

О.И. ФАЛЬКОВСКИЙ

---

# ТЕХНИЧЕСКАЯ ЭЛЕКТРОДИНАМИКА

Допущено  
Министерством связи СССР  
в качестве учебника  
для студентов электротехнических  
институтов связи



ИЗДАТЕЛЬСТВО «СВЯЗЬ»  
МОСКВА 1978

**Фальковский О. И.**

**Ф19** Техническая электродинамика. Учебник для вузов связи. М., «Связь», 1978.

432 с. с ил.

Систематически и подробно рассматриваются основные положения электродинамики, на их базе исследуются разнообразные линейные устройства, широко используемые в электросвязи и радиотехнике, обсуждается практическое применение этих устройств. Особое внимание уделяется четкому и последовательному введению системы понятий электродинамики и физической интерпретации получаемых результатов.

Содержание книги соответствует программе Министерства связи СССР по курсу «Техническая электродинамика». Книга предназначена для студентов электротехнических институтов связи. Она может быть полезна также студентам радиотехнических факультетов и специалистам в областях прикладной электродинамики, техники СВЧ, электроники.

**Ф** 30401—036  
045(01)—78 7—78

**6Ф2**

Рецензенты:

Кафедра технической электродинамики и антенн МЭИС  
(Г. З. АЙЗЕНБЕРГ, Ю. В. ПИМЕНОВ, А. Д. МУРАВЦОВ),  
Д. М. САЗОНОВ.

## ПРЕДИСЛОВИЕ

Содержание предлагаемого учебника соответствует программе курса «Техническая электродинамика» электротехнических институтов связи (специальности 0703, 0708, 0702). Излагаемый в книге материал читается также студентам радиотехнических специальностей вузов.

В современной электросвязи и радиотехнике широко используются различные волновые электромагнитные процессы (например, направляемые волны в разнообразных линиях передачи и линейных устройствах, излучение и прием радиоволн антеннами, распространение этих волн в среде между антеннами и др.). Их многообразные свойства и особенности могут быть рассмотрены только при помощи законов электродинамики. Техническая электродинамика как раз и занимается изучением этих законов и исследованием на их основе технических устройств, в которых применяются различные способы управления электромагнитными процессами. Благодаря этому курс технической электродинамики является теоретической основой таких специальных дисциплин, как линии связи, распространение радиоволн, антенно-фидерные устройства, электронные и квантовые приборы, а также разделов, посвященных волновым электромагнитным процессам в курсах измерений в технике связи, радиопередающих устройств, радиоприемных устройств и др. В этих дисциплинах идеи и методы технической электродинамики получают дальнейшее развитие.

Книга состоит из пяти частей. В ч. I—III систематически и подробно рассматриваются основные положения электродинамики и их применение к исследованию различных электромагнитных явлений, которые играют важную роль в технике. В ч. IV—V на основе электродинамики исследуются разнообразные линейные устройства, широко используемые в электросвязи и радиотехнике, рассматриваются принципы действия и электрические характеристики этих устройств, их практическое применение. Более полное представление о содержании книги читатель легко составит по

оглавлению. При изложении всего материала особое внимание уделяется четкому и последовательному введению системы понятий электродинамики, физической интерпретации получаемых результатов и выявлению общих закономерностей, присущих различным родственным явлениям или устройствам.

Автор выражает глубокую признательность коллективу кафедры технической электродинамики и антенн Московского электротехнического института связи, возглавляемой д-ром техн. наук проф. Г. З. Айзенбергом, и д-ру техн. наук проф. Д. М. Сазонову за тщательное рецензирование рукописи и сделанные замечания, которые были учтены при доработке учебника. Особую благодарность автор приносит д-ру техн. наук проф. Б. М. Машковцеву, который проделал большую работу по научному редактированию учебника и содействовал его улучшению.

Автор будет признателен читателям за замечания и пожелания, которые следует направлять в издательство «Связь» по адресу: 101000 Москва, Чистопрудный бульвар, 2.

*Автор*

## БУКВЕННЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ И ЕДИНИЦЫ ИЗМЕРЕНИЯ ОСНОВНЫХ ВЕЛИЧИН

- A** — векторный потенциал электрического тока, Вб/м  
**A<sub>м</sub>** — векторный потенциал магнитного тока, Кл/м  
**B** — магнитная индукция, Т  
*b* — реактивная электрическая проводимость, См  
**C** — электрическая емкость, Ф  
*c* — величина скорости электромагнитных волн в вакууме, м/с  
**D** — электрическое смещение, Кл/м<sup>2</sup>  
**E** — напряженность электрического поля, В/м  
**F** — сила, Н  
*f* — частота колебаний, Гц  
*g* — активная электрическая проводимость, См  
**H** — напряженность магнитного поля, А/м  
*i* — мгновенное значение электрического тока, А  
**J** — намагниченность, А/м  
*K<sub>б.в</sub>* — коэффициент бегущей волны  
*K<sub>с.в</sub>* — коэффициент стоячей волны  
*k* — волновое число, 1/м  
*L* — индуктивность, Г  
*M* — взаимная индуктивность, Г  
**P** — поляризованность, Кл/м<sup>2</sup>  
*p* — мгновенное значение мощности, Вт  
*p(z)* — коэффициент отражения по напряжению в линии передачи  
**Q** — электрический заряд, Кл  
*q* — активное электрическое сопротивление, Ом  
*T* — период колебаний, с  
*t* — время, с  
**V** — скорость электромагнитных волн в безграничной среде, м/с  
*w* — мгновенное значение энергии, Дж  
*x* — реактивное электрическое сопротивление, Ом  
*Y* — комплексная электрическая проводимость, См  
*Z* — комплексное электрическое сопротивление, Ом  
*Z<sub>с</sub>* — характеристическое сопротивление волны, Ом  
*Z<sub>в</sub>* — волновое сопротивление линии передачи, Ом  
 $\alpha$  — коэффициент затухания, 1/м  
 $\beta$  — коэффициент фазы, 1/м  
 $\gamma$  — коэффициент распространения, 1/м  
 $\delta$  — плотность электрического тока, А/м<sup>2</sup>  
 $\delta_m$  — плотность магнитного тока, В/м<sup>2</sup>  
 $\epsilon_a$  — абсолютная диэлектрическая проницаемость, Ф/м  
 $\epsilon_0$  — электрическая постоянная, Ф/м  
 $\eta$  — плотность поверхностного электрического тока, А/м  
 $\eta_m$  — плотность поверхностного магнитного тока, В/м  
 $\Lambda$  — длина волны в линии передачи, м  
 $\lambda$  — длина волны в безграничной среде, м  
 $\mu_a$  — абсолютная магнитная проницаемость, Г/м  
 $\mu_0$  — магнитная постоянная, Г/м  
**П** — вектор Пойнтинга, Вт/м<sup>2</sup>  
 $\rho$  — объемная плотность электрического заряда, Кл/м<sup>3</sup>  
 $\rho_m$  — объемная плотность магнитного заряда, Вб/м<sup>3</sup>  
 $\sigma$  — удельная электрическая проводимость, См/м  
 $\sigma_q$  — поверхностная плотность электрического заряда, Кл/м<sup>2</sup>  
 $\Phi$  — магнитный поток, Вб  
 $\phi$  — скалярный электрический потенциал, В  
 $\Psi$  — потокосцепление, Вб  
 $\omega$  — угловая частота, рад/с  
 $\mathcal{E}$  — электродвижущая сила, В

# Часть I

## Введение в техническую электродинамику

### Глава 1

#### ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ



##### 1.1. ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЕ ПОЛЕ И ЭЛЕКТРИЧЕСКИЙ ЗАРЯД. ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ

В создании теории электромагнитного поля очень важную роль сыграли физические воззрения М. Фарадея (вторая четверть XIX в.) и их развитие и воплощение в стройной математической теории Дж. К. Максвеллом (60—70 гг. XIX в.). Основная идея Фарадея состояла в признании *физической реальности процессов*, происходящих в среде, которая окружает электрические заряды и контуры с током. Выдвинутый Фарадеем *принцип близкодействия в электромагнетизме* утверждает, что всякое взаимодействие зарядов и токов может осуществляться только через промежуточную среду последовательно от точки к точке этой среды с конечной скоростью распространения.

Математическую формулировку законов электромагнитного поля дал Максвелл, полностью воспринявший идеи Фарадея. Теория Максвелла объединяла все известные в то время законы электромагнетизма и содержала гениальные предположения о глубокой связи, существующей между электрическими и магнитными явлениями. Именно эти предположения дополнили теорию электромагнитного поля новой идеей о существовании токов смещения и привели к созданию системы *уравнений Максвелла*, справедливых для любых электромагнитных полей в любых средах.

Анализируя свои уравнения, Максвелл пришел к выводу, что изменяющееся во времени электромагнитное поле может существовать в виде распространяющихся в пространстве электромагнитных волн, которые оказывают давление на вещество и распространяются со скоростью, равной скорости света. На основании последнего положения Максвелл выдвинул идею об электромагнитной природе света.

Результаты теории Максвелла были подтверждены опытами Г. Герца и П. Н. Лебедева. В конце 80-х гг. XIX в. Герц получил электромагнитные волны, существование которых было предсказано Максвеллом. Опыты Герца показали, что с электромаг-

нитными волнами можно проводить те же эксперименты по отражению, преломлению, интерференции и дифракции, что и со светом. Эти эксперименты доказали общую физическую природу световых и электромагнитных волн. В самом конце XIX в. русский физик П. Н. Лебедев провел непревзойденные по мастерству опыты, которые позволили очень точно определить величину светового давления на твердые тела и газы, теоретически предсказанного Максвеллом.

Ярче всего торжество теории электромагнитного поля проявилось в изобретении радиосвязи нашим соотечественником А. С. Поповым (1895 г.), которое привело к широкому практическому использованию электромагнитного поля.

Дальнейшее развитие науки об электромагнетизме и создание А. Эйнштейном специальной теории относительности (1905 г.) привели к пониманию того, что электромагнитное поле является особым видом материи, качественно отличным от вещества.

Любая обладающая электрическим зарядом частица вещества (например, положительно заряженный протон, отрицательно заряженный электрон) всегда взаимосвязана с ее собственным электромагнитным полем. Однако электромагнитное поле может существовать и в свободном состоянии, не связанное с заряженными частицами вещества, — излученное ускоренно движущимися заряженными частицами и распространяющееся в вакууме электромагнитное поле.

Подобно веществу электромагнитное поле обладает энергией, массой, количеством движения (импульсом) и моментом количества движения, т. е. теми универсальными свойствами материи, которые подчиняются всеобщим законам сохранения и обусловлены несотворимостью и неуничтожимостью материи и ее движения.

Вместе с тем электромагнитное поле обладает особыми электромагнитными свойствами, которые оправдывают представление о нем как об особом виде материи.

Важнейшей отличительной особенностью внешнего по отношению к заряженной частице (т. е. не ее собственного) электромагнитного поля является его способность оказывать силовое воздействие на эту частицу, которое зависит от ее скорости.

Обычно используемые на практике явления не требуют знания подробностей сложных электромагнитных процессов, происходящих в микроскопических, атомных масштабах. В большинстве технических задач интерес представляют электромагнитные явления, протекающие в макроскопическом масштабе наблюдения, характеризующие усредненными или макроскопическими значениями электромагнитных величин и изучаемые классической электродинамикой.

Электромагнитное поле в макроскопическом масштабе наблюдения характеризуется непрерывностью его распределения в пространстве. С течением времени происходит распространение поля в пространстве. Распространяющееся электромагнитное поле на-

зывают электромагнитной волной. Поскольку объемная плотность массы электромагнитного поля весьма мала, то в вакууме при отсутствии сильных гравитационных полей скорость распространения электромагнитного поля в свободном состоянии всегда постоянна и равна скорости света, которая близка к  $3 \cdot 10^8$  м/с.

Классическая (макроскопическая) электродинамика приписывает полю лишь волновые свойства, а элементарным частицам — корпускулярные. С макроскопической точки зрения частицы вещества не могут накладываться друг на друга в пространстве, а электромагнитные поля этим свойством обладают — в одном и том же объеме может существовать одновременно множество электромагнитных полей. В условиях макроскопического наблюдения вещество и электромагнитное поле могут быть взаимно пронизываемыми, занимать один и тот же объем и влиять друг на друга.

Процессы теплового электромагнитного излучения и фотоэффекта, электромагнитные явления, происходящие в микроскопических, атомных масштабах, могут быть объяснены только в результате познания законов микромира, изучаемых квантовой электродинамикой. В микроскопических масштабах наблюдения важнейшими свойствами материи являются единство корпускулярной и волновой природы всех микрообъектов (корпускулярно-волновой дуализм) и взаимопревращаемость различных видов материи, выражением которой является возможность микрообъектов переходить при определенных условиях друг в друга.

В микроскопическом масштабе наблюдения протяженное электромагнитное поле следует рассматривать как состоящее из независимых друг от друга дискретных микрообъектов — фотонов, обладающих двойственной корпускулярно-волновой природой. Фотоны не имеют массы покоя, всегда распространяются со скоростью света в вакууме и целиком поглощаются или излучаются атомами. Фотоны электромагнитных полей очень высокой частоты обладают относительно большой энергией и могут превращаться в пары заряженных элементарных частиц вещества (например, электрон и позитрон). Возможно и обратное превращение — так называемое явление аннигиляции пар. Эта взаимопревращаемость отражает существующую в микромире связь различных видов материи.

Электромагнитное поле и электрический заряд представляют собой первые основные понятия, относящиеся к физическим явлениям электромагнетизма. Следствием принципиальной тесной взаимосвязи между этими явлениями оказывается то важное обстоятельство, что полное определение электромагнитного поля не может быть дано без использования понятия об обладающих электрическим зарядом частицах вещества точно так же, как и электрический заряд не может быть полностью определен без использования понятия об электромагнитном поле.

Принимая во внимание все сказанное выше, можно дать следующие определения электромагнитного поля и электрического заряда [36].

*Электромагнитное поле есть особый вид материи, отличающийся непрерывным распределением в пространстве (электромагнитные волны, поле заряженных частиц) и обнаруживающий дискретность структуры (фотоны), характеризующийся в свободном состоянии способностью распространения в вакууме (при отсутствии сильных гравитационных полей) со скоростью, близкой к  $3 \cdot 10^8$  м/с, оказывающий на заряженные частицы силовое воздействие, зависящее от их скорости.*

*Электрический заряд есть свойство частиц материи (вещества) или тел, характеризующее их взаимосвязь с собственным электромагнитным полем и их взаимодействие с внешним электромагнитным полем; имеет два вида, известные как положительный заряд (заряд протона, позитрона и др.) и отрицательный заряд (заряд электрона и др.); количественно определяется по силовому взаимодействию тел, обладающих электрическими зарядами.*

## **1.2. ЭЛЕКТРИЧЕСКОЕ И МАГНИТНОЕ ПОЛЯ КАК ДВЕ СТОРОНЫ ЕДИНОГО ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ**

При исследовании электромагнитного поля обнаруживаются две формы его проявления, две стороны — электрическое поле и магнитное поле, которым можно дать следующие определения [36].

*Электрическое поле есть одна из двух сторон электромагнитного поля, обусловленная электрическими зарядами и изменением магнитного поля, оказывающая силовое воздействие на заряженные частицы и тела и выявляемая по силовому воздействию на неподвижные заряженные тела и частицы.*

*Магнитное поле есть одна из двух сторон электромагнитного поля, обусловленная электрическими зарядами движущихся заряженных частиц и тел и изменением электрического поля, оказывающая силовое воздействие на движущиеся заряженные частицы и выявляемая по силовому воздействию, направленному нормально к направлению движения этих частиц и пропорциональному их скорости.*

Разделение всегда единого объективно существующего в природе электромагнитного поля на электрическое и магнитное поля имеет относительный характер, т. е. зависит от выбора инерциальной системы координат, в которой исследуется электромагнитное поле.

Обратимся к следующему простому примеру. Предположим, что в некоторой системе координат  $K$  электрические заряды покоятся. Следовательно, в соответствии с данными выше определениями при исследовании электромагнитного поля этих зарядов в системе  $K$  будет установлено, что в рассматриваемой области пространства электрическое поле существует, а магнитное поле отсутствует. Предположим теперь, что другая система координат  $K'$  движется относительно системы  $K$  равномерно и прямолинейно. Неподвижные относительно системы  $K$  заряды будут двигаться в системе  $K'$ . Следовательно, при исследовании электромаг-

нитного поля этих зарядов в системе  $K'$  будет установлено, что в той же области пространства теперь уже существует не только электрическое, но и магнитное поле. Таким образом, результаты измерения *одного и того же электромагнитного поля* в двух различных равноправных системах  $K$  и  $K'$  будут отличаться друг от друга. Однако из величин, характеризующих электрическое и магнитное поля, можно составить соотношения, которые остаются неизменными при переходе от одной инерциальной системы координат к другой и являются инвариантными количественными характеристиками электромагнитного поля. Эти соотношения представляют собой математическое выражение того факта, что только *совокупность* электрического и магнитного полей имеет смысл, не зависящий от выбора системы координат.

Именно вследствие того, что разделение всегда единого объективно существующего электромагнитного поля на две его стороны — электрическое и магнитное поля — имеет относительный характер, в приведенных выше определениях электрического и магнитного полей принципиально нельзя было обойти зависимость одного из них от другого.

## **Глава 2**

### **ОСНОВНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ, ХАРАКТЕРИЗУЮЩИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЕ ПОЛЕ. УРАВНЕНИЯ ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ В ИНТЕГРАЛЬНОЙ ФОРМЕ**



#### **2.1. СВЯЗАННЫЕ И СВОБОДНЫЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ЗАРЯДЫ**

Различают два рода элементарных электрических зарядов — связанные и свободные. Связанные заряды входят в состав электрически нейтральных молекул либо представляют собой положительные и отрицательные ионы, закрепленные в твердых веществах в узлах ионной решетки таким образом, что возможно разбиение этой решетки на элементарные ячейки, каждая из которых является электрически нейтральной.

К свободным зарядам прежде всего следует отнести все заряды, которые могут перемещаться на макроскопические расстояния<sup>1)</sup> и образовывать тем самым электрический ток проводимости или переноса (отщепившиеся от атомов электроны в металлах, заряженные частицы в вакууме, ионы в ионизированных газах и

---

<sup>1)</sup> Т. е. расстояния, которые велики по сравнению с расстоянием между молекулами вещества или узлами ионной решетки.

электролитах и т. д.). Кроме того, сюда относят заряды, находящиеся на поверхности диэлектриков и нарушающие их нейтральность, а также заряды ионной решетки твердых веществ, образовавшиеся из-за недостатка в рассматриваемой области вещества ионов определенного знака, что не позволяет разбить решетку на элементарные электрически нейтральные ячейки.

Единицей измерения электрического заряда (количества электричества) в Международной системе единиц (СИ), которая используется в этой книге, является кулон (Кл).

## 2.2. ПЛОТНОСТЬ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ЗАРЯДА

При определении макроскопических значений электромагнитных величин важную роль играют понятия физической бесконечно малых элементов объема  $dV$ , поверхности  $dS$  и длины  $dl$ . Эти элементы характеризуются такими линейными размерами, которые одновременно удовлетворяют следующим двум условиям: во-первых, они очень велики по сравнению с микроскопическими неоднородностями среды и поля (т. е. по сравнению с расстоянием между молекулами вещества); во-вторых, они очень малы по сравнению с макроскопическими неоднородностями среды и поля.

Макроскопическое распределение свободного электрического заряда в объеме характеризуют *объемной плотностью заряда*  $\rho$ . Для определения  $\rho$  в некоторой точке выделим вокруг нее физически бесконечно малый элемент объема  $dV$ , внутри которого алгебраическая сумма свободных зарядов равна  $dQ$ . Объемная плотность электрического заряда в точке наблюдения определяется формулой

$$\rho = dQ/dV \quad (2.1)$$

и равна свободному заряду, приходящемуся в окрестности рассматриваемой точки на единицу объема. Единицей измерения  $\rho$  является кулон на кубический метр (Кл/м<sup>3</sup>).

В силу первого условия, предъявляемого к линейным размерам  $dV$ , внутри него содержится огромное число элементарных частиц, что исключает зависимость  $\rho$  от микроскопических неоднородностей, обусловленных атомистической структурой зарядов. В силу второго условия заряд  $dQ$  следует считать распределенным по  $dV$  равномерно, что исключает зависимость  $\rho$  от выбранного элемента объема.

Отметим, что значение в точке наблюдения  $\rho=0$  еще не означает отсутствия в окрестности этой точки движущихся свободных зарядов, образующих электрический ток. Например, внутри металла в  $dV$  сумма отрицательных зарядов свободных электронов может быть равна сумме зарядов положительных ионов, вследствие чего  $dQ=0$  и  $\rho=0$ .

В некоторых случаях можно считать свободный заряд  $Q$  распределенным по поверхности  $S$ . Такой заряд называют *поверхностным*, а его макроскопическое распределение характеризуют по-

верхностной плотностью электрического заряда  $\sigma_Q$ :

$$\sigma_Q = dQ/dS, \quad (2.2)$$

которая измеряется в кулонах на квадратный метр (Кл/м<sup>2</sup>).

### 2.3. НАПРЯЖЕННОСТЬ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ПОЛЯ $E$ . ПОТОК ВЕКТОРА $E$

Напряженность электрического поля  $E$  характеризует силовое воздействие электрического поля на электрические заряды. На малый пробный заряд  $Q$  в точке наблюдения электрическое поле действует с силой  $F$ , определяемой формулой

$$F = QE. \quad (2.3)$$

Вектор  $E$  численно равен силе, с которой электрическое поле действует в данный момент времени в рассматриваемой точке на единичный положительный заряд. Единицей измерения напряженности электрического поля в системе единиц СИ является вольт на метр ( $\frac{В}{м}$ ):  $[E] = \frac{[F]}{[Q]} = \frac{Н}{Кл} = \frac{В}{м}$

Силовое поле  $E$  можно наглядно изобразить при помощи векторных (силовых) линий напряженности электрического поля<sup>1)</sup>. Векторную линию проводят таким образом, чтобы касательная к ней в любой точке совпадала с направлением вектора  $E$  в этой точке (рис. 2.1). На рисунке векторные линии снабжают стрелками, указывающими направление вектора  $E$ .

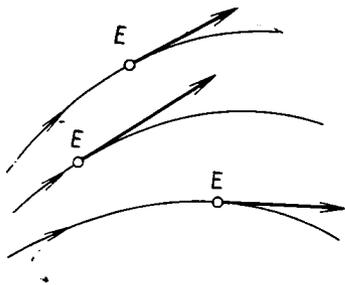


РИС. 2.1

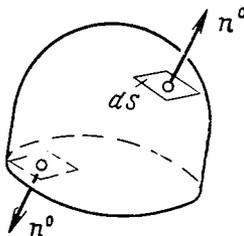


РИС. 2.2

Построение картины векторных линий принято проводить так, чтобы их густота (плотность) была пропорциональна модулю (величине) вектора поля.

Рассмотрим в векторном поле  $E$  элементарную поверхность  $dS$ , в пределах которой  $E$  можно считать постоянным по величине и направлению, и выберем положительное направление нормали к  $dS$ , которое будем характеризовать безразмерным единичным вектором (ортом)  $n^0$ . В соответствии с правилом векторной алгебры элемент поверхности принято изображать вектором, ве-

<sup>1)</sup> Все сказанное ниже о построении картины векторных линий  $E$  будет справедливо по отношению к любому векторному полю.

личина которого равна площади элемента, а направление совпадает с  $\mathbf{n}^0$ :

$$d\mathbf{S} = \mathbf{n}^0 dS. \quad (2.4)$$

Элементарным потоком  $d\Phi_s$  вектора  $\mathbf{E}$  сквозь площадку  $dS$  в направлении положительной нормали  $\mathbf{n}^0$  называют скалярное произведение

$$d\Phi_s = \mathbf{E} d\mathbf{S} = EdS \cos(\mathbf{E}, \mathbf{n}^0). \quad (2.5)$$

Из (2.5) следует, что элементарный поток  $d\Phi_s$  есть скалярная величина, знак которой зависит от того, какую из двух нормалей к  $dS$  приняли за положительную.

Поток вектора  $\mathbf{E}$  сквозь поверхность  $S$  конечных размеров определяется выражением

$$\Phi_s = \int_S d\Phi_s = \int_S \mathbf{E} d\mathbf{S}. \quad (2.6)$$

Поверхность  $S$  может быть *замкнутой*. В этом случае условились всегда считать положительной *внешнюю* нормаль  $\mathbf{n}^0$ , которая направлена *наружу* по отношению к объему, ограниченному замкнутой поверхностью (рис. 2.2). Поток вектора  $\mathbf{E}$  сквозь замкнутую поверхность  $S$  в направлении внешней нормали выражается формулой

$$\Phi_s = \oint_S \mathbf{E} d\mathbf{S}. \quad (2.7)$$

На тех участках замкнутой поверхности  $S$ , где вектор  $\mathbf{E}$  направлен внутрь ограниченного ею объема, элементарные потоки  $d\Phi_s$  будут отрицательными, а на тех участках, где  $\mathbf{E}$  направлен наружу, — положительными. Если обратиться к наглядной картине векторных линий  $\mathbf{E}$  и учесть, что каждый элементарный поток  $d\Phi_s$  пропорционален числу линий, пронизывающих соответствующую площадку  $dS$ , то нулевое значение потока (2.7) можно условно интерпретировать как равенство числа векторных линий, входящих внутрь объема, ограниченного замкнутой поверхностью  $S$ , и выходящих наружу. Положительное (отрицательное) значение  $\Phi_s$  соответствует представлению, что число векторных линий, выходящих наружу, больше (меньше), чем число линий, входящих внутрь. В свою очередь, это означает, что внутри объема, ограниченного  $S$ , существуют истоки (стоки) векторного поля  $\mathbf{E}$ , в которых векторные линии начинаются (оканчиваются).

#### 2.4. ОБОБЩЕНИЕ ЗАКОНА ГАУССА. ЭЛЕКТРИЧЕСКОЕ СМЕЩЕНИЕ $\mathbf{D}$

Для электростатических полей (т. е. электрических полей неподвижных макроскопических зарядов) в вакууме на основании закона Кулона в курсе физики был получен закон Гаусса. Он устанавливает связь между потоком вектора  $\mathbf{E}$  сквозь произволь-

ную замкнутую поверхность  $S$  и алгебраической суммой  $Q$  свободных электрических зарядов, заключенных внутри этой поверхности:

$$\oint_S \mathbf{E} d\mathbf{S} = Q/\epsilon_0, \quad (2.8)$$

где  $\epsilon_0$  — коэффициент пропорциональности, называемый *электрической постоянной*. В системе единиц СИ электрическая постоянная

$$\epsilon_0 = \frac{1}{36\pi} \cdot 10^{-9} \frac{\Phi}{\text{м}}.$$

Рассмотрим теперь закон Гаусса для диэлектриков (веществ, в которых свободные электрические заряды имеются в ничтожном количестве).

Под действием сил внешнего электростатического поля изменяются средние положения связанных зарядов, входящих попарно ( $+Q_0, -Q_0$ ) в состав молекул. В неполярных молекулах это приводит к образованию упорядоченно направленных элементарных электрических диполей, обладающих электрическими моментами:

$$\mathbf{p} = Q_0 l \mathbf{l}^0 = Q_0 l, \quad (2.9)$$

где  $Q_0$  — величина заряда,  $\mathbf{l}^0$  — единичный вектор, определяющий направление смещения положения положительного заряда,  $l$  — расстояние, на которое расходятся друг относительно друга средние положения зарядов. Электрический момент диполя измеряется в кулон-метрах (Кл·м). Если же и в отсутствие поля молекулы обладали электрическими моментами (полярные молекулы), то под воздействием внешнего поля появляется направление преимущественной ориентации этих моментов.

Возникновение упорядоченно ориентированных элементарных электрических моментов приводит к *электрической поляризации* вещества. Это состояние вещества характеризуется тем, что электрический момент данного объема вещества отличен от нуля.

Степень электрической поляризации в каждой точке диэлектрика количественно характеризует векторная величина *поляризованности*  $\mathbf{P}$ :

$$\mathbf{P} = \frac{\sum_i \mathbf{p}_i}{dV}, \quad (2.10)$$

где в числителе стоит геометрическая сумма элементарных электрических моментов поляризованного диэлектрика в физически бесконечно малом элементе объема  $dV$ , окружающей рассматриваемую точку. Из (2.10) следует, что поляризованность  $\mathbf{P}$  в некоторой точке численно равна электрическому моменту, приходящемуся в окрестности этой точки на единицу объема вещества. Поляризованность  $\mathbf{P}$  измеряется в Кл/м<sup>2</sup>.

Выделим мысленно в поляризованном диэлектрике произвольно ориентированный элемент поверхности  $dS$ , который «рассечет» некоторые элементарные диполи (рис. 2.3). Вследствие упорядоченной ориентации этих диполей и их «рассечения» с обеих сторон элемента поверхности  $dS$  образуются равные по величине, но противоположные по знаку избыточные связанные заряды. В курсе физики показано (например, [50]), что избыточный связанный заряд  $dQ_{св}$ , образовавшийся в результате поляризации диэлектрика с той стороны элемента  $dS$ , в которую направлен  $\mathbf{n}^0$ , равен потоку вектора  $\mathbf{P}$  сквозь  $dS$ :

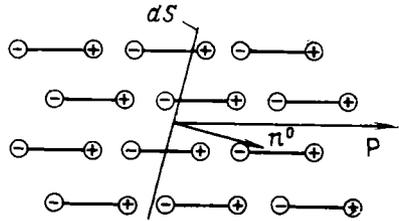


РИС. 2.3

$$dQ_{св} = \mathbf{P} dS. \quad (2.11)$$

Выделим мысленно в объеме поляризованного диэлектрика произвольную замкнутую поверхность  $S$ , охватывающую заряд  $Q$ . Очевидно, что в результате поляризации диэлектрика снаружи этой поверхности образовался избыточный связанный заряд

$$Q_{св.нар} = \oint_S \mathbf{P} dS, \quad (2.12)$$

а внутри поверхности — равный ему по величине, но противоположный по знаку избыточный связанный заряд

$$Q_{св.вн} = - \oint_S \mathbf{P} dS. \quad (2.13)$$

Физически электрическое поле существует между молекулами диэлектрика; влияние диэлектрика на величину напряженности электрического поля в нем обусловлено возникновением внутри поверхности  $S$  заряда  $Q_{св.вн}$ . Поэтому для диэлектрика необходимо видоизменить ф-лу (2.8) следующим образом:

$$\oint_S \mathbf{E} dS = \frac{Q + Q_{св.вн}}{\epsilon_0} \quad \text{или} \quad \oint_S \mathbf{E} dS = \frac{1}{\epsilon_0} \left( Q - \oint_S \mathbf{P} dS \right). \quad (2.14)$$

Представим равенство (2.14) в следующем виде:

$$\oint_S (\epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}) dS = Q. \quad (2.15)$$

Введя обозначение

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}, \quad (2.16)$$

где вектор  $\mathbf{D}$  измеряется в кулонах на квадратный метр ( $\text{Кл}/\text{м}^2$ ), получаем вместо (2.15) соотношение

$$\oint_S \mathbf{D} dS = Q. \quad (2.17)$$

Закон Гаусса для зарядов в диэлектрике (2.17) строго доказывается лишь для электростатических полей. Максвелл обобщил этот закон, постулировав справедливость соотношения (2.17) для произвольных вещественных сред (а не только диэлектриков) и любых зарядов и полей, как угодно изменяющихся во времени и пространстве. Выводы теории электромагнитного поля, которая принимает этот постулат в качестве одного из основных своих положений, полностью подтверждаются опытом. Следовательно, *обобщенный закон Гаусса* правильно отражает объективные законы природы.

Определяемый соотношением (2.16) вектор  $\mathbf{D}$  называют *электрическим смещением*. Он представляет собой, по существу, геометрическую сумму двух различных векторных физических величин: напряженности электрического поля в рассматриваемой точке, умноженной на электрическую постоянную, и поляризованности вещества в той же точке. Однако введение вектора  $\mathbf{D}$  очень упрощает описание электрических полей в веществе — поля, обусловленные одними и теми же свободными зарядами, характеризуются в любых веществах и вакууме одними и теми же значениями вектора  $\mathbf{D}$ . Это положение, в частности, иллюстрируется ф-лой (2.17). Поэтому наряду с напряженностью электрического поля  $\mathbf{E}$ , которая определяет силовое действие *резльтирующего* поля (обусловленного как свободными, так и связанными зарядами), вектор  $\mathbf{D}$  представляет собой основную величину, характеризующую электрическое поле в каждой его точке.

Если, например, внутри замкнутой поверхности  $S$   $Q > 0$ , то согласно (2.17) внутри  $S$  существуют истоки векторного поля  $\mathbf{D}$  (ср. § 2.3), причем чем больше значение  $Q$ , тем больше векторных линий  $\mathbf{D}$  начинается внутри  $S$ .

Обобщенный закон Гаусса (2.17) выражает взаимосвязь, существующую в любых средах между электрическими зарядами и электрическим полем, и представляет собой один из основных законов электродинамики в интегральной форме.

## 2.5. КЛАССИФИКАЦИЯ СРЕД ПО ИХ МАКРОСКОПИЧЕСКИМ ПАРАМЕТРАМ. АБСОЛЮТНАЯ ДИЭЛЕКТРИЧЕСКАЯ ПРОНИЦАЕМОСТЬ

Макроскопическое рассмотрение электромагнитных процессов в веществе позволяет отвлечься от его атомистической, дискретной структуры. При этом само вещество выступает как непрерывная среда. Влияние различных вещественных сред на протекающие в них электромагнитные процессы учитывается введением особых макроскопических параметров, одни из которых характеризуют электрические свойства среды, другие — магнитные.

