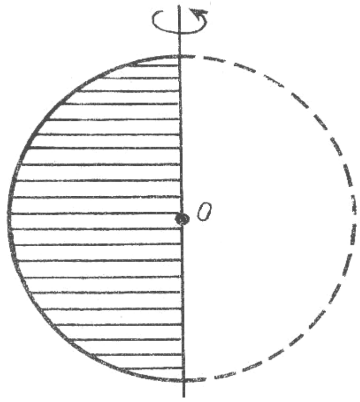
Asosi konus asosidagi aylanaga ichki chizilgan ko’pburchak bo’lib, uchi esa konusning uchida bo’lgan piramida konusga ichki chizilgan piramida deyiladi. (155-chizma). Konusga ichki chizilgan piramidaning yon qirrasi konusning yasovchilari bo’ladi. Asosi konusning asosiga tahqi chizilgan ko’pbubrchak bo’lib, uchi esa konusning uchi bilan ustma-ust tushgan piramida konusga tashqi chizilgan piramida deyiladi. Tashqi chizilgan piramida yon yoqlarining tekisliklari konusning urinma tekisliklari bo’ladi. (156-chizma).

SHAR

Ta’rif: Fazoning berilgan nuqtasidan berilgan masofadan katta bo‘lmagan uzoqlikda yotgan hamma nuqtalaridan iborat jism shar deyiladi. Berilgan nuqta sharning marakzi, berilgan masofa esa sharning radiusi deyiladi. Sharning chegaasi shar sirti yoki sfera deb ataladi. Shunday qilib sharning markazidan radiusga teng masofa qadar uzoqlashgan hamma nuqtalari shar sirti yoki sfera deb ataladi.

Shar sirtining ikki nuqtasini tutashtiruvchi va sharning markazidan o‘tuvchi kesma diametr deyiladi. istalgan diametrning uchlari (oxirlari) sharning diametral qarama-qarshi nuqtalari deyiladi.

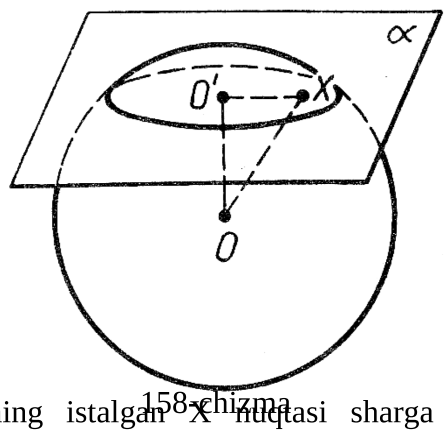
Shar ham aylanma jism bo‘lgani uchun uni yarim doirani o‘zining diametri atrofida aylantirishdan ham hosil qilish mumkin. (157-chizma).



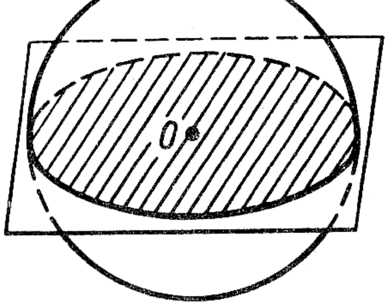
157-chizma

1- Teorema.   Sharning har qanday tekislik bilan kesimi doiradir. Bu doiraning markazi sharning markazidan kesuvchi tekislikka tushirilgan perpendikulyarning asosidir.

Isboti.   Aytaylik α - kesuvchi tekislik va O- shrning markazi bo‘lsin (158-chizma). Sharning markazidan α tekislikka OO' perpendikulyar tushiramiz. O' bilan perpendikulyarning asosini belgilaymiz. X – sharning α tekislikka tegishli ixtiyoriy nuqtasi bo‘lsin. Pifagor teoremasiga ko‘ra $OX^2 = OO^{12} + O'O^2$ Ammo OX kesma sharning R radiusidan katta bo‘lmagani uchun $O'X \le \sqrt{R^2 - OO'^2}$` Demak, X nuqta markazi O' nuqtada va radiusi $R = \sqrt{R^2 - OO'^2}$ ga teng doiraga tegishli. Aksincha, bu doiraning istalgan X nuqtasi sharga tegishli. Bu esa sharning α tekislik bilan kesimi markazi O' nuqtada bo‘lgan doira demakdir.



158-chizma

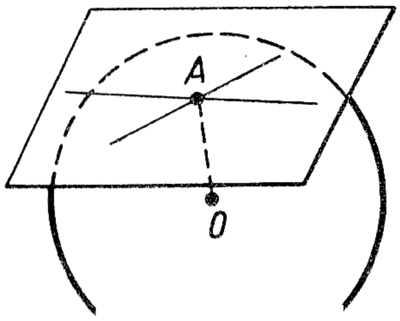


Teoremaning isbotidan sharning tekislik bilan kesimida hosil qilingan doiraning radiusini $R^1 = \sqrt{R^2 - OO^2}$ formula bo‘yicha hisoblash mumkin degan xulosa chiqadi. Bu esa shar markazidan bir xil uzoqlikdagi tekisliklar bilan kesilsa, teng doiralar hosil bo‘lishini ko‘rsatadi. α tekislik sharning markaziga qancha yaqin bo‘lsa α tekislik kesimidagi doira shuncha katta bo‘ladi. Sharning markazidan o‘tgan tekislik kesimida eng katta doira hosil bo‘ladi. Bu doiraning radiusi shar radiusiga teng. (159-chizma).

Sharning markazidan o‘tadigan tekislik diametral tekislik deyiladi.

2- Teorema. Sharning istalgan diametral tekisligi uning simmetriya tekisligi bo‘ladi. Sharning markazi uning simmetriya markazidir.

Shar sirtidagi A nuqtadan o‘tib shu nuqtaga o‘tkazilgan radiusga perpendikular tekislik urinma tekislik deyiladi. A nuqta urinish nuqtasi deyiladi (160-chizma)



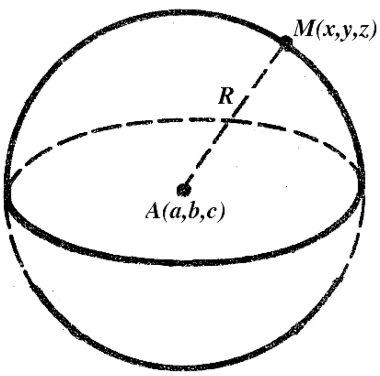
160-chizma

3- Teorema. Urinma tekislik shar bilan faqat bitta umumiy nuqtaga – urinish nuqtasiga ega.

4- Teorema. Shar sirtidagi istalgan nuqtadan cheksiz ko‘p urinma o‘tadi, ularning hammasi sharning urinma tekisligida yotadi. (2-4 teoremalarni isboti talabalarga mustaqil ish qilib beriladi)

Sfera tenglamasi.

Sfera deb, fazoning berilgan nuqtasidan baravar uzoqlikda joylashgan nuqtalar to‘plamiga aytiladi. Sfera tenglamasini tuzamiz. Sferaning markazi A(a, b, c) nuqtada, radiusi esa R bo‘lsin (161-chizma). Sferaning nuqtalari fazoning shunday nuqtalaridan, bu nuqtadan A nuqtagacha masofa R ga teng. Sferaning ixtiyoriy (x, y, z) nuqtasidan A nuqtagacha masofaning kvadrati



161-chizma

$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2$ ga teng. Shuning uchun sferaning tenglamasi $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$ ko‘rinishga ega. Sferaning markazi koordinatalar boshi bo‘lsa, sferaning tenglamasi quyidagi ko‘rinishda bo‘ladi.

$$x^2+y^2+z^2=R^2$$

Ikkita sferaning kesishgan chizig‘i aylanadan iborat bo‘ladi. Buni isbot qilish ham mumkin.

O‘z-o‘zini nazorat qilish uchun savollar.

1. Aylanma sirtga ta’rif bering
2. Silindr va konusga ta’rif bering
3. Sharga ta’rif bering
4. Sfera tenglamasini keltirib chiqaring.

VII-BOB
Miqdorlar va ularni o‘lchash

Dastlab kattaliklarni va yuzalarni o‘lchashning nazariy asoslarini ko‘rib o‘tamiz.

7.1. Kattaliklarni o‘lchash.

Ixtiyoriy kesma uzunliklarini o‘lchash uchun musbat sonlar to‘plami R_+ kiritiladi. Bu sonlar to‘plami yordamida yuza, hajm va boshqa kattaliklarni o‘lchash natijalarini ham olish mumkin.

Umumiy holda kattaliklarni o‘lchash tushunchasiga to‘xtalamiz. Kesmalarni uzunliklarini, figuralar yuzalarini, jismlarning hajmlarini hisoblashda biz o‘zida ikkita munosabat aniqlangan bir qancha ob’ekt to‘plami bilan ish ko‘ramiz. Bu munosabatlar: ekvivalentlik (figuralarning kongruentligi) va «α ob’ekt - β va γ ob’ektlardan tashkil topadi munosabati (masalan AB kesma AC va CB kesmalardan tashkil topadi).

Agar Ω to‘plamdagi har bir α elementga quyidagi shartlar bajariladidan $m(\alpha)$ musbat sonini mos qo‘yish mumkin bo‘lsa, Ω to‘plamda o‘lchash amali aniqlangan deyiladi ($m(\alpha)$-α ning o‘lchovi)

a) $\alpha \sim \beta$ munosabatdan $m(\alpha)=m(\beta)$ kelib chiqadi, (ekvivalent ob’ektlar teng o‘lchovga ega).

b) $\alpha = \beta \oplus \gamma$ munosabatdan $m(\alpha)=m(\beta)+m(\gamma)$ kelib chiqadi (o‘lchovning additivligi).

Agar Ω to‘plamda o‘lchov amali aniqlangan bo‘lsa, Ω to‘plamga kattaliklarning aniqlanish sohasi deyiladi, bunda ikkita har xil m_1 va m_2 amal bir-biridan o‘zgarmas ko‘paytuvchi bilan farqlanadi, ya’ni barcha $a\in\Omega$ uchun shunday musbat λ soni mavjud bo‘lib, $m_1(a)= \lambda\ m(a)$ munosabat o‘rinli.

Agar Ω - kattaliklarni aniqlanish sohasi bo‘lsa, undan $m(\alpha)=m(\beta)$ munosabatni ifodalovchi tengdoshlik munosabatini keltirib chiqarish mumkin. Bu munosabat esa refleksivlik, simmetriklik, tranzitivlik xossalariga ega bo‘lib, u Ω to‘plamni ekvivalentlik sinflariga ajratadi. Bu ajralish Ω sohaga mos kattalik deyiladi. Ω to‘plam kesmalardan tashkil topgan bo‘lsa, tengdoshlik munosabati ekvivalentlik munosabati bilan ustma-ust tushadi.

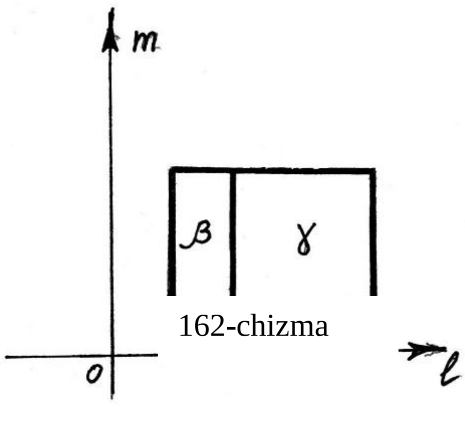
Ikki kesma faqat va faqat uzunliklari teng bo‘lganda kongruent bo‘ladi. Yuzalar kattaliklarini hisoblashda esa teng yuzalarga ega bo‘lganda, ularni tomonlari kongruent bo‘lmasligi mumkin (masalan, tomonlari 3 sm va 12 sm bo‘lgan to‘g‘ri to‘rtburchak va tomoni 6 ga teng bo‘lgan kvadrat).

7.2.Yuzalarni o‘lchash

Figuralar yuzalarini o‘lchash nazariyasini qanday tuzilishini ko‘rsatamiz.

Tekislikda o‘zaro perpendikular ikkita m va l to‘g‘ri chiziqlarni va bir birlik kesmani olamiz. Ω orqali tomonlari l va m to‘g‘ri chiziqlarga parallel bo‘lgan to‘g‘ri to‘rtburchaklar to‘plamini belgilaymiz va bunda $\alpha \sim \beta$ shu to‘g‘ri to‘rtburchaklardan ikkitasini kongruentligini, $\alpha=\beta\oplus\gamma$ esa α to‘g‘riburchakli to‘rtburchak, tomonlari l yoki m to‘g‘ri chiziqlardan biriga parallel bo‘lgan to‘g‘ri chiziq orqali β va γ to‘g‘ri burchakli to‘rtburchaklarga ajralganligini bildirsin (162-chizma).

Yuqorida ko‘rsatilgan to‘g‘ri to‘rtburchaklardan iborat to‘plamda $S(\alpha)$ yuza tushunchasini aniqlashni yagona usuli, bu birlik kvadratning yuzasini 1 ga tengligidir. Buning uchun to‘g‘ri to‘rtburchakning yuzasini $S(\alpha) = a*b$ formula bilan ifodalash kerak, bunda a va b- lar to‘g‘ri to‘rtburchakning tomonlari.



162-chizma

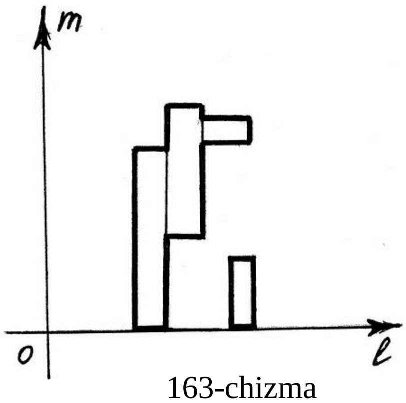
Haqiqatan ham agar a va b sonlari natural sonlar bo‘lsa, u holda α to‘g‘ri to‘rtburchakni ab birlik kvadratlarga ajratish mumkin va uning yuzasi ab ga teng bo‘ladi. Agar to‘g‘ri to‘rtburchakning tomonlari $\frac{a}{10^n}$ ko‘rinishdagi o‘nli kasrlar bilan ifodalangan bo‘lsa, u holda α to‘g‘ri to‘rtburchakni tomonlari $\frac{1}{10^n}$ bo‘lgan ab kvadratlarga ajratish mumkin.

Bu holda birlik kvadratlarning soni 10^{2n} ga teng bo‘ladi. Bundan esa tomonlari $\frac{1}{10^n}$ kvadratning yuzasi $\frac{1}{10^{2n}}$ ga, to‘g‘ri to‘rtburchakning yuzasi esa $\frac{ab}{10^{2n}}$ ga, ya’ni $\frac{a}{10^n}$ va $\frac{b}{10^n}$ larning ko‘paytmasiga teng bo‘ladi.

To‘g‘ri to‘rtburchakning tomonlaridan bittasi irratsional son bo‘lsa, u qaralayotgan holga keltiriladi, bunda to‘g‘ri to‘rtburchakning yuzasi va ab son $X = \{a_n, b_n\}$ va $Y = \{a_n^1, b_n^1\}$ to‘plamlarni bo‘ladi, bunda a_n va b_n a va b sonlarni kami bilan olingan taqribiy qiymatlari a_n^1 va b_n^1 lar esa a va b sonlarni ortig‘i bilan olingan taqribiy qiymatlari.

Biz to‘g‘ri to‘rtburchak yuzaga ega bo‘lsa, uning yuzasi a*b son bilan ifodalanishini ko‘rsatdik. Birlik kesma o‘zgarsa, to‘g‘ri to‘rtburchak tomonlarini ifodalovchi son o‘zgaradi, bu bilan to‘g‘ri to‘rtburchak yuzasini ifodalovchi son ham o‘zgaradi. Bu vaqtda barcha sonlar bir xil o‘zgarmas ko‘paytuvchiga ega bo‘ladi. Shuning bilan birga S (α) = a*b formula bilan aniqlanuvchi yuza yuqoridagi a) va b) xossalarga ega bo‘lishini ko‘rsatish mumkin.

Murakkabroq, yani zinapoyasimon figuralarni yuzasi tushunchasini kiritish ham qiyinchilik tug‘dirmaydi. Agar figura har ikkitasi ichki nuqtalarga ega bo‘lmagan to‘g‘ri to‘rtburchaklar birlashmasidan iborat bo‘lsa, figura zinapoyasimon deyiladi (163-chizma). Zinapoyasimon figura $\beta_1, \beta_2, ..., \beta_n$ to‘g‘ri to‘rtburchaklardan tashkil topsa, u holda figura yuzasi to‘g‘ri to‘rtburchaklar yuzalari yig‘indisidan tashkil topadi. Bu usul yordamida biz uchburchaklarni, doirani, egri chiziqlar bilan chegaralangan figuralar yuzalarini, hatto tomonlari l va m to‘g‘ri chiziqlarga parallel bo‘lmagan to‘g‘ri to‘rtburchaklarni yuzalarini ham hisoblay olmaymiz.



163-chizma

Kattaliklarni aniqlanish sohasiga kesmalar to‘plami Ω misol bo‘la oladi. Bu to‘plamda $\alpha \sim \beta$ α va β kesmalarning kongruentligini, $\alpha=\beta\oplus\gamma$ esa α kesmani β va γ kesmalarga ajratuvchi nuqta mavjudligini bildiradi. O‘lchov amali har bir α kesmaga unga mos m (α) ni qo‘yadi. Bu bilan uzunlikni inivariantlik va additivlik xossalarini ifodalovchi a) va b) shartlar bajariladi. Endi kattaliklarni o‘lchashga ayrim – ayrim to‘xtalib o‘tamiz.

7.3. Miqdor tushunchasi.

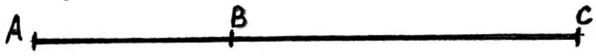
Matematikaning turmushga tadbiqi ko‘pchilik hollarda ikkita masalaga olib keladi: chekli to‘plam elementlarni sanash, miqdorlarni o‘lchash. Biz miqdorlarni o‘lchashga to‘xtalamiz. Bizga ma’lumki miqdorlar bilan o‘quvchilarni tanishishi boshlang‘ich maktabda yuz berib ular uzunlik, yuz, tezlik, narx, hajm kabi miqdorlar to‘g‘risida tassavvurlarga ega.

Miqdorlar- bu aniq ob’ekt yoki hodisalarning mahsus xossalaridir. Masalan, narsalarning oraliqqa ega bo‘lish xossasi uzunlik deyiladi. Narsa, buyumlar oraliqlari to‘g‘risida gapirganda uzunlik so‘zini ishlatamiz va bu miqdorlarni bir jinsli deymiz. Bir jinsli miqdorlar biror to‘plam elementlarini ayni bir xossasini ifodalaydi. Turli jinsli miqdorlar esa ob’ektlarning turli xossalarini ifodalaydi. Masalan. uzunlik, yuz, massa-turli jins miqdorlardir.

Miqdorlar quyidagi xossalarga ega:

1. Har qanday bir jinsli ikki miqdor taqqoslangach, bir jinsli miqdorlar uchun «katta», «kichik» va «teng» munosabatlari o‘rinli. Bir jinsli a va b miqdorlar uchun quyidagi munosobatlardan biri o‘rinli a>b, a<b, a=b; Masalan: uchburchak ikki tomoni uzunligining yig‘indisi,uchunchi tomoni uzunligidan katta, to‘g‘ri burchakli uchburchak istalgan katetining uzunligi gipotenuzasi uzunligidan kichik, parallelogramm qarama-qarshi tomonlari uzunliklari teng.

2. Bir jinsli miqdorlarni qo‘shish mumkin, qo‘shish natijasida yana bir jinsli miqdor hosil bo‘ladi. Boshqacha aytganda a va b bir jinsli miqdorlar uchun a+b miqdor bir jinsli aniqlanadi va y a va b miqdorlarning yig‘indisi deyiladi. Masalan, a-AB kesmaning, b-BC kesmaning uzunligi bo‘lsa, u holda (164-chizma) AC kesmaning uzunligi AB va BC kesmalar uzunliklarining yig‘indisiga teng bo‘ladi.

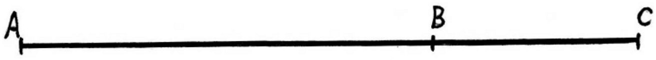


164-chizma

3. Miqdor haqiqiy songa ko‘paytiriladi, natijada shu jinsli miqdor hosil bo‘ladi. Boshqacha aytganda, har qanday a miqdor va har qanday nomanfiy haqiqiy son uchun yagona b=$x\cdot a$ miqdor mavjud: b miqdor a miqdorni x songa ko‘paytirish deyiladi. Masalan, AB kesmani a uzunligini x=3 ga ko‘paytirilsa, yangi AC kesmaning 3 a uzunligi hosil bo‘ladi (165-chizma).

165-chizma

4. Bir jinsli miqdorlar ayiriladi, bu erda miqdorlar ayirmasi miqdorlar yig‘indisi orqali aniqlanadi: a va b miqdorlarning ayirmasi deb, shunday c miqdorga aytiladiki, uning uchun a=b+c tenglik o‘rinli bo‘ladi. Masalan, a-AC kesmaning, b-AB kesmaning uzunligi bo‘lsa, BC kesmaning uzunligi AC va AB kesmalar uzunliklarining ayirmasiga teng bo‘ladi
(166-chizma)



166-chizma

5. Bir jinsli miqdorlar bo‘linadi, bunda bo‘linma bir jinsli miqdorlarni songa ko‘paytmasi orqali aniqlanadi. Bir jinsli a va b miqdorlarning bo‘linmasi deb, shunday x nomanfiy haqiqiy songa aytiladiki, uning uchun a=x·b tenglik o‘rinli bo‘ladi. x son a va b miqdorlarning nisbati deyiladi va $\frac{a}{b} = x$ ko‘rinishida yoziladi. Masalan, AC kesma uzunligining AB kesma uzunligiga nisbati 3 ga teng (167-chizma)

167-chizma

O‘z-o‘zini tekshirish uchun savollar.

1. Miqdorlar deganda nimani tushunasiz?
2. Miqdorlar qanday xossalarga ega?
3. Bir jinsli, turli jinsli miqdorlarni tushuntiring.

7.4.Miqdorlarni o‘lchash tushunchasi

Miqdorlarni taqqoslash bilan ularni teng emasligini aniqlashimiz mumkin. Ammo taqqoslash yo‘li bilan aniq natijaga ega bo‘linmaydi, shuning uchun miqdorlarni o‘lchash zarur. Miqdorlarni o‘lchash natijasida ma’lum sonli qiymatga ega bo‘linadi.

1-Ta’rif: Agar a miqdor berilgan va e miqdor birligi tanlab olingan bo‘lsa, u holda a miqdorni o‘lchash natijasida shunday x haqiqiy son topildiki, uning uchun a=x·e bo‘ladi. Bu x soni a miqdorning e miqdor birligida sonli qiymati deyiladi. Bu ta’rif simvolik ravishda quyidagicha yoziladi:

$x = m_e(a)$

Ta’rifga asosan istalgan miqdorni biror son bilan shu miqdor birligining ko‘paytmasi shaklida tasvirlash mumkin. Masalan, 15 sm=15·1sm: 25 kg=25·1 kg.Miqdor va miqdorni songa ko‘paytirish ta’rifidan foydalanib miqdorning bir birligidan boshqasiga o‘tishni ko‘rsatish mumkin.