Среды по их макроскопическим параметрам разделяются на изотропные и анизотропные, линейные и нелинейные, однородные и неоднородные. В этом параграфе рассмотрим особенности та-

кой классификации сред по их электрическому свойству поляризоваться.

*Изотропной* называют среду, физические свойства которой одинаковы по всем направлениям в каждой ее точке. В изотропной по отношению к электрическому полю среде электрические моменты элементарных диполей имеют преимущественную ориентацию параллельно напряженности электрического поля. При этом векторы поляризованности (2.10) и, следовательно, электрического смещения (2.16) оказываются параллельными вектору  $\mathbf{E}$ .

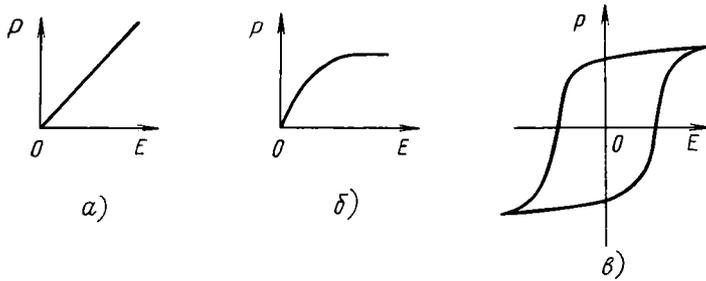


РИС. 2.4

*Линейной* называют среду, свойства которой не зависят от величины векторов поля. В веществе, которое по своим электрическим свойствам изотропно и линейно, вектор поляризованности  $\mathbf{P}$  оказывается пропорциональным вектору  $\mathbf{E}$  (рис. 2.4а):

$$\mathbf{P} = \varepsilon_0 k_s \mathbf{E}, \quad (2.18)$$

где безразмерный коэффициент пропорциональности  $k_s$  называют *диэлектрической восприимчивостью*. Диэлектрическая восприимчивость является макроскопическим параметром, характеризующим электрическое свойство вещества поляризоваться, и зависит от физико-химических особенностей данного вещества.

К линейным изотропным средам относится, например, большинство диэлектриков: воздух, фторопласт, полиэтилен, полистирол, парафин и т. д.

Подставив (2.18) в (2.16), получаем для изотропной линейной среды

$$\mathbf{D} = \varepsilon_a \mathbf{E}, \quad (2.19)$$

где

$$\varepsilon_a = \varepsilon_0 (1 + k_s) \quad (2.20)$$

— параметр, измеряемый в фарадах на метр (Ф/м) и называемый *абсолютной диэлектрической проницаемостью*.

Соотношение (2.19) устанавливает связь между векторами электрического поля  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{D}$  в каждой точке изотропной линейной среды и показывает, что в этой среде вектор  $\mathbf{D}$  линейно зависит от вектора  $\mathbf{E}$  и совпадает с ним по направлению.



В вакууме отсутствуют частицы вещества, вследствие чего  $k_3=0$ ,  $\mathbf{P}=0$  и

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E}. \quad (2.21)$$

Следовательно, абсолютная диэлектрическая проницаемость вакуума в системе единиц СИ численно равна электрической постоянной  $\epsilon_0$ .

Иногда электрическое свойство среды поляризоваться характеризуют путем ее сравнения с вакуумом. Для этой цели используют понятие *диэлектрической проницаемости*<sup>1)</sup>

$$\epsilon = \epsilon_a / \epsilon_0 = 1 + k_3. \quad (2.22)$$

*Нелинейной* называют среду, свойства которой зависят от величины векторов поля. В среде, которая по своим электрическим свойствам изотропна и нелинейна, поляризованность  $\mathbf{P}$  характеризуется нелинейной зависимостью от  $\mathbf{E}$  (рис. 2.4б) и даже может иметь нелинейный гистерезисный характер (рис. 2.4в). Вещества, у которых зависимость  $P(E)$  имеет нелинейный гистерезисный характер, называют ферроэлектриками или сегнетоэлектриками (к ним относятся сегнетова соль и ряд других веществ).

*Анизотропной* называют среду, физические свойства которой различны по разным направлениям. В анизотропной по отношению к электрическому полю среде смещение связанных зарядов может происходить не параллельно направлению вектора  $\mathbf{E}$ , а в несколько ином направлении, вдоль которого действие препятствующих смещению внутримолекулярных сил выражено наиболее слабо. В анизотропном линейном веществе вектор  $\mathbf{P}$  уже не будет совпадать по направлению с вектором  $\mathbf{E}$ ; из ф-лы (2.16) следует, что и вектор  $\mathbf{D}$  не будет совпадать по направлению с вектором  $\mathbf{E}$ . Если в частном случае вектор  $\mathbf{E}$  направлен по оси  $x$  ( $\mathbf{E} = x^0 \mathbf{E}_x$ ), то в анизотропной линейной среде вектор  $\mathbf{D}$  может иметь все три составляющие:  $D_x = \epsilon_0 \epsilon_{xx} E_x$ ;  $D_y = \epsilon_0 \epsilon_{yx} E_x$ ;  $D_z = \epsilon_0 \epsilon_{zx} E_x$ . В общем случае каждая составляющая  $\mathbf{D}$  зависит от всех трех составляющих  $\mathbf{E}$ :

$$\begin{aligned} D_x &= \epsilon_0 (\epsilon_{xx} E_x + \epsilon_{xy} E_y + \epsilon_{xz} E_z); & D_y &= \epsilon_0 (\epsilon_{yx} E_x + \epsilon_{yy} E_y + \epsilon_{yz} E_z); \\ D_z &= \epsilon_0 (\epsilon_{zx} E_x + \epsilon_{zy} E_y + \epsilon_{zz} E_z). \end{aligned} \quad (2.23)$$

Совокупность действий (2.23), которые необходимо произвести в случае анизотропной линейной среды над составляющими вектора  $\mathbf{E}$  для получения составляющих вектора  $\mathbf{D}$ , записывают в матричной (табличной) форме

$$\mathbf{D} = \overset{\leftrightarrow}{\epsilon_0} \mathbf{E} = \overset{\leftrightarrow}{\epsilon_0} \begin{bmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{bmatrix}. \quad (2.24)$$

<sup>1)</sup> Параллельный термин — относительная диэлектрическая проницаемость.

Фигурирующая в (2.24) матрица

$$\leftrightarrow \epsilon = \begin{bmatrix} \epsilon_{xx} & \epsilon_{xy} & \epsilon_{xz} \\ \epsilon_{yx} & \epsilon_{yy} & \epsilon_{yz} \\ \epsilon_{zx} & \epsilon_{zy} & \epsilon_{zz} \end{bmatrix} \quad (2.25)$$

носит название *тензора диэлектрической проницаемости*.

К анизотропным средам относятся кристаллические вещества, электрические свойства которых различны по главным кристаллографическим осям и, следовательно, поляризация которых зависит от направления вектора  $\mathbf{E}$  относительно этих осей (например, кварц, исландский шпат). Важным примером анизотропной среды является плазма (ионизированный газ), находящаяся под воздействием постоянного магнитного поля. Такая плазма обладает анизотропными электрическими свойствами для переменного электромагнитного поля (см. гл. 16).

*Однородной* называют среду, параметры которой имеют одно и то же значение во всех ее точках, т. е. не являются функциями координат. Например, изотропная линейная однородная среда характеризуется условием  $\epsilon_a(\mathbf{R}) = \text{const}$ . *Неоднородной* называют среду, параметры которой непрерывно меняются от точки к точке и представляют собой некоторые функции пространственных координат.

## 2.6. ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ТОКИ ПРОВОДИМОСТИ И ПЕРЕНОСА. ПЛОТНОСТЬ ТОКА

Электрические токи проводимости и переноса представляют собой упорядоченное движение свободных электрических зарядов, всегда сопровождаемое наличием магнитного поля. Электрический ток (проводимости или переноса) в каждой точке области его существования характеризует вектор *плотности тока*  $\delta$ . Направление плотности тока совпадает с направлением движения положительных зарядов в рассматриваемой точке или соответственно противоположно направлению движения отрицательных зарядов. Модуль плотности тока  $\delta$  равен абсолютной величине электрического заряда, переносимого в окрестности рассматриваемой точки за единицу времени сквозь единицу поверхности, ориентированной перпендикулярно к направлению движения зарядов.

Единицей измерения плотности электрического тока в системе единиц СИ является ампер на квадратный метр:  $[\delta] = [Q]/[t][L^2] = \text{Кл}/\text{с} \cdot \text{м}^2 = \text{А}/\text{м}^2$ .

Абсолютная величина *тока* (силы тока) проводимости или переноса  $|di|$  *сквозь произвольный элемент поверхности*  $dS$  равна величине заряда, переносимого сквозь этот элемент в единицу времени, и измеряется в амперах (А). Ток  $di$  определяется потоком вектора  $\delta$  сквозь  $dS$  в направлении положительной нормали  $\mathbf{n}^0$ :

$$di = \delta dS = \delta \cos(\delta, \mathbf{n}^0) dS = \delta_n dS, \quad (2.26)$$

где  $\delta_n = \delta \cos(\delta, \mathbf{n}^0)$  — проекция вектора  $\delta$  на нормаль  $\mathbf{n}^0$  к  $dS$  (рис. 2.5). Справедливость (2.26) следует из того, что касательная к  $dS$  составляющая плотности тока  $\delta_\tau$  определяет перенос заряда только *вдоль* элемента поверхности и не характеризует его перенос *сквозь*  $dS$ .

Электрический ток  $di$  (2.26) есть скалярная величина, знак которой определяется знаком  $\cos(\delta, \mathbf{n}^0)$  и, следовательно, зави-

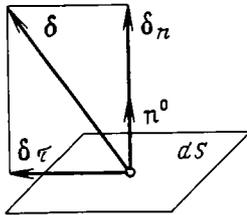


РИС. 2.5

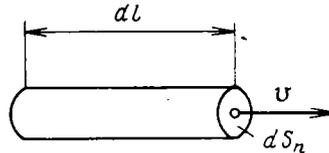


РИС. 2.6

сит от того, какую из двух нормалей к  $dS$  приняли за положительную.

Ток сквозь поверхность конечных размеров  $S$  равен потоку вектора  $\delta$  сквозь эту поверхность:

$$i = \int_S di = \int_S \delta dS. \quad (2.27)$$

Выразим плотность тока через объемную плотность заряда *движущихся* частиц  $\rho'$  и их среднюю скорость  $\mathbf{v}$ . Для этого выделим мысленно физически бесконечно малый цилиндр, основание которого ориентировано нормально к направлению движения частиц, а объем равен  $dV = dl dS_n$  (рис. 2.6). Заряд, находящийся внутри цилиндра и равный  $dQ' = \rho' dV$ , пройдет через поверхность  $dS_n$  за время  $dt = dl/v$ . Следовательно, абсолютная величина тока, проходящего через поверхность  $dS_n$ ,

$$|di| = |dQ'|/dt = |\rho'| V dS_n, \quad (2.28)$$

откуда величина плотности тока

$$\delta = |di|/dS_n = |\rho'| V. \quad (2.29)$$

В векторной форме

$$\delta = \rho' \mathbf{v}. \quad (2.30)$$

Электрический ток *проводимости* представляет собой упорядоченное движение свободных заряженных частиц под действием электрического поля в веществе, обладающем электропроводностью<sup>1)</sup>.

<sup>1)</sup> Электропроводностью называют свойство вещества проводить постоянный электрический ток под действием постоянного электрического поля.

В изотропном линейном веществе, обладающем электропроводностью, смещение свободных положительных зарядов происходит в направлении вектора  $\mathbf{E}$ . При этом характерной особенностью тока проводимости является приобретение частицами определенной средней скорости движения в направлении  $\mathbf{E}$ , пропорциональной величине напряженности электрического поля. В соответствии с ф-лой (2.30) это означает, что *плотность тока проводимости* должна быть пропорциональна  $\mathbf{E}$ , т. е.

$$\delta_{\text{пр}} = \sigma \mathbf{E}. \quad (2.31)$$

Коэффициент пропорциональности  $\sigma$  называют *удельной электрической проводимостью*. Удельная электрическая проводимость является макроскопическим параметром, характеризующим электрическое свойство вещества создавать ток проводимости, и зависит от физико-химических особенностей данного вещества. Среды, характеризующиеся значениями  $\sigma > 0$ , называют проводящими.

Из (2.31) легко установить единицу измерения удельной электрической проводимости:

$$[\sigma] = \frac{[\delta]}{[E]} = \frac{\text{А/м}^2}{\text{В/м}} = \frac{1}{\text{Ом} \cdot \text{м}} = \frac{\text{сименс}}{\text{м}} \left( \frac{\text{См}}{\text{м}} \right).$$

Соотношение (2.31) устанавливает связь между входящими в него величинами, взятыми в одной и той же точке среды, и носит название *закона Ома в дифференциальной форме*. Из него легко получить хорошо известный закон Ома для участка электрической цепи.

Отметим, что у постоянных во времени токов, протекающих в проводниках, поперечные размеры которых малы по сравнению с их длиной, плотность тока  $\delta_{\text{пр}}$  во всех точках поперечного сечения проводника  $S$  постоянна по величине и направлена перпендикулярно к поперечному сечению. В этом случае можно говорить о направлении всего тока проводимости  $I_{\text{пр}}$ , которое будет совпадать с осью проводника.

*Ток переноса*, или *ток конвекции* представляет собой упорядоченное движение свободных заряженных частиц (или тел) в среде, не обладающей электропроводностью. Важными примерами тока переноса является движение заряженных частиц в вакууме или между электродами в сильно разряженном газе. Для *плотности тока переноса* будем использовать обозначение  $\delta_{\text{пер}}$ .

## 2.7. МАГНИТНАЯ ИНДУКЦИЯ В. МАГНИТНЫЙ ПОТОК

*Магнитная индукция*  $\mathbf{B}$  характеризует силовое воздействие магнитного поля на движущиеся электрические заряды.

На малый пробный движущийся заряд  $Q$  магнитное поле действует с силой  $\mathbf{F}$ , определяемой формулой

$$\mathbf{F} = Q [\mathbf{vB}], \quad (2.32)$$

где  $\mathbf{v}$  — скорость заряда;  $\mathbf{B}$  — магнитная индукция. Из (2.32) следует, что действующая на движущийся заряд со стороны магнит-

ного поля сила  $\mathbf{F}$  нормальна к плоскости, содержащей векторы  $\mathbf{v}$  и  $\mathbf{B}$ . Если вектор  $\mathbf{v}$  перпендикулярен вектору  $\mathbf{B}$ , то величина силы  $F$  будет наибольшей. В этом случае при  $Q > 0$   $\mathbf{v}$ ,  $\mathbf{B}$  и  $\mathbf{F}_{\text{макс}}$  образуют взаимно перпендикулярную (ортогональную) правую тройку векторов (рис. 2.7). Зная  $F_{\text{макс}}$  и соответствующую ей ско-

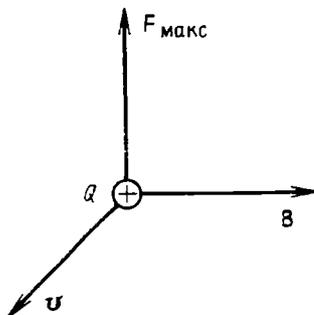


РИС. 2.7



РИС. 2.8

рость  $\mathbf{v}$ , можно определить направление магнитной индукции  $\mathbf{B}$  и ее величину:

$$B = F_{\text{макс}}/Qv. \quad (2.33)$$

Единицей измерения магнитной индукции в системе единиц СИ является тесла:

$$[B] = \frac{[F]}{[Q][v]} = \frac{\text{Н}}{\text{Кл} \cdot \text{м/с}} = \frac{\text{Кл} \cdot \text{В/м}}{\text{Кл} \cdot \text{м/с}} = \frac{\text{В} \cdot \text{с}}{\text{м}^2} = \frac{\text{вебер}}{\text{м}^2} \left( \frac{\text{Вб}}{\text{м}^2} \right) = \text{тесла (Т)}.$$

Поток вектора  $\mathbf{B}$  сквозь некоторую поверхность  $S$  называют *магнитным потоком*  $\Phi$  сквозь эту поверхность:

$$\Phi = \int_S \mathbf{B} d\mathbf{S}. \quad (2.34)$$

Единицей измерения магнитного потока в системе единиц СИ является вебер (Вб).

## 2.8. ПРИНЦИП НЕПРЕРЫВНОСТИ МАГНИТНОГО ПОТОКА

Важной особенностью магнитного поля является *непрерывность* векторных линий магнитной индукции  $\mathbf{B}$ , которые не имеют ни начала, ни конца. Причиной непрерывности линий  $\mathbf{B}$  является отсутствие в природе магнитных зарядов, которые могли бы являться такими же источниками магнитного поля, какими являются электрические заряды по отношению к электрическому полю. Магнитное поле обусловлено только электрическими токами, к которым относится и электрический ток смещения, представляю-

ший собой явление изменения электрического поля во времени (см. § 2.11). При этом линии  $\mathbf{B}$ , охватывающие собой электрические токи, всегда непрерывны.

Благодаря непрерывности линий  $\mathbf{B}$  магнитный поток сквозь любую замкнутую поверхность равен нулю:

$$\oint_S \mathbf{B} d\mathbf{S} = 0. \quad (2.35)$$

Соотношение (2.35) называют *принципом непрерывности магнитного потока*. Оно является одним из основных законов электродинамики в интегральной форме.

Вследствие непрерывности линий  $\mathbf{B}$  магнитные потоки сквозь любые поверхности, ограниченные одним и тем же замкнутым контуром  $L$ , одинаковы. На рис. 2.8 изображены две произвольные поверхности  $S_1$  и  $S_2$ , ограниченные контуром  $L$ . Сумма поверхностей  $S_1$  и  $S_2$  образует замкнутую поверхность, для которой согласно (2.35) имеем

$$\oint_{S_1+S_2} \mathbf{B} d\mathbf{S} = 0 \quad (2.36)$$

или

$$\int_{S_1} \mathbf{B} d\mathbf{S} = - \int_{S_2} \mathbf{B} d\mathbf{S}. \quad (2.37)$$

Если же полагать, что положительные нормали к  $S_1$  и  $S_2$  направлены в одну и ту же сторону, то вместо (2.37) получим

$$\int_{S_1} \mathbf{B} d\mathbf{S} = \int_{S_2} \mathbf{B} d\mathbf{S}. \quad (2.38)$$

## 2.9. ОБОБЩЕНИЕ ЗАКОНА ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ ИНДУКЦИИ

Поместим замкнутый проводящий контур  $L$  во внешнее магнитное поле с индукцией  $\mathbf{B}$ .

Из курса физики известно, что изменение во времени магнитного потока  $\Phi$  сквозь поверхность  $S$ , ограниченную контуром  $L$ , сопровождается возникновением в этом контуре электродвижущей силы (ЭДС)  $\mathcal{E}$ . Электродвижущая сила в замкнутом контуре определяется циркуляцией вектора  $\mathbf{E}$  вдоль этого контура:

$$\mathcal{E} = \oint_L \mathbf{E} d\mathbf{l} \quad (2.39)$$

и измеряется в вольтах.

Под действием ЭДС  $\mathcal{E}$  в проводящем контуре возникает электрический ток проводимости, который можно измерить прибором, включенным в контур, и тем самым обнаружить экспериментально индуцированное электрическое поле  $\mathbf{E}$ . Точно поставленный опыт показывает, что величина электродвижущей силы  $\mathcal{E}$  равна скорости изменения магнитного потока  $\Phi$  во времени. Если усло-

виться, что выбранное в (2.39) положительное направление обхода контура  $L$  и положительная нормаль  $\mathbf{n}^0$  к поверхности  $S$  образуют *правовинтовую систему* (рис. 2.9), то сформулированный выше закон принимает вид

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt} \text{ или } \oint_L \mathbf{E} d\mathbf{l} = -\frac{d}{dt} \int_S \mathbf{B} d\mathbf{S}. \quad (2.40)$$

Закон электромагнитной индукции (2.40) для проводящего контура был открыт Фарадеем экспериментальным путем.

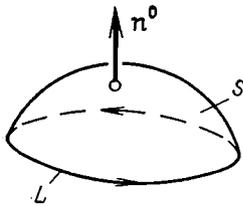


РИС. 2.9

Максвелл обобщил этот закон, постулировав справедливость ф-лы (2.40) для совершенно произвольного замкнутого контура, который может быть и воображаемым контуром, проходящим через любые среды. Этот постулат называют *обобщенным законом электромагнитной индукции*. Он правильно отражает объективные законы природы, так как выводы теории электромагнитного поля, которая принимает этот постулат в качестве одного из основных своих положений, полностью подтверждаются опытом.

При исследовании электромагнитных явлений в неподвижных вещественных средах обобщенный закон электромагнитной индукции (2.40) справедлив лишь для неподвижных контуров  $L$ .

Поскольку магнитный поток  $\int_S \mathbf{B} d\mathbf{S}$  остается одним и тем же при любых изменениях и деформациях поверхности  $S$ , ограниченной неподвижным контуром  $L$ , то изменение  $d\Phi/dt$  в рассматриваемом случае обусловлено только изменением магнитной индукции  $\mathbf{B}$  во времени (а поверхность  $S$  можно считать неподвижной). Это обстоятельство отмечают введением в (2.40) знака частной производной по времени:

$$\oint_L \mathbf{E} d\mathbf{l} = -\frac{\partial}{\partial t} \int_S \mathbf{B} d\mathbf{S} = -\int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} d\mathbf{S}. \quad (2.41)$$

В (2.41) производную по времени можно было внести под знак интеграла, так как при неизменной во времени поверхности  $S$  интегрирование и дифференцирование производятся по независимым переменным.

Обобщенный закон электромагнитной индукции (2.41) является одним из основных законов электродинамики в интегральной форме для неподвижных сред. Этот закон утверждает, что при изменении во времени магнитного поля в той же области пространства появляется связанное с ним электрическое поле.

**2.10. СВЯЗЬ МЕЖДУ ПОСТОЯННЫМ ЭЛЕКТРИЧЕСКИМ ТОКОМ  
И ОБУСЛОВЛЕННЫМ ИМ МАГНИТНЫМ ПОЛЕМ.  
НАПРЯЖЕННОСТЬ МАГНИТНОГО ПОЛЯ Н**

Между постоянными электрическими токами (например, проводимости), протекающими всегда по замкнутым контурам<sup>1)</sup>, и обусловленным ими в вакууме магнитным полем, характеризуемым вектором магнитной индукции  $\mathbf{B}$ , существует следующее количественное соотношение, которое представляет собой обобщение опытных данных:

$$\oint_L \mathbf{B} d\mathbf{l} = \mu_0 I, \quad (2.42)$$

где  $L$  — произвольный замкнутый контур в вакууме;  $\mu_0$  — коэффициент пропорциональности, называемый *магнитной постоянной*;  $I$  — алгебраическая сумма токов сквозь произвольную поверхность, ограниченную контуром интегрирования.

В системе единиц СИ магнитная постоянная

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ Г/м.}$$

При вычислении алгебраической суммы токов  $I$  положительными следует считать те токи, направление которых образует с выбранным положительным направлением обхода контура  $L$  пра-

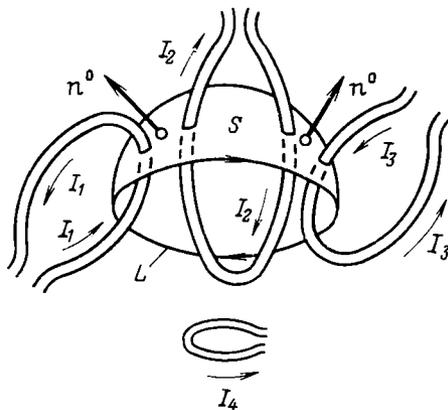


РИС. 2.10

винтовую систему; токи противоположного направления нужно считать отрицательными. Например, для изображенного на рис. 2.10 случая

$$I = I_1 - I_3, \quad (2.43)$$

<sup>1)</sup> При незамкнутом контуре происходит накопление заряда, сопровождающееся изменением электрического тока.

так как ток  $I_2$  2 раза входит в алгебраическую сумму — со знаком плюс и со знаком минус.

Алгебраическая сумма токов сквозь поверхность  $S$  определится известным соотношением

$$I = \int_S \delta dS, \quad (2.44)$$

причем направление положительной нормали к ограниченной контуром поверхности  $S$  и направление обхода контура  $L$  должны быть связаны по правилу правого винта (рис. 2.10).

Рассмотрим теперь связь между магнитным полем и обуславливающими его постоянными токами в вещественных средах.

Внутри любого вещества существуют замкнутые элементарные электрические токи, которые являются результатом орбитального движения электронов и обладают магнитными моментами  $\mathbf{m}$ , равными

$$\mathbf{m} = i_0 \mathbf{s}_0. \quad (2.45)$$

Здесь  $\mathbf{s}_0 = \mathbf{n}^0 s_0$  — векторный элемент плоской площадки, ограниченной контуром с током  $i_0$ , причем направление положительной нормали  $\mathbf{n}^0$  к площадке (и направление  $\mathbf{m}$ ) связано с направле-

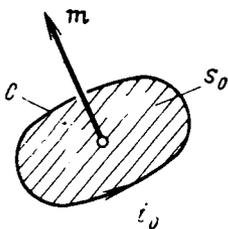


РИС. 2.11

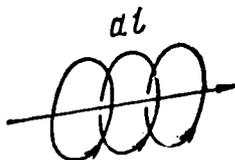


РИС. 2.12

нием тока  $i_0$  в контуре правилом правого винта (рис. 2.11). Магнитный момент  $\mathbf{m}$  измеряется в  $\text{А} \cdot \text{м}^2$ .

Кроме магнитного момента, обусловленного орбитальным движением, каждому электрону присущ собственный или спиновый момент, наличие которого может быть сведено к действию эквивалентного элементарного тока.

При воздействии на вещество внешнего магнитного поля в ориентировке элементарных токов появляется некоторая упорядоченность. Этот процесс, в результате которого данный объем вещества приобретает отличный от нуля магнитный момент, называют *намагничиванием*.

Состояние вещества, возникающее в результате намагничивания, в каждой его точке количественно характеризует векторная

величина намагниченности  $\mathbf{J}$ :

$$\mathbf{J} = \frac{\sum_i m_i}{dV}, \quad (2.46)$$

где в числителе стоит геометрическая сумма магнитных моментов элементарных токов в физически бесконечно малом элементе объема  $dV$ , окружающем рассматриваемую точку. Из (2.46) следует, что намагниченность  $\mathbf{J}$  в некоторой точке численно равна магнитному моменту, приходящемуся в окрестности этой точки на единицу объема вещества. Намагниченность  $\mathbf{J}$  измеряется в А/м.

Проведем мысленно в объеме намагниченного вещества произвольный замкнутый контур  $L$  и применим к нему соотношение (2.42). Физически магнитное поле существует между молекулами вещества; влияние вещества на величину магнитной индукции в нем обусловлено появлением упорядоченных элементарных токов. Поэтому при установлении взаимосвязи между магнитным полем в веществе и обуславливающими его токами необходимо видоизменить ф-лу (2.42) следующим образом:

$$\oint_L \mathbf{B} d\mathbf{l} = \mu_0 (I + I_{эл}), \quad (2.47)$$

где  $I$  — как и прежде, алгебраическая сумма всех макроскопических токов сквозь поверхность, ограниченную контуром интегрирования  $L$ ;  $I_{эл}$  — алгебраическая сумма всех элементарных токов сквозь эту же поверхность.

Нетрудно сообразить, что величину алгебраической суммы  $I_{эл}$  будут определять лишь те элементарные токи, которые охватывают собой контур интегрирования  $L$  (сцепляются с этим контуром). На рис. 2.12 изображены элементарные токи, охватывающие собой элемент  $d\mathbf{l}$  контура  $L$ .

В курсе физики показано (например, [50]), что алгебраическую сумму элементарных токов, сцепляющихся с контуром  $L$ , определяет циркуляция намагниченности  $\mathbf{J}$  по этому контуру:

$$I_{эл} = \oint_L \mathbf{J} d\mathbf{l}. \quad (2.48)$$

Подставляя (2.48) в (2.47), получим формулу

$$\oint_L \mathbf{B} d\mathbf{l} = \mu_0 \left( I + \oint_L \mathbf{J} d\mathbf{l} \right). \quad (2.49)$$

Перепишем равенство (2.49) следующим образом:

$$\oint_L (\mathbf{B}/\mu_0 - \mathbf{J}) d\mathbf{l} = I. \quad (2.50)$$

Введя обозначение

$$\mathbf{H} = \mathbf{B}/\mu_0 - \mathbf{J}, \quad (2.51)$$

где вектор  $\mathbf{H}$  измеряется в амперах на метр (А/м), получаем вместо (2.50) соотношение

$$\oint_L \mathbf{H} d\mathbf{l} = I. \quad (2.52)$$

Определяемый соотношением (2.51) вектор  $\mathbf{H}$  называют *напряженностью магнитного поля*. Он представляет собой, по существу, геометрическую разность двух различных векторных физических величин: магнитной индукции в рассматриваемой точке, деленной на магнитную постоянную, и намагниченности вещества в той же точке. Однако введение вектора  $\mathbf{H}$  очень упрощает описание магнитных полей в веществе — поля, обусловленные одними и теми же макроскопическими токами, характеризуются в любых веществах и вакууме одними и теми же значениями вектора  $\mathbf{H}$ . Это положение, в частности, иллюстрируется ф-лой (2.52). Поэтому наряду с магнитной индукцией  $\mathbf{B}$ , которая определяет силовое действие *резльтирующего поля* (обусловленного как макроскопическими, так и элементарными токами), вектор  $\mathbf{H}$  представляет собой основную величину, характеризующую магнитное поле в каждой его точке.

### 2.11. СИММЕТРИЯ МЕЖДУ ЭЛЕКТРИЧЕСКИМИ И МАГНИТНЫМИ ЯВЛЕНИЯМИ. ТОК СМЕЩЕНИЯ

Допустим, что рассматривается электромагнитный процесс в такой пространственной области, в которой отсутствуют свободные электрические заряды и токи проводимости или переноса (например, в диэлектрике). В этом случае обобщенный закон Гаусса (2.17) принимает вид

$$\oint_S \mathbf{D} d\mathbf{S} = 0; \quad (2.53a)$$

принцип непрерывности магнитного потока (2.35) и обобщенный закон электромагнитной индукции (2.41) не изменяют своего вида:

$$\oint_S \mathbf{B} d\mathbf{S} = 0; \quad (2.53б)$$

$$\oint_L \mathbf{E} d\mathbf{l} = - \int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} d\mathbf{S}. \quad (2.53в)$$

Если предположить, что полученное экспериментальным путем для постоянных токов и обусловленного ими магнитного поля соотношение (2.52) справедливо и для переменных процессов, то оно в рассматриваемом случае принимает вид

$$\oint_L \mathbf{H} d\mathbf{l} = 0. \quad (2.53г)$$

В ур-ниях (2.53) электрическое и магнитное поля фигурируют не на равных правах: переменное во времени магнитное поле обладает способностью возбуждать электрическое поле [ф-ла (2.53в)], а переменное во времени электрическое поле такой способностью в отношении магнитного поля не обладает [ф-ла (2.53г)].

Это неравноправие электрического и магнитного полей было расценено Максвеллом как существенный недостаток теории, который должен быть устранен. Решающим новым шагом, сделанным Максвеллом при создании стройной теории электромагнетизма, явилась постулированная им симметрия между электрическим и магнитным полями в отношении их способности возбуждать друг друга. Математическим выражением этой идеи является замена соотношения (2.53г) формулой вида (2.53в), которая при учете единиц измерения векторов электромагнитного поля принимает следующий вид:

$$\oint_L \mathbf{H} d\mathbf{l} = \int_S \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} d\mathbf{S}. \quad (2.54)$$

Правильность постулированного Максвеллом соотношения (2.54) подтверждается тем, что вытекающие из него теоретические следствия находятся в полном соответствии с опытом.

Перепишем ф-лу (2.54) следующим образом:

$$\oint_L \mathbf{H} d\mathbf{l} = \int_S \delta_{\text{см}} d\mathbf{S}, \quad (2.55)$$

где

$$\delta_{\text{см}} = \partial \mathbf{D} / \partial t \quad (2.56)$$

и измеряется в А/м<sup>2</sup>.

Сопоставление (2.55) с (2.52) и (2.44) показывает, что эти соотношения имеют одинаковый вид. Следовательно, величина

$$i_{\text{см}} = \int_S \delta_{\text{см}} d\mathbf{S}, \quad (2.57)$$

характеризуемая в каждой точке вектором  $\delta_{\text{см}}$  и обусловленная переменным электрическим полем, создает магнитное поле точно по такому же закону, что и ток  $I$ , характеризующийся в каждой точке плотностью тока  $\delta$ . Поскольку важнейшим проявлением электрического тока является существование обусловленного им магнитного поля, то величины  $i_{\text{см}}$  и  $\delta_{\text{см}}$  по своему физическому смыслу оказываются аналогичными электрическому току  $I$  и плотности тока  $\delta$ . Вследствие этого Максвелл назвал величину  $i_{\text{см}}$  *током смещения*, а вектор  $\delta_{\text{см}}$  — *плотностью тока смещения*.

## 2.12. ЗАКОН СОХРАНЕНИЯ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ЗАРЯДА В ИНТЕГРАЛЬНОЙ ФОРМЕ. ПРИНЦИП НЕПРЕРЫВНОСТИ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ТОКА

Закон сохранения электрического заряда утверждает, что изменение электрического заряда в любой пространственной области может происходить только вследствие перемещения зарядов.

Следовательно, физической причиной, вызывающей изменение во времени свободного заряда  $Q$  внутри объема  $V$ , ограниченного замкнутой неподвижной поверхностью  $S$ , являются только токи проводимости и переноса сквозь эту поверхность. При этом значение  $\partial Q/\partial t < 0$  обусловлено перемещением положительных зарядов из объема  $V$  наружу сквозь поверхность  $S$  (либо отрицательных зарядов в противоположном направлении). Поскольку у замкнутой поверхности положительной является внешняя нормаль, то это перемещение зарядов сквозь  $S$  соответствует положительному значению суммы токов проводимости и переноса

$$i_{\text{пр}} + i_{\text{пер}} = \oint_S \delta dS. \quad (2.58)$$

Здесь  $\delta$  есть значение либо  $\delta_{\text{пр}}$ , либо  $\delta_{\text{пер}}$  в рассматриваемой точке поверхности  $S$  (см. § 2.6).

Таким образом, при приравнивании значения  $\frac{\partial Q}{\partial t}$  сумме токов (2.58) следует изменить знак перед одной из частей равенства:

$$\oint_S \delta dS = -\frac{\partial Q}{\partial t}. \quad (2.59)$$

Соотношение (2.59) остается справедливым и в случае  $\partial Q/\partial t > 0$ . Оно является математической формулировкой в интегральной форме закона сохранения электрического заряда.

Рассмотрим принцип непрерывности электрического тока. Полагая в обобщенном законе Гаусса (2.17) замкнутую поверхность  $S$  неподвижной и взяв производную по времени, получаем

$$\oint_S \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} d\mathbf{S} = \frac{\partial Q}{\partial t}. \quad (2.60)$$

Воспользовавшись выражениями (2.56) и (2.59), имеем вместо (2.60)

$$\oint_S \delta_{\text{см}} d\mathbf{S} = -\oint_S \delta d\mathbf{S} \quad (2.61)$$

или

$$i_{\text{см}} = -(i_{\text{пр}} + i_{\text{пер}}). \quad (2.62)$$

Полным электрическим током сквозь некоторую поверхность  $S$  (незамкнутую или замкнутую) называют сумму токов проводи-

мости, переноса и смещения сквозь эту поверхность:

$$i_{\text{поля}} = i_{\text{пр}} + i_{\text{пер}} + i_{\text{см}}. \quad (2.63)$$

В каждой точке этот ток характеризуется *плотностью полного тока*  $\delta_{\text{полн}}$ , определяемой формулой

$$\delta_{\text{полн}} = \delta + \delta_{\text{см}}, \quad (2.64)$$

причем

$$i_{\text{полн}} = \int_S \delta_{\text{полн}} dS. \quad (2.65)$$

Переносим все члены ф-л (2.61) и (2.62) в левую сторону, получаем соотношение

$$i_{\text{полн}} = \oint_S \delta_{\text{полн}} dS = 0, \quad (2.66)$$

которое выражает *принцип непрерывности электрического тока* в интегральной форме. Этот принцип утверждает, что полный электрический ток сквозь *любую замкнутую* поверхность всегда равен нулю. Векторные линии  $\delta_{\text{полн}}$  всегда непрерывны (ср. § 2.8).

### 2.13. ЗАКОН ПОЛНОГО ТОКА

Очень важную роль в электромагнитных процессах играет постулированный Максвеллом *закон полного тока*, являющийся одним из основных законов электродинамики в интегральной форме:

$$\oint_L \mathbf{H} d\mathbf{l} = i_{\text{полн}} = \int_S \left( \delta + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) dS, \quad (2.67)$$

где  $i_{\text{полн}}$  представляет собой полный ток сквозь произвольную поверхность  $S$ , ограниченную контуром интегрирования  $L$ ; положительная нормаль к  $S$  и направление обхода контура  $L$  образуют правинтовую систему.

Закон полного тока устанавливает количественную связь в интегральной форме между магнитным полем, характеризуемым вектором  $\mathbf{H}$ , и обуславливающими его причинами — упорядоченным движением свободных заряженных частиц (токи проводимости и переноса) и изменением во времени электрического поля (ток смещения).

### 2.14. МАГНИТНЫЕ СВОЙСТВА СРЕД

Принципиально каждая вещественная среда под влиянием внешнего магнитного поля намагничивается, т. е. является магнетиком. В соответствии с классификацией сред, введенной в § 2.5, вещества по своим магнитным свойствам разделяются на изотропные и анизотропные, линейные и нелинейные, однородные и неоднородные.

В изотропном магнетике под воздействием магнитного поля элементарные токи упорядочиваются таким образом, что их магнитные моменты имеют преимущественную ориентацию параллельно магнитной индукции в среде. При этом намагниченность (2.46), а следовательно, и напряженность магнитного поля (2.51) оказываются параллельными вектору  $\mathbf{B}$ .

В изотропном и линейном магнетике вектор намагниченности  $\mathbf{J}$  не только параллелен  $\mathbf{B}$ , но и пропорционален ему:

$$\mathbf{J} = a \mathbf{B}, \quad (2.68)$$

где  $a$  — коэффициент пропорциональности [ср. ф-лу (2.18)].

Подставив (2.68) в (2.51), получаем

$$\mathbf{H} = (1/\mu_0 - a) \mathbf{B}. \quad (2.69)$$

Однако по исторически сложившейся традиции ур-ние (2.69) принято записывать в виде

$$\mathbf{B} = \mu_a \mathbf{H}, \quad (2.70)$$

где  $\mu_a$  — параметр, характеризующий макроскопические магнитные свойства среды, зависящий от ее физико-химических особенностей, измеряемый в Г/м, и называемый *абсолютной магнитной проницаемостью*.

Подчеркнем, что если получаемое из (2.51) соотношение

$$\mathbf{B} = \mu_0 (\mathbf{H} + \mathbf{J}) \quad (2.71)$$

справедливо для *каких угодно* вещественных сред, то ф-ла (2.70) устанавливает связь между векторами магнитного поля  $\mathbf{B}$  и  $\mathbf{H}$  в каждой точке изотропной линейной среды.

В соответствии с соотношением (2.70) и намагниченность  $\mathbf{J}$  принято выражать не через  $\mathbf{B}$ , а через  $\mathbf{H}$ :

$$\mathbf{J} = a \mu_a \mathbf{H} = k_m \mathbf{H}, \quad (2.72)$$

где безразмерный коэффициент пропорциональности  $k_m$  называют *магнитной восприимчивостью*. Магнитная восприимчивость является макроскопическим параметром, характеризующим свойство вещества намагничиваться в магнитном поле.

Из ф-л (2.70) — (2.72) следует, что

$$\mu_a = \mu_0 (1 + k_m). \quad (2.73)$$

В вакууме отсутствуют частицы вещества, вследствие чего  $k_m = 0$ ,  $\mathbf{J} = 0$  и

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}. \quad (2.74)$$

Следовательно, абсолютная магнитная проницаемость вакуума в системе единиц СИ численно равна магнитной постоянной  $\mu_0$ .

Иногда магнитные свойства вещества характеризуют путем их сравнения со свойствами вакуума. Для этой цели используют понятие *магнитной проницаемости*<sup>1)</sup>

$$\mu = \mu_a / \mu_0 = 1 + k_m. \quad (2.75)$$

<sup>1)</sup> Параллельный термин — относительная магнитная проницаемость.

Изотропные линейные магнетики разделяются на две группы — парамагнетики и диамагнетики. Парамагнитные вещества под действием внешнего поля намагничиваются по направлению этого поля. У них векторы  $\mathbf{J}$  и  $\mathbf{H}$  направлены в одну сторону, т. е.  $k_m > 0$ ,  $\mu > 1$ ,  $\mu_a > \mu_0$ . К парамагнетикам относятся, например, кислород, редкоземельные элементы, платина, алюминий.

Диамагнитные вещества под действием внешнего поля намагничиваются в направлении, обратном этому полю. У этих веществ вектор  $\mathbf{J}$  направлен противоположно вектору  $\mathbf{H}$ , т. е.  $k_m < 0$ ,  $\mu < 1$ ,  $\mu_a < \mu_0$ . К диамагнетикам относятся, например, инертные газы, углерод, вода, ртуть, серебро, медь.

Парамагнетики и диамагнетики весьма слабо проявляют магнитные свойства — у них  $|k_m| \ll 1$  и соответственно  $\mu \approx 1$ . Поэтому в теоретических исследованиях часто полагают для этих веществ  $\mu_a = \mu_0$ ,  $\mu = 1$ .

Нелинейными магнетиками являются ферромагнетики, к которым относят ферромагнитные металлы (железо, никель, кобальт и их сплавы) и ферриты (представляющие собой магнитоэлектрики). У ферромагнетиков зависимость  $J(H)$  [а также  $B(H)$ ] имеет нелинейный гистерезисный характер (рис. 2.13). В ферромагнетике при уменьшении до нуля напряженности магнитного поля сохраняется остаточная намагниченность. Тело, длительно сохраняющее остаточную намагниченность, называют постоянным магнитом.

В анизотропных линейных магнетиках векторы  $\mathbf{J}$ ,  $\mathbf{H}$  и  $\mathbf{B}$  не будут параллельными друг другу. В этом случае связь между векторами магнитного поля  $\mathbf{B}$  и  $\mathbf{H}$  устанавливается соотношением, аналогичным (2.24):

$$\mathbf{B} = \mu_0 \overset{\leftrightarrow}{\mu} \mathbf{H} = \mu_0 \overset{\leftrightarrow}{\mu} \begin{bmatrix} H_x \\ H_y \\ H_z \end{bmatrix}, \quad (2.76)$$

где

$$\overset{\leftrightarrow}{\mu} = \begin{bmatrix} \mu_{xx} & \mu_{xy} & \mu_{xz} \\ \mu_{yx} & \mu_{yy} & \mu_{yz} \\ \mu_{zx} & \mu_{zy} & \mu_{zz} \end{bmatrix} \quad (2.77)$$

есть тензор магнитной проницаемости.

Важным примером анизотропных магнетиков могут служить ферриты, находящиеся под воздействием постоянного магнитного поля. Такие ферриты приобретают анизотропные магнитные свой-

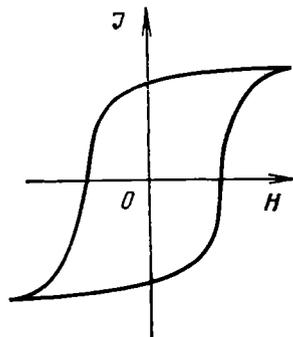


РИС. 2.13

ства для переменного электромагнитного поля, что широко используется в технике (см. гл. 16 и 25).

У изотропных линейных однородных магнетиков магнитная проницаемость  $\mu_a$  не является функцией пространственных координат, у неоднородных магнетиков магнитная проницаемость есть некоторая функция координат.

## Глава 3

### УРАВНЕНИЯ ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ В ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ФОРМЕ. ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ



#### 3.1. ЗАКОН ПОЛНОГО ТОКА И ОБОБЩЕННЫЙ ЗАКОН ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ ИНДУКЦИИ В ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ФОРМЕ

Уравнения электродинамики в интегральной форме характеризуют электромагнитный процесс в некотором объеме, ограниченном замкнутой поверхностью, или вдоль некоторого замкнутого контура и позволяют получить лишь суммарный (интегральный) эффект. При исследовании электромагнитного поля более важно, а подчас и необходимо уметь находить определяющие его векторные поля в каждой точке области их существования.

В тех областях пространства, где векторные поля непрерывны и дифференцируемы, для этой цели прежде всего нужно знать *уравнения электродинамики в дифференциальной форме* (уравнения Максвелла), в которых эти векторные поля выражаются через их вихри и истоки. При переходе точки наблюдения через границу раздела двух сред с различными параметрами векторы электромагнитного поля изменяются скачкообразно. Поэтому на границах раздела уравнения электродинамики в дифференциальной форме не применимы и должны быть заменены *граничными условиями*, определяющими поведение векторов поля при переходе через эти границы.

Уравнения в дифференциальной форме и граничные условия получают из уравнений электродинамики в интегральной форме.

В законе полного тока в интегральной форме (2.67) преобразуем левую часть при помощи теоремы Стокса (П1.6)<sup>1)</sup>:

$$\int_S \operatorname{rot} \mathbf{H} d\mathbf{S} = \int_S \left( \mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) d\mathbf{S}. \quad (3.1)$$

<sup>1)</sup> Ссылки на формулы из приложений начинаются с буквы П.

ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЕ ПОЛЕ

Соотношение (3.1) справедливо для *любой* поверхности  $S$ , что возможно только в том случае, когда равны подинтегральные выражения, т. е.

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \mathfrak{d} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}. \quad (3.2)$$

Это уравнение устанавливает связь между входящими в него величинами в каждой точке пространства, представляет собой *закон полного тока в дифференциальной форме* и называется первым уравнением Максвелла. Оно выражает тот физический факт, что электрический ток любого вида (проводимости, переноса, смещения) сопровождается существованием связанного с ним магнитного поля. При этом выполняется следующее количественное соотношение: в каждой точке пространства в каждый момент времени вектор плотности полного тока  $\mathfrak{d}_{\text{полн}} = \mathfrak{d} + \partial \mathbf{D} / \partial t$  есть вихрь вектора  $\mathbf{H}$  в этой же точке в этот же момент времени. Следовательно, если в некоторой точке существует вектор плотности полного тока ( $\mathfrak{d}_{\text{полн}} \neq 0$ ), то в окрестности этой же точки существует изменяющееся в пространстве магнитное поле ( $\operatorname{rot} \mathbf{H} \neq 0$ ).

Поступая таким же образом, получим из обобщенного закона электромагнитной индукции в интегральной форме (2.41) следующее уравнение:

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = - \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}. \quad (3.3)$$

Это уравнение относится к каждой точке пространства, представляет собой *обобщенный закон электромагнитной индукции в дифференциальной форме* и называется вторым уравнением Максвелла. Оно выражает следующий физический факт: изменяющееся во времени магнитное поле сопровождается существованием связанного с ним электрического поля. Если в некоторой точке  $\partial \mathbf{B} / \partial t \neq 0$ , то в окрестности этой же точки существует изменяющееся в пространстве электрическое поле ( $\operatorname{rot} \mathbf{E} \neq 0$ ).

### 3.2. ОБОБЩЕННЫЙ ЗАКОН ГАУССА И ПРИНЦИП НЕПРЕРЫВНОСТИ МАГНИТНОГО ПОТОКА В ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ФОРМЕ

Фигурирующий в обобщенном законе Гаусса (2.17) свободный заряд  $Q$ , который находится внутри замкнутой поверхности  $S$ , выразим согласно (2.1) через объемную плотность заряда  $\rho$ :

$$Q = \int_V dQ = \int_V \rho dV, \quad (3.4)$$

где  $V$  — объем, ограниченный поверхностью  $S$ .

Преобразовав левую часть (2.17) при помощи теоремы Остроградского—Гаусса (П1.5) и воспользовавшись (3.4), имеем

$$\int_V \operatorname{div} \mathbf{D} dV = \int_V \rho dV. \quad (3.5)$$

Это равенство справедливо для *любого* объема  $V$ , что возможно лишь в случае, когда равны подинтегральные выражения, т. е.

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = \rho. \quad (3.6)$$

Уравнение (3.6) справедливо в каждой точке пространства и представляет собой *обобщенный закон Гаусса в дифференциальной форме*. Оно выражает тот физический факт, что истоком или стоком векторного поля  $\mathbf{D}$  является объемная плотность электрического заряда  $\rho$ . Согласно (3.6) векторные линии  $\mathbf{D}$  начинаются в тех точках, в которых  $\rho > 0$ , и оканчиваются в тех точках, в которых  $\rho < 0$ . Скалярная функция  $\rho$  обуславливает потенциальную составляющую вектора  $\mathbf{D}$  (см. приложение 1, п. 1.7).

Применив к левой части (2.35) теорему Остроградского—Гаусса, получим

$$\int_V \operatorname{div} \mathbf{B} dV = 0, \quad (3.7)$$

где  $V$  — *произвольный* объем интегрирования в векторном поле  $\mathbf{B}$ . Если интеграл от некоторой функции равен нулю при произвольной области интегрирования, то это означает, что сама функция должна быть тождественно равна нулю, т. е.

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0. \quad (3.8)$$

Это соотношение представляет собой *принцип непрерывности магнитного потока в дифференциальной форме* и утверждает, что векторное поле  $\mathbf{B}$  никогда не имеет истоков и является соленоидальным (см. приложение 1, п. 1.7).

### **3.3. ЗАКОН СОХРАНЕНИЯ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ЗАРЯДА И ПРИНЦИП НЕПРЕРЫВНОСТИ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ТОКА В ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ФОРМЕ**

Выразив правую часть (2.59) через объемную плотность заряда  $\rho$  и применив к левой части теорему Остроградского—Гаусса, имеем

$$\int_V \operatorname{div} \boldsymbol{\varepsilon} dV = - \int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV. \quad (3.9)$$

Поскольку это равенство справедливо для *любого* объема  $V$ , то

$$\operatorname{div} \boldsymbol{\varepsilon} = - \frac{\partial \rho}{\partial t}. \quad (3.10)$$

Формула (3.10) выражает *закон сохранения электрического заряда в дифференциальной форме* и часто называется уравнением непрерывности. Она устанавливает связь в каждой точке среды между величинами, характеризующими источники электромагнитного поля. В соответствии с (3.10) векторные линии  $\boldsymbol{\delta}_{\text{пр}}$  или  $\boldsymbol{\delta}_{\text{пер}}$  начинаются в тех точках, в которых  $\partial \rho / \partial t < 0$  (что соответствует уносу положительных зарядов из окрестности рассматри-

ваемой точки либо приносу отрицательных зарядов), и оканчиваются в тех точках, в которых  $\partial\rho/\partial t > 0$ .

Из (2.66) легко получить [ср. вывод ф-лы (3.8)] уравнение

$$\operatorname{div} \delta_{\text{полн}} = 0. \quad (3.11)$$

Оно выражает принцип непрерывности электрического тока в дифференциальной форме и показывает, что векторное поле  $\delta_{\text{полн}}$  является соленоидальным.

### 3.4. СИСТЕМА УРАВНЕНИЙ ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ В ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ФОРМЕ

Для неподвижных сред система уравнений макроскопической электродинамики в дифференциальной форме была сформулирована Максвеллом и получила название *уравнений Максвелла*. Эта система представляет собой объединение основных законов электродинамики, принимаемых как результат обобщения опытных данных и рассматриваемых в качестве аксиом. Все остальные закономерности электродинамики выводятся из этих аксиом как следствия, причем справедливость самих аксиом как раз и подтверждается совпадением вытекающих из них следствий с экспериментальными результатами.

Применив операцию дивергенции к обеим частям первого уравнения Максвелла (3.2), получаем при учете (III.19) равенство

$$\operatorname{div} \left( \delta + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) = 0, \quad (3.12)$$

представляющее собой принцип непрерывности электрического тока. Это равенство может быть записано в виде

$$\operatorname{div} \delta = - \operatorname{div} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}. \quad (3.13)$$

Меняя местами в правой части (3.13) операции дифференцирования по времени и координатам (независимые переменные) и учитывая (3.6), получаем закон сохранения электрического заряда (3.10). Таким образом, принцип непрерывности электрического тока можно рассматривать как следствие первого уравнения Максвелла, а закон сохранения электрического заряда — как следствие первого уравнения Максвелла и обобщенного закона Гаусса.

В систему уравнений электродинамики входят четыре дифференциальных уравнения, устанавливающих связь между векторами электромагнитного поля и электрическими токами и зарядами. При этом основными являются два векторных уравнения:

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{H} &= \delta + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}; & \text{(I)} \\ \operatorname{rot} \mathbf{E} &= - \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, & \text{(II)} \end{aligned} \right\} \quad (3.14a)$$

которые характеризуют взаимосвязь и взаимозависимость изменений электрического и магнитного полей и определяют вихри векторов электромагнитного поля. К этим уравнениям присоединяются еще два скалярных уравнения:

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{D} &= \rho; & \text{(III)} \\ \operatorname{div} \mathbf{B} &= 0, & \text{(IV)} \end{aligned} \right\} \quad (3.146)$$

которые определяют истоки векторов электромагнитного поля.

Применив к обеим частям уравнения (II) операцию дивергенции, получаем соотношение

$$\frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div} \mathbf{B} = 0. \quad (3.15)$$

Из (3.15) следует, что  $\operatorname{div} \mathbf{B}$  от времени не зависит и может являться только функцией координат:  $\operatorname{div} \mathbf{B} = f(\mathbf{R})$ . Скалярное уравнение (IV) как раз и конкретизирует вид этой функции, устанавливая соленоидальный характер векторного поля  $\mathbf{B}$ .

Система уравнений (3.14) применима при макроскопическом рассмотрении *каких угодно* электромагнитных явлений в *любых* неподвижных средах, и особенности среды в ней не учитываются. Поэтому этих уравнений недостаточно для решения конкретных задач. Действительно, если, например, полагать, что  $\delta$  и  $\rho$  известны, то для определения четырех векторных величин  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{D}$ ,  $\mathbf{B}$  и  $\mathbf{H}$  имеющихся в нашем распоряжении двух векторных и двух скалярных уравнений будет недостаточно. При решении конкретных задач систему (3.14) необходимо дополнять *материальными уравнениями*, которые характеризуют влияние среды на протекающие в ней электромагнитные процессы.

Ограничиваясь рассмотрением электромагнитных процессов в широко распространенных изотропных линейных средах, имеем в качестве материальных уравнений соотношения (2.19), (2.70), (2.31):

$$\mathbf{D} = \epsilon_a \mathbf{E}; \quad \mathbf{B} = \mu_a \mathbf{H}; \quad \delta_{\text{пр}} = \sigma \mathbf{E}, \quad (3.16)$$

в которых параметры  $\epsilon_a$ ,  $\mu_a$  и  $\sigma$  в каждой точке среды остаются постоянными и считаются величинами заданными.

Чтобы выводы теории могли стать доступными опытной проверке и характеризующие электромагнитное поле векторы приобрели физическое содержание, необходимо дополнить уравнения (3.14) и (3.16) выражением для силы, с которой электрическое и магнитное поля действуют на электрический заряд  $Q$ . Она определяется суммой сил (2.3) и (2.32):

$$\mathbf{F} = Q(\mathbf{E} + [\mathbf{v}\mathbf{B}]) \quad (3.17)$$

и называется силой Лоренца.

### 3.5. СТОРОННИЕ ИСТОЧНИКИ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ

Сторонними называют такие источники электромагнитного поля, которые возбуждают это поле, но сами от него не зависят, так как их поддерживают посторонние по отношению к исследуемому полю физические явления. В технических задачах сторонние источники обычно обусловлены влиянием той части электродинамической системы, которую непосредственно не рассматривают. Например, при определении электромагнитного поля, создаваемого проволочной антенной, целесообразно упростить задачу и исключить из непосредственного рассмотрения генератор и линию передачи (которые вместе с антенной образуют единую электродинамическую систему), учитывая происходящие в них процессы введением плотности стороннего тока в антенне. Сторонние источники выступают в качестве исходных данных при определении поля и фигурируют в уравнениях электродинамики как *заранее известные функции координат и времени*.

Ограничимся далее рассмотрением изотропных линейных сред. Действие сторонних источников в зависимости от их физической природы проявляется в том, что в некоторой области пространства существует либо известная плотность стороннего тока  $\delta_{ст}$ , характеризующая упорядоченное движение сторонних зарядов с известной объемной плотностью  $\rho_{ст}$ , либо напряженность стороннего (известного) электрического поля  $E_{ст}$ , либо напряженность стороннего магнитного поля  $H_{ст}$ .

Чтобы отразить в уравнениях поля явление его первичного возбуждения сторонними источниками при известных значениях  $\delta_{ст}$  и  $\rho_{ст}$ , нужно положить в соотношениях (I) и (III) системы (3.14)

$$\delta = \delta_{ст} + \delta_{вт} = \delta_{ст} + \sigma E; \quad \rho = \rho_{ст} + \rho_{вт}. \quad (3.18a)$$

Здесь  $\delta_{вт} = \sigma E$  и  $\rho_{вт}$  — плотности вторичных тока и заряда, которые не только возбуждают электромагнитное поле, но и сами зависят от него.

Если в некотором объеме  $V$  задана напряженность стороннего электрического поля  $E_{ст}$ , то она в каждой точке объема создает плотность стороннего тока проводимости  $\delta_{пр.ст} = \sigma E_{ст}$  и плотность стороннего тока смещения  $\delta_{см.ст} = \epsilon_a \frac{\partial E_{ст}}{\partial t}$ , которые и вызывают первичное возбуждение поля. Чтобы в этом случае ввести сторонние источники в уравнения электродинамики, нужно подставить в них:

$$\delta = \delta_{пр.ст} + \delta_{вт} = \sigma(E_{ст} + E); \quad \delta_{см} = \delta_{см.ст} + \delta_{см.вт} = \epsilon_a \left( \frac{\partial E_{ст}}{\partial t} + \frac{\partial E}{\partial t} \right);$$

$$\rho = \rho_{ст} + \rho_{вт}. \quad (3.18б)$$

Случай, когда в некотором объеме известна напряженность стороннего магнитного поля  $H_{ст}$ , будет рассмотрен в § 10.1.

### 3.6. СИСТЕМА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ ДЛЯ ИЗОТРОПНЫХ ЛИНЕЙНЫХ СРЕД. ПРИНЦИП СУПЕРПОЗИЦИИ

Подставив (3.16) и (3.18а) в систему (3.14), получим уравнения Максвелла в следующем виде:

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{H} &= \sigma \mathbf{E} + \epsilon_a \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \delta_{\text{ст}}; & \text{(I)} & \quad \operatorname{div} (\epsilon_a \mathbf{E}) = \rho_{\text{ст}} + \rho_{\text{вт}}; & \text{(III)} \\ \operatorname{rot} \mathbf{E} &= -\mu_a \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}; & \text{(II)} & \quad \operatorname{div} (\mu_a \mathbf{H}) = 0. & \text{(IV)} \end{aligned} \right\} \quad (3.19)$$

Закон сохранения электрического заряда (3.10), который вытекает из уравнений (I) и (III) системы (3.19), при наличии сторонних токов и зарядов имеет вид

$$\operatorname{div} (\delta_{\text{ст}} + \sigma \mathbf{E}) = -\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t} (\rho_{\text{ст}} + \rho_{\text{вт}}) \quad (3.20)$$

или

$$\operatorname{div} \delta_{\text{ст}} = -\frac{\partial \rho_{\text{ст}}}{\partial t}; \quad \operatorname{div} (\sigma \mathbf{E}) = -\frac{\partial \rho_{\text{вт}}}{\partial t}. \quad (3.21)$$

Строгая и компактная система дифференциальных уравнений в частных производных (3.19) охватывает макроскопические электромагнитные явления в неподвижных изотропных линейных средах и является исходной при определении векторов поля  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{H}$  и объемной плотности заряда  $\rho_{\text{вт}}$ . Зная дополнительные условия единственности решения уравнений электродинамики (см. гл. 5) и граничные условия (см. § 3.9, 3.10), можно путем решения этой системы уравнений однозначно предсказать, как будет протекать электромагнитный процесс в каждой конкретной задаче. В этом и проявляются полнота, мощь и универсальность законов электродинамики, дающих принципиальную возможность получить решение любой задачи дедуктивным путем.

Система (3.19) состоит из *линейных* дифференциальных уравнений, так как параметры среды  $\epsilon_a$ ,  $\mu_a$  и  $\sigma$  не зависят от величин векторов поля. Как доказывается в математике, из линейности этих уравнений следует, что *результатирующее* электромагнитное поле, обусловленное *несколькими источниками*, представляет собой *сумму* полей, создаваемых каждым из этих источников порознь. Это важное положение электродинамики *называют принципом суперпозиции (наложения)*.

### 3.7. СИСТЕМА УРАВНЕНИЙ ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ ДЛЯ ОДНОРОДНЫХ НЕПРОВОДЯЩИХ СРЕД

Однородная непроводящая среда характеризуется параметрами  $\epsilon_a(\mathbf{R}) = \text{const}$ ,  $\mu_a(\mathbf{R}) = \text{const}$ ,  $\sigma = 0$ . Из второго уравнения (3.21) при  $\sigma = 0$  следует соотношение  $\partial \rho_{\text{вт}} / \partial t = 0$ , т. е. плотность заряда  $\rho_{\text{вт}}$  не может изменяться во времени. Это означает, что внутри не-

проводящей среды существование переменного электромагнитного поля не сопровождается возникновением свободных вторичных зарядов и, следовательно,  $\rho_{вт} = 0$ . Вынося, кроме того, постоянные параметры  $\epsilon_a$  и  $\mu_a$  за знак дивергенции, получаем вместо (3.19) следующую систему уравнений:

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{H} &= \epsilon_a \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \delta_{ст}; & \text{(I)} & \quad \operatorname{div} \mathbf{E} = \frac{\rho_{ст}}{\epsilon_a}; & \text{(III)} \\ \operatorname{rot} \mathbf{E} &= -\mu_a \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}; & \text{(II)} & \quad \operatorname{div} \mathbf{H} = 0. & \text{(IV)} \end{aligned} \right\} \quad (3.22)$$

### 3.8. СИСТЕМА УРАВНЕНИЙ ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ ДЛЯ ОДНОРОДНЫХ ПРОВОДЯЩИХ СРЕД БЕЗ СТОРОННИХ ИСТОЧНИКОВ

Однородная проводящая среда характеризуется параметрами  $\epsilon_a(\mathbf{R}) = \text{const}$ ,  $\mu_a(\mathbf{R}) = \text{const}$ ,  $\sigma(\mathbf{R}) = \text{const}$ . Покажем, прежде всего, что в этой среде при отсутствии сторонних источников ( $\delta_{ст} = 0$ ,  $\rho_{ст} = 0$ ) объемные заряды длительно существовать не могут. В рассматриваемом случае уравнение (III) системы (3.19) имеет вид

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = \rho_{вт}/\epsilon_a, \quad (3.23)$$

а второе уравнение (3.21) — вид

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = -\frac{1}{\sigma} \frac{\partial \rho_{вт}}{\partial t}. \quad (3.24)$$

После приравнивания правых частей (3.23) и (3.24) приходим к следующему уравнению для  $\rho_{вт}$ :

$$\frac{\partial \rho_{вт}}{\partial t} + \frac{\sigma}{\epsilon_a} \rho_{вт} = 0. \quad (3.25)$$

Решение этого уравнения

$$\rho_{вт}(t) = \rho_0 e^{-\frac{\sigma}{\epsilon_a} t}, \quad (3.26)$$

где постоянная  $\rho_0$  представляет собой плотность заряда в момент времени  $t=0$ . Если в пределах некоторой области  $\rho_0 \neq 0$ , то с течением времени  $\rho_{вт}$  в каждой точке этой области будет убывать до нуля по экспоненциальному закону (3.26) и независимо от закона изменения в этой точке внешнего поля. В области же, где  $\rho_0 = 0$ , плотность заряда  $\rho_{вт}$  согласно (3.26) остается равной нулю и все последующее время. Таким образом, в однородной проводящей среде без сторонних источников существование электромагнитного поля не сопровождается возникновением свободных зарядов.

Отрезок времени  $\tau = \epsilon_a/\sigma$ , в течение которого заряд в какой-либо точке уменьшается в  $e$  раз от своей первоначальной величины, называют *временем релаксации*. Для однородных сред, даже с малыми значениями  $\sigma$ , время релаксации чрезвычайно мало.

Например, в морской воде  $\tau$  составляет около  $2 \cdot 10^{-10}$  с, и даже в дистиллированной воде оно не превышает  $10^{-6}$  с.

Поскольку существование электромагнитного поля в однородной проводящей среде не связано с появлением вторичных зарядов и время релаксации очень мало, то можно считать, что внутри этой среды  $\rho_{вт}=0$ . Учитывая также, что  $\delta_{ст}=0$  и  $\rho_{ст}=0$ , имеем вместо (3.19) следующую систему уравнений электродинамики:

$$\left. \begin{aligned} \text{rot } \mathbf{H} &= \sigma \mathbf{E} + \epsilon_a \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, & \text{(I)} \\ \text{rot } \mathbf{E} &= -\mu_a \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}, & \text{(II)} \\ \text{div } \mathbf{E} &= 0, & \text{(III)} \\ \text{div } \mathbf{H} &= 0. & \text{(IV)} \end{aligned} \right\} \quad (3.27)$$

### 3.9. ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ НА ПОВЕРХНОСТИ РАЗДЕЛА ДВУХ СРЕД

Граница раздела двух сред образует поверхность, на которой по крайней мере один макроскопический параметр среды изменяется скачком. На такой поверхности векторы поля также испытывают скачкообразные изменения [например, в случае изотропных линейных сред это следует из материальных уравнений (3.16)]. Поэтому уравнения в дифференциальной форме (3.14) на границах раздела неприменимы и должны быть заменены *граничными условиями*.

1. Граничные условия для нормальных (перпендикулярных) к поверхности раздела составляющих векторов поля. Пусть элементарный цилиндр высотой  $2\Delta h$  пересекает поверхность раздела  $S$  двух сред (рис. 3.1). Этот цилиндр вырежет на поверхности раздела элементарную площадку  $\Delta S$ . Будем для определенности считать, что положительная единичная нормаль к площадке  $\Delta S$  всегда направлена из первой среды во вторую, и примем для этой нормали обозначение  $\mathbf{n}_{21}^0$ .