Masalan, $\frac{2}{3}$ kg ni grammlarda ifodalash mumkin. $\frac{2}{3}\kappa g = \frac{2}{3}\cdot 1\kappa g$ va 1kg=1000g bo‘lgani uchun $\frac{2}{3}kg = \frac{2}{3}\bullet 1000g = \frac{2000}{3} = 666\frac{2}{3}g$ Shuning bilan birga miqdorlar ham ikki xil bo‘lishini eslatib o‘tish kifoya.

2-Ta’rif: Bitta sonli qiymat bilan to‘la aniqlanadigan miqdorlar skalyar miqdorlar deyiladi. Bunga uzunlik, yuz, hajm, massa misol bo‘laoladi.

3-Ta’rif: Son qiymati va yo‘nalishi bilan to‘la aniqlanadigan miqdorlar vektor miqdorlar deyiladi. Bunga tezlik, kuch, tezlanish, maydon kuchlanganligi kabilarni ko‘rsatish mumkin.

Biz musbat skalyar miqdorlarni qaraymiz. Skalyar miqdorlar quyidagi xossalarga ega:

1) Agar a va b miqdorlar e miqdor birligida o‘lchangan bo‘lsa, a va b miqdorlar orasidagi munosabat ularni sonli qiymatlari orasidagi munosobat kabi bo‘ladi.

$$a = b \Leftrightarrow m_e(a) = m_e(b)$$

$$a > b \Leftrightarrow m_e(a) > m_e(b)$$

$$a < b \Leftrightarrow m_e(a) < m_e(b)$$

Masalan, agar ikki kesma uzunligi AB=8sm,CD=5sm bo‘lsa, u holda AB kesma uzunligini CD kesma uzunligidan katta deymiz, chunki 8>5:

2) Agar a va b miqdorlar e miqdor birligida o‘lchangan bo‘lsa, u holda a+b yig‘indining sonli qiymatini topish uchun a va b miqdorlarning sonli qiymatlarini qo‘shish etarli. $a + в = c \Leftrightarrow m_e(a+b) = m_e(a) + m_e(b)$

Masalan: $a = 15m, \;\; b = 8m$ bo‘lsa, $a + b = 15m + 8m = (15+8)m = 23m:$

3) Agar a va b miqdorlar uchun b=xa tenglik o‘rinli bo‘lsa (a kattalik e kattalik birligida o‘lchangan, x-musbat haqiqiy son) u holda b miqdorning sonli qiymatini e birligida topish uchun x sonini m_e(a) soniga ko‘paytirish ertalik.

$$b = xa \Leftrightarrow m_e(b) = x \bullet m_e(a):$$

Masalan, agar b ning massasi a ning massasidan 5 marta katta, ya’ni b=5a va a=2 kg bo‘lsa, u holda $b = 5\bullet a = 5(2kg) = (5\bullet 2)kg = 10kg$ bo‘ladi.

O‘z-o‘zini tekshirish uchun savollar.

1. Miqdorning sonli qiymatiga ta’rif bering.
2. Skalyar va vektor miqdorlarga ta’rif bering.
3. Miqdorlar yig‘indisiga va miqdorni songa ko‘paytirishga ta’rif berib, misollar yordamida tushuntiring.

7.5. KESMA UZUNLIGI VA UNI O‘LCHASH

Ta’rif: Kesma uzunligi deb, ixtiyoriy kesma uchun quyidagicha aniqlangan musbat miqdorga aytiladi:

a) teng kesmalar teng uzunlikka ega:

b) agar kesma chekli sondagi kesmalardan iborat bo‘lsa, uning uzunligi bu kesmalar uzunliklarining yig‘indisiga teng.

Kesma uzunligi quyidagi xossalarga ega:

1) Tanlab olingan uzunlik birligida har qanday kesmaning uzunligi musbat haqiqiy son bilan ifodalanadi va har bir musbat haqiqiy son uchun uzunligi shu son bilan ifodalangan kesma mavjud.

Haqiqatan bu xossani to‘g‘riligini isbotlash uchun kesmalar to‘plamidan birorta e kesma tanlab olamiz va uni uzunlik birligi uchun qabul qilamiz. a kesmada uning oxirlaridan biridan birin-ketin e ga teng kesmalar qo‘yamiz. Agar e ga teng kesmalar n marta qo‘yilgan bo‘lsa va oxirgisining uchi a kesma uchi bilan ustma-ust tushsa, a kesma uzunligining qiymati n natural songa teng deyiladi va bunday yoziladi: a=ne. Agar e ga teng kesmalar n marta qo‘yilganda yana e kesmadan kichik kesma ortib qolgan bo‘lsa, bu kesmaga $e_1 = \frac{1}{10}e$ ga teng kesmalar qo‘yamiz.

Agar ular to‘laligicha n marta joylashsa, a=n,n_1e bo‘ladi va a kesma uzunligining qiymati chekli o‘nli kasr bo‘ladi. Agar e_1 kesma n_1 marta qo‘yilib, yana $e_1$dan kichik kesma ortib qolsa, unga $e_2 = \frac{1}{100}e$ ga teng kesmalar qo‘yiladi.

Agar bu jarayonni cheksiz marta davom ettirsak, a kesma uzunligining qiymati cheksiz o‘nli kasr bo‘ladi. Shunday qilib, tanlab olingan birlikda har qanday kesmaning uzunligi musbat haqiqiy son bilan ifodalanadi. Teskarisi ham to‘g‘ri: agar musbat haqiqiy son n,n_1, n_2… berilgan bo‘lsa uning taqribiy qiymatini malum aniqlikda olib va bu son yozuvidagi yasashlarni bajarsak, uzunligining son qiymati n,n_1,n_2 … kasr bo‘lgan kesma hosil qilamiz.

Bu bilan biz kesmalar uzunliklarining asosiy xossalaridan birini isbotladik. (Keyingi xossalarni isbotlashda kesmalar uzunliklari bir xil uzunlik birligi bilan o‘lchanadi deb hisoblaymiz).

2) Agar ikkita kesma teng bo‘lsa ular uzunliklarining son qiymatlari ham teng bo‘ladi, va aksincha: agar ikkita kesma uzunligining son qiymatlari teng bo‘lsa, kesmalarning o‘zlari ham teng bo‘ladi: $a = b \Leftrightarrow m_e(a) = m_e(b)$ haqiqatan, agar kesmalar teng bo‘lsa, ular uzunliklarini o‘lchashda e ga teng birlik kesmani va uning ulushini bir xil son marta qo‘yamiz, demak, teng kesmalar uzunliklarining qiymati bir xil bo‘ladi.

Aksincha: agar ikkita kesma uzunliklarining son qiymatlari teng bo‘lsa, ular teng kesmalarni yasash jarayonini ifodalaydi.

3) Agar berilgan kesma bir nechta kesmaning yig‘indisi bo‘lsa, uning uzunligini son qiymati bu kesmalar uzunliklari son qiymatlarining yig‘indisiga teng bo‘ladi: agar kesma uzunligining son qiymati bir nechta kesma uzunliklarining son qiymatlari yig‘indisiga teng bo‘lsa, kesmaning o‘zi bu kesmalar yig‘indisiga teng bo‘ladi: $c = a + b \Leftrightarrow m_e(c) = m_e(a) + m_e(b)$ a va b- kesmalar uzunliklari, $\frac{p}{n}$ va $\frac{q}{n}$ - lar mos ravishda ularning son qiymatlari ya’ni $a = \frac{p}{n}e$, $b = \frac{q}{n}e$ bo‘lsin.

$a + b$ yig‘indining qiymatini hosil qilish uchun $\frac{1}{n}e$ ga teng p ta kesma qo‘yamiz, keyin yana shunday kesmalardan q tasini qo‘yamiz. Natijada berilgan kesmalar yig‘indisining uzunligi $\frac{p}{n} + \frac{q}{n}$ son bilan ifodalanishini topamiz.

$$a+b=p\frac{1}{n}e+q\frac{1}{n}e=\frac{p}{n}e+\frac{q}{n}e=(\frac{p}{n}+\frac{q}{n})e$$

Aksincha: $\frac{p}{n}+\frac{q}{n}$ yig'indi $\frac{1}{n}e$ qismni p+q marta qo'shishni bildiradi, ya'ni

$(p+q)\frac{1}{n}e=p\frac{1}{n}e+q\frac{1}{n}e=\frac{p}{n}e+\frac{q}{n}e=a+b$ kesmani hosil qilamiz.

Demak, agar kesmalar uzunliklarini son qiymatlari qo'shilsa, ularga mos kesmalar ham qo'shilar ekan.

4) Agar a va b kesmalar uzunliklari $b=xa$ munosabatni qanoatlantirsa (bunda x -musbat haqiqiy son) b kesmaning e birlikdagi uzunligini topish uchun x sonni e birlikda o'lchangan a kesmaning son qiymatiga ko'paytirish etarli.

$b=xa \Leftrightarrow m_e(b)=x\cdot m_e(a)$ $b=xa$ va $a=\frac{p}{n}e$ bo'lsin.

U holda $b=x\cdot\frac{p}{n}e=\left(x\cdot\frac{p}{n}\right)e$, ya'ni $m_e(b)=x\cdot m_e(a)$. $x\cdot\frac{p}{n}$ ko'paytma e kesmani $x\cdot\frac{p}{n}$ marta qo'shish kerakligini bildiradi, ya'ni $\left(x\cdot\frac{p}{n}\right)e=x\cdot\frac{p}{n}e=xa=b$.

5) Uzunlik birligini almashtirganda yangi uzunlik birligi eski uzunlik birligidan necha marta kichik (katta) bo'lsa, uzunlikning son qiymati shuncha marta ortadi (kamayadi). Ikkita uzunlik birligi e va e_1 mavjud bo'lsin va $e_1=ke$, ya'ni yangi uzunlik e birlikda $\frac{p}{n}$ qiymatiga ega bo'lsa, ya'ni $a=\frac{p}{n}e$ bo'lsa, shu a kesma uzunligi e_1 birlikdagi son qiymati κ marta kamayadi: $a=\frac{p}{n}e=\frac{p}{n}\cdot\frac{1}{k}e_1=\frac{p}{nk}e_1$, $\frac{p}{nk}$ son esa $\frac{p}{n}$ sondan κ marta kichik. Kesmalar uzunliklarining isbotlangan xossalaridan yana quyidagilar kelib chiqadi:

a) $a>b \Leftrightarrow m_e(a)>m_e(b)$

b) $c=a-b \Leftrightarrow m_e(c)=m_e(a)-m_e(b)$

v) $x=a:b \Leftrightarrow x=m_e(a):m_e(b)$

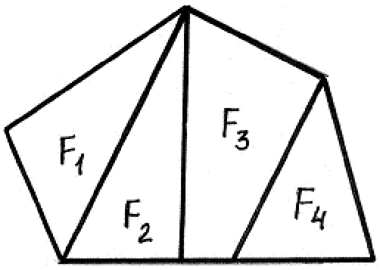
O'z – o'zini tekshirish uchun savollar.

1. Kesma uzunligi deb qanday miqdorga aytiladi?
2. Kesma uzunligi qanday xossalarga ega?
3. Uzunlik birligini almashtirganda kesma uzunligi son qiymatini o'zgarishini tushuntirib bering.

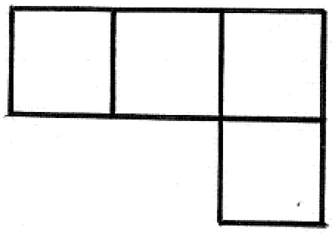
7.6. Figuraning yuzi va uni o'lchash.

Har bir talaba maktabgacha ta'lim muassasasidan boshlab, figuraning yuzi haqida tushunchaga ega. Ular xonaning yuzi, yer uchastkasining yuzi, bo'yash lozim bo'lgan pol sirt yuzi va boshqalar haqida eshitganlar va biladilar. Biz yer uchastkalari bir xil bo'lsa, ularning

yuzalari tengligini; katta uchastkaning yuzi katta bo‘lishini; uyning yuzi undagi xonalar yuzalarining yigindisiga tengligini bilamiz.
Geometrik figuralar turlicha tuzilganligi uchun yuz haqida gapirganda figuralaning alohida sinflari farq qilinadi. Masalan ko‘pburchak va chegaralangan qavariq figuralar yuzi, doira yuzi yoki aylanish jismlarining sirtlari sinflarini qarash mumkin. Biz faqat ko‘pburchak va chegaralangan yassi qavariq figuralar yuzlari haqida gapiramiz. Bunday figura boshqa figuralardan tuzilgan bo‘lishi mumkin. Masalan, 168-chizmada tasivrlangan F figura F_1, F_2, F_3 va F_4 figuralardan tuzilgan, bu figura F_1, F_2, F_3, F_4 figuraning birlashmasidan iborat va berilgan har qanday ikkita figura umumiy ichki nuqtaga ega emas.
Ta’rif: Figuraning yuzi deb har bir figura uchun quyidagicha aniqlangan nomanfiy miqdorga aytiladi:



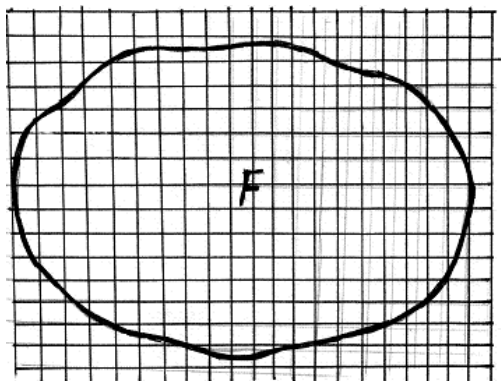
168-chizma



169-chizma

1) teng figuralar teng yuzalarga ega;
2) agar figura chekli sondagi figuralardan tuzilgan bo‘lsa, uning yuzi bu figuralar yuzalarining yig‘indisiga teng.
Ta’rifdan ko‘rinadiki, yuza ta’rifi kesma uzunligining ta’rifiga o‘xshash. yuz ham uzunlik tavsiflangan xossalar bilan tavsiflanganini, ammo ular turli to‘plamlarda: uzunlik-kesmalar to‘plamida, yuz - yassi figuralar to‘plamida berilganini ko‘ramiz. F figuraning yuzini $S(F)$ bilan belgilashni shartlashib olamiz.
Figuraning yuzini o‘lchash uchun yuz birligiga ega bo‘lish kerak. Odatda yuz birligi uchun tomoni birlik kesma e ga, ya’ni uzunlik birligi uchun tanlanib olingan kesmaga teng bo‘lgan kvadrat yuzi olinadi. Tomoni e bo‘lgan kvadratning yuzi e^2 bilan belgilanadi. Masalan, birlik kvadrat tomonining uzunligi sm bo‘lsa, uning yuzi sm^2 bo‘ladi. Yuzni o‘lchash berilgan figura yuzini birlik kvadrat yuzi e^2 bilan taqqoslashdan iborat. Bu taqqoslashning natijasi $S(F) = xe^2$ ni qanoatlantiruvchi x sondan iborat. x son tanlab olingan birlikda yuzning son qiymati deyiladi. Masalan, agar yuz birligi sm^2 bo‘lsa, u holda 169-chizmada keltirilgan figuraning yuzi $4sm^2$ ga teng bo‘ladi.
Figuralarning yuzlarini o‘lchashning quyidagi usullarini ko‘rib o‘tamiz:
1) yuzni paletka yordamida o‘lchash (paletka – shaffof materialga chizilgan kvadratlar to‘ri). Yuzi o‘lchanayotgan F figura ustiga tamoni e bo‘lgan kvadratlar to‘ri tashlangan bo‘lsin (170- chizma). U holda bu figuraga nisbatan kvadratlarning ikki turini ko‘rsatish mumkin:

a) butunlay F figura ichida yotadigan kvadratlar
b) bir qismi F figura ichida, bir qismi uning tashqarisida yotadigan va figura konturi orqali o‘tadigan kvadratlar.



170- chizma.

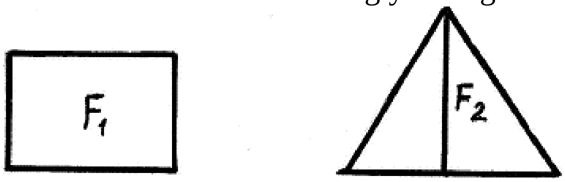
Birinchi tur kvadratlar m ta, ikkinchi tur kvadratlar n ta bo‘lsin. U holda, F figuraning yuzi $me^2 < S(F) < (m+n)e^2$ shartni qanoatlantiradi. $m - S(F)$ ning kami bilan olingan, $m+n$ ortig‘i bilan olingan taqribiy qiymati. Bundan ko‘rinadiki, paletka yordamida F figuraning yuzini katta aniqlikda o‘lchay olmaymiz. Aniqroq natija olish uchun paletka kvadratlarini maydaroq qilish kerak, buning uchun dastlabki kvadratlarni maydaroq kvadratlarga bo‘lish kerak.

Masalan, tomoni $e_1 = \frac{1}{10}e$ bo‘lgan kvadratlar to‘rini yasash mumkin. Natijada F figura yuzining kattaroq aniqlikdagi boshqa taqribiy qiymatini hosil qilamiz. Bu jarayonni davom ettirish mumkin. Tubandagicha savol tug‘iladi: o‘lchashning kami bilan olingan har qanday taqribiy qiymatidan katta va ortig‘i bilan olingan har qanday taqribiy qiymatidan kichik bo‘lgan hamda o‘lchanayotgan yuzning aniq son qiymati bo‘la oladigan haqiqiy son mavjudmi? Matematikada yuzning tanlab olingan birligida har qanday yuz uchun bunday sonning mavjudligi va uning yagonaligi, yuz ta’rifida ko‘rsatilgan 1 va 2 xossalarini qanoatlantirishi isbotlangan.

Paletka yordamida figuralarning yuzini o‘lchash usulini qo‘llanish ancha noqulay, chunki, u uzundan – uzoq ishdir, shuning uchun uncha katta bo‘lmagan figuralarning yuzigina paletka yordamida topiladi.

Figuralarning yuzi figuralarga tegishli bo‘lgan tomonlar, balandliklar va boshqa kesmalarni o‘lchash bilan topila boshlandi. Masalan, to‘g‘ri to‘rtburchak yuzining son qiymatini topish uchun uning tomonlari uzunliklarining son qiymatlari ko‘paytiriladi. Bu yuz ta’rifi va uni o‘lchash mohiyatidan yuzlarni taqqoslashning va ular ustida amallar bajarishning ma’lum qoidalari kelib chiqadi. Ulardan ba’zilarini ko‘rib chiqamiz.

a) Agar figuralar teng bo‘lsa, u holda ular yuzlarining son qiymatlari teng bo‘ladi (bir xil yuz birligida). Yuzlari teng bo‘lgan figuralar teng yuzli (tengdosh) figuralar deyiladi. Masalan, 171-chizmadagi to‘g‘ri to‘rtburchak va uchburchak teng yuzli figuralardir.



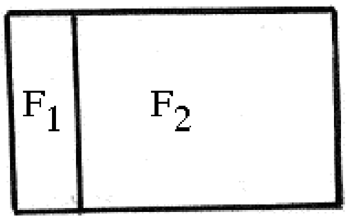
171-chizma.

b) agar F figura $F_1, F_2, \ldots, F_n$ figuralardan tuzilgan bo‘lsa, F figura yuzining son qiymati $F_1, F_2, \ldots, F_n$ figuralar yuzlari son qiymatlari yig‘indisiga teng bo‘ladi (bir xil yuz birligida).

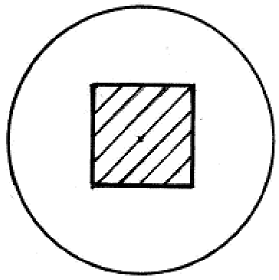
Masalan, 172-chizmada tasvirlangan F figuraning yuzini topaylik. Bu figurani ikkita F_1 va F_2 to‘g‘ri to‘rtburchakdan tuzilgan deb qarash mumkin (ℓ to‘g‘ri chiziq F figurani bunday shaklga ajratgan). U holda

$$S(F) = S(F_1) + S(F_2) = 3sm \cdot 1sm + 3sm \cdot 4sm = 3sm^2 + 12sm^2 = (3+12)sm^2 = 15sm^2$$

v) Yuz birligini almashtirganda yangi birlik eski birliklardan qancha kichik (katta) bo‘lsa, yuzining son qiymati shuncha marta ortadi (kamayadi).



172-chizma.



173-chizma.

Masalan, $5sm^2$ ni kvadrat detsimetrlarda ifodalaylik. Ma’lumki, $1sm^2 = 0,01dm^2$ demak,

$$5sm^2 = 5 \cdot 1sm^2 = 5 \cdot (0,01dm^2) = (5 \cdot 0,01)dm^2 = 0,05dm^2.$$

Boshlang‘ich sinflarda o‘quvchilar figralarning yuzlari haqidagi dastlabki tushunchalar bilan tanishadilar. Figuraning yuzi haqidagi tasavvur figuralarni taqqoslash asosida vujudga keladi: kvadrat doira ichida yotgani uchun (173-chizma) uning yuzi doiraning yuzidan kichik, doiraning yuzi kvadratning yuzidan katta.

O‘quvchilar figuralar yuzlarini paletka yordamida o‘lchash bilan tanishadilar. Aytaylik, $m - F$ figura ichida butunlay yotgan kvadratlar soni, $n - F$ figura konturi o‘tadigan kvadratlar soni bo‘lsin. U holda $me^2 < S(F) < (m+n)e^2$ F figura yuzining taqribiy qiymatini topish uchun yuzning qiymatlarini qo‘shish va bu yig‘indini teng 2 ga bo‘lish etarli:

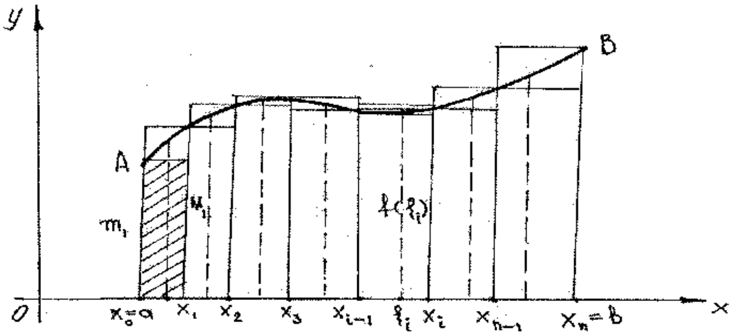
$$S(F) \approx \frac{m+(m+n)}{2} e^2.$$

Shakl almashtirishdan keyin topamiz:

$$S(F) \approx \frac{m+(m+n)}{2} e^2 = \frac{2m+n}{2} e^2 = (m + \frac{n}{2})e^2.$$

Oxirgi ifoda F figura yuzining taqribiy qiymati F figuraning ichida butunlay yotadigan kvadratlar soni bilan shu figura konturi o‘tadigan kvadratlar soni yarmining yig‘indisiga tengligini bildiradi.