А. Применим к замкнутой цилиндрической поверхности обобщенный закон Гаусса в интегральной форме (2.17):

$$\mathbf{D}_1 \mathbf{n}_1^0 \Delta S + \mathbf{D}_2 \mathbf{n}_2^0 \Delta S + \Phi_{э,бок} = \Delta Q. \quad (3.28)$$

Слагаемые в левой части представляют собой соответственно потоки электрического смещения сквозь верхнее и нижнее основания и сквозь боковую поверхность;  $\Delta Q$  — свободный заряд, заключенный внутри цилиндра.

При переходе к пределу, когда  $\Delta h \rightarrow 0$ , боковая поверхность обращается в нуль и

$$\mathbf{n}_1^0 = -\mathbf{n}_{21}^0; \quad \mathbf{n}_2^0 = \mathbf{n}_{21}^0. \quad (3.29)$$

Поскольку значения электрического смещения ограничены, то при переходе к пределу поток  $\Phi_{э,бок} \rightarrow 0$ . При  $\Delta h \rightarrow 0$  свободный заряд

$\Delta Q$  будет отличен от нуля только в том случае, когда на границе раздела существует поверхностный заряд, причем в соответствии с (2.2) величина этого заряда

$$\Delta Q = \sigma_Q \Delta S. \quad (3.30)$$

Подставив эти соотношения в (3.28) и разделив обе части равенства на  $\Delta S$ , получаем

$$(\mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1) \mathbf{n}_{21}^0 = \sigma_Q, \quad (3.31a)$$

где  $\mathbf{D}_1$  и  $\mathbf{D}_2$  — предельные значения электрического смещения на поверхности раздела  $S$  при стремлении к ней со стороны первой и второй сред соответственно. Вместо (3.31a) можно написать

$$D_{2n} - D_{1n} = \sigma_Q, \quad (3.31b)$$

где  $D_{1n}$  и  $D_{2n}$  — проекции векторов  $\mathbf{D}_1$  и  $\mathbf{D}_2$  на нормаль  $\mathbf{n}_{21}^0$ .

Граничное условие (3.31) показывает, что при переходе через поверхность раздела, несущую поверхностный заряд, нормальная составляющая вектора  $\mathbf{D}$  претерпевает скачкообразное изменение, причем величина этого скачка равна поверхностной плотности заряда  $\sigma_Q$ .

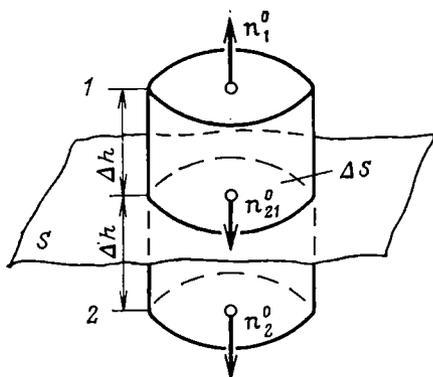


РИС. 3.1

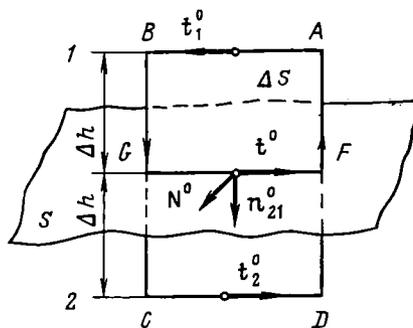


РИС. 3.2

Если на границе раздела поверхностный заряд отсутствует, то граничное условие принимает вид

$$D_{1n} = D_{2n}, \quad (3.32)$$

т. е. в этом случае при переходе через границу раздела нормальная составляющая вектора  $\mathbf{D}$  остается непрерывной.

Б. Применим к замкнутой цилиндрической поверхности принцип непрерывности магнитного потока в интегральной форме (2.35). При этом имеем следующую формулу, аналогичную (3.28):

$$\mathbf{B}_1 \mathbf{n}_1^0 \Delta S + \mathbf{B}_2 \mathbf{n}_2^0 \Delta S + \Phi_{\text{бок}} = 0. \quad (3.33)$$

Переходя к пределу  $\Delta h \rightarrow 0$ , получаем граничное условие вида

$$(\mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1) \mathbf{n}_{21}^0 = 0 \quad (3.34a)$$

или

$$B_{1n} = B_{2n}. \quad (3.34b)$$

Таким образом, при переходе через поверхность раздела нормальная составляющая магнитной индукции не испытывает разрыва.

2. Граничные условия для тангенциальных (касательных) к поверхности раздела составляющих векторов поля. Введем элементарный прямоугольный контур  $L = (ABCD)$ , плоскость которого перпендикулярна поверхности раздела  $S$  двух сред (рис. 3.2). Участки контура  $AB = CD = \Delta l$  лежат по разные стороны границы раздела. Пусть выбранное направление обхода контура  $L$  (характеризуемое на сторонах  $AB$  и  $CD$  ортами  $\mathbf{t}_1^0$  и  $\mathbf{t}_2^0$ ) и положительная единичная нормаль  $\mathbf{N}^0$  к поверхности  $\Delta S$ , ограниченной этим контуром, образуют правинтовую систему.

В. Применим к контуру  $L$  обобщенный закон электромагнитной индукции в интегральной форме (2.41):

$$\mathbf{E}_1 \mathbf{t}_1^0 \Delta l + \mathbf{E}_2 \mathbf{t}_2^0 \Delta l + C_{\text{бок}} = - \left( \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right)_{\text{ср}} \Delta S. \quad (3.35)$$

Слагаемые в левой части представляют собой соответственно линейные интегралы  $\mathbf{E}$  вдоль сторон  $AB$  и  $CD$  и вдоль обеих боковых сторон. Выражение справа есть поток вектора  $\partial \mathbf{B} / \partial t$  сквозь поверхность  $\Delta S = 2\Delta h \Delta l \mathbf{N}^0$ , вычисленный при помощи теоремы о среднем.

При переходе к пределу, когда  $\Delta h \rightarrow 0$ , стороны контура  $AB$  и  $CD$  прилегают к поверхности раздела, боковые стороны и поверхности  $\Delta S = 2\Delta h \Delta l$  обращаются в нуль и

$$\mathbf{t}_1^0 = -\mathbf{t}^0; \quad \mathbf{t}_2^0 = \mathbf{t}^0, \quad (3.36)$$

где  $\mathbf{t}^0$  — касательный к поверхности  $S$  орт, лежащий в плоскости контура  $L$  и определяемый выражением

$$\mathbf{t}^0 = [\mathbf{N}^0 \mathbf{n}_{21}^0]. \quad (3.37)$$

Поскольку значения напряженности электрического поля и  $\left( \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right)_{\text{ср}}$  являются ограниченными, то в предельном случае  $C_{\text{бок}}$  и правая часть (3.35) обращаются в нуль. Учитывая это, подставив (3.36), (3.37) в (3.35) и разделив результат на  $\Delta l$ , получаем

$$(\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) [\mathbf{N}^0 \mathbf{n}_{21}^0] = 0. \quad (3.38)$$

Это выражение в соответствии с (П1.3) можно представить в виде

$$[\mathbf{n}_{21}^0 (\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1)] \mathbf{N}^0 = 0. \quad (3.39)$$

Поскольку равенство (3.39) справедливо при любом направлении орта  $\mathbf{N}^0$  (зависящем от ориентации контура  $L$  относительно поверхности раздела), то должно выполняться соотношение

$$[\mathbf{n}_{21}^0(\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1)] = 0 \quad (3.40)$$

или

$$[\mathbf{n}_{21}^0 \mathbf{E}_1] = [\mathbf{n}_{21}^0 \mathbf{E}_2]. \quad (3.41a)$$

В каждой среде на границе раздела вектор  $\mathbf{E}$  можно представить в виде суммы тангенциальной и нормальной составляющих:  $\mathbf{E} = \tau^0 \mathbf{E}_\tau + \mathbf{n}_{21}^0 \mathbf{E}_n$ . В граничное условие (3.41a) входят только тангенциальные составляющие, так как для нормальных составляющих имеем тождество  $[\mathbf{n}_{21}^0 \mathbf{n}_{21}^0] \mathbf{E}_n = 0$ . Вследствие этого вместо (3.41a) можно написать эквивалентное ему соотношение

$$E_{1\tau} = E_{2\tau}, \quad (3.41b)$$

где  $E_{1\tau}$  и  $E_{2\tau}$  — величины тангенциальных к границе раздела составляющих вектора  $\mathbf{E}$  в двух бесконечно близких точках, лежащих по разные стороны этой границы.

Граничное условие (3.41) показывает, что при переходе через поверхность раздела тангенциальная составляющая напряженности электрического поля остается непрерывной.

Г. Применим к контуру  $L$  закон полного тока в интегральной форме (2.67). При этом получим следующий аналог ф-лы (3.35):

$$\mathbf{H}_1 t_1^0 \Delta l + \mathbf{H}_2 t_2^0 \Delta l + C_{\text{бок}} = \left( \delta + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right)_{\text{ср}} \Delta \mathbf{S}. \quad (3.42)$$

Переходя к пределу  $\Delta h \rightarrow 0$ , получим из (3.42) граничное условие вида (3.41)

$$[\mathbf{n}_{21}^0 \mathbf{H}_1] = [\mathbf{n}_{21}^0 \mathbf{H}_2] \quad (3.43a)$$

или

$$H_{1\tau} = H_{2\tau}, \quad (3.43b)$$

показывающее, что тангенциальная составляющая вектора  $\mathbf{H}$  при переходе через поверхность раздела не испытывает разрыва<sup>1)</sup>.

Полученные выше четыре граничных условия соответствуют системе четырех основных уравнений электродинамики в интегральной форме. Эти граничные условия, так же как и уравнения электродинамики в интегральной форме, имеют универсальный характер — они применимы для произвольных электромагнитных процессов на границе раздела любых вещественных сред (за исключением границы раздела с идеально проводящей средой, см. § 3.10).

<sup>1)</sup> Если, однако, одна из двух сред является идеально проводящей ( $\sigma = \infty$ ), то на границе раздела возможно существование поверхностного тока, при наличии которого граничное условие (3.43) становится неверным и должно быть заменено другим [см. § 3.10, ф-лы (3.52)].

### 3.10. ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ НА ПОВЕРХНОСТИ ИДЕАЛЬНО ПРОВОДЯЩЕЙ СРЕДЫ

При изучении *переменного* электромагнитного поля *вне* металлических проводников последние часто заменяют идеально проводящей средой, которая характеризуется значением  $\sigma = \infty$ . Эта замена основана на том обстоятельстве, что идеально проводящая среда правильно воспроизводит в *наиболее важных чертах* влияние реальных металлических проводников на электромагнитное поле *вне их*. Вместе с тем замена реального проводника идеальным очень упрощает решение электродинамических задач, так как электромагнитное поле внутри идеально проводящей среды вообще не нужно рассматривать (оно, как сейчас будет показано, тождественно равно нулю), а присутствие проводника можно учитывать при помощи заранее известных граничных условий на идеально проводящей поверхности.

Из ур-ния (I) системы (3.27), примененного к идеально проводящей среде, следует, что внутри этой среды  $\mathbf{E} = 0$ . Действительно, отличные от нуля значения  $\mathbf{E}$  при  $\sigma = \infty$  возможны только при бесконечно больших значениях  $\text{rot } \mathbf{H}$  и  $\mathbf{H}$ . Однако таким значениям  $\mathbf{H}$  соответствовала бы бесконечно большая энергия магнитного поля<sup>1)</sup>, чего при источниках поля конечной мощности быть не может. Из ур-ния (II) системы (3.27) при  $\mathbf{E} = 0$  следует, что в каждой точке внутри идеального проводника  $\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = 0$ , т. е.  $\mathbf{H}$  от времени не зависит и ни при каких физических процессах не изменяется. Это означает, что никакое переменное магнитное поле внутри идеального проводника существовать не может и, следовательно,  $\mathbf{H} = 0$ .

При отсутствии электромагнитного поля внутри идеального проводника отсутствует и электрический ток. В этом случае электрический ток может протекать только непосредственно по поверхности идеально проводящей среды и называется *поверхностным током*. Для характеристики поверхностного тока в каждой точке поверхности идеально проводящей среды используют понятие *плотности поверхностного тока*  $\eta$ , определяемой выражением

$$\eta = i^0 \frac{|di|}{dl}. \quad (3.44)$$

Здесь  $i^0$  — орт, указывающий направление движения положительных зарядов в рассматриваемой точке;  $di$  — поверхностный ток, протекающий через физически бесконечно малый элемент длины  $dl$ , расположенный на идеально проводящей поверхности перпендикулярно к вектору  $i^0$ . Таким образом, модуль плотности поверхностного тока  $\eta$  равен абсолютной величине поверхностного тока, проходящего в окрестности рассматриваемой точки через отрезок единичной длины, расположенный нормально к направлению движения заряженных частиц. Единицей измерения  $\eta$  является А/м.

<sup>1)</sup> Об энергетических соотношениях в электромагнитном поле см. гл. 4.

Пусть положительная нормаль  $\mathbf{n}_{21}^0$  к границе раздела направлена внутрь идеального проводника. Подставляя в (3.31) значение  $\mathbf{D}_2=0$ , получаем граничное условие

$$\mathbf{D}_1 \mathbf{n}_{21}^0 = -\sigma_Q \text{ или } D_{1n} = -\sigma_Q, \quad (3.45)$$

из которого следует, что нормальная составляющая вектора  $\mathbf{D}$  на поверхности идеального проводника испытывает разрыв непрерывности ( $D_{2n} = 0$ ).

Из (3.34) аналогичным путем получаем граничное условие

$$\mathbf{B}_1 \mathbf{n}_{21}^0 = 0 \text{ или } B_{1n} = 0, \quad (3.46)$$

показывающее, что нормальная составляющая вектора  $\mathbf{B}$  всегда равна нулю на идеально проводящей поверхности. Это означает, что вектор магнитной индукции возле такой поверхности может быть ориентирован только *по касательной* к ней.

Отметим, что если справедливо материальное уравнение  $\mathbf{B}_1 = \mu_{1a} \mathbf{H}_1$ , то граничное условие (3.46) принимает вид

$$\mathbf{H}_1 \mathbf{n}_{21}^0 = 0 \text{ или } H_{1n} = 0. \quad (3.47)$$

Из (3.41) при  $\mathbf{E}_2=0$  получаем следующее граничное условие:

$$[\mathbf{E}_1 \mathbf{n}_{21}^0] = 0 \text{ или } E_{1\tau} = 0, \quad (3.48)$$

т. е. на поверхности идеального проводника тангенциальная составляющая вектора  $\mathbf{E}$  всегда равна нулю. Следовательно, вектор напряженности электрического поля возле такой поверхности может быть ориентирован только *по нормали* к ней.

Наличие на поверхности идеального проводника конечной плотности поверхностного тока  $\eta$ , протекающего в слое нулевой толщины, должно было бы соответствовать бесконечно большому значению плотности тока  $\delta$ , если бы такой мог существовать. Вследствие этого на границе раздела с идеальным проводником должно выполняться предельное соотношение

$$\lim_{\substack{\Delta h \rightarrow 0 \\ \delta \rightarrow \infty}} (\delta \mathbf{N}^0 2\Delta h \Delta l) = \eta \mathbf{N}^0 \Delta l, \quad (3.49)$$

которое как раз и определяет поверхностный ток, протекающий через отрезок  $FG$  (см. рис. 3.2). При  $\Delta h \rightarrow 0$  из (3.42) с учетом (3.49), (3.36), (3.37) и  $\mathbf{H}_2=0$  получаем

$$-\mathbf{H}_1 [\mathbf{N}^0 \mathbf{n}_{21}^0] = \eta \mathbf{N}^0 \quad (3.50)$$

или

$$[\mathbf{H}_1 \mathbf{n}_{21}^0] \mathbf{N}^0 = \eta \mathbf{N}^0. \quad (3.51)$$

Поскольку равенство (3.51) выполняется при любом направлении орта  $\mathbf{N}^0$ , то из него следует граничное условие

$$[\mathbf{H}_1 \mathbf{n}_{21}^0] = \eta \text{ или } [\mathbf{H}_{1\tau} \mathbf{n}_{21}^0] = \eta \quad (3.52a)$$

( $[\mathbf{H}, \mathbf{n}^0_{21}] = [\mathbf{H}, \mathbf{n}^0_{21}]$ , см. § 3.9). Оно устанавливает связь между тангенциальной к поверхности идеального проводника составляющей  $H_{1\tau}$  и плотностью поверхностного тока  $\eta$ . На рис. 3.3 изобра-

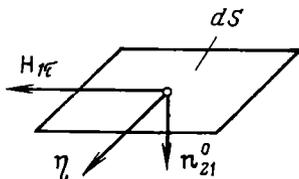


РИС. 3.3

жено определяемое (3.52а) взаимное расположение векторов  $\mathbf{H}_{1\tau} = \boldsymbol{\tau}^0 H_{1\tau}$ ,  $\mathbf{n}^0_{21}$  и  $\boldsymbol{\eta}$ . В частности, из (3.52а) следует, что плотность поверхностного тока и тангенциальная составляющая  $H_{1\tau}$  равны по величине:

$$H_{1\tau} = \eta. \quad (3.52б)$$

Граничное условие (3.52) показывает, что при переходе через поверхность идеального проводника касательная составляющая вектора  $\mathbf{H}$  претерпевает скачкообразное изменение ( $H_{1\tau} = \eta$ ,  $H_{2\tau} = 0$ ), причем величина этого скачка равна  $\eta$ .

### 3.11. СИСТЕМА УРАВНЕНИЙ В ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ФОРМЕ И ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ ДЛЯ КОМПЛЕКСНЫХ АМПЛИТУД. КОМПЛЕКСНАЯ ДИЭЛЕКТРИЧЕСКАЯ ПРОНИЦАЕМОСТЬ СРЕДЫ

В технической электродинамике большую роль играют установившиеся переменные электромагнитные процессы, изменяющиеся во времени по закону косинуса (или синуса), т. е. колеблющиеся со вполне определенной частотой, и называемые *гармоническими* или *монохроматическими*.

Мгновенное значение любой скалярной величины  $a$ , характеризующей монохроматический процесс, имеет вид

$$a(t) = A_m \cos(\omega t + \varphi). \quad (3.53)$$

Мгновенное значение любой векторной величины  $\mathbf{A}$  может быть выражено в ортогональной системе координат  $u, v, w$  через скалярные составляющие следующим образом:

$$\mathbf{A}(t) = \mathbf{u}^0 A_{um} \cos(\omega t + \varphi_u) + \mathbf{v}^0 A_{vm} \cos(\omega t + \varphi_v) + \mathbf{w}^0 A_{wm} \cos(\omega t + \varphi_w). \quad (3.54)$$

В этих формулах  $\omega = 2\pi f = 2\pi/T$  — угловая частота гармонических колебаний, рад/с;  $f$  — частота колебаний, Гц;  $T$  — период колебаний, с;  $A_m, A_{um}, A_{vm}, A_{wm}$  — амплитуды, являющиеся функциями пространственных координат  $u, v, w$ ;  $\varphi, \varphi_u, \varphi_v, \varphi_w$  — начальные фазы, также являющиеся функциями этих координат.

Согласно формуле Эйлера

$$\cos(\omega t + \varphi) + i \sin(\omega t + \varphi) = e^{i(\omega t + \varphi)} \quad (3.55)$$

мгновенные значения скаляра  $a$  (3.53) и вектора  $\mathbf{A}$  (3.54) определяются вещественной частью комплексного выражения мгновенного значения соответствующей величины:

$$a(t) = \operatorname{Re}(\dot{A} e^{i\omega t}); \quad \mathbf{A}(t) = \operatorname{Re}(\dot{\mathbf{A}} e^{i\omega t}). \quad (3.56)$$

Точка над буквами ставится для обозначения комплексных амплитуд, которые определяются соотношениями:

$$\left. \begin{aligned} \dot{A} &= A_m e^{i\varphi}; \\ \dot{\mathbf{A}} &= \mathbf{u}^0 A_{um} e^{i\varphi_u} + \mathbf{v}^0 A_{vm} e^{i\varphi_v} + \mathbf{w}^0 A_{wm} e^{i\varphi_w} = \\ &= \mathbf{u}^0 \dot{A}_u + \mathbf{v}^0 \dot{A}_v + \mathbf{w}^0 \dot{A}_w, \end{aligned} \right\} \quad (3.57)$$

от времени не зависят и являются функциями только пространственных координат.

Любые линейные операции (сложение, вычитание, дифференцирование и интегрирование) производятся, как легко проверить, отдельно над вещественными и мнимыми частями комплексных величин. Следовательно, если некоторое уравнение содержит только линейные операции над мгновенными значениями монохроматических величин, то оно остается справедливым и для комплексных выражений мгновенных значений этих величин, откуда легко перейти к соответствующему уравнению для комплексных амплитуд. Поэтому можно заменить математическое исследование линейных уравнений для мгновенных значений исследованием соответствующих уравнений для комплексных амплитуд, а затем в окончательном результате вновь перейти по формулам вида (3.56) к мгновенным значениям монохроматических величин. Целесообразность применения этого *метода комплексных амплитуд* основывается на том, что линейные уравнения для комплексных амплитуд принимают более простой вид — в них отсутствует зависимость от времени. Это упрощение является простым следствием того факта, что дифференцирование комплексного выражения мгновенного значения величины по времени эквивалентно умножению его на  $i\omega$ :

$$\frac{\partial}{\partial t} (\dot{\mathbf{A}} e^{i\omega t}) = i\omega \dot{\mathbf{A}} e^{i\omega t}. \quad (3.58)$$

Система уравнений Максвелла для изотропных линейных сред состоит из линейных уравнений. Заменяя в случае монохроматического процесса в системе (3.19) мгновенные значения величин комплексными выражениями мгновенных значений, воспользовавшись равенством (3.58) и сократив полученные соотношения на

множитель  $e^{i\omega t}$ , перейдем к соответствующим уравнениям для комплексных амплитуд:

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{rot} \dot{\mathbf{H}} &= \sigma \dot{\mathbf{E}} + i\omega \epsilon_a \dot{\mathbf{E}} + \dot{\delta}_{\text{CT}}; & \text{(I)} & \quad \operatorname{div}(\epsilon_a \dot{\mathbf{E}}) = \dot{\rho}_{\text{CT}} + \dot{\rho}_{\text{BT}}; & \text{(III)} \\ \operatorname{rot} \dot{\mathbf{E}} &= -i\omega \mu_a \dot{\mathbf{H}}; & \text{(II)} & \quad \operatorname{div}(\mu_a \dot{\mathbf{H}}) = 0. & \text{(IV)} \end{aligned} \right\} \quad (3.59)$$

Сопоставление (3.59) с (3.19) показывает, что переход от исходного линейного уравнения к уравнению для комплексных амплитуд очень прост — достаточно заменить мгновенные значения монохроматических величин соответствующими им комплексными амплитудами и заменить оператор дифференцирования по времени  $\partial/\partial t$  операцией умножения на  $i\omega$ .

Уравнения (3.21) в комплексной форме имеют следующий вид:

$$\operatorname{div} \dot{\delta}_{\text{CT}} = -i\omega \dot{\rho}_{\text{CT}}; \quad \operatorname{div}(\sigma \dot{\mathbf{E}}) = -i\omega \dot{\rho}_{\text{BT}}. \quad (3.60)$$

Отсюда следует, что при монохроматических процессах заряды однозначно определяются токами:

$$\dot{\rho}_{\text{CT}} = \frac{i}{\omega} \operatorname{div} \dot{\delta}_{\text{CT}}; \quad \dot{\rho}_{\text{BT}} = \frac{i}{\omega} \operatorname{div}(\sigma \dot{\mathbf{E}}). \quad (3.61)$$

Вследствие этого в теории монохроматического поля заряды обычно вообще не вводят в рассмотрение, заменяя их в случае необходимости правой частью ф-лы (3.61).

Уравнение (I) системы (3.59) перепишем следующим образом:

$$\operatorname{rot} \dot{\mathbf{H}} = i\omega \tilde{\epsilon}_a \dot{\mathbf{E}} + \dot{\delta}_{\text{CT}}, \quad \text{(I')}, \quad (3.62)$$

где введена величина

$$\tilde{\epsilon}_a = \epsilon_a - i \frac{\sigma}{\omega}, \quad (3.63)$$

которую называют *комплексной абсолютной диэлектрической проницаемостью среды*<sup>1)</sup>.

При помощи второй ф-лы (3.61) преобразуем уравнение (III) системы (3.59):

$$\operatorname{div}(\epsilon_a \dot{\mathbf{E}}) = \dot{\rho}_{\text{CT}} + \operatorname{div}\left(i \frac{\sigma}{\omega} \dot{\mathbf{E}}\right). \quad (3.64)$$

Отсюда, объединяя члены, содержащие операцию дивергенции, получаем

$$\operatorname{div}(\tilde{\epsilon}_a \dot{\mathbf{E}}) = \dot{\rho}_{\text{CT}} \quad \text{(III')}. \quad (3.65)$$

В случае монохроматических процессов уравнение (IV) представляет собой тривиальное следствие уравнения (II). Действительно, об-

<sup>1)</sup> Для обозначения комплексных величин, характеризующих свойства среды или не являющихся комплексными амплитудами, при необходимости будет применяться знак  $\sim$  (тильда).

разуя дивергенцию от обеих частей ур-ния (II) и учитывая тождество (III.19), имеем

$$\operatorname{div} \operatorname{rot} \dot{\mathbf{E}} = -i \omega \operatorname{div} (\mu_a \dot{\mathbf{H}}) = 0, \quad (3.66)$$

откуда и получается ур-ние (IV).

Аналогичным путем легко показать, что при учете первого соотношения (3.61) ур-ние (III') вытекает из ур-ния (I').

Таким образом, в теории монохроматического поля ур-ния (III) и (IV) можно не вводить в систему дифференциальных уравнений электродинамики, которую в этом случае образуют первое и второе уравнения Максвелла:

$$\operatorname{rot} \dot{\mathbf{H}} = i \omega \tilde{\epsilon}_a \dot{\mathbf{E}} + \dot{\delta}_{\text{cr}}; \quad \operatorname{rot} \dot{\mathbf{E}} = -i \omega \mu_a \dot{\mathbf{H}}. \quad (3.67)$$

Если среда обладает очень малой проводимостью, то в теории для такой среды часто принимают значения  $\sigma=0$  и  $\tilde{\epsilon}_a=\epsilon_a$ , которые определяют *идеальный диэлектрик*. В идеальном диэлектрике система (3.67) принимает вид:

$$\operatorname{rot} \dot{\mathbf{H}} = i \omega \epsilon_a \dot{\mathbf{E}} + \dot{\delta}_{\text{cr}}; \quad \operatorname{rot} \dot{\mathbf{E}} = -i \omega \mu_a \dot{\mathbf{H}}. \quad (3.68)$$

Таким образом, уравнения Максвелла для комплексных амплитуд имеют один и тот же вид как для сред, обладающих проводимостью, так и для диэлектриков. Введение понятия комплексной абсолютной диэлектрической проницаемости позволяет решать систему уравнений электродинамики для этих двух случаев одинаковыми методами.

Выражение для  $\tilde{\epsilon}_a$  можно представить в виде  $\tilde{\epsilon}_a = \epsilon_a (1 - i \operatorname{tg} \delta)$ , где

$$\operatorname{tg} \delta = \sigma / \omega \epsilon_a \quad (3.69)$$

называют *тангенсом угла диэлектрических потерь*.

Полученные в § 3.9, 3.10 граничные условия представляют собой линейные соотношения. Аналогичные граничные условия связывают между собой соответствующие комплексные амплитуды. Как было показано выше, ур-ния (III) и (IV) системы (3.59) следуют из ур-ний (I) и (II). Можно показать, что и граничные условия в комплексной форме для нормальных составляющих поля, соответствующие ур-ниям (III) и (IV), будут удовлетворены, если выполняются граничные условия для тангенциальных составляющих поля. Эти условия на границе раздела произвольных сред согласно (3.41) и (3.43) имеют вид

$$[n_{21}^0 \dot{\mathbf{E}}_1] = [n_{21}^0 \dot{\mathbf{E}}_2]; \quad [n_{21}^0 \dot{\mathbf{H}}_1] = [n_{21}^0 \dot{\mathbf{H}}_2] \quad (3.70a)$$

или

$$\dot{E}_{1\tau} = \dot{E}_{2\tau}; \quad \dot{H}_{1\tau} = \dot{H}_{2\tau}, \quad (3.70b)$$

а на поверхности идеального проводника согласно (3.48) и (3.52) имеют вид

$$[\dot{\mathbf{E}}_1 \mathbf{n}_{21}^0] = 0; \quad [\dot{\mathbf{H}}_1 \mathbf{n}_{21}^0] = \dot{\eta} \quad (3.71a)$$

или

$$\dot{E}_{1\tau} = 0; \quad \dot{H}_{1\tau} = \dot{\eta}. \quad (3.71b)$$

В ф-лах (3.71) вектор  $\mathbf{n}_{21}^0$  направлен внутрь идеального проводника.

### 3.12. ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ИЗОТРОПНЫХ ЛИНЕЙНЫХ СРЕД В МОНОХРОМАТИЧЕСКОМ ПОЛЕ

При монохроматическом процессе в изотропном линейном веществе имеем  $\delta_{\text{пр}} = \sigma \dot{\mathbf{E}}$  и  $\delta_{\text{см}} = i \omega \epsilon_a \dot{\mathbf{E}}$ . Отсюда очевидно, что отношение амплитуд плотностей токов проводимости и смещения определяется выражением

$$\delta_{\text{пр}} / \delta_{\text{см}} = \sigma / \omega \epsilon_a = \text{tg } \delta \quad (3.72)$$

и изменяется с частотой.

Если в среде  $\text{tg } \delta \ll 1$  (т. е. ток смещения значительно превышает ток проводимости), то ее называют диэлектриком; если же  $\text{tg } \delta \gg 1$  (ток проводимости значительно превышает ток смещения), то среду называют проводником.

В типичных диэлектриках (например, фарфор, эбонит, слюда, воздух в неионизированном состоянии) удельная проводимость  $\sigma$  очень мала (имеет порядок  $10^{-12} - 10^{-17}$  См/м), а диэлектрическая проницаемость  $\epsilon = \epsilon_a / \epsilon_0$  принимает значения от нескольких единиц до нескольких десятков. В этих условиях согласно (3.72) даже на самых низких частотах  $\text{tg } \delta \ll 1$ .

Удельная проводимость  $\sigma$  металлов очень велика (порядка  $10^6 - 10^7$  См/м), а  $\epsilon$  принимает такие же значения, как у диэлектриков. При этом даже на самых высоких частотах, используемых в технике,  $\text{tg } \delta \gg 1$ , т. е. металлы практически на всех частотах являются проводниками.

Электрические свойства сред, занимающих по значению  $\sigma$  промежуточное положение между типичными диэлектриками и металлами, существенным образом изменяются с изменением  $\omega$ . Для такой среды на низких частотах  $\text{tg } \delta \gg 1$ , и она выступает в роли проводника. Вместе с тем существуют и такие частоты, на которых  $\text{tg } \delta \ll 1$ , и среда ведет себя подобно диэлектрику. К таким средам относятся, например, почва и морская вода, играющие важную роль в распространении радиоволн вдоль земной поверхности.

ЭНЕРГИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ



4.1. ТЕОРЕМА УМОВА — ПОЙНТИНГА. ВЕКТОР ПОЙНТИНГА

Из уравнений электродинамики вытекает теорема Умова—Пойнтинга, которая выражает закон сохранения энергии электромагнитного поля. При рассмотрении теоремы Умова—Пойнтинга ограничимся случаем широко распространенных изотропных линейных сред.

Выделим мысленно объем  $V$ , в котором существуют сторонние источники электромагнитного поля. На основании закона сохранения энергии имеем следующий баланс мгновенных значений мощностей для электромагнитного поля в выделенном объеме:

$$p_{\text{ст}} = p_{\text{п}} + \frac{\partial w}{\partial t} + p_{\Sigma}, \quad (4.1)$$

где  $p_{\text{ст}}$  — мощность поля, создаваемая сторонними источниками;  $p_{\text{п}}$  — мощность потерь, отдаваемая полем веществу;  $\partial w/\partial t$  — мощность, идущая на изменение энергии  $w$  электромагнитного поля в объеме  $V$ ;  $p_{\Sigma}$  — мощность поля, выходящая сквозь замкнутую поверхность  $S$ , которая ограничивает объем  $V$ . В системе СИ мощность измеряется в ваттах (Вт).

Нашей целью является получение из уравнений электродинамики выражений для слагаемых в (4.1). Для этого первое уравнение системы (3.19) умножим скалярно на  $\mathbf{E}$ , второе уравнение умножим на  $-\mathbf{H}$  и сложим полученные результаты:

$$\mathbf{E} \operatorname{rot} \mathbf{H} - \mathbf{H} \operatorname{rot} \mathbf{E} = \sigma E^2 + \mathbf{E} \delta_{\text{ст}} + \epsilon_a \mathbf{E} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \mu_a \mathbf{H} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}. \quad (4.2)$$

В соответствии с (П1.16) левая часть (4.2) равна  $-\operatorname{div}[\mathbf{E}\mathbf{H}]$ . Последние два слагаемых справа можно представить так:

$$\epsilon_a \mathbf{E} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \mu_a \mathbf{H} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\epsilon_a E^2}{2} + \frac{\mu_a H^2}{2} \right). \quad (4.3)$$

Учитывая эти соотношения, получим вместо (4.2) уравнение

$$-\mathbf{E} \delta_{\text{ст}} = \sigma E^2 + \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\epsilon_a E^2}{2} + \frac{\mu_a H^2}{2} \right) + \operatorname{div}[\mathbf{E}\mathbf{H}], \quad (4.4)$$

которое называется *теоремой Умова—Пойнтинга в дифференциальной форме*<sup>1)</sup>.