2. Figuraning yuzlari aniq integral yordamida ham topiladi (bu usul boshlang‘ich sinflarda qo‘llanilmaydi). Masalan: Yuqoridan $y = f(x)$ funksiya grafigi, chapdan $x = a$ o‘ngdan $x = b$ ordinatalar, pastdan (ox) abssissa o‘qi bilan chegaralangan egri chiziqli trapetsiyaning yuzi $S = \int_a^b f(x)dx$ aniq integral bilan hisoblanadi (bunda $y = f(x)$ funksiya musbat $[a,b]$ kesmada uzluksiz, 174-chizma).



174-chizma

O'z-o'zini tekshirish uchun savollar.

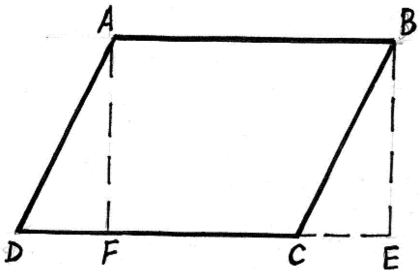
1. Qanday miqdorga figuraning yuzi deyiladi?
2. Figuraning yuzini o'lchashning usullarini tushuntiring.
3. Figura yuzini paletka yordamida o'lchaganda yuzani hisoblash formulasini keltirib chiqaring.

7.7. To‘g‘ri to‘rtburchak va boshqa figuralarning yuzini topish.

Yuzalarni o‘lchash mavzusida to‘g‘ri to‘rtburchakning yuzi $S = ab$ formula bilan hisoblanishini ko‘rsatgan edik. Endi ba’zi sodda figuralarning yuzlarini topishni ko‘ramiz.

1. ***Parallelogrammning yuzi.***

ABCD berilgan parallelogramm bo‘lsin (175-chizma). Parallelogramm to‘g‘ri to‘rtburchak bo‘lmaganidan, uning burchaklaridan bir o‘tkir burchak bo‘ladi, Masalan A yoki B o‘tkir burchak bo‘lsin. Aytaylik B o‘tkir burchak bo‘lsin. B uchidan DC to‘g‘ri chiziqqa BE perpendikulyar o‘tkazamiz. U holda ABED trapetsiyaning yuzi ABCD parallelogramm bilan BCE uchburchak yuzining yig‘indisiga teng bo‘ladi. A uchidan DC to‘g‘ri chiziqqa AF perpendikulyar tushiramiz. U holda ABED trapetsiyaning yuzi ABEF to‘g‘ri to‘rtburchakning yuzi bilan ADF uchburchak yuzining yig‘indisiga teng bo‘ladi. To‘g‘ri burchakli ADF va BCE uchburchaklar teng, demak, ularning yuzlari teng. Bundan esa ABCD parallelogrammning yuzi ABEF to‘rtburchakning yuziga, ya’ni AB*AF ga teng degan natija chiqadi. AF esa parallelogrammning balandligi.

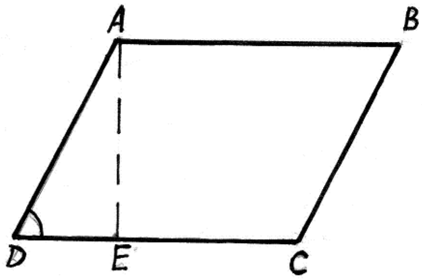


175-chizma

$$S_{ABCD} = AB \times AF$$

Demak, parallelogrammning yuzi uning tomonini shu tomonga tushirilgan balandligiga ko‘paytirilganiga teng.

Misol: Agar parallelogrammning tomonlari 2m va 3m, burchaklaridan biri esa 70^0 ga teng bo‘lsa, uning yuzini toping (176-chizma).



176-chizma

Ber: AB=CD=3m

AD=BC=2m

$\angle$ADC=$\angle$ABC= 70^0

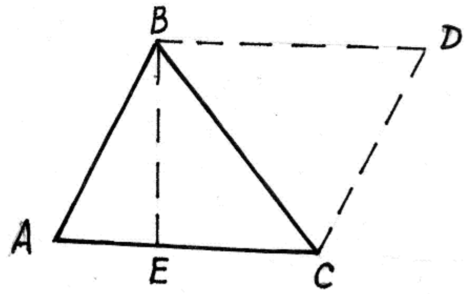
T.K S_{ABCD} =?

Yechish: ΔADE dan: $\dfrac{AE}{AD} = \sin 70^0$; AE=2 sin 70^0;

$$S_{ABCD} = DC \cdot AE = 3 \cdot 2 \cdot \sin 70^0 = 6 \cdot \sin 70^0 \approx 6 \cdot 0{,}9397 \approx 5{,}64 m^2$$

2. Uchburchakning yuzi.

ABC uchburchak berilgan (177-chizma) bo‘lsin. Bu uchburchakni chizmada ko‘rsatilganidek ABCD parallelogramga to‘ldiramiz. Parallelogramning yuzi ABC va BDC uchburchaklar yuzlarining yig‘indisiga teng. Bu uchburchaklar teng bo‘lgani uchun (177-chizma) parallelogramning yuzi ABC uchburchak yuzining ikkilanganiga teng. Parallelogrammning AC tomoniga mos balandligi ABC uchburchakning AC tomoniga o‘tkazilgan balandligiga teng. Demak, uchburchakning yuzi uning tomoni bilan shu tomonga tushirilgan balandligi ko‘paytmasining yarmiga teng:



$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot BE$$

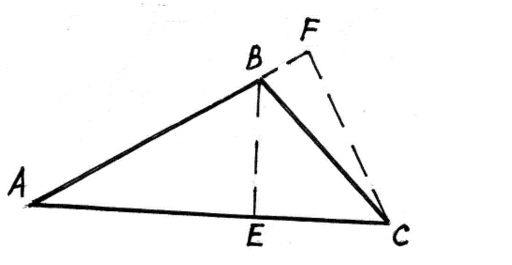
177-chizma

Misol: Tomonlari 8 sm va 4 sm bo’lgan uchburchakning shu tamonlariga balandliklar o’tkazilgan. 8sm li tomonga o‘tkazilgan balandlik 3 sm ga teng. 4sm li tomonga o‘tkazilgan balandlik qanchaga teng? (178-chizma)

Ber: AC=8sm

AB=4sm

BE=3sm



T.K CF=?

Yechish:

178-chizma

$$S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}\cdot AC\cdot BE \qquad (1)$$

$$S=\frac{1}{2}AB\cdot CF \qquad (2)$$

(1), (2) $\Rightarrow \dfrac{AC\cdot BE}{2}=\dfrac{AB\cdot CF}{2}$

$CF=\dfrac{AC\cdot BE}{AB}=\dfrac{8\cdot 3}{4}=6(sm)$

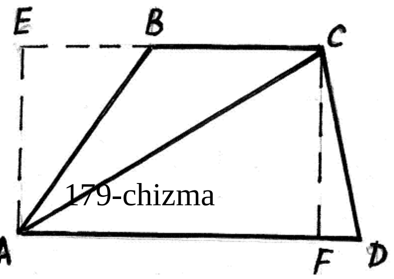
Uchburchak yuzini hisoblashning bu formulasidan tashqari quyidagi formulalari ham mavjud:

$S_{\Delta ABC}=\dfrac{1}{2}bc\sin\alpha$ (bunda α - b va c tomonlar orasidagi burchak)

$S_{\Delta ABC}=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ (bunda a, b va c tomonlar, p-yarim perimetr)

3.Trapetsiya yuzi.

ABCD berilgan trapetsiya bo‘lsin (179-chizma). AC diagonalni o‘tkazamiz.AC diagonal ABCD trapetsiyani ikkita ABC va ACD uchburchakka ajratadi.Trapetsiyaning yuzi shu uchburchaklar yuzlarining yig‘indisiga teng. Uchburchaklarni mos ravishda AE va CF balandliklarini o‘tkazamiz. U holda



179-chizma

$$S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}BC\cdot AE \qquad S_{\Delta ACD}=\frac{1}{2}AD\cdot CF$$

$$S_{ABCD}=\frac{1}{2}BC\cdot AE+\frac{1}{2}AD\cdot CF=\frac{(AD+BC)}{2}\cdot CF$$

Demak, trapetsiyaning yuzi, uning asoslari yig‘indisi yarmi bilan balandligi ko‘paytmasiga teng.

Misol: Teng yonli trapetsiyaning katta asosi 44m yon tomoni 17m va diagonali 39 m. Shu trapetsiyaning yuzini toping? (180-chizma)

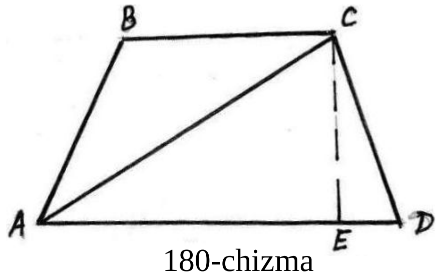
Ber: AD=44m

AB=CD=17m

AC=39m

T.K S_{ABCD} =?

Yechish: Belgilashlar kiritamiz.



180-chizma

ED=x; AE=44-x; CE=h

1) x ni topamiz: ΔACE va ΔCDElardan:

$$AC^2=AE^2+CE^2\,;CD^2=ED^2+CE^2$$

$$\left.\begin{array}{l}39^2=(44-x)^2+h^2\\17^2=x^2+h^2\end{array}\right\}\Rightarrow 39^2-(44-x)^2=17^2-x^2\Rightarrow 88x=704\Rightarrow x=8(m)$$

2) h ni topamiz: $h^2=17^2-x^2=225\Rightarrow h=15(m)$

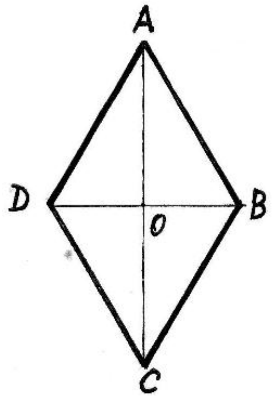
3) BC ni topamiz: BC=AD-2ED=44-16=28(m)

4) $S_{ABCD}=\dfrac{AD+BC}{2}\cdot h=\dfrac{44+28}{2}\cdot 15=540(m^2);$

Trapetsiyaning yuzini quyidagi formula bilan ham topish mumkin
$S=EF\cdot h$ (bunda EF - trapetsiyaning o‘rta chizig‘i, h -balandlik)

4. Rombning yuzi.

ABCD berilgan romb bo‘lsin. (181-chizma). AC va DB diagonallarini o‘tkazamiz. ABCD rombni ADB va DBC uchburchaklarga ajratamiz. ABCD rombning yuzi ADB va DBC uchburchaklar yuzlarining yig‘indisiga teng. AO va OC bu uchburchaklarning balandliklari. U holda $S_{\Delta ADB}=\dfrac{1}{2}DB\cdot AO;\qquad S_{\Delta DBC}=\dfrac{1}{2}DB\cdot OC;$

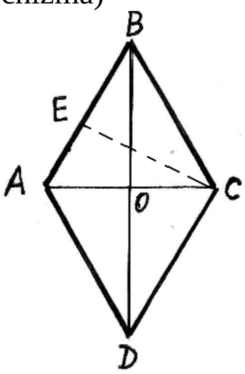


181-chizma

$$S_{ABCD}\ \frac{1}{2}DB\cdot AO+\frac{1}{2}DB\cdot OC=\frac{1}{2}DB(AO+OC)=\frac{1}{2}DB\cdot AC;$$

DB, AC rombning diagonallari. Dmak, rombning yuzi uning diagonallari ko‘paytmasining yarmiga teng ekan.

Masala: balandligi 10 sm o‘tkir burchagi esa 30^0 ga teng bo‘lgan rombning yuzini toping. (182-chizma)



182-chizma

Ber: $\angle$ABC=30^0
CE=h=10sm

t.k S_{ABCD}=?

Yechish: 1) ΔBEC dan $\dfrac{EC}{BC}=\sin 30^0$

$$BC=\frac{EC}{\sin 30^0}=\frac{10}{\frac{1}{2}}=20sm$$

Demak, AB=BC=CD=DA=20sm

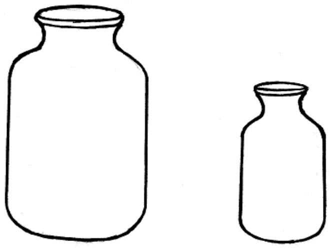
2) $S_{ABC}=\dfrac{1}{2}AB\cdot EC=\dfrac{1}{2}20\cdot 10=100sm^2$

3) $S_{ABCD}=2\cdot S_{ABC}=2\cdot 100=200sm^2$

7.8. Jismning hajmi va uni o‘lchash.

Biz turmushda shofyor mashinaga 65 kg suyuq gaz yoki 50 l benzin quygan yoki idishning hajmi 28 kub dm ga teng ekan degan gaplarni eshitamiz. Bu birliklar esa idishning hajmini bildiradi. Ikkita idish suyuqlik bilan to‘ldirilgan bo‘lsin (183-chizma). Ularning birinchisini m kg, ikkinchisini esa n kg suyuqlik bilan to‘ldirish mumkin.

Bunda $\frac{m}{n}$ soni birinchi idish ikkinchi idishdan necha marta katta ekanini ko‘rsatadi. Mana shu songa birinchi idishning hajmi deyiladi. Bunda ikkinchi idish o‘lchov birligi hisoblanadi.



183 – chizma.

Hajm tushunchasining bu ta’rifdan uning quyidagi xossalari kelib chiqadi:

1) har bir idish ma’lum musbat hajmga ega;

2) teng idishlarni hajmlari teng;

3) agar bir idish ikki qismga ajralsa, u idishning hajmi qismlar hajmlari yig‘indisiga teng.

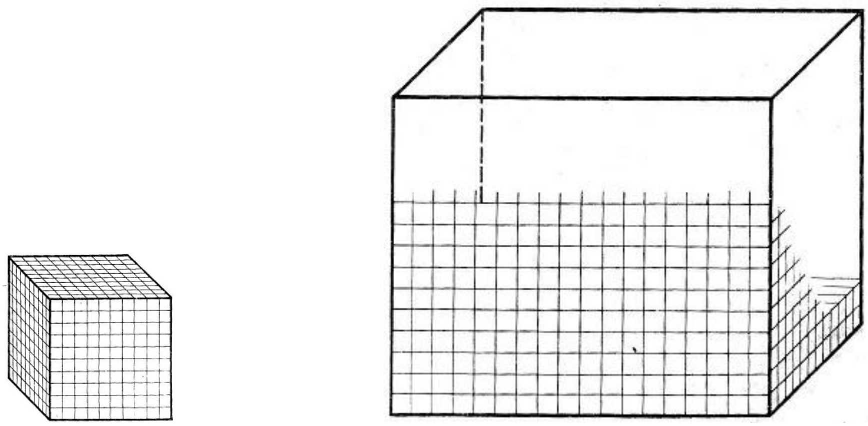
Bu ta’rifga ko‘ra jismni hajmini bilish uchun uni suyuqlik bilan to‘ldirish kerak bo‘ladi. Amaliyotda esa buni teskarisini qilishga to‘g‘ri keladi. Boshqacha aytganda, idishni suyuqlik bilan to‘ldirmasdan, uni to‘ldirish uchun zarur bo‘lgan suyuqlik miqdorini bilish talab qilinadi. Agar idish hajmi ma’lum bo‘lsa, idish hajmini birlik hajmini to‘ldirish uchun zarur bo‘lgan suyuqlik miqdoriga ko‘paytirib, suyuqlik miqdorini topgan bo‘lar edik. Berilgan jismning hajmi qanday topiladi? Agar jismni chekli miqdordagi tetroedrlarga, ya’ni uch burchakli muntazam piramidalarga ajratish mumkin bo‘lsa, bu jismni oddiy jism deb ataladi. Oddiy jismlarning hajmini hisoblashda, hajmning yuqoridagi xossalariga asoslaniladi, ya’ni:

1) har bir oddiy jism berilgan o‘lchov birligida ma’lum hajmga ega;

2) teng jismlarning hajmlari teng;

3) agar oddiy jism bir nechta oddiy jismga ajratilsa, bu jismning hajmi uning qismlari hajmlrining yig‘indisiga teng.

Oddiy jismlarni hajmlarini hisoblashni jumladan, to‘g‘ri burchakli parallelepipedning hajmini hisoblashdan boshlaymiz.



184 – chizma.

184-chizmada hajm o‘lchovi birligi bo‘lgan kub va hajmi o‘lchanishi lozim bo‘lgan to‘g‘ri burchakli parallelepiped tasvirlangan. Kubning qirrasi uzunlik birligi bo‘lib hizmat qiladi. Avval parallelepipedning a, b, c qirralarining uzunliklari chekli o‘nli kasrlar bilan ifodalangan hamda verguldan keyingi xonalar soni n dan oshmagan holni qarab chiqamiz. Kubning bitta uchidan chiqqan qirralarini 10^n ta teng bo‘lakka ajratamiz va bo‘linish nuqtalaridan bu qirralarga perpendikular tekisliklar o‘tkazamiz.

Bunda kub qirralari $\frac{1}{10^n}$ ga teng bo‘lgan $10^n \bullet 10^n \bullet 10^n = 10^{3n}$ ta kichik kubga ajraladi. Kichik kubning hajmini topamiz. Hajmning xossasiga ko‘ra katta kubning hajmi kichik kublar hajmlarning yig‘indisiga teng. Katta kubning hajmi birga tengligi, kichik kublar soni esa 10^{3n} ga tengligi uchun kichik kubning hajmi $\frac{1}{10^{3n}}$ ga teng.

$$\frac{a}{\frac{1}{10^n}} = a\cdot 10^n \qquad \frac{b}{\frac{1}{10^n}} = b\cdot 10^n \qquad \frac{c}{\frac{1}{10^n}} = c\cdot 10^n$$

sonlar butun sonlar bo‘lgani uchun parallelepipedning qirralarini $\frac{1}{10^n}$ ga teng bo‘lgan butun sondagi qismlarga ajratamiz. a qirrada ular $a \bullet 10^n$ ta, b kirrada $b \bullet 10^n$ ta, c qirrada $c \bullet 10^n$ ta bo‘ladi. Qirralarga perpendikular tekisliklar o‘tkazamiz. Bunda biz parallelepipedning tomoni $\frac{1}{10^n}$ bo‘lgan kichik kublarga ajratamiz.

Ularning soni $\alpha 10^n \bullet b10^n \bullet c10^n = \alpha bc10^{3n}$ ga teng.

Parallelepipedning hajmi undagi kichik kublar hajmlarining yig‘indisiga teng. Kichik kubning hajmi $\frac{1}{10^{3n}}$ ga, ularning soni esa $\alpha bc \bullet 10^{3n}$ ga tengligi uchun parallelepipedning hajmi $abc \bullet 10^{3n} \bullet \frac{1}{10^{3n}} = abc$ ga teng.

Endi a,b,c qirralardan kamida bittasi cheksiz o‘nli kasr bilan ifodalanadigan holni qarab chiqamiz. A sonining n ta o‘nli raqamiga kami bilan va ortig‘i bilan olingan taqribiy qiymatlarini a_1 ba a_2 bilan belgilaymiz, b va c sonlarning shunday aniqlikdagi taqribiy qiymatlarini mos ravishda b_1 va b_2, c_1 va c_2 bilan belgilaymiz.

Qirralari a_1, b_1, c_1, bo‘lgan parallelepipedning hajmi berilgan parallelepipednikidan kichik, chunki uni berilgan parallelepipedning ichiga joylashtirish mumkin. Isbotlanganga ko‘ra qirralari a_1, b_1, c_1 bo‘lgan parallelepipedning hajmi esa $a_1.b_1.c_1$ga teng, qirralari a_2,b_2,c_2 bo‘lgan parallelepipedning hajmi $a_2.b_2.c_2$ ga teng. Shunday qilib, berilgan parallelepipedning hajmi $a_1.\ b_1.\ c_1$ va $a_2.\ b_2.\ c_2$ orasida yotadi. $a_1.b_1.c_1$ va $a_2.\ b_2.\ c_2$ miqdorlar esa a b c sonining oldindan berilgan aniqlikdagi taqribiy qiymati bo‘lgani uchun, n etarlicha katta bo‘lganda V=abc bo‘ladi. Shunday qilib,to‘g‘ri burchakli parallelepipedning hajmi V=abc formula bo‘yicha hisoblanadi.

O‘z-o‘zini tekshirish uchun savollar.

1. Jismning hajmi deganda nimani tushunasiz?
2. Hajm tushunchasining xossalarini aytib bering.
3. To‘g‘ri burchakli parallelepiped hajmini o‘lchashni tushuntirib bering.

7.9. Jismning massasi va uni o‘lchash.

Massa-asosiy fizik kattaliklardan biridir. Jismning massasi tushunchasi og‘irlik-kuch tushunchasi bilan chambarchas bog‘langan.

Og‘irlik kuchi ta’sirida jism Erga tortiladi. Jismning og‘irligi jismning o‘zigagina bog‘liq emas. Shuning uchun u turli kengliklarda turlicha: masalan, qutbda jism ekvatordagiga qaraganda 0,5%

og‘ir. Og‘irlik kuchi bunday o‘zgaruvchanligiga qaramay quyidagi xususiyatga ega: har qanday sharoitda ham ikki jism og‘irligining nisbati bir xildir. Jismning og‘irligini boshqa jism og‘irligi bilan taqqoslab o‘lchashda jismning yangi xossasi kelib chiqadi,bu xossa massa deb ataladi.

Faraz qilaylik, richagli tarozining bir pallasiga birorta a jism, ikkinchi pallasiga b jism qo‘yilgan bo‘lsin. Bunda quyidagi hollar bo‘lishi mumkin:

1) tarozining ikkinchi pallasi tushib, birinchisi shunday ko‘tariladiki, ular barobar bo‘lib qoladilar, bu holda tarozi muvozanatda, a va b jismlar bir xil massaga ega deyiladi:

2) tarozining ikkinchi pallasi birinchi pallasidan balandligicha qoladi: bu holda a jismning massasi *b* jismning massasidan katta deyiladi:

3) tarozining ikkinchi pallasi tushdi, birinchi pallasi ko‘tarildi va ikkinchidan baland bo‘ladi: bu holda a jismning massasi b jismning massasidan kichik deyiladi.

Shuni eslatamizki, agar jism ekvatorda richagli tarozida o‘lchansa, keyin jism va tarozi toshlari qutbga olib borib o‘lchansa, o‘sha natijani beradi, chunki jism ham, tarozi toshlari ham o‘z og‘irliklarini bir xil o‘zgartiradi. Shunday qilib, jismning massasi o‘zgarmaydi,u qaerda bo‘lmasin,uning massasi doim bir xil bo‘ladi.

Matematik nuqtai nazardan massa-quyidagi xossalarga ega bo‘lgan musbat miqdor:

1) tarozida bir-birini muvozanatlovchi jismlarning massasi bir xil;

2) jismlar bir-birlari bilan birlashtirilsa, massalar qo‘shiladi: birgalikda olingan bir nechta jismning massasi ular massalarining yigindisiga teng.

Bu ta’rifni uzunlik va yuz uchun berilgan ta’riflar bilan solishtirsak, massa ham uzunlik va yuz ega bo‘lgan xossalarga ega bo‘lishini, biroq u fizik jismlar to‘plamida berilganligini ko‘ramiz. Massalar tarozilar yordamida quyidagicha o‘lchanadi: massasi birlik sifatida qabul qilinadigan e jism tanlab olinadi (bunda massaning ulushlarini ham olish mumkin). Tarozining bir pallasiga massasi o‘lchanayotgan jism qo‘yiladi, ikkinchi pallasiga massa birligi qilib olingan jismlar, ya’ni tarozi toshlari qo‘yiladi. Bu toshlar tarozi pallalari muvozanatga kelguncha qo‘yiladi. O‘lchash natijasida berilgan jismning massasining qabul qilingan birligidagi son qiymatini jism massasining taqribiy qiymati deb qarash kerak (masalan, 3kg 125 g bo‘lsa, 3125 soni).

Uzunlikdagiga o‘xshash massalarni taqqoslash, ular ustida amallar bajarish massalarning son qiymatlarini taqqoslashga va ular ustida amallar bajarishga keltiriladi.

Massaning asosiy birligi-kilogramm. Bu asosiy birlikdan massaning boshqa birliklari: gramm, tonna va boshqalar hosil bo‘ladi.

7.10. VAQT ORALIQLARI VA ULARNI O‘LCHASH.

Vaqt tushunchasi uzunlik va massa tushunchalariga nisbatan ancha murakkabdir. Kundalik hayotda vaqt bir voqeani ikkinchi voqeadan ajratib turadi. Matematika va fizikada vaqt skalyar kattalik (miqdor) sifatida qaraladi, chunki vaqt oraliqlari uzunlik, yuz, massalar xossalariga o‘xshash xossalarga ega.

Vaqt oraliqlarini taqqoslash mumkin. Masalan, bir xil yo‘lga velosipedchi engil avtamobilga qaraganda ko‘proq vaqt sarflaydi. Vaqt oraliqlarini qo‘shish mumkin. Masalan, oliygohlarda bitta ma’ruza o‘qish uchun ketgan vaqt maktabdagi ikki darsga ketgan vaqtga teng. Vaqt oraliqlarini ayirish, musbat haqiqiy songa ko‘paytirish mumkin. Vaqt oraliqlari o‘lchanadi. Vaqt oralig‘ini o‘lchash uchun vaqt birligi qabul qilingan.

Xalqaro sistemada bunday birlik qilib sekund olingan. Sekund bilan bir qatorda vaqtning boshqa birliklari; minut, soat, sutka, yil, hafta, oy, asr ishlatiladi. Yil va sutka birliklari tabiatdan olingan, soat, minut, sekund birliklarini kishilar o‘ylab topgan. Yil-Erning Quyosh atrofida aylanish vaqti. Sutka Erning o‘z o‘qi atrofida aylanish vaqti.

Yil taxminan $365\frac{1}{4}$ sutkaga teng. Lekin, kishilarning bir yilgi hayoti sutkalarning butun sonlaridan tuzilgan. Shuning uchun har yilga 6 soatdan qo‘shish o‘rniga har to‘rtinchi yilga butun sutka qo‘shiladi. Bu yil 366 kundan iborat bo‘lib, kabisa yili deyiladi.

O‘z-o‘zini tekshirish uchun savollar.

1.Jismning massasi deganda nimani tushunasiz?
2.Jismning massasi va og‘irligi orasidagi farq nimada?
3.Jism massasi xossalarini aytib bering?
4.Massa qanday o‘lchanadi?
5.Vaqt oraliqlari va ularni o‘lchashni tushuntirib bering?

Ilova

Birliklar sistemasining rivojlanish tarixi. Birliklarning xalqaro sistemasi.

Kishilik jamiyatni rivojlantirish bosqichida har xil miqdorlarni o‘lchash va o‘lchash ishlarini aniqroq bajarish kerakligini bilganlar. Aniq o‘lchashlarning asosi bo‘lib esa birliklarning aniq namunalari (etalonlari) xizmat qiladi. Namunalarning aniqligi esa mamlakat fan texnika va sanoati rivojlanishini ko‘rsatib, uning ilmiy-texnik potensialini belgilaydi.

Miqdorlar o‘lchov birliklarining rivojlanishi tarixi ham bir qancha davrni o‘z ichiga oladi. Eng qadimgi davrda uzunlik birligi bo‘lib, kishi tanasining qismlari olingan. Masalan, uzunlik o‘lchovi birligi sifatida kaft (bosh bormoqsiz to‘rtta barmoq kengligi), tirsak (tirsak uzunligi), fut (oyoq tagi kafti uzunligi), duym (katta barmoqning bir bo‘lagi uzunligi, 1 duym=2sm 5,4mm) va boshqalar.

Shu davrlarda yuz birligi sifatida quduq (bir quduq suvi bilan sug‘oriladigan maydon), qo‘sh yoki plug (qo‘sh yoki plug bilan bir kunda ishlov berilgan o‘rtacha maydon) va boshqalar olingan.

XIV-XVI asrlarda savdo-sotiqning rivojlanishi bilan miqdorlarning o‘lchashning ob’ektiv birliklari vujudga kela boshladi. Masalan, Angiliyada duym (uchta arpa donachasining uzunligi), fut (yonma-yon qo‘yilgan 64 ta arpa donachasining kengligi).

Massa birligi sifatida grant (boshoq massasi) va karat (dukkaklii o‘simlik turlaridan biri urug‘ining massasi) qabul qilingan. Miqdorlar o‘lchov birliklari rivojlanishining keyingi tarixida bir-biri bilan o‘zaro bog‘langan birliklar kiritildi.

Masalan, Rossiyada uzunlik birligi qilib milya, chaqirim (versta), sarjin va gaz (arshin) kiritildi. 3 gaz 1 sarjinga, 500 sarjin 1 chaqirimga, 7 chaqirim 1 milyaga teng (1dengiz milyasi 1852 m ga teng, 1geografik milya 7420m). Ammo miqdorlar birliklari orasidagi bog‘lanish ixtiyoriy bo‘lib, turli mamlakatlarda turlicha, hatto mamlakat ichidagi oblastlar ham o‘zlarining uzunlik, yuz, massa birliklariga ega bo‘lgan.

Bu esa sanoat va qishloq-xo‘jaligining rivojlanishiga to‘siq bo‘lgan, ilm-fan va savdo-sotiq rivojlanishiga halaqit bergan. XVIII asrga kelib Fransiyada birliklarning yangi sistemasi-Xalqaro sistemaning asosi bo‘lgan sistema vujudga keldi.

Bu sistemada uzunlikning asosiy birligi qilib metr («metr» so‘zi grekcha «metro» so‘zidan olingan bo‘lib, «o‘lchov» ni bildiradi)

-Parijdan o‘tadigan Er meridiani uzunligining 40 milliondan bir qismi qabul qilingan. Bundan tashqari yuz, hajm, massa birliklari qabul qilingan. Tomonining uzunligi 10 m bo‘lgan kvadratning yuzi 1 ar,qirrasining uzunligi 0,1 m bo‘lgan kub hajmiga teng suyuqlik yoki sachrovchi jismlar hajmi 1 litr: qirrasining uzunligi 0,01 m bo‘lgan kub ichidagi toza suv massasi-1 gramm deb qabul qilingan.

Shuning bilan qo‘shimcha yordamida hosil bo‘ladigan o‘lcham karralari va ulushli birliklar: mega (10^6), kilo (10^3), gekto (10^2), deka (10^1), detsi (10^{-1}), santi (10^{-2}), milli (10^{-3}) kiritildi.

Massa birligi uchun 1^0S haroratdagi 1 dm^3 suvning massasi 1 kilogramm deb qabul qilindi. Yuqoridagi miqdorlarning hamma birliklari uzunlik birligi metr bilan bog‘langani uchun miqdorlarning yangi sistemasi o‘lchovlarning metrik sistemasi nomini oldi. Shu davrda metr va kilogrammning platina etaloni tayyorlandi: metrni oxirlarida shtrixlar qo‘yilgan chizg‘ich, kilogrammni esa silindrik tarozi toshi ifodalaydi. Bu etalonlar Fransiyaning milliy arxiviga saqlash uchun berilgan. Ammo tez orada bu sistemaga ham o‘zgartirishlar kiritishga to‘g‘ri keldi. Bunga sabab meridian uzunligining etarlicha aniq hisoblanmagani sabab bo‘ldi. O‘lchovlarning metrik sistemasi darrov tan olinmadi. Rossiyada bu sistema 1899 yilda ishlatila boshladi.

XX asrning 50 yillariga kelib o‘lchovlarning metrik sistemasini to‘ldiruvchi va rivojlantiruvchi turli xil birliklar sistemasi vujudga keldi. Shu sababli yagona universal birlik sistemasini barpo qilish muammosi tug‘ildi.

1960 yilda o‘lchov va og‘irliqlarning XI bosh konferensiyasi xalqaro birliklar sistemasi (СИ) (ruscha talqini SI, “Xalqaro”, “ES-I” deb o‘qiladi) ni kiritishi bilan, bu muammo hal qilindi.

Butun dunyo uchun yagona hisoblangan bunday sistemaga bo‘lgan talab yuqori bo‘lgani uchun u qisqa vaqt ichida keng xalq ommasi orasida tan olindi va butun dunyoga tarqaldi. СИ sistemada ettita asosiy birlik (metr, kilogramm, sekund, amper, kelven, mol va kandela) va 2 ta qo‘shimcha birlik (radian va steradian) bor.

Ma’lumki, uzunlik birligi metr va massa birligi kilogramm o‘lchovlarning metrik sistemasida ham bor edi. Ular yangi sistemaga qanday o‘zgarishlar bilan kiritilgan? Metrning yangi ta’rifi kiritildi – u yassi elektromagnit to‘lqinining vakuumda (havosiz bo‘shliqda) sekundning $\frac{1}{299792458}$ qismida o‘tgan yo‘li sifatida qaraladi. Metrning bunday ta’riflanishiga o‘lchashlarning aniqligiga bo‘lgan talabning oshganligi va har qanday sharoitda ham o‘zgarishsiz qoladigan miqdor birligiga ega bo‘lishiga erishishdir.

Massa birligi kilogrammning ta’rifi o‘zgarmadi, kilogramm – 1889 yilda platina va iridiy aralashmasidan tayyorlangan silindr massasi. Bu etalon Fransiyaning Sevre shaharida o‘lchov va og‘irliklarning xalqaro byurosida saqlanadi. Xalqaro sistemaning uchinchi asosiy birligi vaqt birligi – sekunddir. 1960 yilgacha sekund Quyosh sutkasining $\frac{1}{86400}$ qismiga teng deb olingan, ya’ni sekund yerning o‘z o‘qi atrofida aylanishi bo‘yicha hisoblangan. Bunday hisoblashda bir sutkada 86400 sekund bo‘ladi, bu 1440 minut yoki 24 soatni tashkil qiladi. 1960 yilda o‘lchov va og‘irliklarning Bosh konferensiyasi yerning Quyosh atrofida orbita bo‘ylab harakatiga asoslanib, vaqtning yangi birligiga o‘tish haqida qaror qabul qildi. Sekund yilning $\frac{1}{31556925{,}9747}$ qismi sifatida olindi.

Ammo bu ham olimlarni qanoatlantirmadi. 1967 yilda sekundni boshqacha hisoblash taklif qilindi. “Sekund seziy-133 atomi asosiy holatining ikki o‘ta nozik sathlar orasidagi o‘tishga mos bo‘lgan nurlanish davridan 9192631770 marta katta vaqtga teng” deb olindi.

Umuman olganda fan va texnikaning rivojlanishi muntazam ravishda miqdorlar birliklarining ta’riflariga tuzatishlar kiritib turadi.Amalda hamma uzunliklarni metr bilan, massalarni kilogramm bilan, vaqtni sekund bilan o‘lchashga to‘g‘ri kelavermaydi.

Shuning uchun asosiy birliklardan ularga karrali va ulushli bo‘lgan yangi birliklar hosil qilinadi. Karrali birliklar asosiy birliklardan 10, 10^2, 10^3, 10^6, 10^9, 10^{12}, 10^{15},10^{18} marta katta, ulushli birliklar asosiy birliklarning 10^{-1}, 10^{-2}, 10^{-3}, 10^{-6}, 10^{-9},10^{-12},10^{-15}, 10^{-18}, qismiga teng. Birliklarning yangi nomlari “metr”, “gramm”, “sekund” lar va jadvalda ko‘rsatilgan old qo‘shimchalarni qo‘shish yordamida hosil qilinadi:

Old qo‘shim-chalar	**Old qo‘shim-chalarning belgilanishi**	**Ko‘paytuvchi**	**Old Qo‘shimchalar**	**Old qo‘shimchalarning belgilanishi**	**Ko‘pay-tuvchi**
Mega	M	10^6	Santi	s	10^{-2}
Kilo	k	10^3	Milli	m	10^{-3}
Gekto	g	10^2	Mikro	mk	10^{-6}
Deka	da	10	Nano	n	10^{-9}
Detsi	d	10^{-1}			

Masalan, kilometr-karrali birlik, $1км = 10^3 \bullet 1м = 1000м;$ millimetr-ulushli birlik, $1мм = 10^{-3} \bullet 1м = 0,0001m$ Umuman, uzunlik uchun karrali birlik kilometr (km), ulushli birliklar-santimetr (sm), millimetr (mm), mikrometr (mkm), nanometr (nm), massa uchun karrali birlik megogramm (mg), ulushli birliklar-gramm (g), milligram (mg), miqrogramm (mkg), vaqt uchun karrali birlik kilosekund (ks), ulushli birliklar-millisekund (ms), mikrosekund (mks), nanosekund (ns). Uzunlik, massa va vaqt orqali aniqlanadigan miqdorlar hosilaviy miqdor deyiladi. Ularning birliklari asosiysi bilan mos tushishi kerak. Ba'zi bir hosilaviy miqdorlarni va ularning birliklarini aytib o'tamiz:

1. Yuz. Yuzning birliklari-kvadrat metr (m^2), kvadrat kilometr (km^2), kvadrat detsimetr (dm^2), kvadrat santimetr (sm^2), kvadrat millimetr (mm^2).
2. Hajm, sig'im. Hajm birliklari-kub metr (m^3), kub millimetr (mm^3), litr (l), gektolitr (gl), millilitr (ml). SI da litr kub detsimetrning o'ziga xos boshqacha nomi sifatida qaraladi, ya'ni $1l=1dm^3$.
3. Tezlik. Tezlik birliklari-sekundiga metr (m/s), soatiga kilometr (km/soat), sekundiga santimetr (sm/s).

Mamlakatimizda ishlatiladigan miqdorlar birliklari, ular nomlari (atalishi), belgilanishi va qo'llanish qoidalari Davlat standarti tomonidan tayinlanadi. Bu standart esa birliklarning Halqaro sistemasiga asoslangan. Shuningdek, СИ dagi birliklardan tashqari birliklar gruppasi mavjud. Xususan, massa uchun tonna (t) birligini; vaqt uchun minut (min), soat, sutka, hafta, oy, yil, asr; yuz uchun gektar (ga); temperatura uchun selsiy gradus (^{0}C) kabi birliklarini ishlatishga ruxsat berilgan. Ammo massa uchun sentner, yuz uchun ar birliklar Davlat standartiga binoan qo'llanilmaydi. Miqdorlarning birliklari bilan bog'liq bo'lgan terminlarning to'g'ri qo'llanilishi qoidalari ham Davlat standartida tasdiqlangan.

Shuning bilan birga ayrim adabiyotlarda uchraydigan ba'zi bir o'lchov birliklarini talabalar bilib qo'ysa maqsadga muvofiq bo'lur edi:

Miskol – 4,1 – 4,4 gr.	Qarish – 20 sm.
Qadoq – 400 gr.	Arshin – 71,1 sm.
Nimcha – 2 kg.	Gaz – 70 – 90 sm.
Dinor - 4,8 kg.	Chaqrim - 1,5 km.
Pud – 16 kg	Tosh – 7-8 km.
Botmon – 20 kg.	Farsax – 8,5 – 9,5 km.
Tutam – 8 sm.	

O'z-o'zini tekshirish uchun savollar**.**

1. Qadimgi o'lchov birliklari to'g'risida (kaft, tirsak, fut. duym) gapirib bering.
2. XVIII asrda Fransiyada Xalqaro birliklar sistemasining vujudga kelishini so'zlab bering.
3. 1960 yilda birliklar sistemasi СИ ni qabul qilinishi va bu sistemada ettita asosiy birliklar haqida ma'lumotlar bering.
4. Asosiy va karrali birliklar qanday hosil qilinadi.
5. Hosilaviy miqdorlar va ularning birliklari to'g'risida nimalarni bilasiz?

VIII-Bob. EHTIMOLLAR NAZARIYASI ELEMENTLARI.

8.1.Tasodifiy hodisalar. Hodisaning ehtimoli.

8.1.1. Tasodifiy hodisalar va ular ustida amallar.

Ehtimollar nazariyasi tasodifiy hodisalarning qonuniyatlarini o'rganuvchi fandir.

Ma’lum shartlar to‘plami (majmuasi) bajarilganda ro‘y berishi (kelib chiqishi) yoki ro‘y bermasligi mumkin bo‘lgan har qanday hodisa (voqea) tasodifiy hodisa deb ataladi. Shartlar to‘plamini har gal amalga oshirilishi sinov (yoki tajriba) deyiladi.

Masalan, agar tajriba detal tayyorlashdan iborat bo‘lsa, detalning standartga mos kelishi hodisadir; agar tajriba tangani tashlashdan iborat bo‘lsa, uning gerbli tomonining tushishi hodisadir; agar tajriba o‘yin soqqasini (yoqlariga 1 dan 6 gacha raqamlar yozilgan qubik) tashlashdan iborat bo‘lsa, u holda to‘rtlik tushishi hodisadir.

Hodisalar alfavitning bosh harflari bilan belgilanadi: ya’ni *A,B,C,...*

A hodisaning nisbiy chastotasi yoki chastotasi deb, berilgan hodisaning ro‘y berish soni m ning berilgan hodisa har birida ro‘y berish yoki ro‘y bermasligi mumkin bo‘lgan bir xil sharoitda o‘tkazilgan tajribalarning umumiy n soniga nisbatiga aytiladi va $P*(A)$ bilan belgilanadi.

$$P^*(A)=\frac{m}{n}$$

Kuzatishlar tajribalar ko‘p marta takrorlanganda tasodifiy hodisaning $P*(A)$ chastotasi barqaror ekanini ko‘rsatadi. Masalan; Tanga tashlash bir xil sharoitda 3 seriyada amalga oshirilgan. Birinchi seriya 6(oltita) tashlashdan iborat bo‘lib, unda tangani gerbli tomoni tushishi 4 marta sodir bo‘lgan. Ikkinchi seriya 250 tashlashdan iborat bo‘lib, unda gerbli tomoni tushishi 139 ta marta sodir bo‘lgan. Uchinchi seriya 302 tashlashdan iborat bo‘lib, unda gerbli tomoni tushishi 155 marta sodir bo‘lgan. *A* hodisa tanganing gerbli tomoni tushishi. Seriyalarda tangani gerbli tomoni tushishi nisbiy chastotasi quyidagicha bo‘ladi.

I - seriyada $P^*(A)$= 0,66

II - seriyada $P^*(A)$= 0,55

III - seriyada $P^*(A)$= 0,51

Bundan ko‘rinadiki, seriyalarda tashlash soni qancha katta bo‘lsa, tushush chastotasi barqaror bo‘lib, 0,5 sonidan kam farq qiladi. Tajribalarning ko‘rsatishicha chastotaning 0,5 sonidan bu chetlanishi sinovlar sonining ortishi bilan kamayadi.

Ko‘pgina hollarda shunday R son mavjudki, A hodisaning ro‘y berishining nisbiy chastotasi, juda kam uchraydigan hollardan tashqari, sinovlar soni katta bo‘lganda shu R sonidan kam farq qiladi. Bu son hodisaning ehtimoli deyiladi.

Hodisaning ehtimoli qanchalik katta bo‘lsa, uning ro‘y berishi shunchalik mumkin bo‘ladi. *A* hodisaning ehtimolini *P(A)* bilan belgilaymiz (bu inglizcha probability so‘zidan olingan bo‘lib, bizningcha «ehtimol» degan ma’noni beradi). Tajribalar soni n cheksiz oshib borganda *A* hodisaning nisbiy chastotasi, shu hodisaning ro‘y berish ehtimoli *P* ga yaqinlashadi.

8.1.2. Hodisalar yig‘indisi, ko‘paytmasi.

A va *B* hodisalar yig‘indisi deb, *A* yoki *B* hodisalardan kamida bittasi ro‘y beradigan *A+B* hodisaga aytiladi.

A va B hodisalar ko'paytmasi deb, A va B hodisalar bir tajribada bir vaqtda yuz beradigan AB hodisaga aytiladi. Masalan, ikkita o'yin soqqasi tashlanadi. Birinchi soqqa tashlanganda 6 sonining chiqishi A hodisa, ikkinchi soqqa tashlanganda 6 sonini chiqishi B hodisa bo'lsin. U holda $A+B$ hodisa ikkita soqqa tashlanganda uning kamida bittasida 6 sonini chiqishini ifodalaydi. AB-hodisa esa ikkala soqqada ham 6 sonini chiqish hodisasidir.

8.1.3. Muqarrar, mumkin bo'lmagan, teng ehtimolli, birgalikda bo'lmagan hodisalar.

Tajriba natijasida biror shartlar to'plami bajarilganda albatta ro'y beradigan hodisa muqarrar hodisa deyiladi. Muqarrar hodisaning ehtimoli 1 ga teng va u E bilan belgilanadi. Tajriba natijasida shartlar to'plami bajarilganda mutlaqo ro'y bermaydigan hodisa mumkin bo'lmagan hodisa deyiladi. Bu hodisani ehtimoli nolga teng va 0 bilan belgilaymiz.

Tajribaning har bir natijasini ifodalovchi hodisa elementar hodisa deb ataladi. Elementar hodisalarga ajratish mumkin bo'lgan hodisa murakkab hodisa deyiladi. Agar bir necha hodisalardan istalgan birini tajriba natijasida ro'y berishi boshqalariga qaraganda kattaroq imkoniyatga ega deyishga asos bo'lmasa, bunday hodisalar teng imkoniyatli hodisalar deyiladi. Masalan, soqqa (yoqlari 1 dan 6 gacha turli sonlar yozilgan bir jinsli qub) tashlanganda uning yuqori yog'ida $l\left(1 \le l \le 6\right)$ sonning paydo bo'lishi tasodifiy hodisasini qaraylik.

Soqqamiz simmetrik bo'lgani uchun 1 dan 6 gacha bo'lgan sonlarning istalgan birining kelib chiqishi hodisalarining ro'y berishi - bir xil imkoniyatli hodisalar deyiladi. Tashlash soni n katta bo'lganda l-sonini - 1 dan 6 gacha har qanday sonlarning har birini ham soqqaning yuqori yog'ida paydo bo'lishi taqriban $\frac{n}{6}$ holda ko'rish mumkin. Bu tajriba bilan tasdiqlangan. Nisbiy chastota soni $P^* = \frac{1}{6}$ ga yaqin bo'ladi. Shuning uchun l sonining, shuningdek, 1 dan 6 gacha har qanday boshqa sonning ham yuqori yoqda paydo bo'lish ehtimoli $\frac{1}{6}$ ga teng deb hisoblanadi.