<sup>1)</sup> Русский физик Н. А. Умов изложил общую теорему, выражающую закон сохранения энергии, и применил ее к упругим волнам в сплошных средах в 1874 г., т. е. за десять лет до того, как английский физик Пойнтинг рассмотрел соответствующую теорему в применении к электродинамике.

Проинтегрируем ур-ние (4.4) по выделенному объему  $V$ :

$$-\int_V \mathbf{E} \delta_{\text{ср}} dV = \int_V \sigma E^2 dV + \int_V \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\epsilon_a E^2}{2} + \frac{\mu_a H^2}{2} \right) dV + \int_V \operatorname{div}[\mathbf{E}\mathbf{H}] dV. \quad (4.5)$$

Изменив во втором слагаемом справа очередность интегрирования по координатам и дифференцирования по времени (независимые переменные) и применив к третьему слагаемому теорему Остроградского—Гаусса (П1.5), получим уравнение

$$-\int_V \mathbf{E} \delta_{\text{ср}} dV = \int_V \sigma E^2 dV + \frac{\partial}{\partial t} \int_V \left( \frac{\epsilon_a E^2}{2} + \frac{\mu_a H^2}{2} \right) dV + \oint_S [\mathbf{E}\mathbf{H}] dS, \quad (4.6)$$

которое называют *теоремой Умова—Пойнтинга в интегральной форме*. Покажем, что ур-ние (4.6) и определяет баланс мгновенных значений мощностей (4.1) в объеме  $V$ .

Пусть частица вещества с зарядом  $Q$  под воздействием поля движется со скоростью  $\mathbf{v}$ . Мгновенная мощность, отдаваемая полем этой частице, определится, очевидно, скалярным произведением силы  $\mathbf{F}$  (3.17) на скорость  $\mathbf{v}$ :

$$\mathbf{F}\mathbf{v} = Q(\mathbf{E} + [\mathbf{v}\mathbf{B}])\mathbf{v} = Q\mathbf{E}\mathbf{v}. \quad (4.7)$$

Поскольку  $Q[\mathbf{v}\mathbf{B}]\mathbf{v} \equiv 0$ , то, следовательно, только электрическое поле отдает свою мощность частице.

Если в окрестности рассматриваемой точки на единицу объема приходится  $N$  движущихся заряженных частиц, то объемная плотность мощности, отдаваемой полем частицам и измеряемой в Вт/м<sup>3</sup>, равна:

$$\rho'_n = N\mathbf{F}\mathbf{v} = NQ\mathbf{E}\mathbf{v} = \rho' \mathbf{v}\mathbf{E} = \mathbf{E} \delta. \quad (4.8)$$

Легко убедиться, что если  $\sigma > 0$  и  $\delta = \delta_{\text{пр}} = \sigma\mathbf{E}$ , то эта отдаваемая полем мощность будет расходоваться на нагрев проводящей среды. Выделим в среде элементарный объем  $dV$  в виде цилиндра, образующая которого  $dl$  параллельна  $\mathbf{v}$  (и  $\delta_{\text{пр}}$ ). При этом имеем

$$\rho'_n dV = \mathbf{E} \delta_{\text{пр}} dS_n dl = \frac{\delta_{\text{пр}}^2}{\sigma} dS_n dl = (\delta_{\text{пр}} dS_n)^2 r = (di_{\text{пр}})^2 r, \quad (4.9)$$

где  $r = \frac{1}{\sigma} \frac{dl}{dS_n}$  — сопротивление цилиндрического объема (см. рис. 2.6). Таким образом, мы получили известную формулу Джоуля—Ленца, определяющую мощность тепловых потерь в объеме  $dV$ . Отсюда следует, что

$$\rho'_n = \mathbf{E} \delta_{\text{пр}} = \delta_{\text{пр}}^2 / \sigma = \sigma E^2 \quad (4.10)$$

есть мощность, отдаваемая полем в единице объема и выделяемая в виде тепла.

Соответственно первый интеграл справа в (4.6) выражает собой мощность потерь, отдаваемую полем веществу в объеме  $V$  и расходуемую на нагрев:  $\rho_n = \int_V \sigma E^2 dV$ .

Перейдем к рассмотрению интеграла, стоящего в (4.6) слева. Рассуждая таким же образом, как при получении (4.8), можно было бы прийти к выводу, что произведение  $\mathbf{E}\delta_{\text{ст}}$  определяет объемную плотность мощности, отдаваемой полем сторонним источникам. Однако направления векторов  $\delta_{\text{ст}}$  и  $\mathbf{E}$  могут образовывать тупой угол и даже быть противоположными. При этом плотность мощности *потеря*  $\mathbf{E}\delta_{\text{ст}}$  оказалась бы *отрицательной*, что физически означает не потерю мощности полем, а, наоборот, *приобретение* ее. В соответствии с этими соображениями величина

$$\rho'_{\text{ст}} = -\mathbf{E}\delta_{\text{ст}} \quad (4.11)$$

определяет объемную плотность мощности, *приобретаемой* полем за счет сторонних источников. Соответственно интеграл  $\rho_{\text{ст}} = -\int_V \mathbf{E}\delta_{\text{ст}} dV$  есть мощность, выделяемая в объеме  $V$  сторонними источниками.

Чтобы выяснить роль двух последних слагаемых в (4.6), представим себе следующий частный случай. Поскольку электромагнитное поле распространяется с конечной скоростью (см., например, § 6.3), то можно выбрать поверхность  $S$  настолько удаленной от сторонних источников, что электромагнитное поле ее не успело достигнуть. В этом случае  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  на  $S$  равны нулю и последнее слагаемое в (4.6) обращается в нуль. С другой стороны, поскольку поле не достигло поверхности  $S$ , то бессмысленно говорить о выходе мощности  $\rho_{\Sigma}$  через эту поверхность наружу. Поэтому в рассматриваемом случае мощность сторонних источников может расходоваться только на нагрев среды и изменение во времени энергии электромагнитного поля, находящейся внутри объема  $V$ , т. е.

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \int_V \left( \frac{\epsilon_a E^2}{2} + \frac{\mu_a H^2}{2} \right) dV. \quad (4.12)$$

Последнее соотношение позволяет отождествить объемный интеграл

$$w = \int_V \left( \frac{\epsilon_a E^2}{2} + \frac{\mu_a H^2}{2} \right) dV \quad (4.13)$$

с мгновенным значением энергии электромагнитного поля, запасенной в объеме  $V$  и измеряемой в джоулях (Дж). В свою очередь, ф-ла (4.13) разрешает считать, что энергии электрического и магнитного полей распределены в пространстве с объемными плотностями

$$w'_e = \epsilon_a E^2/2, \quad w'_m = \mu_a H^2/2, \quad (4.14)$$

единицей измерения которых является Дж/м<sup>3</sup>.

Из приведенных рассуждений следует, что последнее слагаемое в (4.6) определяет мощность, выходящую сквозь замкнутую поверхность  $S$ , т. е.  $p_{\Sigma} = \oint_S [\mathbf{E}\mathbf{H}]dS = \oint_S \mathbf{\Pi}dS$ . Здесь введен вектор

$$\mathbf{\Pi} = [\mathbf{E}\mathbf{H}], \quad (4.15)$$

называемый *вектором Пойнтинга* и измеряемый в Вт/м<sup>2</sup>.

Таким образом, мгновенное значение мощности, выходящей сквозь замкнутую произвольную поверхность  $S$ , определяется потоком вектора Пойнтинга  $\mathbf{\Pi}$  сквозь эту поверхность в направлении внешней нормали. Это означает, что в каждой точке пространства (в каждой точке произвольной поверхности) вектор  $\mathbf{\Pi}$  направлен в сторону распространения энергии электромагнитного поля и численно равен количеству этой энергии, которое протекает в единицу времени через единичную поверхность, перпендикулярную направлению распространения энергии.

В свою очередь, величина и направление  $\mathbf{\Pi}$  определяются в соответствии с (4.15) векторным произведением векторов поля  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$ .

Определим скорость переноса полем электромагнитной энергии  $v_s$ . Для этого выделим мысленно трубкообразную поверхность такой формы, чтобы во всех ее точках нормальная составляющая вектора Пойнтинга равнялась нулю. При этом энергия  $dw$ , переносимая через поперечное сечение трубки  $S$  за время  $dt$ , заполняет ее на длину  $dl = v_s dt$ . Энергию  $dw$  можно выразить через объемную плотность энергии электромагнитного поля  $w' = w'_e + w'_m$  либо через вектор Пойнтинга  $\mathbf{\Pi}$  следующим образом:

$$dw = dl \int_S w' dS = dt \int_S \mathbf{\Pi} dS. \quad (4.16)$$

Отсюда получаем скорость в м/с

$$v_s = \frac{dl}{dt} = \int_S \mathbf{\Pi} dS \bigg/ \int_S w' dS. \quad (4.17)$$

Если  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  (а следовательно, и  $\mathbf{\Pi}$  и  $w'$ ) не изменяются по сечению  $S$  трубки, то (4.17) упрощается и принимает в векторной форме следующий вид

$$v_s = \mathbf{\Pi}/w'. \quad (4.18)$$

#### 4.2. ВЫРАЖЕНИЯ СРЕДНИХ ЗА ПЕРИОД ЗНАЧЕНИЙ ПРОИЗВЕДЕНИЙ ДВУХ МОНОХРОМАТИЧЕСКИХ ВЕКТОРОВ ЧЕРЕЗ ИХ КОМПЛЕКСНЫЕ АМПЛИТУДЫ

Действительную часть комплексной величины всегда можно выразить полусуммой этой комплексной величины и сопряженной с ней комплексной величины:

$$\operatorname{Re}(\dot{\mathbf{A}} e^{i\omega t}) = \frac{\dot{\mathbf{A}} e^{i\omega t} + \dot{\mathbf{A}}^* e^{-i\omega t}}{2}. \quad (4.19)$$

где 
$$\dot{\mathbf{A}} = \mathbf{u}^0 A_{um} e^{-i\varphi_u} + \mathbf{v}^0 A_{v,n} e^{-i\varphi_v} + \mathbf{w}^0 A_{wm} e^{-i\varphi_w} \quad (4.20)$$

[ср. с ф-лой (3.57)]. Поэтому скалярное произведение мгновенных значений двух векторов, гармонически изменяющихся во времени, можно представить в следующем виде:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(t) \mathbf{B}(t) &= \operatorname{Re}(\dot{\mathbf{A}} e^{i\omega t}) \operatorname{Re}(\dot{\mathbf{B}} e^{i\omega t}) = \\ &= \frac{\dot{\mathbf{A}} e^{i\omega t} + \dot{\mathbf{A}}^* e^{-i\omega t}}{2} \frac{\dot{\mathbf{B}} e^{i\omega t} + \dot{\mathbf{B}}^* e^{-i\omega t}}{2} = \\ &= \frac{1}{4} \left( \dot{\mathbf{A}} \dot{\mathbf{B}} e^{i2\omega t} + \dot{\mathbf{A}}^* \dot{\mathbf{B}} + \dot{\mathbf{A}} \dot{\mathbf{B}}^* + \dot{\mathbf{A}}^* \dot{\mathbf{B}}^* e^{-i2\omega t} \right). \end{aligned}$$

Здесь в правой части первое и четвертое слагаемые, а также второе и третье являются комплексно-сопряженными величинами. Заменяя их полусуммы согласно (4.19), имеем

$$\mathbf{A}(t) \mathbf{B}(t) = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left( \dot{\mathbf{A}} \dot{\mathbf{B}} e^{i2\omega t} + \dot{\mathbf{A}}^* \dot{\mathbf{B}} \right). \quad (4.21)$$

Как известно, среднее за период  $T$  значение произведения  $\dot{\mathbf{A}} \dot{\mathbf{B}}$  определяется формулой

$$(\dot{\mathbf{A}} \dot{\mathbf{B}})_{\text{cp}} = \frac{1}{T} \int_0^T \mathbf{A}(t) \mathbf{B}(t) dt. \quad (4.22)$$

Подставив (4.21) в (4.22), поменяв очередность операций интегрирования (линейная операция) и удержания вещественной части и принимая во внимание, что комплексные амплитуды от времени не зависят и  $\int_0^T e^{i2\omega t} dt = 0$ , получаем

$$(\dot{\mathbf{A}} \dot{\mathbf{B}})_{\text{cp}} = \frac{1}{2} \operatorname{Re}(\dot{\mathbf{A}} \dot{\mathbf{B}}^*). \quad (4.23a)$$

Аналогичным путем выводится выражение

$$[\dot{\mathbf{A}} \dot{\mathbf{B}}]_{\text{cp}} = \frac{1}{2} \operatorname{Re}[\dot{\mathbf{A}} \dot{\mathbf{B}}^*]. \quad (4.23b)$$

Воспользовавшись (4.23a), имеем

$$(\dot{\mathbf{A}}^2)_{\text{cp}} = (\dot{\mathbf{A}} \dot{\mathbf{A}})_{\text{cp}} = \frac{1}{2} \operatorname{Re}(\dot{\mathbf{A}} \dot{\mathbf{A}}^*) = \frac{1}{2} |\dot{\mathbf{A}}|^2, \quad (4.24)$$

так как в соответствии с (3.57) и (4.20)

$$\dot{\mathbf{A}} \dot{\mathbf{A}}^* = A_{um}^2 + A_{vm}^2 + A_{wm}^2 = |\dot{\mathbf{A}}|^2 \quad (4.25)$$

есть чисто вещественная величина.

При помощи (4.10), (4.14) и (4.24) определим средние за период значения объемных плотностей мощности тепловых потерь

и энергий электрического и магнитного полей:

$$P'_{п.ср} = \sigma (E^2)_{ср} = \frac{\sigma |\dot{\mathbf{E}}|^2}{2}, \quad W'_{э.ср} = \frac{\epsilon_a (E^2)_{ср}}{2} = \frac{\epsilon_a |\dot{\mathbf{E}}|^2}{4},$$

$$W'_{м.ср} = \frac{\mu_a (H^2)_{ср}}{2} = \frac{\mu_a |\dot{\mathbf{H}}|^2}{4}. \quad (4.26)$$

Средние за период значения объемной плотности мощности сторонних источников и вектора Пойнтинга выразим при помощи (4.11), (4.15) и (4.23):

$$P'_{ст.ср} = -(\mathbf{E} \delta_{ст})_{ср} = \text{Re } \tilde{S}'_{ст}, \quad \mathbf{P}_{ср} = [\mathbf{E}\mathbf{H}]_{ср} = \text{Re } \tilde{\mathbf{P}}, \quad (4.27)$$

где введены обозначения:

$$\tilde{S}'_{ст} = -\frac{1}{2} \dot{\mathbf{E}} \delta_{ст}^*, \quad \tilde{\mathbf{P}} = \frac{1}{2} [\dot{\mathbf{E}} \dot{\mathbf{H}}^*]. \quad (4.28)$$

Величину  $\tilde{S}'_{ст}$  называют объемной плотностью комплексной мощности сторонних источников;  $\tilde{\mathbf{P}}$  — комплексным вектором Пойнтинга.

### 4.3. ТЕОРЕМА УМОВА — ПОЙНТИНГА ДЛЯ КОМПЛЕКСНЫХ АМПЛИТУД

Напишем уравнение, комплексно-сопряженное с первым уравнением (3.67):

$$\text{rot } \dot{\mathbf{H}}^* = \sigma \dot{\mathbf{E}}^* - i \omega \epsilon_a \dot{\mathbf{E}}^* + \dot{\delta}_{ст}^*. \quad (4.29)$$

Умножим скалярно (4.29) на  $\dot{\mathbf{E}}$ , второе уравнение (3.67) умножим на  $-\dot{\mathbf{H}}$  и сложим полученные результаты:

$$\dot{\mathbf{E}} \text{rot } \dot{\mathbf{H}}^* - \dot{\mathbf{H}} \text{rot } \dot{\mathbf{E}} = \sigma |\dot{\mathbf{E}}|^2 - i \omega \epsilon_a |\dot{\mathbf{E}}|^2 + \dot{\mathbf{E}} \dot{\delta}_{ст}^* + i \omega \mu_a |\dot{\mathbf{H}}|^2. \quad (4.30)$$

Преобразовав левую часть при помощи (П1.16) и умножив (4.30) на 1/2, приходим к уравнению

$$-\frac{1}{2} \dot{\mathbf{E}} \dot{\delta}_{ст}^* = \frac{1}{2} \sigma |\dot{\mathbf{E}}|^2 + i 2\omega (\mu_a |\dot{\mathbf{H}}|^2/4 - \epsilon_a |\dot{\mathbf{E}}|^2/4) + \frac{1}{2} \text{div} [\dot{\mathbf{E}}\dot{\mathbf{H}}^*], \quad (4.31a)$$

которое называют дифференциальной формой теоремы Умова—Пойнтинга для комплексных амплитуд. Согласно обозначениям § 4.2 уравнение (4.31a) можно записать и в следующем виде:

$$\tilde{S}'_{ст} = P'_{п.ср} + i 2\omega (W'_{м.ср} - W'_{э.ср}) + \text{div } \tilde{\mathbf{P}}. \quad (4.31б)$$

Интегральную форму теоремы Умова—Пойнтинга получим, проинтегрировав (4.31) по объему  $V$  и применив затем к послед-

нему члену справа теорему Остроградского—Гаусса (П1.5):

$$-\frac{1}{2} \int_V \dot{\mathbf{E}} \dot{\mathbf{D}}_{\text{ст}}^* dV = \frac{1}{2} \int_V \sigma |\dot{\mathbf{E}}|^2 dV + i 2\omega \int_V \left( \frac{\mu_a |\dot{\mathbf{H}}|^2}{4} - \frac{\varepsilon_a |\dot{\mathbf{E}}|^2}{4} \right) dV + \frac{1}{2} \oint_S [\dot{\mathbf{E}} \dot{\mathbf{H}}] dS \quad (4.32a)$$

или

$$\int_V \tilde{\mathcal{S}}'_{\text{ст}} dV = \int_V P'_{\text{п.ср}} dV + i 2\omega \int_V (W'_{\text{м.ср}} - W'_{\text{э.ср}}) dV + \oint_S \tilde{\mathbf{p}} dS. \quad (4.32б)$$

В соотношениях (4.32) левая часть и последнее слагаемое справа являются комплексными величинами и соответственно называются комплексной мощностью сторонних источников в объеме  $V$  и комплексной мощностью, выходящей сквозь поверхность  $S$ , ограничивающую объем  $V$ . Остальные интегралы в (4.32) вещественные. Теорема Умова—Пойнтинга в интегральной форме для комплексных амплитуд (4.32) выражает баланс комплексных мощностей и называется *теоремой о комплексной мощности*.

Приравнявая в (4.32) вещественные части слева и справа, получаем уравнение

$$-\frac{1}{2} \operatorname{Re} \int_V \dot{\mathbf{E}} \dot{\mathbf{D}}_{\text{ст}}^* dV = \frac{1}{2} \int_V \sigma |\dot{\mathbf{E}}|^2 dV + \frac{1}{2} \operatorname{Re} \oint_S [\dot{\mathbf{E}} \dot{\mathbf{H}}] dS \quad (4.33a)$$

или

$$\int_V P'_{\text{ст.ср}} dV = \int_V P'_{\text{п.ср}} dV + \oint_S \mathbf{P}_{\text{ср}} dS, \quad (4.33б)$$

которое можно также представить в виде

$$P_{\text{ст.ср}} = P_{\text{п.ср}} + P_{\Sigma\text{ср}}. \quad (4.33в)$$

Вещественные части комплексных мощностей, равные средним за период значениям соответствующих мощностей, называются активными мощностями. Соотношения (4.33) выражают баланс средних за период значений мощностей и называются *теоремой об активной мощности*.

Сопоставление (4.33в) с (4.1) показывает, что при установившемся монохроматическом процессе среднее значение энергии электромагнитного поля в объеме  $V$  не изменяется во времени. Благодаря периодичности монохроматического процесса напряженности электрического и магнитного полей в объеме  $V$  через период  $T$  возвращаются к исходным значениям. Поскольку электромагнитная энергия однозначно определяется напряженностями полей, то и она по истечении периода  $T$  принимает первоначальное значение, вследствие чего и выполняется условие  $\partial W_{\text{ср}}/\partial t = 0$ .

Приравнивая в (4.32) мнимые части, получаем уравнение

$$P_{\text{qст}} = 2\omega \int_V (W'_{\text{м.ср}} - W'_{\text{э.ср}}) dV + \text{Im} \oint_S \tilde{\Pi} dS, \quad (4.34)$$

где  $P_{\text{qст}} = -\frac{1}{2} \text{Im} \int_V \mathbf{E} \delta_{\text{ст}}^* dV$ . Мнимую часть  $P_{\text{qст}}$  комплексной мощности сторонних источников называют реактивной мощностью этих источников. Абсолютная величина  $P_{\text{qст}}$  равна амплитуде так называемой мгновенной реактивной мощности источников, среднее за период значение которой равно нулю, так как она связана с колебательным характером движения энергии — в течение четверти периода реактивная энергия переходит из источников в поле и движется в одном направлении, в течение следующей четверти периода эта энергия возвращается из поля в источники и движется в противоположном направлении. Соотношение (4.34), называемое *теоремой о реактивной мощности*, показывает, что  $P_{\text{qст}}$  определяется разностью средних значений энергий магнитного и электрического полей в объеме  $V$  и мнимой частью потока вектора  $\tilde{\Pi}$  сквозь поверхность  $S$ , ограничивающую объем  $V$ .

Пусть объем  $V$  представляет собой *изолированную* область, для которой поток  $\tilde{\Pi}$  сквозь ограничивающую ее поверхность  $S$  равен нулю. Например, изолированной областью является объем, ограниченный непроницаемой для поля идеально проводящей поверхностью. Для изолированной области ур-ния (4.33) и (4.34) имеют вид:

$$P_{\text{ст.ср}} = P_{\text{п.ср}}; \quad P_{\text{qст}} = 2\omega (W_{\text{м.ср}} - W_{\text{э.ср}}). \quad (4.35)$$

Если при этом средние значения энергий электрического и магнитного полей в объеме  $V$  равны ( $W_{\text{м.ср}} = W_{\text{э.ср}}$ ), то мощность сторонних источников чисто активна ( $P_{\text{qст}} = 0$ ) и в изолированной области имеет место *резонанс*. Можно показать (например, [16]), что резонанс возможен лишь на строго определенных дискретных *резонансных частотах*, которые образуют бесконечную последовательность и зависят от формы и размеров изолированной области и от параметров  $\epsilon_a$ ,  $\mu_a$  и  $\sigma$  заполняющей ее среды.

Средняя скорость переноса электромагнитной энергии монохроматическим полем получается из (4.17) при переходе к средним за период значениям:

$$v_z = \frac{\int_S \Pi_{\text{ср}} dS}{\int_S W'_{\text{ср}} dS} = \frac{\int_S \text{Re} \tilde{\Pi} dS}{\int_S W'_{\text{ср}} dS}. \quad (4.36)$$

Если значения  $\tilde{\Pi}$  и  $W'_{\text{ср}}$  не изменяются по сечению трубки  $S$ , то вместо (4.36) имеем

$$v_z = \Pi_{\text{ср}} / W'_{\text{ср}} = \text{Re} \tilde{\Pi} / W'_{\text{ср}}. \quad (4.37)$$

УСЛОВИЯ ЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЯ  
УРАВНЕНИЙ ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ



5.1. ТЕОРЕМА ЕДИНСТВЕННОСТИ ДЛЯ ВНУТРЕННЕЙ ЗАДАЧИ  
ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ

Большинство рассматриваемых в электродинамике задач анализа можно разделить на две группы — *внутренние* и *внешние* краевые задачи. Во внутренней краевой задаче электродинамики требуется найти решение уравнений Максвелла *внутри* некоторого объема  $V$ , имеющего конечные размеры и ограниченного замкнутой поверхностью  $S$ . Во внешней задаче обычно требуется найти решение уравнений Максвелла в безграничном пространстве *вне* некоторого конечного объема  $V'$ , ограниченного замкнутой поверхностью  $S$ .

Условия единственности решения уравнений электродинамики устанавливает так называемая *теорема единственности*, которая имеет различные формулировки для внутренней и внешней задач электродинамики. Очевидно, что знание этих условий имеет весьма существенное принципиальное и практическое значение. Действительно, в случае недостаточного числа заданных условий заранее можно сказать, что решение уравнений электродинамики будет неоднозначным. При избытке исходных условий некоторые из них могут оказаться взаимно противоречивыми, вследствие чего задача будет неразрешимой. С другой стороны, если мы сумеем каким-либо способом найти (пусть даже угадать) решение уравнений электродинамики, которое удовлетворяет условиям единственности решения, то можно быть уверенным, что именно оно определяет действительно существующее на практике электромагнитное поле.

Ниже будет рассмотрена теорема единственности для монохроматических полей.

Теорема единственности для внутренней задачи утверждает, что внутри конечного объема  $V$ , ограниченного поверхностью  $S$ , решение уравнений Максвелла для комплексных амплитуд

$$\operatorname{rot} \dot{\mathbf{H}} = i \omega \epsilon_a \dot{\mathbf{E}} + \sigma \dot{\mathbf{E}} + \dot{\mathbf{j}}_{\text{св}}, \quad \operatorname{rot} \dot{\mathbf{E}} = -i \omega \mu_a \dot{\mathbf{H}} \quad (5.1)$$

единственно, если, во-первых, оно удовлетворяет одному из трех *краевых условий*:

- 1) заданным на поверхности  $S$  значениям тангенциальной составляющей напряженности электрического поля  $\dot{\mathbf{E}}_{\tau}$  ;
- 2) заданным на поверхности  $S$  значениям  $\dot{\mathbf{H}}_{\tau}$  ;
- 3) заданным на части поверхности  $S$  значениям  $\dot{\mathbf{E}}_{\tau}$  и заданным на остальной части  $S$  значениям  $\dot{\mathbf{H}}_{\tau}$

— и если, во-вторых, при отсутствии потерь ( $\sigma = 0$ ) частота  $\omega$  в (5.1) не совпадает ни с одной из резонансных частот области  $V$ .

Доказательство этой теоремы основывается на следующей лемме.

Внутри конечного объема  $V$ , ограниченного поверхностью  $S$ , решение  $\mathbf{\dot{E}}$ ,  $\mathbf{\dot{H}}$  однородных уравнений Максвелла

$$\operatorname{rot} \mathbf{\dot{H}} = i\omega \epsilon_a \mathbf{\dot{E}} + \sigma \mathbf{\dot{E}}, \quad \operatorname{rot} \mathbf{\dot{E}} = -i\omega \mu_a \mathbf{\dot{H}} \quad (5.2)$$

тождественно равно нулю, если, во-первых, оно удовлетворяет одному из следующих нулевых краевых условий:

- 1)  $\mathbf{\dot{E}}_\tau = 0$  на поверхности  $S$ ;
- 2)  $\mathbf{\dot{H}}_\tau = 0$  на поверхности  $S$ ;
- 3)  $\mathbf{\dot{E}}_\tau = 0$  на части поверхности  $S$ ,  $\mathbf{\dot{H}}_\tau = 0$  на остальной части  $S$

— и если, во-вторых, при отсутствии потерь ( $\sigma = 0$ ) частота  $\omega$  в (5.2) не совпадает ни с одной из резонансных частот области  $V$ .

Применим к полю  $\mathbf{\dot{E}}$ ,  $\mathbf{\dot{H}}$  в объеме  $V$  теорему Пойнтинга (4.32) и учтем, что  $\dot{\delta}_{\text{сг}} = 0$ :

$$-\frac{1}{2} \oint_S [\mathbf{\dot{E}} \mathbf{\dot{H}}^*] \mathbf{n}^0 dS = \frac{1}{2} \int_V \sigma |\mathbf{\dot{E}}|^2 dV + i2\omega \int_V \frac{\mu_a |\mathbf{\dot{H}}|^2 - \epsilon_a |\mathbf{\dot{H}}|^2}{4} dV, \quad (5.3)$$

где  $\mathbf{n}^0$  — внешняя нормаль к элементу  $dS$  замкнутой поверхности  $S$ . В ф-ле (5.3) подынтегральное выражение слева согласно (П1.3) можно преобразовать следующим образом:

$$[\mathbf{\dot{E}} \mathbf{\dot{H}}^*] \mathbf{n}^0 = [\mathbf{n}^0 \mathbf{\dot{E}}] \mathbf{\dot{H}} = [\mathbf{\dot{H}} \mathbf{n}^0] \mathbf{\dot{E}}. \quad (5.4)$$

Здесь второй член равенства пропорционален значению  $\mathbf{\dot{E}}_\tau$  на поверхности  $S$ , а третий пропорционален  $\mathbf{\dot{H}}_\tau$ . Следовательно, при нулевых краевых условиях соотношение (5.4) на поверхности  $S$  обращается в нуль и соответственно

$$\oint_S [\mathbf{\dot{E}} \mathbf{\dot{H}}^*] \mathbf{n}^0 dS = 0. \quad (5.5)$$

Подставляя (5.5) в (5.3) и разделяя вещественную и мнимую части, получаем

$$\frac{1}{2} \int_V \sigma |\mathbf{\dot{E}}|^2 dV = 0; \quad (5.6)$$

$$\int_V \frac{\mu_a |\mathbf{\dot{H}}|^2}{4} dV = \int_V \frac{\epsilon_a |\mathbf{\dot{E}}|^2}{4} dV. \quad (5.7)$$

Далее следует различать два случая.

Если в объеме  $V$  удельная проводимость  $\sigma > 0$ , то соотношение (5.6) удовлетворяется только при  $\mathbf{\dot{E}} = 0$ . При этом согласно (5.7) и  $\mathbf{\dot{H}} = 0$  в объеме  $V$ .

Если  $\sigma=0$ , то (5.6) удовлетворяется и при  $\dot{\mathbf{E}} \neq 0$ . При этом согласно ур-нию (5.7) электромагнитное поле  $\dot{\mathbf{E}}, \dot{\mathbf{H}}$  может отличаться от нуля, если в объеме  $V$   $W_{\text{м.ср}} = W_{\text{э.ср}}$ , что возможно только при совпадении заданной частоты  $\omega$  с одной из резонансных частот области  $V$  (см. § 4.3).

Перейдем к доказательству теоремы единственности, которое будем вести от противного. Предположим, что в рассматриваемом объеме  $V$  существуют два различных решения  $\dot{\mathbf{E}}_1, \dot{\mathbf{H}}_1$  и  $\dot{\mathbf{E}}_2, \dot{\mathbf{H}}_2$  ур-ний (5.1), удовлетворяющих одним и тем же краевым условиям

$$\dot{\mathbf{E}}_{1\tau} = \dot{\mathbf{E}}_{2\tau} = \dot{\mathbf{E}}_{\tau} \quad \text{или} \quad \dot{\mathbf{H}}_{1\tau} = \dot{\mathbf{H}}_{2\tau} = \dot{\mathbf{H}}_{\tau} \quad \text{на } S. \quad (5.8)$$

Из линейности ур-ний (5.1) следует, что и разность этих двух решений

$$\dot{\mathbf{E}}' = \dot{\mathbf{E}}_2 - \dot{\mathbf{E}}_1, \quad \dot{\mathbf{H}}' = \dot{\mathbf{H}}_2 - \dot{\mathbf{H}}_1 \quad (5.9)$$

также должна удовлетворять уравнениям Максвелла, которые теперь уже будут однородными [сторонние токи сократятся в уравнениях для разности (5.9)]. Из (5.8) и (5.9) следует, что разность  $\dot{\mathbf{E}}', \dot{\mathbf{H}}'$  должна удовлетворять нулевым краевым условиям

$$\dot{\mathbf{E}}'_{\tau} = \dot{\mathbf{E}}_{2\tau} - \dot{\mathbf{E}}_{1\tau} = 0 \quad \text{или} \quad \dot{\mathbf{H}}'_{\tau} = \dot{\mathbf{H}}_{2\tau} - \dot{\mathbf{H}}_{1\tau} = 0 \quad \text{на } S. \quad (5.10)$$

На основании рассмотренной леммы можно утверждать, что разность двух решений тождественно равна нулю, т. е. решение ур-ний (5.1) единственно. Лишь при отсутствии потерь и совпадении заданной частоты  $\omega$  с резонансной частотой области  $V$  решение внутренней задачи становится неоднозначным. В этом случае разностное поле (5.9) может оказаться равным полю незатухающих колебаний, которое может существовать сколь угодно долго на резонансной частоте в области без потерь  $V$  (например, поля собственных колебаний резонаторов без потерь — см. гл. 22).

## 5.2. УСЛОВИЯ ИЗЛУЧЕНИЯ. ТЕОРЕМА ЕДИНСТВЕННОСТИ ДЛЯ ВНЕШНЕЙ ЗАДАЧИ ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ

Во внешней задаче требуется найти решение уравнений Максвелла (5.1) в безграничном пространстве  $V$ . Можно считать, что в этом случае область  $V$  представляет собой объем, ограниченный снаружи сферической поверхностью  $S_{\infty}$  бесконечно большого радиуса  $R$  ( $R$  — расстояние от начала координат  $O$ ) — см. рис. 5.1. Изнутри область  $V$  может быть ограничена замкнутой поверхностью  $S$  (или несколькими такими поверхностями), которая исключает из  $V$  некоторый объем конечных размеров  $V'$ .

Единственность решения внешней задачи доказывается при условии, что все сторонние источники распределены на *конечном* расстоянии от произвольно выбранного начала координат  $O$  (рис. 5.1).