Agar A va B hodisalar bir paytda ro'y berishi mumkin bo'lmagan hodisalar bo'lsa, ular birgalikda bo'lmagan hodisalar deyiladi. Masalan, tangani tashlaganda bir vaqtda gerbli va raqamli tomonlarini tushish hodisalari birgalikda bo'lmagan hodisalar bo'ladi.

A hodisaga qarama-qarshi hodisa deb, A hodisaning ro'y bermasligidan iborat $\overline{A}$ hodisaga aytiladi. A va $\overline{A}$ hodisalar birgalikda bo'lmasligi o'z-o'zidan ravshan. Agar tajribada tasodifiy hodisalarning istalgan birining ro'y berishi mumkin bo'lib, bu hodisa bilan birgalikda emas, biror boshqa hodisaning ro'y berishi mumkin bo'lmasa, bu holda tasodifiy hodisalar to'liq gruppasini tashkil qiladi deb ataymiz. Teng imkoniyatli birgalikda bo'lmagan hodisalarning to'liq gruppasini qaraylik. Bunday hodisalarni hollar (yoki imkonlar) deb ataymiz.

Bunday gruppaning hodisasi, agar uning ro‘y berishi natijasida A hodisaning ro‘y berishi kelib chiqadigan bo‘lsa, A hodisaning ro‘y berishiga qulaylik tug‘diruvchi hodisalar deb ataladi.

Masalan, qutida 8 ta shar bo‘lib uning har biriga bittadan 1 dan 8 gacha bo‘lgan raqam yozilgan. 1,2,3,4 raqamli sharlar qizil, qolgan boshqa sharlar esa qora rangda. 1 raqamli sharning paydo bo‘lishi (shuningdek 2,3 va 4 raqamli sharning paydo bo‘lishi ham) qizil sharning paydo bo‘lishiga qulaylik tug‘diruvchi hodisadir. Qaralayotgan hol uchun ehtimolga boshqacha ta’rif berish mumkin.

Ta’rif. A hodisaning ehtimolli deb, A hodisaga qulaylik tug‘diruvchi hollar m sonining teng imkoniyatli, birgalikda bo‘lmagan hodisalar to‘liq gruppasini tashkil qiluvchi barcha mumkin bo‘lgan hollar n soniga nisbatiga aytiladi va simvolik ravishda quyidagicha yoziladi:

$$P(A) = P = \frac{m}{n} \qquad (1)$$

Bu ta’rif ehtimolning klassik ta’rifi deb ham yuritiladi. Ehtimolning ta’rifidan uning ushbu $0 \le P \le 1$ munosabatni qanoatlantirishi kelib chiqadi.

1-Misol. Qutida 36 ta olma bo‘lib, undan bitta olma olindi. 36 ta olmadan 9 tasi qizil olma. Qizil olmaning kelib chiqish ehtimolini toping.

Yechish. Agar qulaylik tug‘diruvchi hollar soni m=9 bo‘lsa, u holda qizil olma olib chiqish ehtimoli

$$P = \frac{9}{36} = \frac{1}{4} \quad \text{ga teng.}$$

2-Misol. Otishmada birinchi to‘pdan nishonga tegish ehtimoli $\frac{8}{10}$ ga, ikkinchi to‘pdan nishonga tegish ehtimoli esa $\frac{7}{10}$ ga teng. Ikkala to‘pdan bir vaqtda o‘q uzganda nishonga tegishi ehtimolini toping (To‘pdan o‘q uzganda hech bo‘lmaganda bitta o‘qning nishonga tegishi, nishonning shikastlanganligi hisoblanadi).

Yechish. Ehtimollar nazariyasining ko‘pgina masalalarini yechish "Qutilar sxemasi" masalasiga keltiriladi. Shuning uchun qutidan shar olish masalasiga umumlashgan masala deb qaraladi. Berilgan masala ham quyidagicha modellashtiriladi.

Ikki qutida 10 tadan shar bo‘lib, ular 1 dan 10 gacha nomerlangan. Birinchi quti ichida 8 ta qizil va ikkita qora shar bo‘lib, ikkinchida esa 7 ta qizil va uchta qora shar bor.

Har bir qutidan bittadan shar olinadi. Olingan ikkita shar ichida kamida bittasi qizil shar bo‘lishi ehtimoli qanday?

Birinchi qutida har bir shar ikkinchi qutidagi ixtiyoriy shar bilan birga olinishi mumkin bo‘lgani uchun barcha hollar soni 100 ta, ya’ni n=100.

Qulaylik tug‘diruvchi hollarni hisoblaymiz. Ikkinchi qutidagi ixtiyoriy shar bilan birgalikda birinchi qutidagi 8 ta qizil sharni ixtiyoriy olganda,olingan sharlar ichida eng kamida bitta qizil shar bo‘ladi. Bunday hollar $10 \times 8 = 80$ ta.

Birinchi qutidan ikkita qora sharning har birini ikkinchi qutidagi 7 ta qizil sharning har biri bilan birgalikda olinganda olingan sharlar orasida bitta qizil shar bo‘ladi. Bunday imkonlar $2\times 7=14$ ga teng. Shunday qilib, hammasi bo‘lib qulaylik tug‘diruvchi hollar m=80+14=94 ta. Olingan sharlar orasida kamida bitta qizil shar bo‘lish ehtimoli $P=\frac{m}{n}=\frac{94}{100}$ ga teng.

Nishonga shikast yetkazish ehtimoli ham shunga teng.

8.1.4. Hodisa ehtimolining geometrik ta’rifi.

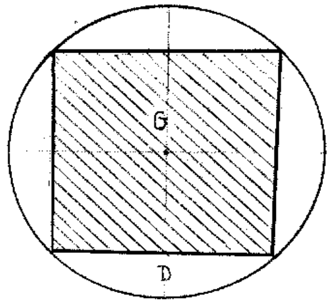
Faraz qilaylik, tekislikda biror *D* soha berilgan bo‘lsin. *D* soha boshqa biror G sohani o‘z ichiga olgan bo‘lsin, ya’ni $G\subset D$.

D sohaga tavakkaliga biror nuqta tashlansin. Bu nuqtaning *G* sohaga tushish ehtimolini qaraymiz. Bunda barcha elementar hodisalar *D* sohadan iborat. *D*-cheksiz to‘plam. Bunda biz klassik ta’rifdan foydalanamiz. *D* sohaga tashlangan nuqta sohaning istalgan qismiga tushishi mumkin. Bu nuqtaning *G* sohaga tushish ehtimoli *G* sohaning o‘lchoviga (uzunligi, hajmi) proporsional bo‘lib, *G* ning shakliga, uning *D* sohaning qaerda joylashishiga bog‘liq bo‘lmasin. Soha o‘lchamini mes orqali belgilasak, tavakkaliga tashlangan nuqtaning *G* sohaga tushish ehtimolligi

$$P=\frac{mes\,G}{mes\,D}$$ ga teng bo‘ladi.

1-Misol. R radiusli doiraga nuqta tavakkaliga tashlangan. Tashlangan *A* nuqtaning doiraga ichki chizilgan kvadrat ichiga tushishi ehtimolligini toping.

Yechish. *S(G)*-kvadratning yuzi, *S(D)*-doiraning yuzi bo‘lsin (185-chizma). A-nuqtaning kvatdratga tushishi hodisasi. U holda



185-chizma

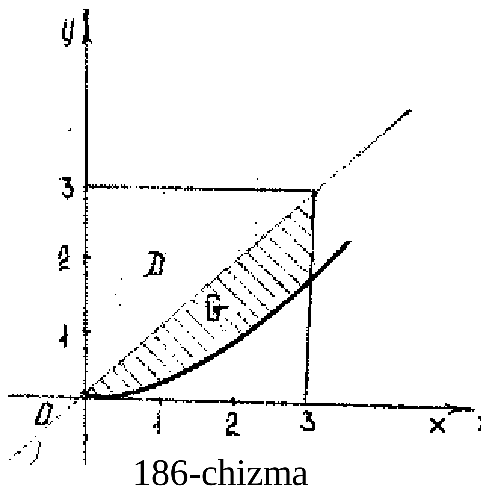
$$P(A)=\frac{S(G)}{S(D)}=\frac{2R^2}{\pi R^2}=\frac{2}{\pi}=0,636; \qquad P(A)=0,636$$

2-Misol. [0;3] kesmada tavakkaliga ikkita *x* va *y* sonlari tanlangan. Bu sonlar $x^2\le 6y\le 6x$ tengsizlikni qanoatlantirishi ehtimolligini toping.

Yechish. (*x;y*) nuqtaning koordinatalari:

$$\begin{cases}0\le x\le 3\\ 0\le y\le 3\end{cases}$$

tengsizliklar sistemasini qanoatlantiradi. Bu - *(x,y)* nuqta tomoni 3 ga teng kvadrat nuqtalari to‘plamidan tavakkaliga tanlanishini bildiradi.



186-chizma

Bizni qiziqtirayotgan *A* hodisa tanlanadigan *(x,y)* nuqta shtrixlangan figuraga tegishli bo‘lgan holda ro‘y beradi (186-chizma). Bu figura koordinatalari $x^2 \le 6y \le 6x$ tengsizlikni qanoatlantiradigan nuqtalarning to‘plami izlanayotgan ehtimollik shtrixlangan figura yuzining kvadrat yuziga nisbatiga teng, ya’ni

$$P(A) = \frac{\int_0^3 \left(x - \frac{1}{6}x^2\right)dx}{9} = \frac{\left.\left(\frac{x^2}{2} - \frac{1}{6}\frac{x^2}{3}\right)\right|_0^3}{9} = \frac{\frac{9}{2} - \frac{27}{18}}{9} = \frac{\frac{54}{18}}{9} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$$

O‘z-o‘zini tekshirish uchun savollar.

1. Ehtimol nima?
2. Hodisa ehtimolining klassik ta’rifini keltiring.
3. Muqarrar, mumkin bo‘lmagan, teng ehtimolli hodisalar deganda nimani tushunasiz?
4. Hodisalar yig‘indisi va ko‘paytmasini ta’rifini keltiring.
5. Birgalikda va birgalikda bo‘lmagan hodisalarni misollar yordamida tushuntiring.
6. A hodisaga qarama-qarshi hodisa deganda nimani tushunasiz?
7. Hodisa ehtimolining geometrik ta’rifini misollar yordamida tushuntirib bering.

8.2.Ehtimollar nazariyasining asosiy teoremasi

8.2.1.Ehtimollarni qo‘shish teoremasi.

Ta’rif. *A* va *B* hodisalar yig‘indisi deb bu hodisalardan kamida bittasining ro‘y berishidan iborat bo‘lgan *C* hodisaga aytiladi. Biz birgalikda bo‘lmagan *A* va *B* hodisalar yig‘indisining ehtimolini qaraymiz. *P(A)* va *P(B)* mos ravishda ularning ehtimollari bo‘lsin.

1-Teorema. Ikkita birgalikda bo‘lmagan *A* va *B* hodisalar yig‘indisining ehtimoli shu hodisalar ehtimollarining yig‘indisiga teng:

$$P(A+B) = P(A) + P(B)$$

Isboti: Hodisa ehtimolining klassik ta’rifiga ko‘ra, aytaylik, tajribalar natijasi n ta elementar hodisalar bo‘lib, bulardan m_1 tasi A hodisaga, m_2 tasi esa *B* hodisani ro‘y berishiga qulaylik tug‘dirsin. U holda

$$P(A) = \frac{m_1}{n}; \qquad P(B) = \frac{m_2}{n} \tag{1}$$

bo‘ladi.

Teorema shartiga ko‘ra *A* va *B* hodisalar birgalikda emas. Shunga ko‘ra yo *A* hodisa, yoki *B* hodisa ro‘y berishiga qulaylik tug‘diruvchi hodisalar soni $m_1 + m_2$ ga teng.

Demak $A+B$ hodisaning ehtimoli $P(A+B)=\frac{m_1+m_2}{n}$ bo‘ladi.

Agar $P(A+B)=\frac{m_1+m_2}{n}=\frac{m_1}{n}+\frac{m_2}{n}$ bo‘lsa, u holda (1) ga asosan tubandagiga ega bo‘lamiz. $P(A+B) = P(A) + P(B);$

Natija. A hodisaga qarama-qarshi $\overline{A}$ hodisaning ehtimoli $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$ ...(2) ga teng.

1-misol. Qutida 25 ta shar bor. Ulardan 8 tasi qizil, 6 tasi oq, 11 tasi sariq. Tavakkaliga olingan sharni rangli shar bo‘lish ehtimolini toping. (Rangli shar chiqishi deganda yo qizil shar yoki sariq shar chiqishi tushuniladi).

Yechish. Qizil shar chiqish hodisasini A, sariq shar chiqish hodisasini B bilan belgilaylik. U holda ehtimolning klassik ta’rifiga asosan $P(A) =\frac{8}{25};$ $P(B) = \frac{11}{25}$; bo‘ladi. $A+B$ hodisa rangli shar chiqishi hodisasi A va B hodisalar birgalikda emas. Shuning uchun 1-teoremaga ko‘ra $P(A+B)=P(A)+P(B);$

Demak, izlangan ehtimol: $P(A+B) = \frac{8}{25} + \frac{11}{25} = \frac{19}{25};$

2-Teorema. Juft-jufti bilan birgalikda bo‘lmagan $A_1, A_2, \dots, A_n$ hodisalar uchun

$P(A_1 + A_2 + \dots + A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n)$ munosabat o‘rinli.

Agar $A_1, A_2, \dots, A_n$ hodisalar, hodisalarning to‘la gruppasini tashkil qilsa, u holda $P(A_1)+P(A_2)+\dots+P(A_n)=1$ bo‘ladi.

Endi birgalikda bo‘lgan hodisalar uchun qo‘shish teoremasini qaraymiz (ikkita hodisaning birini ro‘y berishi ikkinchisini ro‘y berishini inkor etmaydigan hodisalar).

3-Teorema. Ikkita birgalikda bo‘lgan A va B hodisadan hech bo‘lmaganda birining ro‘y berish ehtimoli hodisalar ehtimollari yig‘indisidan ularning birgalikda ro‘y berish hodisasi ehtimolining ayirmasiga teng bo‘ladi.

$$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB);$$

Bu teorema ikkitadan ortiq hodisalar uchun ham o‘rinli. (Teoremani isbot qilish talabalarga mustaqil ish sifatida topshiriladi).

2-misol. Ikki mergan bittadan o‘q uzdi. Birinchi merganni nishonga tekkizish (A hodisa) ehtimoli 0,8 ga, ikkinchisiniki (B hodisa) 0,9 ga teng bo‘lsa, merganlardan aqalli bittasining nishonga tekkizganligi ehtimoli topilsin.

Yechish. Masala shartiga asosan $P(A)=0,8$, $P(B)=0,9$. Birgalikda bo‘lgan hodisalar uchun ehtimollarni qo‘shish teoremasiga asosan

$$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(A)\cdot P(B) =0,8+0,9-0,8\cdot 0,9 = 1,7-0,72 = 0,98$$

8.2.2. Erkli hodisalar. Ehtimollarni ko‘paytirish teoremasi.

Agar ikkita A va B hodisalardan birining ro‘y berishi ikkinchisining ehtimolini o‘zgartirmasa, boshqacha aytganda, ikkinchisining ro‘y berish yoki bermasligiga bog‘liq bo‘lmasa, u holda bu hodisalar erkli hodisalar deyiladi. Bu mavzuda faqatgina birgalikda bo‘lgan hodisalar haqida fikr yuritiladi, chunki birgalikda bo‘lmagan hodisalarning birgalikda ro‘y berish (ko‘paytmasini) ehtimoli nolga teng.

A va B hodisalar erkli hodisalar bo‘lib, ularning mos ehtimollari $P(A)$ va $P(B)$ bo‘lsin.

Teorema. Ikkita erkli A va B hodisaning birgalikda ro‘y berish ehtimoli shu hodisalarning ehtimollari ko‘paytmasiga teng:

$$P(AB) = P(A)\cdot P(B);$$

Isboti. Teorema shartiga ko‘ra A va B erkli hodisalar. Shu sababli har bir hodisani sodir bo‘lishida alohida tajribalar o‘tkazilgan bo‘lsin. Tajriba natijasida n ta elementar hodisaga ega bo‘laylik. Bulardan n_1 tasi A hodisaga qulaylik tug‘dirsin.

Tajriba natijasida m ta elementar hodisaga ega bo‘laylik. Bulardan m_1 tasi B hodisaga qulaylik tug‘dirsin. U holda,

$$P(A)=\frac{n_1}{n}, \qquad P(B)=\frac{m_1}{m} \tag{1}$$

Tajriba natijasida ro‘y beradigan barcha elementar hodisalar soni nm ta bo‘ladi. Bulardan n_1m_1 tasi A va B hodisalarning birgalikda ro‘y berishiga qulaylik tug‘diradi.

Demak, $$P(AB)=\frac{n_1m_1}{nm} \tag{2}$$

(1),(2) => $$P(A\cdot B)=\frac{n_1}{n}\cdot\frac{m_1}{m}=P(A)\cdot P(B) \tag{3}$$

bo‘ladi. Bu teorema erkli hodisalar soni n ta bo‘lganda ham to‘g‘ri, aytaylik $A_1, A_2, \ldots, A_n$ birgalikda bog‘liq bo‘lmagan hodisalar bo‘lsin. U holda (3) ga asosan:

$$P(A_1\cdot A_2\cdot\ldots\cdot A_n)=P(A_1)\cdot P(A_2)\cdot\ldots\cdot P(A_n) \tag{4}$$

bo‘ladi.

1-Misol. Ikki qutining har birida 20 tadan detal bor. Birinchi qutida 16 ta, ikkinchi qutida 15 ta standart detal bor. Har bir qutidan tavakkaliga bittadan detal olinadi. Olingan detalning standart bo‘lish ehtimoli topilsin.

Yechish. Birinchi qutidan olingan detal standart detal bo‘lish hodisasini A, ikkinchi qutidan olingani standart detal bo‘lish hodisasini B deylik. U holda $P(A)=\frac{16}{20}=0{,}8;\ P(B)=\frac{15}{20}=0{,}75$ bo‘ladi.

Olingan ikkala detalning standart detal bo‘lishi hodisasi esa AB hodisa bo‘ladi.

A,B birgalikda bo‘lmagan hodisalardir. Shuning uchun (1)-teoremaga ko‘ra

$P(AB) = P(A)\cdot P(B) = 0{,}8\cdot 0{,}75=0{,}6;$ teng bo‘ladi.

2-Misol. Tangani o‘n marta tashlaganda gerbli tomon 10 marta tushish ehtimoli qancha?

Yechish. A_i hodisa *i*-tashlashda gerb tushishi bo‘lsin. Izlanayotgan ehtimol barcha A_i $(i=1,2,3,\ldots 10)$ hodisalar ko‘paytmasining ehtimolidir. A_i hodisalar esa birgalikda erkli bo‘lgani uchun, (4) formulani qo‘llab, quyidagiga egamiz:

$$P(A_1 \cdot A_2 \cdot \ldots \cdot A_{10}) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot \ldots \cdot P(A_{10})$$

Biroq istalgan *i* uchun $P(A_i) = 1/2$ shu sababli

$$P(A_1 \cdot A_2 \cdot \ldots \cdot A_{10}) = (1/2)^{10} = 1/1024 \approx 0{,}001$$

3-Misol. Ishchi bir-biriga bog‘liq bo‘lmagan holda ishlaydigan uchta stanokni boshqaradi. Bir soat mobaynida ishchining stanokka qarashi kerak bo‘lmaslik ehtimoli birinchi stanok uchun 0,7 ga, ikkinchi stanok uchun 0,9 ga, uchinchi stanok uchun esa 0,8 ga teng.

1) Bir soat mobaynida uchta stanokdan hech qaysisiga ishchining e’tibori kerak bo‘lmasligi ehtimoli *P* ni toping.

2) Bir soat mobaynida kamida bitta stanokka ishchining e’tibori zarur bo‘lmaslik ehtimolini toping.

Yechish. 1) Izlanayotgan ehtimolini (4) formula bo‘yicha topamiz:

$$P = 0{,}9 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}7 = 0{,}504$$

2) Bir soat mobaynida uchala stanokka ishchining e’tibor berishi zarur bo‘lish ehtimoli birinchi stanok uchun $1-0{,}7=0{,}3$ ga, ikkinchi va uchinchi stanoklar uchun u mos ravishda $1-0{,}9=0{,}1$ va $1-0{,}8=0{,}2$ ga teng. U holda bir soat mobaynida uchala stanokka ishchining e’tibor berishi zarur bo‘lish ehtimoli (4) formulaga asosan $0{,}3 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}2=0{,}006$

Bir soat mobaynida uchala stanokka ishchining e’tibor berishi zarur bo‘lishidan iborat *A* hodisa kamida bitta stanokka ishchining e’tibor berishi zarur bo‘lmasligidan iborat hodisa $\overline{A}$ ga qarama - qarshidir. Shuning uchun 8.2.1 dagi (2) formulaga ko‘ra topamiz:

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 1-0{,}006 = 0{,}994;$$

8.2.3. Shartli ehtimol.

A va B hodisalar bog‘liq hodisalar bo‘lsin. U holda hodisalardan birining ro‘y berish ehtimoli ikkinchisining ro‘y berish yoki bermasligiga bog‘liq bo‘ladi. Shuning uchun bizni bir hodisaning ehtimoli qiziqtirayotgan bo‘lsa, u holda ikkinchi hodisaning ro‘y bergan yoki bermasligini bilishimiz muhimdir. Quyidagi misolni qaraymiz. Ikkita tanga tashlangan bo‘lsin. Ikkita gerb tushish ehtimolini topamiz.

Biz to‘liq gruppa tashkil etuvchi 4 ta teng ehtimolli juft-jufti bilan birgalikda bo‘lmagan ushbu natijalarga egamiz:

	1-tanga	2-tanga

1-natija	gerb	gerb
2-natija	gerb	raqam
3-natija	raqam	gerb
4-natija	raqam	raqam

Shunday qilib, P(gerb,gerb) = 1/4. Endi birinchi tanganda gerb tushgani ma'lum deb faraz qilaylik. Shundan so'ng gerb ikkala tanganda tushish ehtimoli qanday o'zgaradi?

Birinchi tangada gerb tushgani uchun endi to'liq gruppa ikkita teng ehtimolli birgalikda bo'lmagan natijalardan iborat bo'ladi:

	1-tanga	2-tanga
1-natija	gerb	gerb
2-natija	gerb	raqam

Bunda natijalardan faqat bittasi (gerb,gerb) hodisaga imkon yaratadi. Shuning uchun qilingan farazlarda P(gerb,gerb)=1/2.

Endi *A* orqali ikkita gerbning tushishini, *B* orqali esa gerbning birinchi tangada tushishini belgilaymiz.

B hodisa ro'y berganligi ma'lum bo'lganda A hodisa ehtimoli o'zgarishini qaraymiz.

A hodisaning B hodisa ro'y berdi degan shart ostidagi yangi ehtimolini $P_B(A)$ orqali belgilaymiz. Shunday qilib,

$$P(A)=1/4, \quad P_B(A)=1/2$$

A hodisaning *B* hodisa ro'y beradi degan shart ostidagi ehtimoli *A* hodisaning shartli ehtimoli deyiladi.

8.2.4. Bog'liq hodisalar. Ehtimollarni ko'paytirish teoremasi.

Ayrim masalalarni yechishda *A* va *B* hodisalarning ehtimollari ma'lum bo'lsa, bu hodisalar ko'paytmasining ehtimolini topishga to'g'ri keladi. **Teorema:** *A* va *B* hodisalar ko'paytmasining ehtimoli ulardan birining ehtimoli ikkinchisining birinchi hodisa ro'y berdi deb hisoblangan shartli ehtimoli ko'paytmasiga teng, ya'ni:

$$P(AB)=P(A)\cdot P_A(B) \tag{1}$$

Isboti. Bu munosabatning to'g'riligini ehtimolning klassik ta'rifiga asoslanib isbotlaymiz. Tajribalarning mumkin bo'lgan $E_1, E_2, \dots, E_N$ natijalari teng ehtimolli, juft-jufti bilan birgalikda bo'lmagan hodisalarning to'liq gruppasini tashkil qilsin va ulardan *A* hodisaga *K* ta natija qulaylik tug'dirsin hamda ana shu *K* ta natijadan *L* tasi *B* hodisaga qulaylik tug'dirsin. U holda, *A* va *B* hodisalarning ko'paytmasiga tajribalarning mumkin bo'lgan *K* ta natijasidan *L* tasi qulaylik tug'diradi.

Bundan esa quyidagiga egamiz:

$$P(A)=\frac{K}{N};\quad P(AB)=\frac{L}{N};\quad P_A(B)=\frac{L}{K}$$

Shunday qilib,

$$P(AB)=\frac{L}{N}=\frac{K}{N}\cdot\frac{L}{K}=P(A)\cdot P_A(B)$$

Shunga o‘xshash, A va B ning o‘rinlarini almashtirib, quyidagi munosabatga ega bo‘lamiz:

$$P(AB)=P(B)\cdot P_B(A) \tag{2}$$

(1) va (2) munosabatlardan

$$P(A)\cdot P_A(B)=P(B)\cdot P_B(A) \tag{3}$$

kelib chiqadi.

Ehtimollarni ko‘paytirish teoremasi istalgan chekli sondagi hodisalar uchun umumlashtiriladi. Masalan, uchta A_1, A_2, A_3 hodisa uchun quyidagiga ega bo‘lamiz:

$$P(A_1A_2A_3)=P[(A_1A_2)A_3]=P(A_1A_2)\cdot P_{A_1A_2}(A_3)=$$
$$=P(A_1)P_{A_1}(A_2)P_{A_1A_2}(A_3)$$

Umumiy holda

$$P(A_1A_2\ldots A_n)=P(A_1)\cdot P_{A_1}(A_2)\cdot P_{A_1A_2}(A_3)\cdot\ldots\cdot P_{A_1A_2\ldots A_{n-1}}(A_n) \tag{4}$$

Misol. 4 ta oq va 9 ta qora shar bo‘lgan qutidan ikkita shar olinadi. Olingan ikkala shar oq bo‘lish ehtimoli qancha?

Yechish. Bu masalani (1) formulani qo‘llab yechamiz. Ikkita sharni olish ularni ketma-ket olishga teng kuchlidir. Ikkita oq shar chiqishidan iborat hodisa A va B hodisalarni ko‘paytmasidan iborat bo‘ladi. (1) formulaga ko‘ra quyidagiga ega bo‘lamiz:

$P(AB)=P(A)P_A(B)$. Biroq, birinchi oq shar chiqqandan so‘ng qutida uchtasi oq bo‘lgan 12 ta shar qolgani uchun $P(A)=\frac{4}{13}$, $P_A(B)=\frac{3}{12}$. Demak, $P(AB)=(4/13)\cdot(3/12)=3/40$

8.2.5. To‘liq ehtimol formulasi.

Aytaylik, A hodisa to‘liq gruppa tashkil etuvchi n ta juft-jufti bilan birgalikda bo‘lmagan $H_1, H_2, \ldots, H_n$ hodisalarning bittasi va faqat bittasi bilan birgalikda ro‘y berishi mumkin bo‘lsin. U holda, agar A hodisa ro‘y bergan bo‘lsa, bu juft-jufti bilan birgalikda bo‘lmagan $AH_1, AH_2, \ldots, AH_n$ hodisalarning birortasi ro‘y berganini bildiradi. Demak,

$$A=AH_1+AH_2+\ldots+AH_n$$

U holda, ehtimollarni qo‘shish teoremasiga asosan tubandagiga ega bo‘lamiz:

$$P(A)=P(AH_1+AH_2+\ldots+AH_n)=P(AH_1)+P(AH_2)+\ldots+P(AH_n)$$

Biroq $P(AH_i)=P(H_i)\cdot P_{H_i}(A)$ $(i=1,2,\ldots n)$ shuning uchun:

$$P(A)=P(H_1)P_{H_1}(A)+P(H_2)P_{H_2}(A)+\ldots+P(H_n)P_{H_n}(A) \qquad (1)$$

Bu formula to‘liq ehtimol formulasi deyiladi. $H_1, H_2, \ldots, H_n$ hodisalar ko‘pincha "gipotezalar" deyiladi. Bu formuladan murakkab hodisalarning ehtimollarini hisoblashda foydalaniladi.

Misol. Omborga 360 ta mahsulot keltirildi. Bulardan: 300 tasi bir korxonada tayyorlangan bo‘lib, 250 tasi yaroqli mahsulot, 40 tasi ikkinchi korxonada tayyorlangan bo‘lib, 30 tasi yaroqli mahsulot, 20 tasi uchinchi korxonada tayyorlangan bo‘lib, 10 tasi yaroqli mahsulot.

Ombordan tavakkaliga olingan mahsulotning yaroqli bo‘lish ehtimoli topilsin.

Yechish. Tavakkaliga olingan mahsulot uchun quyidagi gipotezalar o‘rinli bo‘ladi:

H_1-mahsulotning 1-korxonada tayyorlangan bo‘lishi,

H_2-mahsulotning 2-korxonada tayyorlangan bo‘lishi,

H_3-mahsulotning 3-korxonada tayyorlangan bo‘lishi,

Ularning ehtimollari mos ravishda quyidagicha bo‘ladi:

$$P(H_1)=\frac{300}{360}=\frac{5}{6}; \quad P(H_2)=\frac{40}{360}=\frac{1}{9}; \quad P(H_3)=\frac{20}{360}=\frac{1}{18}$$

Agar olingan mahsulotning yaroqli bo‘lishini *A* hodisa deb belgilasak, u holda bu hodisaning turli gipotezalar shartlari ostidagi ehtimollari quyidagicha bo‘ladi:

$$P_{H_1}(A)=\frac{5}{6}; \quad P_{H_2}(A)=\frac{3}{4}; \quad P_{H_3}(A)=\frac{1}{2}$$

Yuqorida topilganlarni to‘la ehtimoli formulasiga qo‘yamiz:

$$P(A)=P(H_1)P_{H_1}(A)+P(H_2)P_{H_2}(A)+\ldots+P(H_n)P_{H_n}(A)=$$

$$=\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}+\frac{1}{9}\cdot\frac{3}{4}+\frac{1}{18}\cdot\frac{1}{2}=\frac{29}{36};$$

8.2.6. Bayes formulasi.

Biror tajriba o‘tkazilmoqda va uning o‘tish shartlari to‘g‘risida to‘liq gruppa tashkil etuvchi juft-juft bo‘lib, birgalikda bo‘lmagan *n* ta $H_1, H_2, \ldots, H_n$ gipotezalarni aytish mumkin bo‘lsin.

Gipotezalarning ehtimoli $P(H_i)$ ga teng. Tajriba natijasida *A* hodisa ro‘y berishi ham, ro‘y bermasligi ham mumkin bo‘lsin, shuning bilan birga agar tajriba gipoteza bajarilganda o‘tayotgan bo‘lsa,

$$P_{H_i}(A)=P_i \quad (i=1,2,\ldots,n)$$

ekani ma’lum bo‘lsin.

U holda, agar A hodisa ro‘y berganligi ma’lum bo‘lib qolsa, gipotezalarning ehtimollari qanday o‘zgaradi, degan savol paydo bo‘lishi mumkin. Boshqacha aytganda, bizni $P_A(H_i)$ ehtimollarning qiymatlari qiziqtiradi.

8.2.4 dagi (1) va (2) munosabatlar asosida quyidagiga egamiz:

$$P(H_i A) = P_A(H_i) \cdot P(A) = P_{H_i}(A) \cdot P(H_i) \quad (i = 1,2,\ldots,n)$$

bu yerdan:

$$P_A(H_i) = \frac{P_{H_i}(A) \cdot P(H_i)}{P(A)}$$

Biroq to‘liq ehtimol formulsiga ko‘ra:

$$P(A) = P(H_1)P_{H_1}(A) + P(H_2)P_{H_2}(A) + \ldots + P(H_n)P_{H_n}(A) = \sum_{k=1}^{n} P(H_k) \cdot P_k$$ Sh

uning uchun

$$P_A(H_i) = \frac{P(H_i)P_i}{\sum_{k=1}^{n} P(H_k)P_k} \qquad (i = 1,2,\ldots,n) \tag{1}$$

(1) formula Bayes formulasi deyiladi.

Misol. Omborxonaga 1600 dona tranzistor keltirildi. Ulardan birinchi zavodda 300 tasi, ikkinchi zavodda 560 tasi, uchinchi zavodda 740 tasi tayyorlangan. Tranzistorlarning yaroqsiz bo‘lib chiqishi, 1-zavod uchun 0,03 ga, 2-zavod uchun 0,02 ga va 3-zavod uchun 0,01 ga teng. Tavakkaliga olingan tranzistor yaroqsiz bo‘lib chiqdi. 1-zavodda tayyorlanganlik ehtimoli qancha?

Yechish. Tavakkaliga olingan tranzistor yaroqsiz bo‘lib chiqish hodisasi A bo‘lsin. H_1, H_2, H_3 esa tranzistor mos ravishda 1,2,3-zavodda tayyorlangan degan gipotezalar bo‘lsin. Bu gipotezalarning ehtimollari tubandagicha:

$$P(H_1) = 300/1600 = 0{,}19; \quad P(H_2) = 560/1600 = 0{,}35;$$

$$P(H_3) = 740/1600 = 0{,}46$$

Masala shartidan quyidagilar kelib chiqadi:

$$P_1 = P_{H_1}(A) = 0{,}03; \quad P_2 = P_{H_2}(A) = 0{,}02; \quad P_3 = P_{H_3}(A) = 0{,}01$$

$P_A(H_1)$ ni ya’ni, yaroqsiz tranzistorning 1-zavodda tayyorlanganlik ehtimolini topamiz. Bayes formulasiga ko‘ra quyidagiga egamiz:

$$P_A(H_1) = \frac{P(H_1) \cdot P_1}{P(H_1) \cdot P_1 + P(H_2) \cdot P_2 + P(H_3) \cdot P_3} =$$

$$= \frac{0{,}19 \cdot 0{,}03}{0{,}19 \cdot 0{,}03 + 0{,}35 \cdot 0{,}02 + 0{,}46 \cdot 0{,}01} \approx 0{,}329$$

Shunday qilib, tranzistor 1-zavodda tayyorlangan degan gipotezaning ehtimoli u yaroqsiz ekanligi ma’lum bo‘lib qolganidan keyin o‘zgartiriladi.

O‘z-o‘zini tekshirish uchun savollar.

1. Ikkita birgalikda bo‘lgan hodisalar ehtimollarini qo‘shish teoremasini aytib, isbotlab bering.
2. Ikkita birgalikda bo‘lmagan hodisalar ehtimollarini qo‘shish teoremasini aytib, isbotlab bering.
3. Erkli hodisalar ehtimollarinni ko‘paytirish teoremasini ta’riflang va isbotlab bering.
4. Hodisaning shartli ehtimolini misollar yordamida tushuntiring.
5. Bog‘liq hodisalar ehtimollarini ko‘paytirish teoremasini ta’riflang va isbotlab bering.
6. To‘liq ehtimol formulasini keltirib, misollar bilan tushuntiring.
7. Bayes formulasini yozib, misollar bilan tushuntiring.

8.4. Erkli tajribalar seriyasi
Ya. Bernulli formulasi

Biz ayrim yakka tartibda o‘tkaziladigan tajribalar bilan bog‘liq bo‘lgan tasodifiy hodisalarni o‘rganib keldik. Ammo amaliyotda, ehtimollar nazariyasida bir-biridan erkli ravishda o‘tkaziladigan bir xil tajribalar seriyasini o‘rganish katta ahamiyatga ega. Masalan, tangani tashlash, nishonga qarata o‘q uzish, mahsulotni nazorat uchun tanlash tajribalarini ko‘p marta va bir xil sharoitlarda o‘tkazish hollari erkli tajribalar seriyalariga misol bo‘la oladi. Bunday hollarda masala quyidagicha qo‘yiladi.

A tasodifiy hodisa biror tajribada P ehtimol bilan ro‘y bersin. Tajriba n marta takrorlanganda A hodisaning k marta ro‘y berish ehtimoli $P_n(k)$ qanday bo‘ladi? Bu savolga javob berish uchun, dastlab xususiy holdan boshlaymiz.
Aytaylik, $n=6$ va $k=3$ bo‘lsin, ya’ni har birida A hodisa P ehtimol bilan ro‘y beradigan 6 ta tajribadan iborat seriyani qaraymiz. Bu olti tajribada A hodisaning uch marta ro‘y berish ehtimoli $P_6(3)$ ni aniqlaymiz.

A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 va A_6 lar bilan A hodisaning mos ravishda ro‘y berishidan iborat hodisalarni belgilaymiz. U holda A hodisaning uch marta ro‘y berishidan iborat hodisa quyidagi birgalikda bo‘lmagan hodisalarning yig‘indisi kabi yozilishi mumkin:

$A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \overline{A}_4 \cap \overline{A}_5 \cap \overline{A}_6$ (A hodisa dastlabki 3 tajribada ro‘y berdi),

$\overline{A}_1 \cap \overline{A}_2 \cap \overline{A}_3 \cap A_4 \cap A_5 \cap A_6$ (A hodisa oxirgi 3ta tajribada ro‘y berdi).

Bu erda C_6^3 ta hodisa yozilgan, chunki A hodisaning olti tajribada uch marta ro‘y berishining ana shuncha usuli mavjuddir. Bu hodisalardan har birining ehtimoli ko‘paytirish teoremasiga ko‘ra $p^3(1-p)^3$ ga teng, ya’ni bir xildir.

Birgalikda bo‘lmagan hodisalar uchun qo‘shish teoremasiga ko‘ra

$$P_6(3) = C_6^3 p^3 (1-p)^3 \ldots \quad (1)$$

ni hosil qilamiz.

Endi umumiy holni qaraymiz. $A_t (i = 1,2,...,n)$ lar bilan A hodisaning mos ravishda i - tajribada ro‘y berishidan iborat hodisalarni belgilaymiz. U holda A

hodisaning k marta ro‘y berishidan iborat hodisa quyidagi birgalikda bo‘lmagan hodisalarning yig‘indisi ko‘rinishida ifoda qilinadi:

$A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_k \cap \overline{A}_{k+1} ... \cap \overline{A}_n$ - (A hodisa dastlabki k ta tajribada ro‘y berdi)

. . . .

$\overline{A}_1 \cap \overline{A}_2 \cap ... \cap \overline{A}_{n-k} \cap A_{n-k+1} \cap ... \cap A_n$ (A hodisa oxirgi k ta tajribada ro‘y berdi)

Bu erda C_n^k ta hodisa yozilishi kerak, chunki A hodisaning n ta tajribada k marta ro‘y berish usullari soni shunchadir.

Ko‘paytirish teoremasiga ko‘ra bu har bir hodisaning ehtimoli

$$p^k (1-p)^{n-k}$$

ga teng.

Birgalikda bo‘lmagan hodisalar uchun qo‘shish teoremasini qo‘llanib, ushbu formulani hosil qilamiz:

$$P_n(k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k} \qquad (2)$$

(2) formulaga Ya .Bernulli formulasi deyiladi.

1-misol. Nishonga qarata to‘rtta o‘q otishdi, bunda har bir o‘q otishda nishonga tegish ehtimoli 0,85 ga teng. Nishonning ikkita o‘q bilan shikastlanish ehtimoli qancha?

(2)-formulaga ko‘ra $n = 4, k = 2, p = 0,85$ deb quyidagini topamiz:

$$P_4(2) = C_4^2\, 0,85^2 \cdot 0,15^2 = 0,0975 \approx 0,1$$

2-misol. Radiopriyomnikda 6 ta lampa bor. O‘n yil davomida lampalarning ishga yaroqsiz bo‘lib qolish ehtimoli har qaysi lampa uchun $\frac{1}{7}$ ga teng. O‘n yil davomida barcha lampalarning kamida yarmisini almashtirilish ehtimoli qancha?

(2) formulani tadbik etib, o‘n yil davomida mos ravishda uchta, to‘rtta, beshta va oltita lampaning ishdan chiqish ehtimolini topamiz: $C_6^3\left(\frac{1}{7}\right)^3\left(\frac{6}{7}\right)^3$, $C_6^4\left(\frac{1}{7}\right)^4\left(\frac{6}{7}\right)^2$

$$, C_6^5\left(\frac{1}{7}\right)^5\left(\frac{6}{7}\right)^1 \text{ва}\, C_6^6\left(\frac{1}{7}\right)^6\left(\frac{6}{7}\right)^0$$

Birgalikda bo‘lmagan hodisalar uchun qo‘shish teoremasiga ko‘ra izlanayotgan ehtimol quyidagiga teng bo‘ladi:

$$C_6^3\left(\frac{1}{7}\right)^3\left(\frac{6}{7}\right)^3 + C_6^4\left(\frac{1}{7}\right)^4\left(\frac{6}{7}\right)^2 + C_6^5\left(\frac{1}{7}\right)^5\left(\frac{6}{7}\right)^1 + C_6^6\left(\frac{1}{7}\right)^6\left(\frac{6}{7}\right)^0 = \frac{4320+540+36+1}{117649} \approx 0,042.$$

(2) formulada $1 - p = q$ deb olinsa, u quyidagi ko‘rinishni oladi.

$$P_n(k) = C_n^k q^{n-k} p^k \; .... \; (3)$$

(3) formuladagi $C_n^k q^{n-k}$ $(q + px)^n$ ko‘phadning koeffitsientlarini ifodalaydi.

$(q+px)^n$ ko‘phadni N’yuton formulasini qo‘llab, x ning darajalari o‘sib borish tartibida joylashtirsak: $C_n^k q^{n-k}$ - koefitsientlarga ega bo‘lamiz. Boshqacha aytganda

$$(q+px)^n = \sum_{k=0}^{n} (C_n^k q^{n-k} p^k) x^k \qquad (4)$$

ko‘rinishdagi ayniyatga ega bo‘lamiz. Bu ayniyatga asosan $(q+px)^n$ ko‘phadni A hodisaning n ta erkli tajribadan iborat seriyada k marta ro‘y berishining ehtimollari uchun hosil qiluvchi ko‘phad deyiladi.

Barcha $P_n(k)\,(k=0,1,...,n)$ ehtimollarni topish zarur bo‘lgan hollarda hosil qiluvchi ko‘phadni yozib olish va uni N’yuton formulasi bo‘yicha yoyib chiqish qulaydir. Ko‘phadning koeffitsientlari izlanayotgan ehtimollarni beradi.

3-misol. A hodisa tajriba bir marta o‘tkazilganda $\frac{3}{4}$ ehtimol bilan ro‘y beradi. Tajriba 10 marta o‘tkaziladi. Bu tajribaning qanday natijasi eng katta ehtimolga ega bo‘ladi? U nimaga teng?

Yechish. Bu holda hosil qiluvchi ko‘phad $(\frac{1}{4}+\frac{3}{4}x)^{10}$ ko‘rinishga ega.

Shunday qilib, eng katta ehtimolga tajribaning quyidagi natijasi ega bo‘ladi: A hodisa 8 marta ro‘y beradi. Bunday natijaning ehtimoli:

$$P_{10}(8) = C_{10}^{8}(\frac{1}{4})^2(\frac{3}{4})^8 \approx 0,28$$

Tajribaning qolgan 10 natijasining har biri bundan kichik ehtimolga ega.

O‘z-o‘zini tekshirish uchun savollar.

1. Bernulli tenglamasini keltirib chiqaring.

8.4.Tasodifiy miqdorlar

8.4.1. Diskret va uzluksiz tasodifiy miqdorlar.

Biz tasodifiy hodisalar bo‘limida o‘yin soqqasini tashlaganda 1,2,3,4,5 va 6 sonlarini chiqishi, nishonga qarata beshta o‘q uzganda 0,1,2,3,4,5 qiymatlarni qabul qila oladigan tasodifiy hodisalarni qaradik. Bu tasodifiy hodisalarda chiqqan qiymatlarni oldindan aytib bo‘lmaydi, chunki u inobatga olib bo‘lmaydigan ko‘p tasodifiy sabablarga bog‘liqdir. Shu sababli yuqorida ko‘rsatilgan qiymatlar tasodifiy miqdorlardir.

1-Ta’rif. Tasodifiy miqdor deb, avvaldan noma’lum bo‘lgan va oldindan inobatga olib bo‘lmaydigan tasodifiy sabablarga bog‘liq bo‘lgan hamda tajriba natijasida bitta mumkin bo‘lgan qiymat qabul qiluvchi miqdorga aytiladi.

Misollar:

a) ma’lum partiyadagi brak qilingan mahsulotlar miqdori;

b) to‘pdan otilgan snaryadning uchib o‘tgan masofasi;

v) tug‘ilgan 100 ta chaqaloq ichida qiz bolalar soni;
g) yil davomida bitta sigirdan sogib olingan sut miqdori va boshqalar.

To‘pdan otilgan snaryadning uchib o‘tgan masofasini tasodifiy miqdor sifatida qarasak, bu masofa faqat nishonga oluvchi asbobning o‘rnatilishiga bog‘liq bo‘lmasdan, avvaldan hisobga olib bo‘lmaydigan bir qancha boshqa sabablarga (shamolning kuchi va yo‘nalishi, harorat va boshqalarga) ham bog‘liq.

Tasodifiy miqdor ikki xil bo‘ladi: diskret va uzluksiz tasodifiy miqdorlar.

2-Ta’rif. Diskret(uzlukli) tasodifiy miqdor deb, ayrim ajratilgan qiymatlarni ma’lum ehtimollar bilan qabul qiluvchi miqdorga aytiladi.

Masalan yuqoridagi a), b) misollarni diskret tasodifiy miqdorlar desa bo‘ladi. Diskret tasodifiy miqdorning mumkin bo‘lgan qiymatlari soni chekli yoki cheksiz bo‘lishi mumkin.

3-Ta’rif: Uzluksiz tasodifiy miqdor deb, chekli yoki cheksiz oraliqlardagi barcha qiymatlarni qabul qilishi mumkin bo‘lgan miqdorga aytiladi.
Ta’rifdan ko‘rinadiki, uzluksiz tasodifiy miqdorning mumkin bo‘lgan qiymatlar soni cheksizdir.