Если источники поля распределены в ограниченной области пространства, то при установившемся монохроматическом процессе (который мыслится продолжающимся бесконечно долго) в среде без потерь ( $\sigma=0$ ) среднее значение мощности  $P_{\Sigma \text{ ср}}$ , выходящей наружу сквозь *любую* воображаемую поверхность  $S_1$ , которая охватывает собой извне все сторонние источники и объем

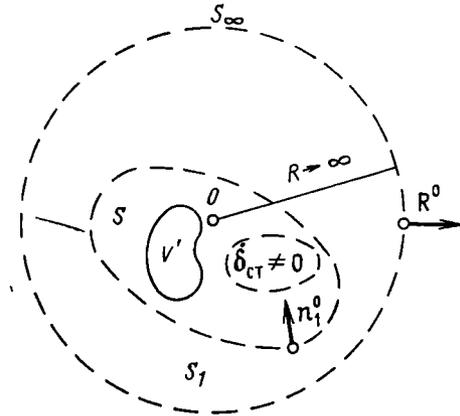


РИС 5.1

$V'$  (рис. 5.1), есть *постоянная* величина. Чтобы показать это, применим теорему об активной мощности (4.33) к объему, заключенному между поверхностями  $S_1$  и  $S_\infty$ , и учтем, что в нем  $\delta_{\text{ст}}=0$  и  $\sigma=0$ :

$$\oint_{S_1} \mathbf{P}_{\text{ср}} \mathbf{n}_1^0 dS + \oint_{S_\infty} \mathbf{P}_{\text{ср}} \mathbf{R}^0 dS = 0. \quad (5.11)$$

Вычисляя интеграл по  $S_1$  в направлении внешней нормали —  $\mathbf{n}_1^0$  по отношению к объему с источниками, приходим от (5.11) к соотношению

$$P_{\Sigma \text{ ср}} = \oint_{S_1} \mathbf{P}_{\text{ср}} d\mathbf{S} = \oint_{S_\infty} \mathbf{P}_{\text{ср}} d\mathbf{S}, \quad (5.12)$$

где в интеграле по  $S_1$  использовано обозначение  $d\mathbf{S} = -\mathbf{n}_1^0 dS$ , в интеграле по  $S_\infty$  — обозначение  $d\mathbf{S} = \mathbf{R}^0 dS$ . Из (5.12) следует, что в среде без потерь средние мощности, выходящие сквозь произвольную поверхность  $S_1$  и поверхность  $S_\infty$  одинаковы. Вытекающее из закона сохранения энергии равенство (5.12) будет выполняться в том случае, если в однородной среде без потерь на очень больших расстояниях от источников электромагнитное поле будет удовлетворять следующим *условиям излучения*:

$$\lim_{R \rightarrow \infty} R \left( \sqrt{\frac{\epsilon_a}{\mu_a}} \mathbf{E} - [\mathbf{H} \mathbf{R}^0] \right) = 0, \quad \lim_{R \rightarrow \infty} R \left( \sqrt{\frac{\mu_a}{\epsilon_a}} \mathbf{H} - [\mathbf{R}^0 \mathbf{E}] \right) = 0, \quad (5.13a)$$

$$\lim_{R \rightarrow \infty} R |\mathbf{E}| = \text{конечной величине}, \quad \lim_{R \rightarrow \infty} R |\mathbf{H}| = \text{конечной величине}, \quad (5.13б)$$

где  $\epsilon_a$  и  $\mu_a$  — параметры среды;  $\mathbf{R}^0$  — орт, который совпадает по направлению с радиусом-вектором, проведенным из начала координат  $O$  в точку наблюдения.

Действительно, представив элемент сферической поверхности соотношением  $dS = R^2 d\Omega$  (где  $d\Omega$  — элементарный телесный угол) и заменив в формуле

$$\oint_{S_\infty} \tilde{\mathbf{P}} d\mathbf{S} = \frac{1}{2} \oint_{S_\infty} [\dot{\mathbf{E}}\dot{\mathbf{H}}] \mathbf{R}^0 dS = \frac{1}{2} \oint_{4\pi} \dot{\mathbf{E}} [\dot{\mathbf{H}}\mathbf{R}^0] R^2 d\Omega \quad (5.14)$$

произведение  $[\dot{\mathbf{H}}\mathbf{R}^0]R$  в соответствии с первым соотношением (5.13а) выражением  $R\sqrt{\epsilon_a/\mu_a} \dot{\mathbf{E}}$ , имеем

$$\oint_{S_\infty} \tilde{\mathbf{P}} d\mathbf{S} = \frac{1}{2} \oint_{4\pi} \sqrt{\epsilon_a/\mu_a} |\dot{\mathbf{E}}|^2 R^2 d\Omega. \quad (5.15)$$

Интеграл (5.15) является вещественной величиной, вследствие чего

$$P_{\Sigma \text{ ср}} = \oint_{S_\infty} \mathbf{P}_{\text{ср}} d\mathbf{S} = \text{Re} \oint_{S_\infty} \tilde{\mathbf{P}} d\mathbf{S} = \frac{1}{2} \oint_{4\pi} \sqrt{\epsilon_a/\mu_a} |\dot{\mathbf{E}}|^2 R^2 d\Omega. \quad (5.16)$$

При выполнении первого соотношения (5.13б) мощность (5.16) представляет собой положительную постоянную величину (которая не зависит от радиуса  $R$  сферической поверхности), как это и должно быть согласно (5.12).

Этот же результат легко получить аналогичным путем при помощи и вторых соотношений (5.13).

Физически условия излучения (5.13) означают, что на больших расстояниях от источников создаваемые ими поля имеют характер сферических бегущих волн, расходящихся от источников в радиальных направлениях  $\mathbf{R}^0$ . Подробно этот вопрос будет рассмотрен ниже. Здесь только отметим, что комплексные амплитуды векторов  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  этих волн и направление распространения  $\mathbf{R}^0$  связаны между собой соотношениями  $\dot{\mathbf{E}} = \sqrt{\mu_a/\epsilon_a} [\dot{\mathbf{H}}\mathbf{R}^0]$ ,  $\dot{\mathbf{H}} = \sqrt{\epsilon_a/\mu_a} [\mathbf{R}^0\dot{\mathbf{E}}]$  [см., например, ф-лы (9.17)], которые согласуются с условиями (5.13а). Амплитуды векторов  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  волн, расходящихся в радиальных направлениях, убывают на больших расстояниях от источников по закону  $1/R$  (см., например, § 9.5), что согласуется с условиями (5.13б), вытекающими из закона сохранения энергии в среде без потерь.

В безграничной среде с потерями ( $\sigma > 0$ ) условия излучения (5.13) заменяют условиями на бесконечности следующего вида:

$$\lim_{R \rightarrow \infty} R |\dot{\mathbf{E}}| = 0, \quad \lim_{R \rightarrow \infty} R |\dot{\mathbf{H}}| = 0. \quad (5.17)$$

Они означают, что при наличии потерь векторы поля на больших расстояниях от источников убывают быстрее, чем  $1/R$ , т. е.

$$|\dot{\mathbf{E}}| < E_0/R^{1+\alpha}, \quad |\dot{\mathbf{H}}| < H_0/R^{1+\alpha} \quad \text{при } R \rightarrow \infty, \quad (5.18)$$

где  $E_0$  и  $H_0$  — некоторые конечные положительные величины;  $\alpha$  — положительное число. В этом случае очевидна оценка

$$\left| \oint_{S_\infty} \tilde{\mathbf{P}} d\mathbf{S} \right| = \left| \frac{1}{2} \oint_{S_\infty} [\dot{\mathbf{E}} \dot{\mathbf{H}}] d\mathbf{S} \right| \leq \frac{1}{2} \oint_{4\pi} |\dot{\mathbf{E}} \parallel \dot{\mathbf{H}}| R^2 d\Omega \leq \frac{1}{2} \frac{E_0 H_0}{R^{2+2\alpha}} 4\pi R^2 = \\ = \frac{2\pi E_0 H_0}{R^{2\alpha}} \rightarrow 0 \text{ при } R \rightarrow \infty, \quad (5.19)$$

из которой для среды с потерями следует соотношение

$$\oint_{S_\infty} \mathbf{P}_{\text{ср}} d\mathbf{S} = \text{Re} \oint_{S_\infty} \tilde{\mathbf{P}} d\mathbf{S} = 0. \quad (5.20)$$

Теорема единственности для внешней задачи утверждает, что в безграничной области  $V$  вне некоторого объема конечных размеров  $V'$ , ограниченного поверхностью  $S$ , решение уравнений Максвелла (5.1), в которых сторонние токи  $\delta_{\text{ст}}$  распределены на конечном расстоянии, единственно, если оно удовлетворяет:

1) на поверхности  $S$  таким же краевым условиям, что и при решении внутренней задачи;

2) в среде без потерь при  $R \rightarrow \infty$  условиям излучения (5.13), в среде с потерями условиям на бесконечности (5.17).

Доказательство этой теоремы основывается на следующей лемме.

В безграничной области  $V$  вне объема  $V'$ , ограниченного поверхностью  $S$ , решение  $\dot{\mathbf{E}}$ ,  $\dot{\mathbf{H}}$  однородных уравнений Максвелла (5.2) тождественно равно нулю, если оно удовлетворяет:

1) на поверхности  $S$  таким же нулевым краевым условиям, что и в лемме § 5.1;

2) в среде без потерь при  $R \rightarrow \infty$  условиям излучения (5.13), в среде с потерями условиям на бесконечности (5.17).

Применим к полю  $\dot{\mathbf{E}}$ ,  $\dot{\mathbf{H}}$  в объеме  $V$  теорему Пойнтинга (4.32) и учтем, что этот объем ограничен двумя поверхностями  $S$  и  $S_\infty$  и что вследствие нулевых краевых условий справедливо соотношение (5.5):

$$-\frac{1}{2} \oint_{S_\infty} [\dot{\mathbf{E}} \dot{\mathbf{H}}] R^0 d\mathbf{S} = \frac{1}{2} \int_V \sigma |\dot{\mathbf{E}}|^2 dV + i 2\omega \int_V \frac{\mu_a |\dot{\mathbf{H}}|^2 - \varepsilon_a |\dot{\mathbf{E}}|^2}{4} dV. \quad (5.21)$$

Далее будем различать два случая.

Если среда без потерь, то в силу условий (5.13а) интеграл слева в (5.21) есть вещественная величина [см. ф-лу (5.15)]; кроме того, первое слагаемое справа при  $\sigma=0$  обращается в нуль, а второе слагаемое — мнимая величина. Выделяя в равенстве (5.21) вещественную часть, получаем соотношение

$$\oint_{S_\infty} \mathbf{P}_{\text{ср}} d\mathbf{S} = \frac{1}{2} \oint_{4\pi} \sqrt{\varepsilon_a / \mu_a} |\dot{\mathbf{E}}|^2 R^2 d\Omega = 0, \quad (5.22)$$

которое означает, что поле  $\dot{\mathbf{E}}$ ,  $\dot{\mathbf{H}}$  в объеме  $V$  тождественно равно нулю. В самом деле, если бы это поле было отличным от нуля,

то при отсутствии потерь в силу условий (5.136) поток вектора  $\Pi_{\text{ср}}$  (5.22) имел бы положительное постоянное значение.

В случае среды с потерями в силу условий (5.17) интеграл слева в (5.21) равен нулю [см. ф-лу (5.19)]. Разделяя в (5.21) вещественную и мнимую части, приходим к равенствам (5.6) и (5.7), из которых при  $\sigma > 0$  следует, что в объеме  $V$  поля  $\dot{\mathbf{E}} = 0$  и  $\mathbf{H} = 0$ .

Теорема единственности для внешней задачи доказывается от противного таким же способом, как и для внутренней задачи (см. § 5.1).

## Глава 6

### ВОЛНОВЫЕ УРАВНЕНИЯ ДЛЯ ВЕКТОРОВ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ, ЭЛЕКТРОДИНАМИЧЕСКИЕ ПОТЕНЦИАЛЫ



#### 6.1. ВОЛНОВЫЕ УРАВНЕНИЯ ДЛЯ ВЕКТОРОВ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ

Многие задачи электродинамики могут быть сведены к изучению электромагнитных явлений в изотропных линейных *однородных* средах. В этой главе будет показано, каким образом систему уравнений Максвелла для таких сред можно привести к более простым уравнениям, методы решения которых хорошо изучены.

Электромагнитные поля в изотропных линейных однородных средах без сторонних источников подчиняются уравнениям Максвелла (3.27). При решении этих уравнений целесообразно исключить одно из полей (электрическое или магнитное) и перейти к линейному дифференциальному уравнению в частных производных *второго порядка*, содержащему либо вектор  $\mathbf{E}$ , либо вектор  $\mathbf{H}$ .

Чтобы исключить из системы (3.27) вектор  $\mathbf{E}$ , применим к первому уравнению операцию ротора, вынесем параметры однородной среды за знак этой операции и используем соотношение (П1.21):

$$\text{rot rot } \mathbf{H} = \text{grad div } \mathbf{H} - \nabla^2 \mathbf{H} = \sigma \text{ rot } \mathbf{E} + \epsilon_a \text{ rot } \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}. \quad (6.1)$$

Учитывая, что в однородной среде  $\text{div } \mathbf{H} = 0$  и что очередность операций дифференцирования по времени и по пространственным координатам безразлична (независимые переменные), получаем

$$-\nabla^2 \mathbf{H} = \sigma \text{ rot } \mathbf{E} + \epsilon_a \frac{\partial}{\partial t} \text{ rot } \mathbf{E}. \quad (6.2)$$

Подставив в (6.2) rot  $\mathbf{E}$  из второго ур-ния (3.27) и вынеся параметры линейной среды за знак производной по времени, приходим к дифференциальному уравнению второго порядка для  $\mathbf{H}$

$$\nabla^2 \mathbf{H} - \epsilon_a \mu_a \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} - \mu_a \sigma \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = 0. \quad (6.3a)$$

Исключая аналогичным образом из (3.27) вектор  $\mathbf{H}$ , получаем такое же уравнение для  $\mathbf{E}$

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \epsilon_a \mu_a \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} - \mu_a \sigma \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = 0. \quad (6.3b)$$

Уравнение (6.3) называют *векторным обобщенным однородным волновым уравнением*. В случае идеального диэлектрика ( $\sigma=0$ ) ур-ние (6.3) принимает вид

$$\nabla^2 \mathbf{H} - \epsilon_a \mu_a \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} = 0; \quad \nabla^2 \mathbf{E} - \epsilon_a \mu_a \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0 \quad (6.4)$$

и носит название *векторного однородного волнового уравнения*.

В случае монохроматического процесса в изотропной линейной среде без сторонних источников уравнения Максвелла (3.67) принимают вид:

$$\text{rot } \dot{\mathbf{H}} = i \omega \tilde{\epsilon}_a \dot{\mathbf{E}}, \quad \text{rot } \dot{\mathbf{E}} = -i \omega \mu_a \dot{\mathbf{H}}. \quad (6.5)$$

Если среда, кроме того, еще и однородна, то из (6.5) вытекают известные нам для такой среды соотношения:

$$\text{div } \dot{\mathbf{E}} = 0, \quad \text{div } \dot{\mathbf{H}} = 0, \quad (6.6)$$

в чем легко убедиться, применив к (6.5) операцию дивергенции и воспользовавшись тождеством (П1.19).

Исключая из (6.5), (6.6) описанным выше способом один из векторов электромагнитного поля, получаем:

$$\nabla^2 \dot{\mathbf{H}} + \tilde{k}^2 \dot{\mathbf{H}} = 0, \quad \nabla^2 \dot{\mathbf{E}} + \tilde{k}^2 \dot{\mathbf{E}} = 0, \quad (6.7)$$

где введено обозначение  $\tilde{k}^2 = \omega^2 \tilde{\epsilon}_a \mu_a$ . В идеальном диэлектрике вместо (6.7) имеем:

$$\nabla^2 \dot{\mathbf{H}} + k^2 \dot{\mathbf{H}} = 0, \quad \nabla^2 \dot{\mathbf{E}} + k^2 \dot{\mathbf{E}} = 0, \quad (6.8)$$

где  $k^2 = \omega^2 \epsilon_a \mu_a$ . Уравнение вида (6.7) или (6.8) называют *векторным однородным уравнением Гельмгольца*.

Очевидно, что ур-ния (6.7) и (6.8) можно получить и непосредственно из линейных ур-ний (6.3) и (6.4), вводя в последних замены согласно методу комплексных амплитуд:

$$\frac{\partial}{\partial t} \rightarrow i \omega, \quad \frac{\partial^2}{\partial t^2} \rightarrow (i \omega)^2 = -\omega^2. \quad (6.9)$$

Отметим, что два уравнения Гельмгольца (6.7) не полностью эквивалентны исходной системе Максвелла (6.5), в которой  $\dot{\mathbf{E}}$  и  $\dot{\mathbf{H}}$  связаны между собой. В самом деле, если ур-ния (6.7) могут иметь, например, решения  $\dot{\mathbf{H}} \neq 0$ ,  $\dot{\mathbf{E}} \equiv 0$ , то система (6.5) таких ре-

шений не имеет. Поэтому при исследовании монохроматического поля в однородной среде без сторонних токов исходят из уравнения Гельмгольца для одного из векторов поля. Определив, например, вектор  $\mathbf{E}$ , удовлетворяющий уравнениям

$$\nabla^2 \mathbf{E} + \tilde{k}^2 \mathbf{E} = 0, \quad \operatorname{div} \mathbf{E} = 0, \quad (6.10)$$

можно затем найти  $\mathbf{H}$  из второго уравнения Максвелла:

$$\mathbf{H} = -\frac{1}{i\omega\mu_a} \operatorname{rot} \mathbf{E}. \quad (6.11)$$

## 6.2. ЭЛЕКТРОДИНАМИЧЕСКИЕ ПОТЕНЦИАЛЫ

Электромагнитные поля, создаваемые *сторонними источниками* в изотропных линейных однородных непроводящих средах, удовлетворяют уравнениям Максвелла (3.22). Решать эти уравнения удобно путем введения вспомогательных функций, называемых *электродинамическими потенциалами*.

Условие соленоидальности векторного поля  $\mathbf{B}$  (3.8) в соответствии с (П1.44) равносильно соотношению

$$\mathbf{B} = \operatorname{rot} \mathbf{A}. \quad (6.12)$$

Введенную ф-лой (6.12) функцию  $\mathbf{A}$  называют *векторным потенциалом*.

Подставив (6.12) во второе ур-ние (3.22), получаем

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \operatorname{rot} \mathbf{A} = -\operatorname{rot} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \quad (6.13)$$

или

$$\operatorname{rot} \left( \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) = 0. \quad (6.14)$$

Соотношение (6.14) является условием потенциальности поля суммарного вектора  $\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$  и в соответствии с (П1.41) эквивалентно уравнению

$$\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = -\operatorname{grad} \varphi. \quad (6.15)$$

Введенную ф-лой (6.15) функцию  $\varphi$  называют *скалярным потенциалом*. Знак минус в правой части поставлен с той целью, чтобы в случае электростатического поля функция  $\varphi$  переходила в скалярный электрический потенциал (см. § 7.2).

Согласно (6.12) и (6.15) векторы  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  можно выразить через электродинамические потенциалы:

$$\mathbf{E} = -\operatorname{grad} \varphi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}, \quad \mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu_a} = \frac{1}{\mu_a} \operatorname{rot} \mathbf{A}. \quad (6.16)$$

Подставляя (6.16) в ур-ние (I) системы (3.22), учитывая однородность и линейность среды и воспользовавшись соотношени-

ями (П1.21) и (П1.11), получаем

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \text{grad} \left( \text{div} \mathbf{A} + \varepsilon_a \mu_a \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right) - \varepsilon_a \mu_a \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\mu_a \delta_{\text{ст}}. \quad (6.17)$$

Для однозначного определения вектора  $\mathbf{A}$  необходимо задать соленоидальную и потенциальную его части (см. приложение 1, п1.7). Поскольку ф-ла (6.12), которой был введен вектор  $\mathbf{A}$ , определяет только его соленоидальную часть, существует возможность произвольного выбора потенциальной части. Говоря иначе, можно, не противореча уравнениям Максвелла, различными способами определять  $\text{div} \mathbf{A}$ . Выбор  $\text{div} \mathbf{A}$  называют калибровкой потенциала; ее производят из соображений математического удобства. Введем калибровочное соотношение таким образом, чтобы в (6.17) обратилось в нуль выражение в скобках:

$$\text{div} \mathbf{A} = -\varepsilon_a \mu_a \frac{\partial \varphi}{\partial t}. \quad (6.18)$$

При этом (6.17) упрощается и переходит в дифференциальное уравнение для потенциала  $\mathbf{A}$

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \varepsilon_a \mu_a \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\mu_a \delta_{\text{ст}}, \quad (6.19)$$

которое называют *векторным неоднородным волновым уравнением*. В соответствии с (6.19) функцию  $\mathbf{A}$  называют *векторным потенциалом электрического тока*.

Подставляя в ур-ние (III) системы (3.22) первое соотношение (6.16), учитывая (П1.18) и заменяя  $\text{div} \mathbf{A}$  согласно (6.18), приходим к *скалярному неоднородному волновому уравнению*, определяющему потенциал  $\varphi$ :

$$\nabla^2 \varphi - \varepsilon_a \mu_a \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -\frac{\rho_{\text{ст}}}{\varepsilon_a}. \quad (6.20)$$

После определения вспомогательных функций  $\mathbf{A}$  и  $\varphi$  из ур-ний (6.19), (6.20) и дополнительного условия (6.18) векторы электромагнитного поля находят при помощи соотношений (6.16).

### 6.3. ЭЛЕКТРОДИНАМИЧЕСКИЕ ПОТЕНЦИАЛЫ В БЕЗГРАНИЧНОЙ СРЕДЕ. ВОЛНОВОЙ ХАРАКТЕР ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ

Решения волновых ур-ний (6.19) и (6.20) для потенциалов имеют наиболее простой вид в задаче об электромагнитном поле, создаваемом сторонними источниками в однородной *безграничной* среде.

Найдем вначале решение скалярного неоднородного волнового ур-ния (6.20)

$$\nabla^2 \varphi - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -\frac{\rho_{\text{ст}}}{\varepsilon_a} \quad (6.21)$$

(где использовано обозначение  $v=1/\sqrt{\epsilon_a\mu_a}$ , м/с) в предположении, что сторонний заряд распределен равномерно с плотностью  $\rho_{ст}$  только в исчезающе малой области  $dV$  вокруг некоторой точки  $O$ . Во всем остальном безграничном пространстве  $\rho_{ст}=0$  и потенциал  $\varphi$  удовлетворяет однородному волновому уравнению

$$\nabla^2 \varphi - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0. \quad (6.22)$$

Очевидно, что потенциал  $\varphi$  заряда  $\rho_{ст}dV$  обладает сферической симметрией относительно точки  $O$ . Поэтому если совместить с этой точкой начало сферической системы координат  $(R, \theta, \psi)$ , то  $\varphi$  не будет зависеть от полярного  $\theta$  и азимутального  $\psi$  углов ( $\frac{\partial \varphi}{\partial \theta} = \frac{\partial \varphi}{\partial \psi} = 0$ ) и согласно (П1.38) получаем

$$\nabla^2 \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial R^2} + \frac{2}{R} \frac{\partial \varphi}{\partial R} = \frac{1}{R} \frac{\partial^2 (R\varphi)}{\partial R^2}. \quad (6.23)$$

Решение для этого потенциала должно удовлетворять вне окрестности начала координат сферически симметричному уравнению (6.22)

$$\frac{\partial^2 (\varphi R)}{\partial R^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 (\varphi R)}{\partial t^2} = 0 \quad (6.24)$$

и, как легко проверить непосредственной подстановкой в (6.24), имеет вид

$$\varphi(R, t) = \frac{f_1(t - R/v)}{R} + \frac{f_2(t + R/v)}{R}, \quad (6.25)$$

где  $f_1$  и  $f_2$  — произвольные дважды дифференцируемые функции аргументов  $t - R/v$  и  $t + R/v$ . Далее будет показано, что второе слагаемое в (6.25) должно быть исключено из физических соображений. Поэтому потенциал, создаваемый сосредоточенным в окрестности начала координат зарядом, определяется выражением

$$\varphi(R, t) = \frac{f(t - R/v)}{R}. \quad (6.26)$$

Чтобы найти функцию  $f$ , воспользуемся следующим приемом. Пусть  $v \rightarrow \infty$ , тогда уравнение (6.21) принимает вид

$$\nabla^2 \varphi = -\rho_{ст}/\epsilon_a \quad (6.27)$$

и ему удовлетворяет в случае сосредоточенного заряда  $\rho_{ст}dV$  потенциал

$$\varphi(R, t) = f(t)/R, \quad (6.28)$$

получаемый из (6.26). Проинтегрируем (6.27) по объему сферы радиуса  $a$  с центром в начале координат  $O$ :

$$\int_V \nabla^2 \varphi dV = - \int_V \frac{\rho_{ст}}{\epsilon_a} dV. \quad (6.29)$$

Для левой части равенства согласно (П1.5) получим

$$\int_V \nabla^2 \varphi dV = \int_V \operatorname{div} \operatorname{grad} \varphi dV = \oint_S \operatorname{grad} \varphi \mathbf{R}^0 dS = \oint_S \frac{\partial \varphi}{\partial R} dS.$$

Поскольку требуется знать функцию  $\partial\varphi/\partial R$  на поверхности сферы радиуса  $a$ , то при учете (6.28) получаем  $\left. \frac{\partial\varphi}{\partial R} \right|_{R=a} = -\frac{f(t)}{a^2}$ . Воспользовавшись этим значением подынтегрального выражения и соотношением  $dS = a^2 d\Omega$ , найдем  $\int_V \nabla^2 \varphi dV = -f(t) \int_{4\pi} d\Omega = -4\pi f(t)$ .

Правая часть (6.29) равна  $-\rho_{ct} dV/\epsilon_a$ . Следовательно,  $f(t) = \rho_{ct}(t) dV/4\pi\epsilon_a$ , и потенциал (6.26) имеет вид

$$\varphi(R, t) = \frac{\rho_{ct}(t - R/v) dV}{4\pi\epsilon_a R}. \quad (6.30)$$

Векторное волновое уравнение (6.19)

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\mu_a \delta_{ct} \quad (6.31)$$

в произвольной декартовой системе координат распадается согласно (П1.39) на три независимых скалярных волновых уравнения, каждое из которых содержит одноименные декартовы составляющие векторов  $\mathbf{A}$  и  $\delta_{ct}$ , например:

$$\nabla^2 A_x - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 A_x}{\partial t^2} = -\mu_a \delta_{ctx}. \quad (6.32)$$

Поэтому по аналогии с решением (6.30) уравнения (6.21) имеем

$$A_x(R, t) = \mu_a \frac{\delta_{ctx}(t - R/v) dV}{4\pi R} \quad (6.33)$$

и аналогичные выражения для составляющих  $A_y$  и  $A_z$ . Принимая во внимание равенство  $\mathbf{A} = x^0 A_x + y^0 A_y + z^0 A_z$ , получаем согласно (6.33) следующее решение векторного уравнения (6.31), справедливое в однородной безграничной среде для сосредоточенного в окрестности начала координат тока:

$$\mathbf{A}(R, t) = \mu_a \frac{\delta_{ct}(t - R/v) dV}{4\pi R}. \quad (6.34)$$

Формулы (6.30) и (6.34) имеют глубоко принципиальное значение и выражают тот согласующийся с экспериментальными данными факт, что электромагнитное поле распространяется от своих источников с конечной скоростью  $v = 1/\sqrt{\epsilon_a \mu_a}$  м/с и имеет волновой характер. Из этих формул следует, что в точке наблюдения в момент времени  $t$  электродинамические потенциалы [и в соответствии с (6.16) векторы поля  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$ ] источников, сосредоточенных в элементе объема  $dV$ , определяются значением этих источников не в момент времени  $t$ , а в некоторый *предшествующий* момент времени  $t' = t - R/v$  (где  $R$  — расстояние от сосредоточенных источников до точки наблюдения). Следовательно,

воздействие источников достигает точки наблюдения не мгновенно, а через *время запаздывания*  $R/v$ , необходимое для распространения электромагнитного возмущения от источников на расстояние  $R$  с конечной скоростью  $v$ . Поэтому ф-лы (6.30) и (6.34) называют *запаздывающими решениями* неоднородных волновых уравнений при сосредоточенных источниках или *запаздывающими потенциалами*. Распространяющееся от источников электромагнитное возмущение называют *электромагнитной волной*. Геометрическое место точек, до которых в фиксированный момент времени дошло электромагнитное возмущение, обусловленное одним и тем же мгновенным значением источников, называют *фронтом* электромагнитной волны. Согласно (6.30) и (6.34) фронт волны имеет вид сферической поверхности  $R = \text{const}$  с центром в сосредоточенном источнике. Такую волну называют *сферической*. Пусть в момент времени  $t_1$  фронтом волны является сферическая поверхность радиуса  $R_1$ ; тогда в последующий момент  $t_1 + \Delta t$  этим же фронтом волны будет сферическая поверхность радиуса  $R_1 + v\Delta t$  [так как аргумент  $t - R/v$  функций в (6.30) и (6.34) в этих двух случаях принимает одно и то же значение]. Это означает, что запаздывающие потенциалы (6.30) и (6.34) определяют сферическую *расходящуюся* волну, которая распространяется от сосредоточенного источника во все стороны вдоль радиусов  $R$  со скоростью  $v$ .

В вакууме имеем  $v = c = 1/\sqrt{\epsilon_0\mu_0} = 3 \cdot 10^8$  м/с, в среде с параметрами  $\epsilon_a, \mu_a$  скорость  $v = 1/\sqrt{\epsilon_a\mu_a} = c/\sqrt{\epsilon\mu}$  м/с.

Если бы мы удержали в (6.25) не первое слагаемое, а второе, то пришли бы к формулам вида (6.30) и (6.34), в которых вместо  $t - R/v$  фигурировал бы аргумент  $t + R/v$ . Эти решения определяют сферическую *сходящуюся* волну, распространяющуюся из бесконечности вдоль радиусов  $R$  к сосредоточенному источнику со скоростью  $v$ , и носят название опережающих потенциалов. Поскольку электромагнитная волна расходится от своих источников, то опережающие потенциалы должны быть исключены из решения как не удовлетворяющие физической постановке задачи.

Если сосредоточенные сторонние источники изменяются по гармоническому закону, то соотношение (6.34) принимает вид

$$A(R, t) = \frac{\mu_a \delta_{\text{ст}} m}{4\pi R} \cos[\omega(t - R/v) + \varphi_0] dV, \quad (6.35)$$

где  $\varphi_0$  — начальная фаза  $\delta_{\text{ст}}$ .

Измеренное вдоль направления распространения монохроматической волны расстояние между двумя последовательными точками, в которых колебания сдвинуты по фазе на  $2\pi$ , называют *длиной* электромагнитной волны  $\lambda$ . Согласно этому определению из (6.35) имеем  $\cos[\omega(t - \frac{R+\lambda}{v}) + \varphi_0] = \cos[\omega(t - \frac{R}{v}) - 2\pi + \varphi_0]$ , откуда  $\frac{\omega}{v}\lambda = 2\pi$ ,  $\lambda = vT$ , где  $\lambda$  дано в метрах;  $k = \omega\sqrt{\epsilon_a\mu_a} = \frac{\omega}{v} = \frac{2\pi}{\lambda}$ , где  $k$  дано в рад/м. Благодаря последнему выражению параметр  $k$  на-

зывают *волновым числом* монохроматической волны в непроводящей среде.

Пусть теперь сторонние источники поля распределены в конечном объеме  $V$  однородной безграничной среды с плотностями  $\rho_{ст}$  и  $\delta_{ст}$ , являющимися некоторыми функциями координат и времени. Поскольку уравнения (6.21) и (6.31) линейны, то запаздывающие электродинамические потенциалы в этом случае на основании принципа суперпозиции находят суммирование потенциалов (6.30) и (6.34), создаваемых в точке наблюдения каждым сосредоточенным источником  $\rho_{ст}dV$  или  $\delta_{ст}dV$  объема  $V$ :

$$\varphi(\mathbf{R}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_a} \int_V \frac{\rho_{ст}(\mathbf{R}', t - r/v) dV}{r}, \quad \mathbf{A}(\mathbf{R}, t) = \frac{\mu_a}{4\pi} \int_V \frac{\delta_{ст}(\mathbf{R}', t - r/v) dV}{r}. \quad (6.36)$$

Здесь  $\mathbf{R}$  — радиус-вектор, характеризующий положение точки наблюдения  $M$  относительно произвольно выбранного начала координат  $O$ ;  $\mathbf{R}'$  — радиус-вектор, характеризующий положение сосредоточенного источника  $\rho_{ст}(\mathbf{R}')dV$  или  $\delta_{ст}(\mathbf{R}')dV$ ;

$$r = |\mathbf{R} - \mathbf{R}'| = (R^2 + R'^2 - 2RR' \cos \psi)^{1/2} \quad (6.37)$$

— переменное расстояние между точкой наблюдения и текущей точкой объема  $V$  (рис. 6.1).

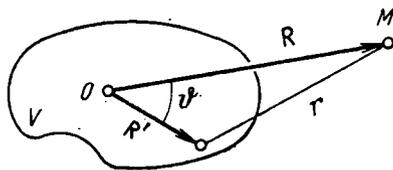


РИС. 6.1

Можно показать (например, [34]), что запаздывающие потенциалы (6.36) удовлетворяют условию калибровки (6.18) и справедливы при расположении точки наблюдения как вне объема  $V$ , так и внутри него.