8.4.2. Diskret tasodifiy miqdorning taqsimot qonuni.

Tasodifiy miqdorni to‘la xarakterlash uchun, eng avvalo, u qabul qilishi mumkin bo‘lgan qiymatlarni bilish kerak. Ammo bu yetarli emas. Bundan tashqari, tasodifiy miqdor u yoki bu qiymatni qanday ehtimol bilan qabul qilishini ham bilish kerak.

Tasodifiy miqdorni X harfi bilan, uning qiymatlarini

$$x_1, x_2, \dots, x_n$$

harflari bilan, bu qiymatlar qabul qiladigan ehtimollarni mos ravishda

$$p_1, p_2, \dots, p_n$$

harflari bilan belgilaymiz.

Agar X tasodifiy miqdor uchun u qabul qilishi mumkin bo‘lgan barcha, $x_1, x_2, \dots, x_n$ qiymatlar va bu qiymatlar qabul qilinadigan barcha $p_1, p_2, \dots, p_n$ ehtimollar ma’lum bo‘lsa, X tasodifiy miqdorning taqsimot qonuni yoki, oddiy qilib, X miqdorning taqsimoti berilgan deyiladi.

Odatda, taqsimot qonunini quyidagi jadval ko‘rinishida yoziladi:

X	x_1	x_2	x_3	$\cdots$	x_k	$\cdots$	x_n
P	p_1	p_2	p_3	$\cdots$	p_k	$\cdots$	p_n

(1)

Jadvalning birinchi satrida tasodifiy miqdorning barcha qiymatlari, uning ostiga, ikkinchi satrga esa mos ehtimollar yoziladi.

Quyidagi n ta tasodifiy hodisani qaraymiz:

A_1 - tasodifiy miqdor X x_1 qiymatni qabul qildi,

A_2 - tasodifiy miqdor X x_2 qiymatni qabul qildi,

………………………………………………………

A_n - tasodifiy miqdor X x_n qiymatni qabul qildi,

$A_1, A_2, ..., A_n$ hodisalar birgalikda emas, chunki tasodifiy miqdor tajriba bir marta o‘tkazilganda $x_1, x_2, ..., x_n$ qiymatlardan faqat birini qabul qilishi mumkin. Shuningdek, $A_1, A_2, ..., A_n$ hodisalarning yig‘indisi muqarrar hodisadir, ya’ni

$$A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n = E$$

chunki tasodifiy miqdor $x_1, x_2, ..., x_n$ qiymatlardan birini albatta qabul qiladi.

Shu sababli birgalikda bo‘lmagan hodisalar uchun qo‘shish teoremasiga ko‘ra quyidagini hosil qilamiz:

$$P(A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n) = (E) = 1,$$

$$P(A_1) + P(A_2) + ... + P(A_n) = 1,$$

$$p_1 + p_2 + ... + p_n = 1$$

yoki qisqacha yozsak,

$$\sum_{k=1}^{n} p_k = 1 \qquad (2)$$

ya’ni X tasodifiy miqdorning taqsimot qonunini beradigan (1) jadvalning ikkinchi satrida turgan barcha sonlarning yig‘indisi birga teng bo‘lishi kerak.

1-misol. X tasodifiy miqdor o‘yin soqqasini tashlaganda tushgan ochkolar soni bo‘lsin. Taqsimot qonunini toping.

Yechish: X tasodifiy miqdor

$$x_1 = 1, x_2 = 2, ..., x_6 = 6$$

qiymatlarni

$$p_1 = p_2 = ... = p_6 = \frac{1}{6}$$

ehtimollar bilan qabul qiladi. Shuning uchun taqsimot qonuni ushbu jadval bilan beriladi:

X	1	2	3	4	5	6
P	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

2-misol. Nishonga qarata ikkita o‘q uzilyapti, bunda har bir o‘q uzishda o‘qning nishonga tegish ehtimoli 0,8 ga teng. X tasodifiy miqdor sifatida– nishonga tekkan o‘qlar soni qaraladi. Bu tasodifiy miqdorning taqsimot qonunini toping.

Yechish: X tasodifiy miqdor quyidagi qiymatlarni qabul qilishi mumkin:

$$x_1 = 0,\ x_2 = 1,\ x_3 = 2$$

Tegishli ehtimollarni topish uchun hosil qiluvchi ko‘phad $(0{,}2 + 0{,}8x)^2$ ni tuzamiz va yoyilmasini topamiz:

$0{,}2^2 + 2 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}8 \;\; x + 0{,}8^2 x^2$

Ma’lumki, $x^k (k = 0{,}1{,}2)$ning oldidagi koeffitsient nishonga k ta o‘q tegish ehtimolini, ya’ni X tasodifiy miqdorning k ga teng qiymatni qabul qilish ehtimolini beradi.

$$p_1 = 0{,}2^2 = 0{,}04$$

$$p_2 = 2 \cdot 0{,}2 \;\; \cdot 0{,}8 = 0{,}32$$

$$p_3 = 0{,}8^2 = 0{,}64$$

Shunday qilib, X tasodifiy miqdorning taqsimot qonuni quyidagi ko‘rinishda bo‘ladi:

0	1	2
0,04	0,32	0,64

Umumiy holda quyidagi misollarni qaraylik.

X tasodifiy miqdorni – har birida A hodisa p ehtimol bilan ro‘y beradigan n ta erkli tajribadan iborat seriyada A hodisaning ro‘y berish sonini qaraylik. X tasodifiy miqdorning taqsimot qonunini toping.

Echish: X tasodifiy miqdor quyidagi qiymatlardan birini qabul qilishi mumkinligi ravshandir:

0, 1, 2, ..., k, ..., n.

X tasodifiy miqdor k ga teng qiymatni qabul qilishidan iborat hodisaning ehtimoli YA. Bernulli formulasiga ko‘ra aniqlanishini bilamiz:

$\mathrm{P}(\mathrm{X} = k) = C_n^k p^k q^{n-k}$, bu erda $q = 1 - p$

Binobarin, X tasodifiy miqdorning taqsimoti quyidagicha yozilishi mumkin:

0	1	...	k	...	n
$C_n^0 p^0 q^n$	$C_n^1 p^1 q^{n-1}$	...	$C_n^k p^k q^{n-k}$	...	$C_n^n p^n q^0$

(3)

(3) jadval yordamida tavsiflanadigan taqsimot Ya. Bernulli taqsimoti yoki binomial taqsimot deyiladi. Ya. Bernulli taqsimoti uchun (2) shart quyidagi ko‘rinishni oladi:

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k \; p^k q^{n-k} = 1 \qquad (4)$$

Bu tenglikning to‘g‘riligini isbotlash uchun

$$(q + px)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k q^{n-k} p^k x^k$$

ayniyatda $x = 1$ deb olish etarli.

Ya Bernulli taqsimoti ikkita parametr: barcha tajribalar soni n va hodisaning har bir ayrim tajribada ro‘y berish ehtimoli p bilan to‘la beriladi.

8.4.3. Tasodifiy miqdorning matematik kutilishi.

Ta'rif. Tasodifiy miqdorning matematik kutilishi deb tasodifiy miqdorning barcha qiymatlarini bu qiymatlarning ehtimollariga ko'paytmalari yig'indisiga aytiladi.

X tasodifiy miqdorning matematik kutilishi MX orqali belgilanadi. Agar X tasodifiy miqdor $x_1, x_2, ..., x_n$ qiymatlari mos ravishda $p_1, p_2, ..., p_n$ ehtimollarga ega bo'lsa, u holda ta'rifga ko'ra:

$$MX = \sum_{k-1}^{n} x_k p_k \qquad (1)$$

Matematik kutilish tasodifiy miqdorning eng muhim son xarakteristikasidir. Ko'pincha matematik kutilishni tasodifiy miqdorning o'rtacha qiymati deb ham yuritiladi, chunki u biror «o'rtacha son» ni ifodalab, bu son atrofida tasodifiy miqdorning barcha qiymatlari qiymatlanadi.

1-misol. O'yin soqqasini tashlaganda tushadigan ochkolar sonining matematik kutilishini toping.

Bu tasodifiy miqdorning taqsimot qonuni 8.4.2 ning 1-misolida topilgan edi (1) formulaga ko'ra matematik kutilishni topamiz:

$$MX = \sum_{k=1}^{0} x_k p_k = \frac{1}{6}\sum_{k=1}^{6} k = \frac{1}{6}\cdot\frac{6\cdot 7}{2} = 3{,}5$$

Umumiy holda quyidagi misollarni qaraylik.

Har birida A hodisa p ehtimol bilan ro'y beradigan n ta erkli tajriba seriyasida A hodisa ro'y berish sonining matematik kutilishini toping.

X tasodifiy miqdorning k qiymatni qabul qilish ehtimoli $C_n^k q^{n-k} p^k$ ga teng. Demak, (1) formulaga ko'ra

$$MX = \sum_{k=0}^{n} C_n^k q^{n-k} p^k$$

Hosil qilingan ifodani soddalashtirish uchun ushbu munosabatdan foydalanamiz:

$$(q + px)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k q^{n-k} p^k x^k$$

Bu ayniyatning ikkala tomonini x o'zgaruvchi bo'yicha differensiallaymiz, u holda:

$$n(q + px)^{n-1} p = \sum_{k=0}^{n} k C_n^k q^{n-k} p^k x^{k-1}$$

Bu erdan $p + q = 1$ ekanligini nazarda tutib, $x = 1$ da

$np = \sum_{k-0}^{n} k C_n^k q^{n-k} p^k$ ni topamiz. Demak, $MX = np$ ... (2)

Shunday qilib, har birida A hodisaning ro'y berish ehtimoli p ga teng bo'lgan n ta erkli tajribadan iborat seriyada A hodisa ro'y berish sonining matematik kutilishi barcha tajribalar soni n ning hodisaning alohida tajribada ro'y berish ehtimoli p ga ko'paytmasiga teng ekan.

Boshqacha aytganda, n va p parametrli binomial qonun bo‘yicha taqsimlangan tasodifiy miqdorning matematik kutilishi np ko‘paytmasiga tengdir.

2-misol. Agar 1000 ta buyumdan iborat partiyadagi har bir buyum 0,05 ehtimol bilan brak bo‘lishi mumkin bo‘lsa, shu partiyadagi brak buyumlar sonining matematik kutilishini toping.

Yaroqsiz buyumlar soni - bu binomial qonun bo‘yicha taqsimlangan X tasodifiy miqdordir. Shuning uchun (2) formulaga ko‘ra ushbuni topamiz:

$$MX = 1000 \cdot 0{,}05 = 50$$

Aytaylik, X tasodifiy miqdor, M(X) uning matematik kutilishi bo‘lsin. X-MX ayirmani qaraylik.

Tasodifiy miqdor bilan uning matematik kutilishi orasidagi farqqa kutilisdan chetlanich deyiladi.

3-misol. X - o‘yin soqqasini tashlaganda tushgan ochkolar soni bo‘lsin. X tasodifiy miqdorning uning matematik kutilishidan chetlanishi kvadratidan iborat Y tasodifiy miqdorni qaraylik. Y ning matematik kutilishini toping.

X tasodifiy miqdorning matematik kutilishi 1-misolda hisoblangan bo‘lib, u $MX = 3{,}5$ ga teng edi.

X tasodifiy miqdorning uning matematik kutilishidan chetlanishi kvadrati

$$y_1 = (1-3{,}5)^2,\ y_2 = (2-3{,}5)^2,\ y_3 = (3-3{,}5)^2$$

$$y_4 = (4-3{,}5)^2,\ y_5 = (5-3{,}5)^2,\ y_6 = (6-3{,}5)^2$$

qiymatlarni qabul qiluvchi tasodifiy miqdordir, bunda har bir qiymat $\frac{1}{6}$ ehtimol bilan qabul qilinishi ravshandir. Shuning uchun

$$MY = \sum_{k=1}^{6} y_k p_k = \sum_{k=1}^{6} (k-3{,}5)^2 \cdot \frac{1}{6} = \frac{2{,}5^2 + 1{,}5^2 + 0{,}5^2 + 0{,}5^2 + 1{,}5^2 + 2{,}5^2}{6} = \frac{35}{12}$$

8.4.4. Tasodifiy miqdorning dispersiyasi.

X tasodifiy miqdorning boshqa bir muhim xarakteristikasi uning dispersiyasidir. X ning dispersiyasi DX orqali belgilanadi va u quyidagicha aniqlanadi.

Ta’rif. X tasodifiy miqdorning dispersiyasi deb X tasodifiy miqdorning uning matematik kutilishidan chetlanishi kvadratining matematik kutilishiga aytiladi, ya’ni $DX = M(X - MX)^2$.

8.4.3-punktdagi 3-misolda o‘yin soqqasini tashlaganda tushgan ochkolar sonidan iborat X tasodifiy miqdorning uning matematik kutilishidan chetlanishi kvadratining matematik kutilishi topilgan edi, ya’ni aslida X miqdorning dispersiyasi hisoblangan edi. Shunday qilib, 3-misoldan agar X soqqani tashlaganda tushgan ochkolar soni bo‘lsa, u holda $DX = \frac{35}{12}$ bo‘lishi kelib chiqadi.

Aytaylik, X tasodifiy miqdor

$$x_1, x_2, ..., x_n$$

qiymatlarni mos ravishda

$$p_1,\ p_2,\ ...,\ p_n$$

ehtimollar bilan qabul qilsin. U holda X tasodifiy miqdorning uning matematik kutilishidan chetlanishi kvadrati tasodifiy miqdor bo‘lib, u

$$(x_1 - MX)^2,\ (x_2 - MX)^2, ..., (x_k - MX)^2, ...,$$

$$(x_n - MX)^2$$

qiymatlarni mos ravishda

$$p_1,\ p_2,\ ..., p_k,\ ..., p_n$$

ehtimollar bilan qabul qiladi. Shuning uchun bunday taqsimlangan tasodifiy miqdorning matematik kutilishini, ya’ni X ning dispersiyasini quyidagicha yozish mumkin:

$$DX = \sum_{k-1}^{n} (x_k - MX)^2\, p_k \qquad (1)$$

Tasodifiy miqdorning dispersiyasi bu tasodifiy miqdorning o‘zining matematik kutilishiga (o‘rtacha qiymatiga) nisbatan tarqoqlik, sochilish darajasini xarakterlaydi. "Dispersiya" so‘zining o‘zi "sochilish"ni anglatadi.

1-misol. X va Y tasodifiy miqdorlar quyidagi taqsimot qonunlariga ega:

-1	1
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

va

-2	2
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

DX va DY ni toping.

Dastlab matematik kutilishlarni hisoblaymiz:

$$MX = (-1)\cdot\frac{1}{2} + 1\cdot\frac{1}{2} = 0,\quad MY = (-2)\cdot\frac{1}{2} + 2\cdot\frac{1}{2} = 0.$$

Endi (1) formulani qo‘llab, dispersiyalarni topamiz:

$$DX = 1\cdot\frac{1}{2} + 1\cdot\frac{1}{2} = 1,\ DY = 4\cdot\frac{1}{2} + 4\cdot\frac{1}{2} = 4.$$

X va Y tasodifiy miqdorlar bu erda bir xil qiymatlarni qabul qilyapti, bir xil matematik kutilishga ega, biroq Y tasodifiy miqdor qiymatlarining tarqoqligi X tasodifiy miqdornikiga qaraganda ko‘proq. Matematik kutilishdan ancha uzoqdagi ± 2 qiymatlarni Y tasodifiy miqdor X tasodifiy miqdorga nisbatan kattaroq ehtimol bilan qabul qiladi, matematik kutilishdan kamroq uzoqlikdagi ± 1 qiymatlarni esa Y tasodifiy miqdor X tasodifiy miqdorga nisbatan kichikroq ehtimol bilan qabul qiladi. $DX < DY$ tengsizlik xuddi ana shuni ko‘rsatadi.

Yuqoridagi misollarda tasodifiy miqdorlarning dispersiyalari (1) formula bo‘yicha hisoblanadi. Biroq, odatda, dispersiyani boshqa formula yordamida hisoblash ancha qulay bo‘ladi. Bu formulani hosil qilish uchun dastlab (1) formulaning o‘ng qismini quyidagicha o‘zgartiramiz:

$$DX = \sum_{k=1}^{n} (x_k - MX)^2\, p_k == \sum_{k=1}^{n} (x_k^2 - 2(MX)x_k + (MX)^2)\, p_k =$$

$$=\sum_{k=1}^{n} x_k^2 p_k - 2(MX)\sum_{k=1}^{n} x_k p_k + (MX)^2 \sum_{k=1}^{n} p_k$$

Endi $\sum_{k=1}^{n} p_k = 1$, $\sum_{k=1}^{n} x_k p_k = MX$ ekaninini e'tiborga olsak,

$DX = \sum_{k=1}^{n} x_k^2 p_k - (MX)^2$ formulani hosil qilamiz.

Bu erda yig'indi ushbu

x_1^2	x_2^2	$\cdots$	x_k^2	...	x_n^2
p_1	p_2	...	p_k	...	p_n

qonun bo'yicha taqsimlangan tasodifiy miqdorning matematik kutilishidir.

Bunday tasodifiy miqdorni X tasodifiy miqdorning kvadrati deb ataladi va X^2 orqali belgilanadi.

Shunday qilib, dispersiya uchun

$$DX = M(X^2) - (MX)^2 \qquad (2)$$

formula o'rinlidir.

Bu formula bunday o'qiladi: tasodifiy miqdorning dispersiyasi bu miqdor kvadratining matematik kutilishidan uning matematik kutilishi kvadratini ayirilganiga teng.

2-misol. n va p parametrli binomial qonun bo'yicha taqsimlangan X tasodifiy miqdorning dispersiyasini toping.

Yechish: Bizga oldingi mavzulardan $MX = np$ ekanligi ma'lum. Dispersiyani (2) formuladan foydalanib hisoblash maqsadida X^2 tasodifiy miqdorning taqsimot qonunini yozamiz:

0	1	$\cdots$	k^2	$\cdots$	n^2
$C_n^0 p^0 q^n$	$C_n^1 p^1 q^{n-1}$	$\cdots$	$C_n^k p^k q^{n-k}$	$\cdots$	$C_n^n p^n q^0$

X^2 tasodifiy miqdorning matematik kutilishi uchun quyidagiga egamiz:

$$M(X^2) = \sum_{k=0}^{n} k^2 C_n^k p^k q^{n-k}.$$

Hosil qilingan yig'indini soddalashtirish uchun yana bizga ma'lum bo'lgan quyidagi ayniyatdan foydalanamiz:

$$(q+px)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^K q^{n-k} p^k x^k.$$

Ayniyatning har ikkala qismini x o'zgaruvchi bo'yicha ikki marta differensiallaymiz. U holda quyidagini hosil qilamiz:

$$n(n-1)(q+px)^{n-2} p^2 = \sum_{k-0}^{n} q^{n=k} p^k k)k-1)x^{k-2}.$$

Bu ayniyatda $x = 1$ deb, ushbu tenglikni hosil qilamiz:

$$n(n-1)p^2=\sum_{k=1}^{n}k(k-1)C_n^k q^{n-k}p^k$$

yoki

$$n(n-1)p^2=\sum_{k=1}^{n}k^2C_n^k q^{n-k}p^k-\sum_{k=1}^{n}kC_n^k q^{n-k}p^k,$$

bu erdan $\sum_{k=1}^{n}kC_n^k q^{n-k}p^k=MX=np$ ekanligini nazarga olib,

$$M(X^2)=\sum_{k=1}^{n}k^2C_n^k q^{n-k}p^k=n(n-1)p^2+np=n^2p^2-np^2+np,$$

$$DX=M(X^2)-(MX)^2=n^2p^2-np^2+np-n^2p^2=np(1-p)$$

ya'ni

$$DX=npq \qquad (3)$$

O'z-o'zini tekshirish uchun savollar.

1. Qanday miqdorlarga diskret va uzluksiz tasodifiy miqdorlar deyiladi?
2. Diskret tasodifiy miqdorlarni taqsimot qonunini misollar yordamida tushuntiring.
3. Binomial taqsimot deganda nimani tushunasiz?
4. Tasodifiy miqdorning matematik kutilishiga ta'rif bering.
5. Kutilishdan chetlanish deb nimaga aytiladi?
6. Tasodifiy miqdorning dispersiyasiga ta'rif bering.

8.5. Matematik statistikaning vazifasi.

Ommaviy (yalpi) tasodifiy hodisalar bo'ysunadigan qonuniyatlarni aniqlash statistik ma'lumotlarni kuzatish natijalarini o'rganishga asoslanadi. Matematetik statistikaning birinchi vazifasi (masalasi) - statistik ma'lumotlarni to'plash va (agar ma'lumotlar juda ko'p bo'lsa) gruppalash usullarini ko'rsatishdan, ikkinchi vazifasi (masalasi) - statistik ma'lumotlarni tahlil qilish metodlarini tadqiqot masalalariga muvofiq ishlab chiqishdan iboratdir.

U yoki bu hodisalarni matematik statistika metodlari bilan o'rganish fan va amaliyotda uchraydigan ko'p masalalarni (texnologik jarayonlarni to'g'ri tashkil etish, maqsadga muvofiq qilib rejalashtirish va h.k.) hal etishda vosita bo'lib xizmat qiladi.

Shunday qilib, matematik statistikaning vazifasi (masalasi) ilmiy va nazariy xulosalar hosil qilish maqsadida statistik ma'lumotlarni to'plash va ishlab chiqish metodlarini yaratishdan iborat.

8.5.1.Bosh va tanlanma to'plamlar.

Bir jinsli ob'yektlar to'plamini bu ob'yektlarni xarakterlovchi biror sifat yoki son belgiga nisbatan o'rganish talab qilinsin. Masalan, agar biror xil detallar partiyasi bo‘lsa, u holda detalning sifat belgisi bo‘lib, uning standartga mosligi, son belgisi bo‘lib, detalning o‘lchami xizmat qilish mumkin.

Ayrim hollarda yalpi tekshirish o‘tkazishga to‘g‘ri keladi, ya’ni to‘plamdagi ob’yektlarning har birini o‘rganilayotgan belgiga nisbatan tekshiriladi. Lekin yalpi tekshirish amalda nisbatan kam qo‘llaniladi, chunki yalpi tekshirish to‘plami juda ko‘p (katta sondagi) ob’yektlarni o‘z ichiga olgan bo‘lsa, u holda yalpi tekshirish o‘tkazish jismonan mumkin bo‘lmay qoladi. Bunday hollarda to‘plamdan chekli sondagi ob’yektlar tasodifiy ravishda olinadi va ular o‘rganiladi.

Tanlanma to‘plam, yoki oddiy qilib, tanlanma deb tasodifiy ravishda tanlab olingan ob’yektlar to‘plamiga aytiladi.

Bosh to‘plam deb tanlanma ajratiladigan ob’yektlar to‘plamiga aytiladi.

To‘plam (bosh yoki tanlanma to‘plami) hajmi deb, bu to‘plamdagi ob’yektlar soniga aytiladi. Masalan, 5000 ta detaldan tekshirish uchun 500 ta detal olingan bo‘lsa, u holda bosh to‘plam hajmi №=5000 tanlanma hajmi esa n=500.