В результате дифференцирования согласно (6.16) запаздывающих потенциалов (6.36) по координатам точки наблюдения и времени находят значения напряженностей  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$ , которые создаются в безграничной однородной среде заданными источниками.

#### 6.4. ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ЭЛЕКТРОДИНАМИЧЕСКИХ ПОТЕНЦИАЛОВ В МЕТОДЕ КОМПЛЕКСНЫХ АМПЛИТУД

При исследовании монохроматического поля, создаваемого гармоническими сторонними источниками в изотропной линейной однородной непроводящей среде, можно непосредственно перейти от линейных соотношений § 6.2 к соответствующим соотноше-

ниями для комплексных амплитуд. При этом выражения (6.16) принимают вид:

$$\dot{\mathbf{E}} = -\text{grad } \dot{\varphi} - i\omega \dot{\mathbf{A}}, \quad \dot{\mathbf{H}} = \frac{1}{\mu_a} \text{rot } \dot{\mathbf{A}}, \quad (6.38)$$

уравнения для потенциалов (6.19) и (6.20) переходят соответственно в *векторное и скалярное неоднородные уравнения Гельмгольца*:

$$\nabla^2 \dot{\mathbf{A}} + k^2 \dot{\mathbf{A}} = -\mu_a \dot{\delta}_{\text{ст}}, \quad \nabla^2 \dot{\varphi} + k^2 \dot{\varphi} = -\dot{\rho}_{\text{ст}}/\epsilon_a \quad (6.39)$$

(где  $k^2 = \omega^2 \epsilon_a \mu_a$ ), а соотношение (6.18) — в калибровочное условие

$$\text{div } \dot{\mathbf{A}} = -i\omega \epsilon_a \mu_a \dot{\varphi}. \quad (6.40)$$

Из (6.40) следует, что комплексная амплитуда  $\dot{\varphi}$  однозначно определяется через  $\dot{\mathbf{A}}$ :

$$\dot{\varphi} = \frac{i}{\omega \epsilon_a \mu_a} \text{div } \dot{\mathbf{A}}. \quad (6.41)$$

Поэтому для монохроматического поля оказывается достаточным введение только векторного потенциала электрического тока  $\dot{\mathbf{A}}$ .

Подставляя в (6.38)  $\dot{\varphi}$  из (6.41), получаем:

$$\dot{\mathbf{E}} = -\frac{i\omega}{k^2} (\text{grad div } \dot{\mathbf{A}} + k^2 \dot{\mathbf{A}}), \quad \dot{\mathbf{H}} = \frac{1}{\mu_a} \text{rot } \dot{\mathbf{A}}. \quad (6.42)$$

Если сторонние источники гармонического поля распределены в конечном объеме  $V$  однородной безграничной среды, то второе соотношение (6.36) выражает мгновенное значение монохроматического потенциала  $\mathbf{A}$  через мгновенные значения монохроматической плотности тока  $\delta_{\text{ст}}$ . Поскольку это соотношение линейное, то оно устанавливает связь и между комплексными выражениями мгновенных значений  $\mathbf{A}$  и  $\delta_{\text{ст}}$  (см. § 3.11):

$$\dot{\mathbf{A}}(\mathbf{R}) e^{i\omega t} = \frac{\mu_a}{4\pi} \int_V \frac{\dot{\delta}_{\text{ст}}(\mathbf{R}') e^{i\omega(t-r/v)} dV}{r}. \quad (6.43)$$

Сократив обе части (6.43) на множитель  $e^{i\omega t}$ , получим запаздывающее решение векторного уравнения (6.39) для комплексной амплитуды  $\dot{\mathbf{A}}$ :

$$\dot{\mathbf{A}}(\mathbf{R}) = \frac{\mu_a}{4\pi} \int_V \frac{\dot{\delta}_{\text{ст}}(\mathbf{R}') e^{-ikr} dV}{r}, \quad (6.44)$$

где  $k = \omega/v = \omega \sqrt{\epsilon_a \mu_a} = 2\pi/\lambda$ .

Конечно, к соотношению (6.44) приводит и непосредственное решение первого уравнения (6.39), которое можно получить, например, с помощью таких же рассуждений, как в § 6.3.

Все приведенные в этом параграфе формулы для комплексных амплитуд можно распространить и на случай однородных сред, обладающих проводимостью ( $\sigma > 0$ ). Для этого достаточно  $\epsilon_a$  заменить в формулах комплексной диэлектрической проницаемостью  $\tilde{\epsilon}_a$  и соответственно заменить  $k$  величиной  $\tilde{k} = \omega \sqrt{\tilde{\epsilon}_a \mu_a}$ .

# Статические и стационарные поля

## Глава 7

### СТАТИЧЕСКИЕ ПОЛЯ



#### 7.1. КЛАССИФИКАЦИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ЯВЛЕНИЙ

Электромагнитные явления в макроскопической теории классифицируются следующим образом: электростатическое и магнитостатическое поля, стационарное электромагнитное поле, квазистационарное электромагнитное поле и быстропеременное электромагнитное поле.

Статические явления характеризуются постоянством величин во времени ( $\partial/\partial t=0$ ) и отсутствием макроскопических электрических токов ( $\delta=0$ ). При этих условиях уравнения (3.14) разделяются на две полностью независимые системы, в одну из которых входят величины, характеризующие *электростатическое поле*:

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = 0, \quad \operatorname{div} \mathbf{D} = \rho, \quad (7.1)$$

а в другую — *магнитостатическое поле*:

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = 0, \quad \operatorname{div} \mathbf{B} = 0. \quad (7.2)$$

Таким образом, электростатическое и магнитостатическое поля можно рассматривать независимо друг от друга. В этом и состоит характерная особенность статических полей. Электростатическое поле обусловлено неподвижными электрическими зарядами, магнитостатическое поле — неподвижными постоянными магнитами.

*Стационарное электромагнитное поле* обусловлено неизменяющимися во времени (постоянными) электрическими токами и зарядами и характеризуется постоянством величин во времени. Из уравнений (3.14) при условии  $\partial/\partial t=0$  получаем две системы уравнений:

для стационарного электрического поля:

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = 0, \quad \operatorname{div} \mathbf{D} = \rho; \quad (7.3)$$

для стационарного магнитного поля:

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \mathfrak{J}, \quad \operatorname{div} \mathbf{B} = 0. \quad (7.4)$$

В этом случае уже существует связь между электрическим и магнитным полями, которая осуществляется через ток проводимости и выражается уравнениями:

$$\delta = \sigma \mathbf{E} + \delta_{\text{ст}}, \quad \text{rot } \mathbf{H} = \delta. \quad (7.5)$$

Однако эта связь еще сравнительно слаба, что часто позволяет изучать раздельно электрические и магнитные явления в стационарном поле. Так, например, при отыскании магнитного поля, создаваемого постоянным электрическим током, достаточно решить систему уравнений (7.4), в которой плотность тока  $\delta$  будет фигурировать как известная функция координат.

*Быстропеременное* во времени электромагнитное поле описывается системой уравнений (3.14) без каких-либо упрощений и характеризуется глубокой взаимосвязью между электрическими и магнитными явлениями. Характерной особенностью этого поля является его волновой характер.

Переменное электромагнитное поле в некоторых системах характеризуется той особенностью, что время, в течение которого источники поля успевают заметно измениться, *велико* по сравнению со временем запаздывания  $l/v$ , необходимым для распространения электромагнитного возмущения со скоростью  $v$  от одного конца системы до другого. В этом случае *приблизительно* справедливы следующие соотношения:

$$\rho_{\text{ст}}(t - l/v) \approx \rho_{\text{ст}}(t), \quad \delta_{\text{ст}}(t - l/v) \approx \delta_{\text{ст}}(t). \quad (7.6)$$

Область, линейные размеры  $l$  которой позволяют пренебречь временем запаздывания электромагнитных возмущений, называют областью *квазистационарного электромагнитного поля*.

В случае монохроматических колебаний соотношения (7.6) означают, что

$$\cos[\omega(t - l/v)] \approx \cos \omega t \quad (7.7)$$

или  $\omega l/v \ll 1$ . При учете выражений  $\omega = 2\pi/T$  и  $\lambda = vT$  последнее неравенство приводится к виду  $l \ll \lambda$ . Следовательно, при монохроматических процессах электромагнитные системы могут быть исследованы с помощью законов квазистационарного поля в тех случаях, когда их протяженность мала по сравнению с длиной волны  $\lambda$ .

## 7.2. УРАВНЕНИЯ ЭЛЕКТРОСТАТИКИ

Основные уравнения электростатики в дифференциальной форме имеют вид (7.1).

Из справедливого для проводящей среды соотношения  $\delta_{\text{пр}} = \sigma \mathbf{E}$  и условия электростатики  $\delta = 0$  следует, что внутри этой среды электростатическое поле отсутствует ( $\mathbf{E} = 0$  и, следовательно,  $\mathbf{D} = 0$ ). Поскольку внутри проводящей среды  $\mathbf{D} = 0$ , то и  $\text{div } \mathbf{D} = \rho = 0$ . Это означает, что внутри проводника заряды различных

знаков должны компенсировать друг друга. В условиях электростатики нескомпенсированные электрические заряды сосредоточены на поверхности проводника, где их распределение характеризуется поверхностной плотностью заряда  $\sigma_Q$ .

Представим себе, например, что незаряженное проводящее тело внесено во внешнее электростатическое поле. Под действием сил поля свободные заряды тела начнут перемещаться, вследствие чего на его поверхности возникнут поверхностные заряды. Это перемещение зарядов (ток проводимости) будет происходить до тех пор, пока не установится *электростатическое равновесие*, при котором создаваемое поверхностными зарядами электрическое поле полностью компенсирует внутри проводящего тела внешнее поле. При электростатическом равновесии поверхность тела является границей электростатического поля, которое локализовано в диэлектрике, окружающем тело. Явление наведения электрических зарядов на поверхности проводящего тела под действием внешнего электростатического поля называют *электростатической индукцией*.

Ограничимся далее рассмотрением электростатических полей в изотропных линейных однородных диэлектриках. В этом случае вместо (7.1) имеем следующую систему уравнений электростатики:

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = 0, \quad \operatorname{div} \mathbf{E} = \rho/\epsilon_a. \quad (7.8)$$

На поверхности раздела диэлектрик — проводящая среда граничные условия (3.31) и (3.41) при учете того, что электростатическое поле в проводящей среде отсутствует, примут следующий вид:

$$E_\tau = 0, \quad D_n = -\sigma_Q \text{ или } E_n = -\sigma_Q/\epsilon_a \quad (7.9)$$

(индекс «1» для величин, относящихся к диэлектрику опущен).

Из первого условия (7.9) следует, что вектор  $\mathbf{E}$  ориентирован перпендикулярно к проводящей поверхности. Поскольку  $E_n$  есть проекция вектора  $\mathbf{E}$  на нормаль, направленную *внутрь* проводника, то из второго условия (7.9) следует, что векторные линии  $\mathbf{E}$  начинаются на положительных поверхностных зарядах ( $\sigma_Q > 0$ ) и оканчиваются на отрицательных ( $\sigma_Q < 0$ ).

Первое уравнение системы (7.8) представляет собой условие потенциальности электростатического поля  $\mathbf{E}$ , которое согласно (П1.41) может быть выражено *через* свой *скалярный электрический потенциал*  $\varphi(\mathbf{R})$ :

$$\mathbf{E} = -\operatorname{grad} \varphi. \quad (7.10)$$

Очевидно, что если вместо потенциала  $\varphi(\mathbf{R})$  ввести другой потенциал  $\varphi + \varphi_0$ , где  $\varphi_0$  — произвольная постоянная величина, не зависящая от координат, то по ф-ле (7.10) получим одно и то же поле  $\mathbf{E}$ . Следовательно, значения электрического потенциала могут быть определены не однозначно, а с точностью до произвольной постоянной.

Для установления связи между потенциалом  $\varphi$  и объемной плотностью заряда  $\rho$  подставим  $E$  из (7.10) во второе ур-ние (7.8):

$$\nabla^2 \varphi = -\rho/\epsilon_a. \quad (7.11)$$

Дифференциальное ур-ние (7.11) называют *скалярным уравнением Пуассона*. В тех областях поля, где  $\rho=0$ , ур-ние (7.11) переходит в *скалярное уравнение Лапласа*

$$\nabla^2 \varphi = 0. \quad (7.12)$$

Определение электростатического поля по заданному распределению заряда  $\rho=\rho_{ст}$  сводится к нахождению потенциала  $\varphi$  путем решения ур-ния (7.11) с известной правой частью и последующему определению вектора  $E$  путем дифференцирования функции  $\varphi$  согласно (7.10).

Уравнение Пуассона (7.11) можно рассматривать как частный случай скалярного уравнения Гельмгольца (6.39) при  $k=0$ . Поэтому при распределении неподвижного объемного заряда в конечной области  $V$  однородного безграничного диэлектрика решение уравнения Пуассона определяется соответствующим решением скалярного уравнения Гельмгольца [ср. ф-лу (6.44)] при  $k=0$ :

$$\varphi(\mathbf{R}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_a} \int_V \frac{\rho_{ст}(\mathbf{R}') dV}{r}. \quad (7.13)$$

*Точечным* называют заряд, линейные размеры которого весьма малы по сравнению с расстоянием от него до точек, в которых рассматривается его поле (а также имеющий столь малые размеры, что в его пределах можно рассматривать внешнее поле как однородное). Если поместить начало координат  $O$  в области распределения заряда  $V$  (рис. 6.1), то для точечного заряда выполняется неравенство  $R'/R \ll 1$ . Представим соотношение (6.37) в форме

$$r = R \left[ 1 - 2 \frac{R'}{R} \cos \vartheta + \left( \frac{R'}{R} \right)^2 \right]^{1/2}. \quad (7.14)$$

откуда видно, что для точечного заряда можно приближенно заменить переменное расстояние  $r$  постоянным значением  $R$ . Вынося в (7.13)  $r \approx R$  из-под знака интеграла, получим

$$\varphi(\mathbf{R}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_a R} \int_V \rho_{ст}(\mathbf{R}') dV = \frac{Q_{ст}}{4\pi\epsilon_a R}, \quad (7.15)$$

где  $Q_{ст}$  — полный заряд, распределенный в объеме  $V$ . Переходя от потенциала (7.15) к вектору  $E$ , имеем согласно (7.10) и (П1.35)

$$\mathbf{E} = -\text{grad } \varphi = -\frac{\partial \varphi}{\partial R} \mathbf{R}^0 = \frac{Q_{ст}}{4\pi\epsilon_a R^2} \mathbf{R}^0. \quad (7.16)$$

Если суммарный заряд системы зарядов отличен от нуля и система распределена в ограниченном объеме пространства, то согласно (7.15) и (7.16) ее потенциал убывает на бесконечности как  $1/R$ , а напряженность поля — как  $1/R^2$ .

### 7.3. СКАЛЯРНЫЙ ПОТЕНЦИАЛ ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОГО ПОЛЯ

Определим работу  $A$  сил потенциального электростатического поля  $\mathbf{E}$  при переносе пробного заряда  $Q$  из одной фиксированной точки  $M$  поля в другую  $N$  (рис. 7.1):

$$A = \int_M^N \mathbf{F} d\mathbf{l} = Q \int_M^N \mathbf{E} d\mathbf{l} = -Q \int_M^N \text{grad } \varphi d\mathbf{l}. \quad (7.17)$$

Из векторного анализа известно, что полный дифференциал  $d\varphi$ , соответствующий перемещению в пространстве на расстояние  $d\mathbf{l}$ , определяется скалярным произведением градиента  $\varphi$  на  $d\mathbf{l}$ :  $d\varphi = \text{grad}\varphi d\mathbf{l}$ . Поэтому вместо (7.17) можно написать

$$\frac{A}{Q} = \int_M^N \mathbf{E} d\mathbf{l} = - \int_M^N d\varphi = \varphi_M - \varphi_N. \quad (7.18)$$

Таким образом, линейный интеграл напряженности *потенциального* электрического поля от точки  $M$  до точки  $N$  *одинаков* для любого пути, соединяющего эти точки. Он определяется *разно-*

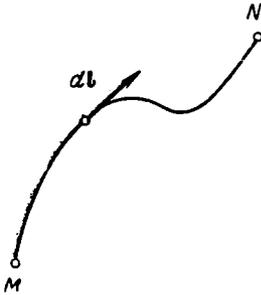


РИС. 7.1

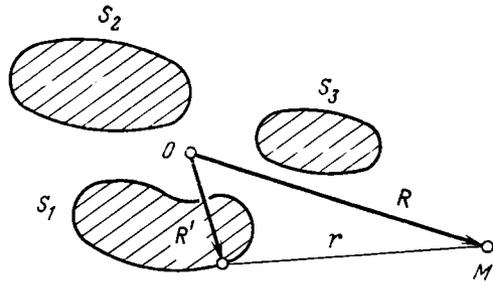


РИС. 7.2

*стью* потенциалов начальной и конечной точек и, следовательно, не зависит от их *абсолютных* значений. Поэтому существует возможность произвольного выбора некоторой фиксированной точки  $P$  (или области постоянного потенциала), потенциал которой принимают равным нулю ( $\varphi_P = 0$ ), и определения в соответствии с (7.18) *потенциала* в любой точке  $M$  соотношением

$$\varphi_M = \int_M^P \mathbf{E} d\mathbf{l}. \quad (7.19)$$

В тех случаях, когда заряд распределен в конечной области безграничного пространства, удобно за точки нулевого потенциала выбрать бесконечно удаленные от заряда точки, так как согласно (7.15)  $\varphi(\mathbf{R})|_{R \rightarrow \infty} = 0$ . При этом условии электрический потенциал в некоторой точке  $M$  определится в соответствии с (7.19) соотношением

$$\varphi_M = \int_M^{\infty} \mathbf{E} d l. \quad (7.20)$$

В некоторых задачах электростатики целесообразно полагать равным нулю потенциал корпуса прибора или земли.

Представим себе электростатическое поле, создаваемое в безграничном диэлектрике положительно заряженным проводящим телом. Линии вектора  $\mathbf{E}$  этого поля согласно (7.9) начинаются на положительных поверхностных зарядах тела и уходят в бесконечность. Благодаря введению в (7.10) знака минуса потенциал убывает в направлении силовых линий  $\mathbf{E}$ . Введение этого знака оказывается удобным, так как благодаря ему положительно заряженное тело обладает также положительным потенциалом (при условии, что потенциал бесконечно удаленных точек принят равным нулю).

#### 7.4. ЗАДАЧИ ЭЛЕКТРОСТАТИКИ

*Прямая задача электростатики* состоит в определении напряженности электрического поля по заданному распределению заряда. Если, например, известна объемная плотность заряда  $\rho_{ст}$ , который распределен в ограниченной области  $V$ , то создаваемая им в безграничном диэлектрике напряженность  $\mathbf{E}$  в принципе, может быть найдена путем определения потенциала  $\varphi(\mathbf{R})$  согласно (7.13) и его последующего дифференцирования согласно (7.10).

Потенциал поля, создаваемого в безграничном однородном диэлектрике поверхностными зарядами, которые известным образом распределены на ограниченной поверхности  $S$  системы проводящих тел, определяется  $\varphi$ -лой вида (7.13), в которой интегрирование ведется по поверхности всех тел ( $S = S_1 + S_2 + S_3$ , рис. 7.2):

$$\varphi(\mathbf{R}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_a} \oint_S \frac{\sigma_{ст}(\mathbf{R}') dS}{r}. \quad (7.21)$$

Зная потенциал  $\varphi(\mathbf{R})$ , по  $\varphi$ -ле (7.10) можно определить и напряженность  $\mathbf{E}$ . На поверхностях проводящих тел при известном  $\sigma_Q$  вектор  $\mathbf{E}$  легко определить непосредственно из граничных условий (7.9).

В наиболее простых задачах определять поле  $\mathbf{E}$  через потенциал  $\varphi$  нецелесообразно. Если можно заранее предвидеть сферическую симметрию поля (например, заряженный проводящий шар в безграничном диэлектрике), цилиндрическую симметрию поля

(например, заряженный круговой проводящий цилиндр в безграничном диэлектрике) или однородность поля (например, равномерно заряженная плоскость в диэлектрике), то поле можно непосредственно и легко определить при помощи закона Гаусса:

$$\oint_S \mathbf{E} d\mathbf{S} = Q/\epsilon_a \quad (7.22)$$

(см., например, § 7.5, п. 2).

В *обратной задаче электростатики* требуется найти распределение объемных и поверхностных зарядов по известному полю  $\mathbf{E}$ . В тех областях однородного диэлектрика, где вектор  $\mathbf{E}$  непрерывен и дифференцируем,  $\rho$  определяется из уравнения  $\operatorname{div}\mathbf{E} = \rho/\epsilon_a$ . На поверхностях проводящих тел значение  $\sigma_Q$  определяется в соответствии с (7.9) величиной скачкообразного изменения нормальной составляющей вектора  $\mathbf{E}$ .

Однако на практике чаще всего встречаются задачи, в которых наряду с заданными расположением и размерами системы  $n$  заряженных проводящих тел известны либо потенциалы тел ( $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ ), либо их полные (поверхностные) заряды ( $Q_1, Q_2, \dots, Q_n$ ), либо потенциалы одних тел и заряды остальных. По этим данным требуется определить как вектор  $\mathbf{E}$  в окружающем тела однородном диэлектрике (безграничном или ограниченном снаружи замкнутой проводящей поверхностью), так и распределение заряда на поверхностях тел. Сформулированные подобным образом задачи называют *краевыми* (или *граничными*) *задачами электростатики*.

Если известно решение уравнения Лапласа (7.12) для потенциала  $\varphi$  в диэлектрике, удовлетворяющее исходным условиям краевой задачи, то можно затем определить и электростатическое поле  $\mathbf{E}$ , и поверхностную плотность заряда. *Теорема единственности решения краевых задач электростатики* доказывает (см., например, [4]), что исходные условия краевых задач единственным образом определяют решение уравнения Лапласа для электрического потенциала  $\varphi$  в любой точке поля, а следовательно, и само поле  $\mathbf{E}$ , и распределение заряда  $\sigma_Q$ .

При решении краевых задач основная трудность состоит в нахождении решения уравнения Лапласа, удовлетворяющего исходным условиям конкретной задачи. Получить это решение в общем виде (т. е. для произвольной формы поверхностей) не удастся. Поэтому разработаны разнообразные математические методы решения тех или иных конкретных задач. В некоторых случаях удастся применять различные не прямые специальные способы решения краевых задач, опирающиеся на теорему единственности, которые позволяют свести ряд практически важных задач к более простым задачам, имеющим известные решения. Таким способом, например, далее будет найдено поле симметричной двухпроводной системы (см. § 7.5, п. 5); специальным способом решения является метод зеркальных изображений (см. § 7.6).

## 7.5. ПРОСТЕЙШИЕ ПРИМЕРЫ ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОГО ПОЛЯ

1. Электрическим диполем называют совокупность двух равных по величине и противоположных по знаку точечных зарядов, расстояние  $l$  между которыми весьма мало по сравнению с расстоянием от них до точек наблюдения.

Найдем электростатическое поле, создаваемое диполем в безграничном диэлектрике. Поместим начало сферической системы координат  $O$  в середине диполя, а полярную ось  $Oz$  проведем через положительный заряд  $+Q_{ст}$  (рис. 7.3). Положение точки наблюдения  $M$  характеризуется сферическими координатами  $R, \theta, \psi$ .

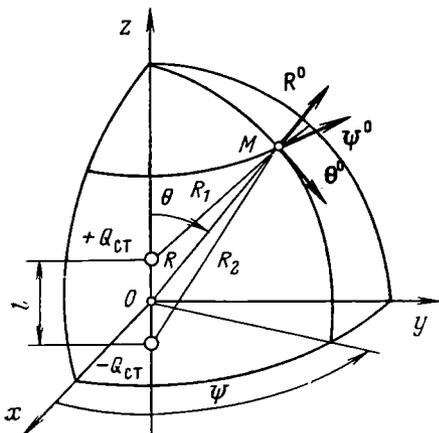


РИС. 7.3

Используя принцип суперпозиции, определим потенциал в точке наблюдения как сумму потенциалов (7.15), созданных положительным и отрицательным точечными зарядами:

$$\varphi = \frac{Q_{ст}}{4\pi\epsilon_a R_1} - \frac{Q_{ст}}{4\pi\epsilon_a R_2}. \quad (7.23)$$

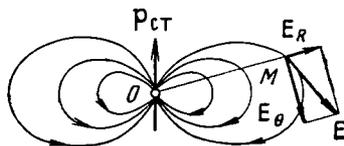


РИС. 7.4

При определении расстояний  $R_1$  и  $R_2$  воспользуемся  $\phi$ -лой (7.14), приняв в ней  $R' = l/2$ ,  $\phi = \theta$  для  $R_1$  и  $\phi = \pi - \theta$  для  $R_2$  (см. рис. 7.3). Поскольку в рассматриваемом случае  $R'/R = l/2R \ll 1$ , то можно в (7.14) применить приближенное равенство  $(1 \pm x)^{1/2} \approx 1 \pm x/2$ , справедливое при  $x \ll 1$ , и пренебречь в полученных таким образом выражениях слагаемыми второго порядка малости:

$$R_1 \approx R - \frac{l}{2} \cos \theta, \quad R_2 \approx R + \frac{l}{2} \cos \theta. \quad (7.24)$$

Подставляя (7.24) в (7.23), имеем

$$\varphi = \frac{Q_{ст} l \cos \theta}{4\pi\epsilon_a \left( R^2 - \frac{l^2}{4} \cos^2 \theta \right)} \approx \frac{Q_{ст} l \cos \theta}{4\pi\epsilon_a R^2}. \quad (7.25)$$

Векторную величину, равную произведению абсолютного значения одного из зарядов диполя на расстояние между ними и направленную от отрицательного к положительному заряду, называют *электрическим моментом* электрического диполя:

$$P_{ст} = Q_{ст} l \mathbf{1}^0 = p_{ст} l. \quad (7.26)$$

Используя понятие электрического момента, получаем вместо (7.25)

$$\varphi = \frac{p_{\text{ст}} \cos \theta}{4\pi\epsilon_a R^2} = \frac{p_{\text{ст}} R^0}{4\pi\epsilon_a R^2}. \quad (7.27)$$

Определив градиент потенциала (7.27) в сферической системе координат с помощью (П1.35), имеем на основании (7.10)

$$\mathbf{E} = \frac{p_{\text{ст}}}{4\pi\epsilon_a R^3} (R^0 2\cos \theta + \theta^0 \sin \theta) = R^0 E_R + \theta^0 E_\theta. \quad (7.28)$$

Таким образом, потенциал диполя на больших расстояниях от него изменяется по закону  $1/R^2$ , напряженность поля — по закону  $1/R^3$ . Благодаря осевой симметрии диполя его поле также симметрично относительно оси  $Oz$ : потенциал  $\varphi$  и вектор  $\mathbf{E}$  не зависят от угловой азимутальной координаты. Соответствующая (7.28) картина векторных линий  $\mathbf{E}$ , лежащих в меридиональных полуплоскостях, изображена на рис. 7.4.

2. Бесконечно длинный заряженный металлический круглый провод радиуса  $a$  (рис. 7.5). Внутри провода ( $r \leq a$ ) поле  $\mathbf{E}$  отсутствует, а все точки имеют один и тот же

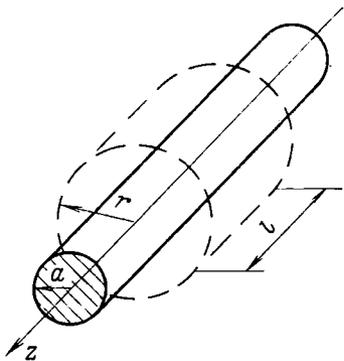


РИС. 7.5

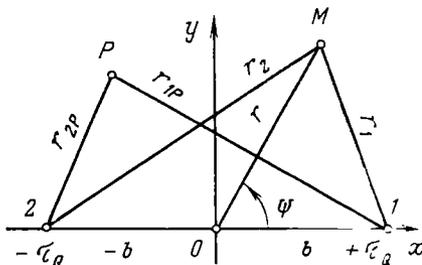


РИС. 7.6

потенциал. В силу цилиндрической симметрии задачи относительно оси  $z$  провода вектор  $\mathbf{E}$  вне провода ( $r \geq a$ ) направлен вдоль радиусов  $r$  и имеет одинаковую величину в точках, равноудаленных от оси провода. Следовательно, применение закона Гаусса (7.22) к поверхности воображаемого круглого цилиндра радиуса  $r \geq a$  и длины  $l$  дает

$$2\pi r l E = |Q_{\text{пог}}| / \epsilon_a, \quad (7.29)$$

где  $Q_{\text{пог}}$  — погонный заряд, приходящийся на единицу длины провода. Из (7.29) получаем

$$E = \frac{|Q_{\text{пог}}|}{2\pi\epsilon_a r} \quad \text{и} \quad \mathbf{E} = \frac{Q_{\text{пог}}}{2\pi\epsilon_a r} \mathbf{r}^0. \quad (7.30)$$

Пусть точка  $P$ , потенциал которой принимается равным нулю, удалена от оси провода на расстояние  $r_P$ . Тогда потенциал в точке  $M$ , удаленной от оси на расстояние  $r$ , определится в соответствии с (7.19) и (7.30) соотношением

$$\Phi_M = \int_r^{r_P} \frac{Q_{\text{пог}}}{2\pi\epsilon_a r} dr = \frac{Q_{\text{пог}}}{2\pi\epsilon_a} (\ln r_P - \ln r) = \frac{Q_{\text{пог}}}{2\pi\epsilon_a} \ln \frac{r_P}{r}. \quad (7.31)$$

В случае *бесконечно длинного* заряженного провода принимать равным нулю потенциал бесконечно удаленных от оси точек ( $r_P = \infty$ ) нельзя, так как интеграл (7.31) при этом расходится.

Формула (7.31) определяет так называемый *логарифмический потенциал*. Соответствующая ему напряженность  $E$  (7.30) изменяется по закону  $1/r$ .

3. Заряженная нить. Из соотношений (7.30) и (7.31) следует, что значения  $E$  и  $\Phi$  от радиуса провода  $a$  не зависят. Это позволяет при рассмотрении поля провода, имеющего *равномерное* распределение поверхностного заряда, условно заменить провод бесконечно тонкой *заряженной нитью*, совпадающей с его осью  $z$ . Заряд, распределенный вдоль такой воображаемой нити (линии), называют *линейной плотностью электрического заряда*  $\tau_Q = dQ/dl$  [ср. ф-лы (2.1) и (2.2.)], измеряемой в Кл/м. Если при замене провода заряженной нитью  $\tau_Q = Q_{\text{пог}}$ , то поле в области  $r \geq a$  останется без изменения.

Напряженность поля  $E$  и потенциал  $\Phi$  заряженной нити определяются формулами, аналогичными (7.30) и (7.31):

$$E = \frac{\tau_Q}{2\pi\epsilon_a r} r^0, \quad \Phi = \frac{\tau_Q}{2\pi\epsilon_a} \ln \frac{r_P}{r}. \quad (7.32)$$

Отметим, что при  $r \rightarrow 0$  ф-лы (7.32) дают бесконечно большие значения  $E$  и  $\Phi$ , что физически невозможно. Это означает, что при  $r \rightarrow 0$  представление о линейном заряде, распределенном вдоль бесконечно тонкой нити, становится неприемлемой идеализацией.

4. Две параллельные противоположно заряженные нити, расположенные друг от друга на расстоянии  $2b$  и имеющие линейные плотности заряда  $+\tau_Q$  и  $-\tau_Q$ . Расположим ось  $z$  параллельно нитям посередине между ними. Используя принцип суперпозиции, определим потенциал в точке наблюдения  $M$  как сумму потенциалов (7.32), созданных каждой нитью:

$$\Phi = \frac{\tau_Q}{2\pi\epsilon_a} \ln \frac{r_{1P}}{r_1} - \frac{\tau_Q}{2\pi\epsilon_a} \ln \frac{r_{2P}}{r_2} = \frac{\tau_Q}{2\pi\epsilon_a} \left( \ln \frac{r_2}{r_1} + \ln \frac{r_{1P}}{r_{2P}} \right), \quad (7.33)$$

где  $r_1$  и  $r_{1P}$  — соответственно расстояния от точек  $M$  и  $P$  до положительно заряженной нити;  $r_2$  и  $r_{2P}$  — расстояния от этих же точек до отрицательно заряженной нити (рис. 7.6). Если выбрать точку нулевого потенциала  $P$  на бесконечном расстоянии от ни-

тей, то  $r_{1P} \rightarrow r_{2P}$ ,  $\ln(r_{1P}/r_{2P}) = 0$  и вместо (7.33) имеем

$$\varphi = \frac{\tau_Q}{2\pi\epsilon_a} \ln \frac{r_2}{r_1}. \quad (7.34)$$

Поскольку потенциал (7.34) получается конечным (при  $r_1 \neq 0$  и  $r_2 \neq 0$ ), то в рассматриваемой задаче можно принять равным нулю потенциал бесконечно удаленных точек.

Из (7.34) следует, что цилиндрические эквипотенциальные поверхности определяются уравнением  $r_2/r_1 = C$ , причем постоянная  $C$  может принимать значения в интервале  $0 < C < \infty$ . Переходя к декартовой системе координат (см. рис. 7.6), получаем вместо  $r_2/r_1 = C$  очевидное соотношение  $\frac{(x+b)^2 + y^2}{(x-b)^2 + y^2} = C^2$ , которое легко приводится к виду

$$x^2 - 2 \frac{C^2 + 1}{C^2 - 1} bx + y^2 = -b^2. \quad (7.35)$$

Прибавляя к обеим частям (7.35) величину  $\left(\frac{C^2 + 1}{C^2 - 1} b\right)^2$ , получим

$$\left(x - \frac{C^2 + 1}{C^2 - 1} b\right)^2 + y^2 = \left(\frac{2bC}{C^2 - 1}\right)^2. \quad (7.36)$$

Выражение (7.36) представляет собой уравнение окружности с координатами центра  $x_0 = \frac{C^2 + 1}{C^2 - 1} b$ ,  $y_0 = 0$  и радиусом  $r_0 = \frac{2C}{|C^2 - 1|} b$ .