Eslatma: Bosh to‘plam ko‘pincha chekli sondagi elementlarni o‘z ichiga oladi. Ammo bu son ancha katta bo‘lsa, u holda hisoblashlarni sodalashtirish yoki nazariy xulosalarni ixchamlash maqsadini ko‘zda tutib, ba’zan bosh to‘prlam cheksiz ko‘p sondagi ob’yektlardan iborat deb faraz qilinadi, chunki bosh to‘plam hajmini orttirish tanlanma ma’lumotlarini ishlab chiqish natijalariga amalda ta’sir etmaydi.

8.5.2.Takror va notakror tanlanmalar. Reprezentativ tanlanma.

Tanlanmani tuzishda ikki xil yo‘l tutish mumkin: ob’yekt tanlanib va uning ustida kuzatish o‘tkazilgandan so‘ng, u bosh to‘plamga qaytarilishi yoki qaytarilmasligi mumkin. Bunga muvofiq ravishda tanlanmalar takror va notakror tanlanmalarga ajratiladi.

Takror tanlanma deb shunday tanlanmaga aytiladiki, bunda olingan ob’yekt bosh to‘plamga qaytariladi.

Notakror tanlanma deb, tanlangan ob’yekt yana bosh to‘plamga qaytarilmaydigan tanlanmaga aytiladi.

Katta sonlar qonuniga asosan aytish mumkinki, agar tanlash tasodifiy ravishda amalga oshiriladigan bo‘lsa, tanlanma reprezentativ tanlanma deyiladi. Agar bosh to‘plam barcha ob’yektlarining tanlanmaga tushish ehtimollari bir xil bo‘lsa, tanlanmaning har bir ob’yekti tasodifiy tanlangan bo‘ladi.

Agar bosh to‘plamning hajmi yetarli katta bo‘lib, tanlanma bu to‘plamning uncha katta bo‘lmagan qismini tashkil qilsa, u holda takror va notakror tanlanmalar orasidagi farq yo‘qolib boradi: limit holda, cheksiz bosh to‘plam qaralib, tanlanmaning hajmi esa chekli bo‘lsa, u holda bu farq yo‘qoladi.

8.5.3. Tanlash usullari.

Amaliyotda tanlashning turli usullari qo‘llaniladi. Bu usullarni prinsip jihatdan ikki turga bo‘lish mumkin:

I. Bosh to‘plamni qismlarga ajratishni talab qilmaydigan tanlash, bunga quyidagilar kiradi:

a) oddiy qaytarilmaydigan tasodifiy tanlash;
b) oddiy qaytariladigan tasodifiy tanlash.

II. Bosh to‘plamni qismlarga ajratilgandan keyin tanlash, bunga quyidagilar kiradi:

a) tipik tanlash;
b) mexanik tanlash;
v) seriyali tanlash.

Bosh to‘plamdan elementlar bittalab olinadigan tanlash oddiy tasodifiy tanlash deyiladi. Oddiy tanlashni turli usullar bilan amalga oshirish mumkin. Masalan, N hajmli bosh to‘plamdan n ta ob’yekt tanlashni quyidagicha amalga oshirish mumkin. Kartochkalar olib, ularni 1 dan N gacha nomerlaymiz. Keyinchalik ularni yaxshilab aralashtirib, tavakkaliga bitta kartochka olamiz, shu olingan kartochka bilan bir xil nomerli ob’yekt tekshiriladi. Keyin kartochka kartochkalar to‘plamiga qaytariladi va jarayon takrorlanadi, ya’ni kartochkalar aralashtirilib, ulardan biri tavakkaliga olinadi va h.k. n marta shunday qilinadi, natijada n hajmli oddiy takror tasodifiy tanlanma hosil qilinadi.

Agar olingan kartochkalar qaytarilmasa, u holda tanlanma oddiy notakror tasodifiy tanlanma bo‘ladi.

Bosh tanlanmaning hajmi katta bo‘lganda tasvirlangan bu jarayon ko‘p vaqt va mexnat talab qiladi. Bunday holda "tasodifiy sonlarning" tayyor jadvalidan foydalaniladi, ularda sonlar tasodifiy tartibda joylashgan bo‘ladi.

Tipik tanlash deb, shunday tanlashga aytiladiki, bunda ob’yektlar butun bosh to‘plamdan emas, balki uning "tipik" qismlaridan olinadi. Masalan, detallar bir nechta stanokda tayyorlanayotgan bo‘lsa, u holda tanlash barcha detallar to‘plamdan emas, balki har bir stanok mahsulotidan ayrim olinadi. Tipik tanlashdan tekshirilayotgan belgi bosh to‘plamning turli tipik qismlarida sezilarli o‘zgarib turganda foydalaniladi. Masalan, detallar bir nechta stanoklarda tayyorlanayotgan bo‘lib, stanoklar orasida eskirganlari bo‘lsa, u holda tipik tanlashdan foydalanish maqsadga muvofiqdir.

Mexanik tanlash deb, shunday tanlashga aytiladiki, bunda bosh to‘plam tanlanmaga nechta ob’yekt kirishi lozim bo‘lsa, shuncha gruppaga mexanik ravishda ajratiladi va har bir gruppadan bittadan ob’yekt tanlanadi.

Masalan, stanokda tayyorlangan detallarning 10% ini ajratib olish zarur bo‘lsa, u holda har bir o‘ninchi detal olinadi; agar 5% detallarni olish talab qilinsa, u holda har bir yigirmanchi detal olinadi va h.k.

Seriyali tanlash deb shunday tanlashga aytiladiki, bunda ob’yektlar bosh to‘plamdan bittalab emas, balki, "seriyalab" olinadi va ular yalpisiga tekshiriladi. Masalan, buyumlar katta gruppa stanok-avtomatlar tomonidan tayyorlanayotgan bo‘lsa, u holda faqat bir nechta stanokning buyumlari yalpisiga tekshiriladi. Seriyali tanlashdan tekshirilayotgan belgi turli seriyalarda uncha o‘zgarmagan holda foydalaniladi.

Amaliyotda ko‘pincha aralash tanlashdan foydalanilishini ta’kidlab o‘tamiz, bunda yuqorida ko‘rsatilgan usullardan birgalikda foydalaniladi.

Masalan, bosh to‘plamni ba’zan bir xil hajmli seriyalarga ajratiladi, keyin oddiy tasodifiy tanlash bilan bir necha seriya tanlanadi va nihoyat, oddiy tasodifiy tanlash bilan ayrim ob’yektlar olinadi.

O‘z-o‘zini tekshirish uchun savollar.

1. Matematik statistikaning vazifasini aytib bering.
2. Bosh va tanlanma to‘plamlar deganda qanday to‘plamni tushunasiz?
3. Takror va notakror, reprezentativ tanlanmalarni misollar yordamida tushuntiring.
4. Tanlash usullarini misollar yordamida aytib bering.

8.5.4. Tanlanmaning statistik taqsimoti.

Bosh to‘plamdan tanlanma olingan. Bunda x_1 qiymat n_1 marta, x_2 qiymat n_2 marta kuzatilgan va $\Sigma n_i=n$ bo‘lsin. Kuzatilgan x_i qiymatlar variantlar, variantlarning ortib borishi tartibida yozilgan ketma-ketligi esa variatsion qator deyiladi. Kuzatishlar soni chastotalar, ularning tanlanma hajmiga nisbati $\frac{n_i}{n}=W_i$ esa nisbiy chastotalar deyiladi.

Tanlanmaning statistik taqsimoti deb variantlar va ularga mos chastotalar yoki nisbiy chastotalar ro‘yxatiga aytiladi. Statistik taqsimotni yana intervallar va ularga tegishli chastotalar ketma-ketligi ko‘rinishida ham berish mumkin (intervalga mos chastota sifatida bu intervalga tushgan chastotalar yig‘indisi qabul qilinadi). Ehtimollar nazariyasidagi taqsimot bilan matematik statistikadagi taqsimotni farq qilish kerak.

Taqsimot deyilganda ehtimollar nazariyasida tasodifiy miqdorning mumkin bo‘lgan qiymatlari va ularning ehtimollari orasidagi moslik, matematik statistikada esa kuzatilgan variantalar va ularning chastotalari yoki nisbiy chastotalari orasidagi moslik tushuniladi.

Misol. Hajmi 30 bo‘lgan tanlanmaning chastotalari taqsimoti berilgan.

x_i	7	11	12
n_i	6	15	9

Misol. Nisbiy chastotalar taqsimotini yozing.

Yechish. Nisbiy chastotalarni topamiz. Buning uchun chastotalarni tanlanma hajmiga bo‘lamiz:

$$W_1=\frac{6}{30}=0{,}2 \qquad W_2=\frac{15}{30}=0{,}5 \qquad W_3=\frac{9}{30}=0{,}3$$

Nisbiy chastotalar taqsimotini yozamiz:

X_i	7	11	12

W_i	0,2	0,5	0,3

O‘z-o‘zini tekshirish uchun savollar.

1. Nisbiy chastotani ta’riflang.
2. Nisbiy chastotalar taqsimotini yozib ko‘rsating.

8.5.5.Taqsimotning empirik funksiyasi.

Aytaylik, X son belgi chastotalarining statistik taqsimoti berilgan bo‘lsin. Belgilashlar kiritamiz : n_x - belgining x dan kichik qiymati kuzatilgan kuzatishlar soni; n - kuzatishlarning umumiy soni (tanlanma hajmi).

Ma’lumki, X< x hodisaning nisbiy chastotasi $\frac{n_x}{n}$ ga teng. Agar x o‘zgaradigan bo‘lsa, u holda umuman aytganda, nisbiy chastotasi ham o‘zgaradi, ya’ni $\frac{n_x}{n}$ nisbiy chastota x ning funksiyasidir. Bu funksiya empirik yo‘l (tajriba yo‘li) bilan topiladigan bo‘lgani uchun u empirik funksiya deyiladi.

Taqsimotning empirik funksiyasi (tanlanmaning taqsimot funksiyasi) deb har bir *X* qiymat uchun $X<x$ hodisaning ehtimolini aniqlaydigan $F^*(x)$ funksiyasiga aytiladi. Shunday qilib, ta’rifga ko‘ra

$$F^*(x)=\frac{n_x}{n},$$

Bunda n_* - x dan kichik variantalar soni, n - tanlanma hajmi.

Masalan, $F^*(X_2)$ ni topish uchun X_2 dan kichik variantalar sonini tanlanma hajmiga bo‘lish kerak;

$$F^*(x_2)=\frac{n_{x_2}}{n},$$

Bosh to‘plam taqsimotining F(x) integral funksiyasini, tanlanma taqsimotining empirik funksiyasidan farq qilib taqsimotning nazariy funksiyasi deyiladi.

Empirik va nazariy funksiyalar orasidagi farq shundaki, F (x) nazariy funksiya X<x hodisa ehtimolini, $F^*(x)$ empirik funksiya esa shu hodisaning o‘zining nisbiy chastotasini aniqlaydi. Bernulli teoremasiga ko‘ra, X<x hodisaning nisbiy chastotasi, ya’ni $F^*(x)$ shu hodisaning F(x) ehtimoliga ehtimol bo‘yicha yaqinlashadi. Boshqacha aytganda, $F^*(x)$ va F (x) sonlar bir-biridan kam farq qiladi. Bundan esa bo‘sh to‘plam taqsimotining taqribiy tasvirlashda tanlanma taqsimotining empirik funksiyasidan foydalanish maqsadga muvofiq bo‘lishi kelib chiqadi.

Bu xulosa esa $F^*(x)$ funksiya F (x) ning barcha xossalariga ega bo‘lishidan kelib chiqadi. Haqiqatan ham $F^*(x)$ funksiyaning ta’rifidan uning quyidagi xossalari kelib chiqadi:

1) empirik funksiyaning qiymatlari [0;1] kesmaga tegishli;

2) $F^*(x)$ - kamaymaydigan funksiya;
3) agar x_1 - eng kichik varianta bo‘lsa, u holda $x \le x_1$ da $F^*(x)=0$; x_k - eng katta varianta bo‘lsa, u holda $x>x_k$ da $F^*(x)=1$.

Shunday qilib, tanlanma taqsimotining empirik funksiyasi bosh to‘plam taqsimotining nazariy funksiyasini baholash uchun xizmat qiladi.

Misol. Tanlanmaning quyidagi berilgan taqsimoti bo‘yicha uning empirik funksiyasini tuzing.

variantalar	x_i	3	7	10
chastotalar	n_i	15	21	24

Yechilishi. Tanlanma hajmini topamiz: 15+21+24=60. Eng kichik varianta 3 ga teng. Demak,

$$x \le 3 \;\; da \;\; F^*(x) = 0$$

x < 7 qiymat, xususan, $x_1 = 3$ qiymat 15 marta kuzatilgan, demak,

$$3 < x \le 7 \;\; da \;\; F^*(x) = \frac{15}{60} = 0{,}25$$

x< 10 qiymatlar; jumladan, $x_1=3$ va $x_2=7$ qiymatlar 15+21=36 marta kuzatilgan; Demak:

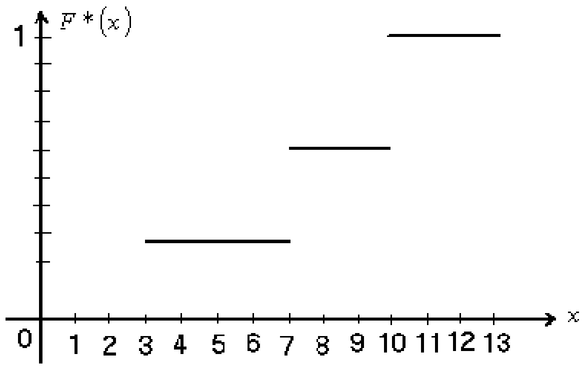
$$7 < x \le 10 \;\; da \;\; F^*(x) = \frac{36}{60} = 0{,}6$$

x=10 eng katta varianta bo‘lgani uchun

$x>10$ da $F^*(x)=1$.

Izlanayotgan empirik funksiya:

$$F^*(x) = \begin{cases} x \le 3 & da \quad 0, \\ 3 < x \le 7 & da \quad 0{,}25 \\ 7 < x \le 10 & da \quad 0{,}6 \\ x > 10 & da \quad 1 \end{cases}$$



187-chizma

Bu funksiyaning grafigi 187-chizmada tasvirlangan.

O‘z-o‘zini tekshirish uchun savollar.

1. Taqsimotning empirik funksiyasini ta’riflang.
2. Empirik funksiyaga misol keltirib, grafigini chizib ko‘rsating.

8.5.6. Poligon va gistogramma.

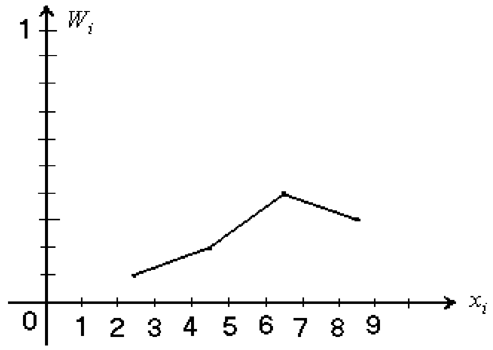
Ko‘rgazmalilik maqsadida statistik taqsimotning turli grafiklari, jumladan, poligoni va gistogrammasi yasaladi.

Chastotalar poligoni deb, kesmalari (x_1, n_1), (x_2, n_2), ... , (x_k, n_r) nuqtalarni tutashtiradigan aniq chiziqqa aytiladi. Poligonni yasash uchun abssissalar o‘qiga x_i variantalarni, ordinatalar o‘qiga esa ularga mos n_i chastotalarni qo‘yib chiqiladi. So‘ngra (x_i, n_i) nuqtalarni to‘g‘ri chiziq kesmalari bilan tutashtirib, chastotalar poligoni hosil qilinadi.

Nisbiy chastotalar poligoni deb kesmalari (x_1, W_1), (x_2, W_2) ... , (x_r, W_r) nuqtalarni tutashtiradigan siniq chiziqqa aytiladi. Nisbiy chastotalar poligonini yasash uchun abssissalar o‘qiga x_i variantalarni, ordinatalar o‘qiga esa ularga mos W_i chastotalarni qo‘yib chiqiladi. So‘ngra hosil bo‘lgan nuqtalarni to‘g‘ri chiziq kesmalari bilan tutashtirib, nisbiy chastotalar poligoni hosil qilinadi. 188-chizmada ushbu

x_i	2,5	4,5	6,5	8,5
W_i	0,1	0,2	0,4	0,3

taqsimotning nisbiy chastotalari poligoni tasvirlangan.

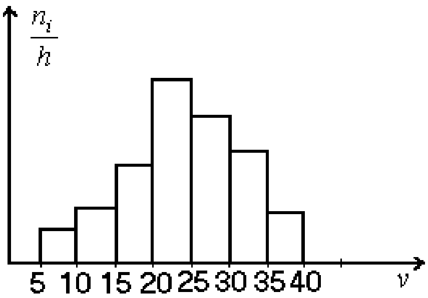


188-chizma

Uzluksiz belgi bo‘lgan holda gistogramma yasash maqsadga muvofiqdir. Buning uchun belgining kuzatiladigan qiymatlarini o‘z ichiga olgan intervalni uzunligi *h* bo‘lgan bir nechta qismiy intervallarga bo‘linadi va har bir i- qismiy interval uchun n_i ni - i - intervalga tushgan variantalar chastotalari yig‘indisi topiladi. Chastotalar gistogrammasi deb asoslari *h* uzunlikdagi intervallar, balandliklari esa $\frac{n_i}{n}$ nisbatlarga (chastota zichligi) teng bo‘lgan to‘g‘ri to‘rtburchaklardan iborat pog‘onaviy figuraga aytiladi.

Chastotalar gistogrammasini yasash uchun abssissalar o‘qida qismiy intervallar, ularning ustiga esa $\frac{n_i}{n}$ masofada abssissalar o‘qiga parallel kesmalar o‘tkaziladi.

i - qiysmiy to‘g‘ri to‘rtburchakning yuzi $h \cdot \frac{n_i}{h} = n_i$ *ga, ya'ni* - intervaldagi variantalarning chastotalari yig‘indisiga teng, binobarin, chastotalar gistogrammasining yuzi barcha chastotalar yig‘indisiga, ya’ni tanlanma hajmiga teng.



189-chizma

189-chizma jadvalda keltirilgan n=100 hajmli taqsimot chastotalari gistogrammasi tasvirlangan.

Uzunligi h=5 bo‘lgan nisbiy interval	n_i interval varianta-lari chastotalarining yig‘indisi	chastota zichligi $\frac{n_i}{h}$
5-10	4	0,8
10-15	6	1,2
15-20	16	3,2
20-25	36	7,2
25-30	24	4,8
30-35	10	2,0
35-40	4	0,8

Nisbiy chastotalar gistogrammasi deb, asoslari h uzunlikdagi intervallar, balandliklari esa $\frac{W_i}{n}$ nisbatga (nisbiy chastota zichligiga) teng bo‘lgan to‘g‘ri to‘rtburchaklardan iborat pog‘onaviy figuraga aytiladi.

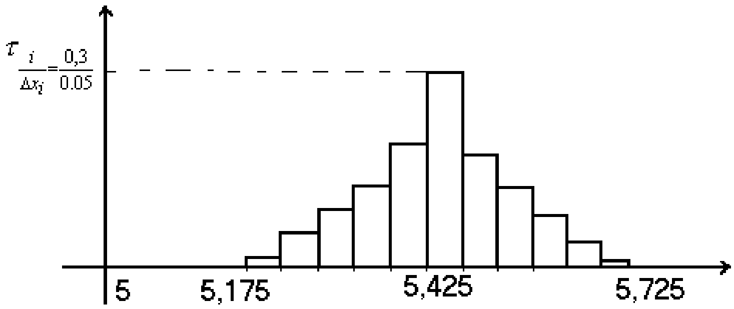
Misol. Bug‘doy donining 100 marta o‘lchash natijalari berilgan bo‘lib, don uzunligining eng kichik uzunligi 5,18 mm, eng katta uzunligi 5,69 mm. [5,175,5,725] oraliqda barcha tanlovlar variatsiyalarini olib, bug‘doy doni uzunliklari taqsimoti gistogrammasini chizing.

Yechish: Misolni yechish uchun [5,175,5,725] oraliqni 11 ta qismiy oraliqqa bo‘lamiz. Bunda har bir qismiy oraliqqa kamida 9 ta o‘lchash natijasi to‘g‘ri keladi. Har bir qismiy oraliq uzunligi $\Delta x_i = 0{,}05$ ga teng. Shunday qilib kuzatish natijalariga ko‘ra nisbiy chastota hisoblangan tubandagi jadvalga ega bo‘lamiz.

Qismiy oraliq chegaralari	chastota	Nisbiy chastota
5,175-5,225	1	0,01
5,225-5,275	4	0,04

5,275-5,325	7	0,07
5,325-5,375	11	0,11
5,375-5,425	16	0,16
5,425-5,575	30	0,30
5,575-5,525	14	0,14
5,525-5,575	8	0,08
5,575-5,625	6	0,06
5,625-5,675	2	0,02
5,675-5,725	1	0,01

Jadvalga asosan, bug‘doy doni uzunligi taqsimoti gistogrammasini chizamiz (190-chizma)



190-chizma

O‘z-o‘zini tekshirish uchun savollar.

1. Poligon deganda nimani tushunasiz?
2. Chastotalar gistogrammasini ta’riflab bering.
3. Poligon va gistogrammani misollar yordamida chizib ko‘rsating.

ADABIYOTLAR

1. Т. Азларов ва бошқалар. «Математикадан қўлланма» I,II қисм Тошкент, «Ўқитувчи», 1990 й.
2. В.Е. Гмурман «ЭХтимоллар назарияси ва математик статистика» Тошкент, «Ўқитувчи», 1977 й.
3. Т. Жўраев ва бошқалар «Олий математика асослари» 1-қисм, Тошкент, Ўзбекистон,1995 й.
4. F. Rajabov va boshqalar «Oliy matematika» Toshkent, «Turon-Iqbol», 2007 y.
5. F. Rajabov «Matematika» Toshkent “O`zbekiston faylasuflari milliy jamiyati nashriyoti” 2007
6. Стойлова Л.П., Пышкало А.М. «Бошланғич математика курси асослари». Ўқув қўлланма. Т. Ўқитувчи, 1991.

7. М. Юнусметов., М. Жураева, Геометрия -1, Тошкент, «Ўқитувчи» 1974 й.
8. Р. Н. Назаров Р.Н ва бошқалар. “Алгебра ва сонлар назарияси” Т. «Ўқитувчи» I-қисм 1993 й. II-қисм 1995 й.
9. Х. Сиддиқов. Ўрта Осиё, Яқин ва Ўрта Шарқ олимларининг ишларида геометрия. Т., «ФАН», 1981 й.
10. А. Хикматов , Турдиев Т. “Математик анализ”, Т. Ўқитувчи. 1990 й.
11. Hamedova N. A. va boshqalar «Matematika» Toshkent, «Turon-Iqbol», 2007 y.
12. Hamedova N. A. va boshqalar «Matematika» Toshkent, «Jahon-Print»- 2007.
13. Н.Я. Виленкин и др. «Математика» М.1977.
14. А. Б. Погарелов «Геометрия», Т. Ўқитувчи, 1990