Из вывода уравнения (7.36) следует, что величины  $x_0$ ,  $r_0$  и абсциссы нитей  $\pm b$  связаны соотношением

$$r_0^2 = x_0^2 - b^2. \quad (7.37)$$

Значение постоянной  $C = r_2/r_1$  для любой точки наблюдения можно выразить через параметры  $r_0$  и  $x_0$  эквипотенциальной окружности, проходящей через эту точку. Для этого возьмем отношение  $\frac{|x_0|}{r_0} = \frac{C^2 + 1}{2C}$ , откуда  $C^2 - 2 \frac{|x_0|}{r_0} C + 1 = 0$  и

$$C = \frac{|x_0|}{r_0} \pm \sqrt{\frac{x_0^2}{r_0^2} - 1}. \quad (7.38)$$

Принимая во внимание справедливое для произвольного числа  $a$  тождество  $(a + \sqrt{a^2 - 1})(a - \sqrt{a^2 - 1}) = 1$ , приходим к выводу, что определяемые ф-лой (7.38) два значения  $C$  представляют собой обратные величины. Таким образом, две эквипотенциальные окружности, имеющие одинаковые параметры  $|x_0|$  и  $r_0$  и расположенные симметрично относительно оси  $y$ , характеризуются взаимно обратными значениями  $C$  и, следовательно, имеют потенциалы (7.34), равные по величине и противоположные по знаку:

$$\pm \varphi = \frac{\tau_Q}{2\pi\epsilon_a} \ln \frac{|x_0| \pm \sqrt{x_0^2 - r_0^2}}{r_0} = \frac{\tau_Q}{2\pi\epsilon_a} \ln \frac{|x_0| \pm b}{r_0}. \quad (7.39)$$

Векторные линии  $E$  начинаются на положительно заряженной нити, оканчиваются на отрицательно заряженной, согласно (7.10) нормальны к круговым цилиндрическим эквипотенциальным поверхностям и представляют собой дуги окружностей, центры которых лежат на оси  $y$  (доказательство последнего утверждения

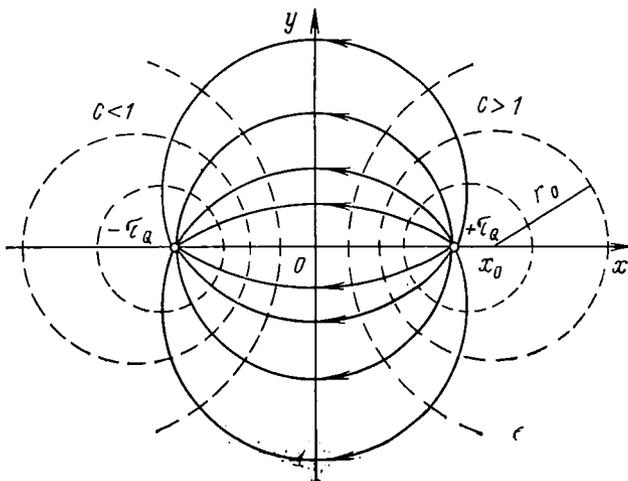


РИС. 7.7

см., например, в [4]). На рис. 7.7 линии  $E$  изображены сплошными линиями, а семейство эквипотенциальных окружностей (7.36) — штриховыми.

5. Система, состоящая из двух параллельных заряженных металлических проводов радиуса  $a$  с расстоянием между их осями  $D$  (рис. 7.8). Заряды проводов, при-

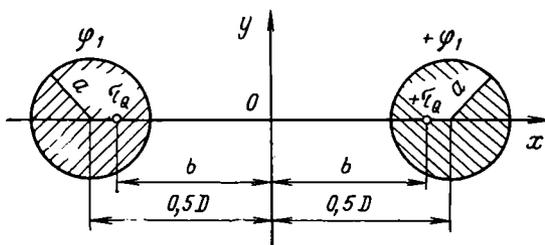


РИС. 7.8

ходящиеся на единицу длины, равны по величине и противоположны по знаку. При этом условии и потенциалы проводов будут равны по величине и противоположны по знаку. Будем считать величину этих потенциалов  $\pm\varphi_1$  известной.

Поле системы из двух проводов нельзя определить путем суперпозиции полей двух одиночных заряженных проводов, так как

на проводах распределение поверхностного заряда неравномерно. Из-за притяжения разноименных зарядов двух проводов значения  $\sigma_Q$  максимальны на наиболее близких друг к другу участках поверхности проводов. Однако эта задача (и другие, родственные ей) просто решается при помощи специального способа — ее можно заменить вспомогательной краевой задачей, решение которой известно. Действительно, цилиндрические поверхности проводов являются эквипотенциальными. С другой стороны, мы знаем, что эквипотенциальные поверхности двух противоположно заряженных нитей также имеют форму круглых цилиндров. Поэтому можно подобрать такое расположение нитей и величины их линейных плотностей заряда  $\pm\tau_Q$ , при которых две эквипотенциальные поверхности нитей совпадут с поверхностями проводов и будут иметь соответствующие проводам потенциалы. На основании теоремы единственности решения краевых задач электростатики можно быть уверенным, что поле нитей *вне* этих эквипотенциальных поверхностей тождественно полю системы из двух проводов.

Для определения положения нитей, эквивалентных двух проводам и называемых *электрическими осями* проводов, используем соотношение (7.37). Учитывая, что в рассматриваемом случае  $r_0 = a$  и  $|x_0| = 0,5D$ , получаем

$$b = \sqrt{(0,5D)^2 - a^2}. \quad (7.40)$$

Обусловленные электрическими осями эквипотенциальные поверхности с параметрами  $r_0 = a$ ,  $x_0 = \pm 0,5D$  будет иметь потенциалы, равные потенциалам  $\pm\varphi_1$  проводов, если в соответствии с (7.39)

$$\tau_Q = \frac{2\pi\epsilon_a\varphi_1}{\ln \frac{0,5D + \sqrt{(0,5D)^2 - a^2}}{a}}. \quad (7.41)$$

Для определения поля системы из двух проводов следует найти согласно (7.40) и (7.41) параметры электрических осей проводов и затем поле этих осей во внешней для проводов области.

## 7.6. МЕТОД ЗЕРКАЛЬНЫХ ИЗОБРАЖЕНИЙ

Во многих задачах требуется найти электростатическое поле заданной системы заряженных проводящих тел в присутствии протяженной проводящей поверхности (например, металлический экран, земля). Ограничимся случаем плоской проводящей поверхности и, идеализируя задачу, будем считать эту плоскость бесконечной. Очевидно, что нам поставлена краевая задача — известны геометрические параметры системы заряженных тел, их заряды и эквипотенциальная проводящая плоскость, потенциал которой можно принять равным нулю.

Рассмотрим вначале одиночное положительно заряженное тело над проводящей плоскостью (рис. 7.9a). Линия вектора  $\mathbf{E}$  на-

чинаются на положительном заряде тела и оканчиваются на проводящей поверхности, где в результате электростатической индукции наведен отрицательный заряд. Электростатическое поле определяется как положительным зарядом тела, так и индуцированным на плоскости отрицательным зарядом, распределение которого неизвестно. В тех случаях, когда заряженное тело может рассматриваться как точечное и, следовательно, закон распределения на нем заряда знать не требуется, задача может быть решена при помощи *метода зеркальных (или электрических) изображений*.

Мысленно удалим проводящую плоскость и поместим в нижнем полупространстве воображаемое заряженное тело, которое

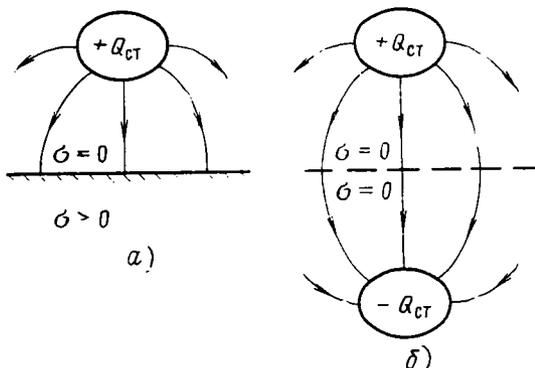


РИС. 7.9

является зеркальным изображением реального тела относительно удаленной плоскости и имеет *заряд, равный по величине и противоположный по знаку* заряду реального тела (рис. 7.9б). Плоскость симметрии для реального тела и его зеркального изображения, расположенная на месте проводящей плоскости, является плоскостью равного (нулевого) потенциала, так как равные заряды противоположных знаков размещены симметрично относительно нее. Таким образом, для верхнего полупространства (над плоскостью симметрии) искусственно введенная нами краевая задача оказывается полностью эквивалентной исходной задаче. На основании теоремы единственности решения краевых задач электростатики можно утверждать, что поле заряженного тела над проводящей плоскостью можно заменить полем этого же тела и его зеркального изображения в полупространстве над плоскостью симметрии. В этом и состоит метод зеркальных изображений. Очевидно, что этот метод применим и в случае системы заряженных тел, которые расположены в диэлектрике над проводящей плоскостью.

## 7.7. ЭНЕРГИЯ ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОГО ПОЛЯ

Из общих выражений для электромагнитной энергии (4.13), (4.14) следует, что энергия электростатического поля распределена в пространстве с объемной плотностью

$$W'_3 = \epsilon_a E^2 / 2 = \mathbf{E} \mathbf{D} / 2 \quad (7.42)$$

и в некотором объеме  $V$  определяется интегралом

$$W_3 = \int_V W' dV = \frac{1}{2} \int_V \mathbf{E} \mathbf{D} dV. \quad (7.43)$$

В электростатическом поле нет движения энергии — отсутствие магнитного поля приводит к равенству нулю вектора Пойнтинга.

При расположении системы зарядов в *конечной* области безграничного однородного диэлектрика *полная* энергия электростатического поля может быть выражена другим соотношением, которым удобно пользоваться для вычислений. Подставив в (7.43)  $\mathbf{E} = -\text{grad} \varphi$  и воспользовавшись (П1.15), найдем

$$W_3 = \frac{1}{2} \int_V \varphi \text{div} \mathbf{D} dV - \frac{1}{2} \int_V \text{div} (\varphi \mathbf{D}) dV. \quad (7.44)$$

Преобразуем второй интеграл в (7.44) при помощи (П1.5):

$$\frac{1}{2} \int_V \text{div} (\varphi \mathbf{D}) dV = \frac{1}{2} \oint_S \varphi \mathbf{D} d\mathbf{S}. \quad (7.45)$$

Здесь поверхность  $S$  можно представить состоящей из бесконечно удаленной поверхности сферы  $S_\infty$ , ограничивающей снаружи полное поле, и замкнутых поверхностей  $S_1, S_2 \dots$ , примыкающих к поверхностям проводящих тел (рис. 7.10). Поверхности проводящих тел являются согласно (7.9) местами разрыва непрерывности вектора  $\mathbf{D}$  и должны быть исключены из области  $V$ .

Рассматриваемая система зарядов для точек поверхности  $S_\infty$  является точечным зарядом. Поэтому при вычислении интеграла  $\oint_{S_\infty} \varphi \mathbf{D} d\mathbf{S}$  воспользуемся  $\varphi$ -лами (7.15) и (7.16) и, интегрируя по поверхности сферы неограниченно возрастающего радиуса, получим

$$\oint_{S_\infty} \varphi \mathbf{D} d\mathbf{S} = \lim_{R \rightarrow \infty} \left( \frac{Q}{4\pi\epsilon_a R} \frac{Q}{4\pi R^2} 4\pi R^2 \right) = 0. \quad (7.46)$$

Интеграл по поверхности  $S_k$ , примыкающей к проводящему телу  $k$ , при учете (7.9) равен:

$$\oint_{S_k} \varphi \mathbf{D} d\mathbf{S} = \oint_{S_k} \varphi D_n dS = - \oint_{S_k} \varphi \sigma_Q dS = - \varphi_k \oint_{S_k} \sigma_Q dS = - \varphi_k Q_k, \quad (7.47)$$

где  $\varphi_k$  — постоянный потенциал проводящего тела  $k$ ;  $Q_k$  — полный заряд этого тела.

Заменяя в первом интеграле (7.44)  $\text{div} \mathbf{D}$  в соответствии с уравнением  $\text{div} \mathbf{D} = \rho$  и учитывая (7.45) — (7.47), получаем следующее выражение для полной энергии электростатического по-

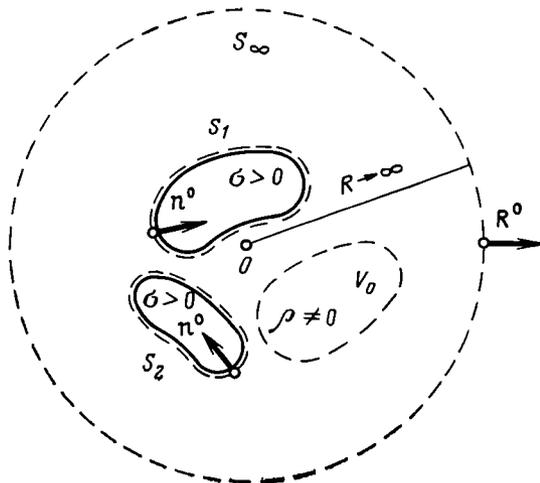


РИС. 7.10

ля, создаваемого объемными зарядами и заряженными проводящими телами:

$$W_э = \frac{1}{2} \int_{V_0} \varphi \rho dV + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \varphi_k Q_k, \quad (7.48)$$

где  $V_0$  — объем, в пределах которого  $\rho \neq 0$ ;  $n$  — число проводящих тел. В частности, если  $\rho = 0$  и электростатическое поле создается только системой  $n$  заряженных проводящих тел, то

$$W_э = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \varphi_k Q_k. \quad (7.49)$$

## 7.8. ЭЛЕКТРИЧЕСКАЯ ЕМКОСТЬ УЕДИНЕННОГО ПРОВОДЯЩЕГО ТЕЛА

Потенциал  $\varphi$  уединенного заряженного проводящего тела, расположенного в однородном безграничном диэлектрике, выражается  $\varphi$ -лой (7.21). Закон распределения поверхностного заряда  $\sigma_Q$  предопределен условиями электростатического равновесия (внутри проводника  $\mathbf{E} = 0$  и  $\rho = 0$ ) и обусловлен формой и размерами тела, причем величина  $\sigma_Q$  пропорциональна полному заряду тела  $Q$ :

$$\sigma_Q(\mathbf{R}') = Qf(\mathbf{R}'), \quad (7.50)$$

где  $f(\mathbf{R}')$  — функция координат, зависящая от геометрических параметров тела. Подставив (7.50) в (7.21), приходим к выводу, что постоянный потенциал  $\varphi$  уединенного проводящего тела пропорционален его заряду  $Q$ , обратно пропорционален  $\epsilon_a$  диэлектрика и зависит от геометрических параметров тела.

Отношение заряда уединенного проводящего тела к его потенциалу есть величина постоянная, называемая *электрической емкостью тела*:

$$C = Q/\varphi, \quad (7.51)$$

причем для однозначного определения емкости  $C$  потенциал бесконечно удаленных точек принимают равным нулю. Из сказанного выше следует, что емкость уединенного проводящего тела зависит от формы и размеров тела и пропорциональна значению  $\epsilon_a$  окружающей среды. Единицей измерения емкости в системе единиц СИ является фарада ( $\Phi$ ).

Электрическая емкость проводящего тела характеризует его способность накапливать электрический заряд. Действительно, из (7.51) следует, что при одинаковых потенциалах  $\varphi$  двух уединенных тел больший заряд будет распределен на том теле, которое обладает большей емкостью  $C$ .

Подставив в (7.49)  $n=1$  и воспользовавшись (7.51), выразим через емкость энергию электрического поля, создаваемого уединенным заряженным проводящим телом:

$$W_s = \frac{1}{2} \varphi Q = Q^2/2C = C \varphi^2/2. \quad (7.52)$$

## 7.9. СИСТЕМА ЗАРЯЖЕННЫХ ПРОВОДЯЩИХ ТЕЛ

Рассмотрим в однородном безграничном диэлектрике систему  $n$  проводящих тел. Допустим вначале, что одно из тел имеет заряд  $Q_1$ , а полный заряд каждого из остальных тел равен нулю. В результате электростатической индукции заряды будут существовать на поверхности не только заряженного тела, но и в целом нейтральных тел. Закон распределения поверхностного заряда  $\sigma_Q$  на каждом из  $n$  тел предопределен условиями электростатического равновесия и зависит от формы, размеров и взаимного расположения *всех* тел, причем величина  $\sigma_Q$  пропорциональна значению заряда  $Q_1$  заряженного тела [ф-лы вида (7.50)]. Потенциал (7.21) каждого тела системы определяется поверхностными зарядами всех  $n$  тел и может быть представлен следующим образом:

$$\varphi'_1 = \alpha_{11}Q_1, \quad \varphi'_2 = \alpha_{21}Q_1, \dots, \quad \varphi'_k = \alpha_{k1}Q_1, \dots, \quad \varphi'_n = \alpha_{n1}Q_1, \quad (7.53)$$

где коэффициенты пропорциональности  $\alpha_{11}, \alpha_{21}, \dots, \alpha_{k1}, \dots, \alpha_{n1}$  за-



подающихся аналитическому расчету, на основе этих представлений легко определить частичные емкости экспериментальным путем (см., например, [28]).

### 7.10. ЭЛЕКТРИЧЕСКАЯ ЕМКОСТЬ МЕЖДУ ДВУМЯ ПРОВОДЯЩИМИ ТЕЛАМИ. КОНДЕНСАТОР

Рассмотрим в однородном безграничном диэлектрике систему двух заряженных проводящих тел, заряды которых *равны по величине и противоположны по знаку*. Подставив в (7.54)  $n=2$  и  $Q_2 = -Q_1$ , имеем:

$$\varphi_1 = (\alpha_{11} - \alpha_{12})Q_1, \quad \varphi_2 = (\alpha_{21} - \alpha_{22})Q_1, \quad \varphi_1 - \varphi_2 = (\alpha_{11} + \alpha_{22} - \alpha_{12} - \alpha_{21})Q_1. \quad (7.56)$$

Таким образом, в рассматриваемом случае *разность потенциалов тел пропорциональна заряду одного из них*. При этом постоянную величину

$$C = \frac{Q_1}{\varphi_1 - \varphi_2} = \frac{Q_2}{\varphi_2 - \varphi_1} = \frac{1}{\alpha_{11} + \alpha_{22} - \alpha_{12} - \alpha_{21}} \quad (7.57)$$

называют *электрической емкостью между двумя телами*. Электрическая емкость между двумя телами (7.57) зависит от формы, размеров и взаимного расположения проводящих тел и пропорциональна  $\epsilon_a$  диэлектрика.

В качестве примера определим емкость между двумя параллельными заряженными проводниками (см. рис. 7.8), приходящуюся на единицу длины. Разность потенциалов между проводниками найдем, подставив в (7.39)  $r_0 = a$  и  $|x_0| = 0,5D$ :

$$\varphi_1 - \varphi_2 = 2\varphi_1 = \frac{\tau_Q}{\pi\epsilon_a} \ln \frac{0,5D + \sqrt{(0,5D)^2 - a^2}}{a}. \quad (7.58)$$

Емкость на единицу длины, измеряемая в Ф/м, определится выражением

$$C' = \frac{\tau_Q}{\varphi_1 - \varphi_2} = \frac{\pi\epsilon_a}{\ln [(0,5D/a) + \sqrt{(0,5D/a)^2 - 1}]}. \quad (7.59)$$

Систему двух разделенных диэлектриком проводящих тел (обкладок), предназначенную для использования электрической емкости между ними, называют *конденсатором*. Соответственно *емкостью конденсатора* называют отношение (7.57) электрического заряда одной из обкладок к разности потенциалов между обкладками, имеющими одинаковые по величине и противоположные по знаку заряды.

Подставляя в (7.49)  $n = 2$ ,  $Q_2 = -Q_1$  и учитывая (7.57), определим энергию электрического поля конденсатора

$$W_э = \frac{1}{2} Q_1(\varphi_1 - \varphi_2) = \frac{Q_1^2}{2C} = \frac{C}{2} (\varphi_1 - \varphi_2)^2. \quad (7.60)$$

Отсюда, в частности, следует, что при одинаковой разности потенциалов между обкладками большей энергией будет обладать тот конденсатор, емкость которого больше.

### 7.11. МАГНИТОСТАТИЧЕСКОЕ ПОЛЕ

Магнитостатическое поле обусловлено неподвижными постоянными магнитами и удовлетворяет уравнениям (7.2). Идеализируя свойства постоянных магнитов, можно в первом приближении считать, что их намагниченность представляет собой сумму *постоянной* намагниченности  $\mathbf{J}_0$ , которая не зависит от напряженности магнитного поля, и *индуцированной* намагниченности, которая возбуждена магнитным полем и линейно зависит от  $\mathbf{H}$ :

$$\mathbf{J} = \mathbf{J}_0 + k_M \mathbf{H}. \quad (7.61)$$

Здесь  $\mathbf{J}_0$  — известная функция координат; постоянный коэффициент пропорциональности  $k_M$  от  $\mathbf{H}$  не зависит. В соответствии с (2.71), (2.73) и (7.61) имеем внутри магнитов

$$\mathbf{B} = \mu_0 (\mathbf{H} + \mathbf{J}_0 + k_M \mathbf{H}) = \mu_a \mathbf{H} + \mu_0 \mathbf{J}_0. \quad (7.62)$$

Подставляя (7.62) в (7.2), получаем систему уравнений:

$$\text{rot } \mathbf{H} = 0, \quad \text{div } (\mu_a \mathbf{H}) = \rho_M, \quad (7.63)$$

в которой использовано обозначение

$$\rho_M = -\mu_0 \text{div } \mathbf{J}_0. \quad (7.64)$$

Величина  $\rho_M$  носит название *объемной плотности постоянных магнитных зарядов* и измеряется в Вб/м<sup>3</sup>. Подчеркнем здесь еще раз, что в природе отсутствуют магнитные заряды и их введение ф-лой (7.64) произведено формальным образом. Физической причиной того, что  $\rho_M \neq 0$ , является упорядоченность элементарных электрических токов при отсутствии внешнего магнитного поля в постоянных магнитах. Благодаря формальному введению магнитных зарядов уравнения магнитного поля постоянных магнитов (7.63) становятся аналогичными уравнениям электрического поля постоянных зарядов (7.1). Поэтому при изучении магнитостатического поля могут быть применены методы и результаты исследования электростатического поля (если произвести замену соответственно  $\mathbf{E}$  на  $\mathbf{H}$ ,  $\epsilon_a$  на  $\mu_a$  и  $\rho$  на  $\rho_M$ ). В частности, магнитостатическое поле можно выразить через *скалярный магнитный потенциал*  $\varphi_M$  этого поля соотношением  $\mathbf{H} = -\text{grad } \varphi_M$ , аналогичным (7.10); в однородном магнетике потенциал  $\varphi_M$  удовлетворяет уравнению Пуассона  $\nabla^2 \varphi_M = -\rho_M/\mu_a$  (в областях, где  $\rho_M \neq 0$ ) и уравнению Лапласа (в областях, где  $\rho_M = 0$ ).

## СТАЦИОНАРНОЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЕ ПОЛЕ

8.1. СТАЦИОНАРНОЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКОЕ ПОЛЕ  
В ПРОВОДЯЩЕЙ СРЕДЕ

Уравнения стационарного электрического поля (7.3) идентичны уравнениям электростатического поля (7.1). Однако, в отличие от электростатического, стационарное поле существует не только в диэлектрике, но и в проводящей среде (если  $\delta_{\text{пр}} \neq 0$ , то в соответствии с уравнением  $\delta_{\text{пр}} = \sigma \mathbf{E}$  и  $\mathbf{E} \neq 0$ ).

В изотропной линейной однородной проводящей среде вектор  $\mathbf{E}$  стационарного электрического поля удовлетворяет согласно (7.3) уравнениям

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = 0, \text{ т. е. } \mathbf{E} = -\operatorname{grad} \varphi; \quad \operatorname{div} \mathbf{E} = \rho/\epsilon, \quad (8.1)$$

и согласно вытекающему из (3.20) при  $\partial \rho / \partial t = 0$  соотношению  $\operatorname{div} \delta = \operatorname{div} (\delta_{\text{ст}} + \sigma \mathbf{E}) = 0$  — уравнению

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = -\operatorname{div} \delta_{\text{ст}} / \sigma. \quad (8.2)$$

Из (8.1) следует, что потенциал стационарного поля  $\varphi$  определяется решением уравнения Пуассона

$$\nabla^2 \varphi = -\rho/\epsilon_a. \quad (8.3)$$

Сопоставление последнего уравнения (8.1) с (8.2) показывает, что фигурирующая в правой части (8.3) объемная плотность заряда  $\rho$  выражается через  $\delta_{\text{ст}}$  соотношением

$$\rho = -\frac{\epsilon_a}{\sigma} \operatorname{div} \delta_{\text{ст}}. \quad (8.4)$$

Оно означает, что объемные электрические заряды существуют только в тех областях однородной проводящей среды, где  $\operatorname{div} \delta_{\text{ст}} \neq 0$ .

В области вне сторонних источников имеем:  $\delta_{\text{ст}} = 0$ ,  $\delta = \delta_{\text{пр}} = \sigma \mathbf{E}$  и  $\operatorname{div} \delta = \operatorname{div} \delta_{\text{пр}} = 0$ . Следовательно, в этой области линии постоянного тока проводимости непрерывны ( $\operatorname{div} \delta_{\text{пр}} = 0$ ) и их направление совпадает с направлением линий  $\mathbf{E}$  ( $\delta_{\text{пр}} = \sigma \mathbf{E}$ ). В однородной проводящей среде картины векторных линий  $\delta_{\text{пр}}$  и  $\mathbf{E}$  подобны друг другу.

При решении многих практических задач (например, при изучении токов в земле, в массивных проводниках, в несовершенной изоляции) нужно знать пространственное распределение плотности постоянного тока  $\delta_{\text{пр}}$ . В этом распределении важную роль играют граничные условия для тангенциальной и нормальной составляющих вектора  $\delta_{\text{пр}}$  на поверхности раздела сред с различными

значениями  $\sigma$ . Граничное условие для тангенциальной составляющей получается из (3.41):

$$\delta_{\text{пр}1\tau}/\sigma_1 = \delta_{\text{пр}2\tau}/\sigma_2. \quad (8.5)$$

Граничное условие для нормальной составляющей выводится из закона сохранения электрического заряда в интегральной форме (2.59), который для стационарных процессов в проводящих средах принимает вид  $\oint_S \delta_{\text{пр}} dS = 0$ . Рассуждая таким же образом, как при выводе из (2.35) граничного условия (3.34), получим

$$\delta_{\text{пр}1n} = \delta_{\text{пр}2n}. \quad (8.6)$$

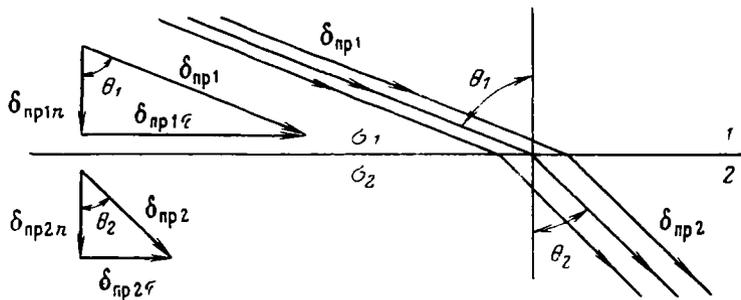


РИС. 8.1

Из рис. 8.1 видно, что в каждой среде  $\text{tg } \theta = \delta_{\text{пр}\tau} / \delta_{\text{пр}n}$ . Учитывая при этом соотношения (8.5) и (8.6), получим следующий закон преломления линий тока на границе раздела:

$$\text{tg } \theta_2 = \frac{\sigma_2}{\sigma_1} \text{tg } \theta_1. \quad (8.7)$$

В практических задачах часто происходит переход тока из металлических тел в слабо проводящую среду ( $\sigma_1 \gg \sigma_2$ ). Из (8.7) следует, что при  $\sigma_2/\sigma_1 \ll 1$  и  $\theta_1 \neq 90^\circ$  можно приближенно считать угол  $\theta_2$  всегда равным нулю. Таким образом, векторы  $\delta_{\text{пр}}$  и  $\mathbf{E} = \delta_{\text{пр}}/\sigma$  в слабо проводящей среде ориентированы практически нормально к поверхностям металлических тел, которые, следовательно, можно полагать эквипотенциальными ( $\varphi = \text{const}$ ).

## 8.2. МЕТОД ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОЙ АНАЛОГИИ

Из § 8.1 следует, что в однородной проводящей среде в области вне сторонних источников вектор  $\mathbf{E}$  стационарного электрического поля удовлетворяет системе уравнений:

$$\text{rot } \mathbf{E} = 0, \quad \text{div } \mathbf{E} = 0. \quad (8.8)$$

С другой стороны, электростатическое поле, создаваемое в однородном диэлектрике заряженными проводящими телами, удовлет-

воряет системе уравнений (7.8) при  $\rho=0$ , которая также принимает вид (8.8). На аналогии исходных систем уравнений в этих двух задачах основывается так называемый *метод электростатической аналогии*, который позволяет при определении в проводящей среде вектора  $\mathbf{E}$  стационарного поля (и плотности тока  $\delta_{\text{пр}}=\sigma\mathbf{E}$ ) использовать в некоторых случаях решение соответствующей электростатической задачи. Действительно, согласно системе (8.8) напряженности стационарного и электростатического полей могут быть выражены формулой  $\mathbf{E}=-\text{grad}\varphi$  через свои скалярные потенциалы  $\varphi$ , которые удовлетворяют уравнению Лапласа  $\nabla^2\varphi=0$ . В электростатической задаче границей диэлектрика являются эквипотенциальные поверхности проводящих тел. При рассмотрении задачи о стационарном поле остановимся на случае слабо проводящих сред, ограниченных металлическими поверхностями, которые с высокой степенью точности также можно считать *эквипотенциальными* (см. § 8.1). Если в некоторой задаче о стационарном поле в проводящей среде и в соответствующей электростатической задаче металлические поверхности имеют одни и те же потенциалы и геометрические параметры, то и решение уравнения Лапласа  $\nabla^2\varphi=0$  будет в этих задачах одним и тем же. Следовательно, одним и тем же будет и вектор  $\mathbf{E}$  в этих двух задачах.

Подобие картин векторных линий  $\mathbf{E}$  и  $\delta_{\text{пр}}$  и аналогия стационарного и электростатического полей позволяют моделировать электростатическое поле в электролитической ванне. Для экспериментального изучения электростатического поля системы проводящих тел подобную ей систему металлических тел помещают в ванну, создают требуемые потенциалы и измеряют плотность тока  $\delta_{\text{пр}}$ . Определенное экспериментальным путем векторное поле  $\delta_{\text{пр}}$  в электролите является моделью изучаемого электростатического поля.

### 8.3. СТАЦИОНАРНОЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКОЕ ПОЛЕ В ДИЭЛЕКТРИКЕ

Пусть в изотропном линейном однородном диэлектрике расположены проводники с постоянным током. Электрическое поле, создаваемое при этом в диэлектрике, описывается уравнениями (7.3), в которых  $\mathbf{D}=\epsilon_a\mathbf{E}$ ,  $\epsilon_a=\text{const}$  и  $\rho=0$ :

$$\text{rot}\mathbf{E}=0, \text{ т. е. } \mathbf{E}=-\text{grad}\varphi, \text{ div}\mathbf{E}=0. \quad (8.9)$$

Из (8.9) следует, что скалярный потенциал  $\varphi$  удовлетворяет уравнению Лапласа  $\nabla^2\varphi=0$ . Таким образом, в диэлектрике стационарное электрическое поле удовлетворяет тем же уравнениям, что и электростатическое поле, создаваемое заряженными проводящими телами.

Однако на поверхности проводников граничные условия для стационарного электрического поля и электростатического поля не совпадают. В электростатическом поле поверхность проводящего тела является эквипотенциальной. Наличие же тока с плотностью  $\delta_{\text{пр}}=\sigma\mathbf{E}$  вызывает уменьшение потенциала вдоль проводника, и его поверхность уже не является эквипотенциальной. Согласно

граничному условию (3.41) в диэлектрике у поверхности проводника существует касательная составляющая  $E_{\tau} = \delta_{\text{пр}}/\sigma$ , направленная параллельно линиям тока, вследствие чего векторные линии  $\mathbf{E}$  в диэлектрике ориентированы уже не перпендикулярно к поверхности проводника.

В большинстве практически важных случаев постоянный ток протекает по *металлическим* проводникам, характеризуемым очень большими значениями  $\sigma$ . Легко убедиться, что при этом в диэлектрике у поверхности проводника касательная составляющая  $E_{\tau}$  оказывается весьма малой по сравнению с нормальной составляющей  $E_n$ . Соотношение  $E_{\tau} \ll E_n$  позволяет при рассмотрении стационарного поля в диэлектрике, окружающем провода с постоянным током, пренебречь касательной составляющей и соответственно считать поверхность проводов эквипотенциальной. В этом приближении определение стационарного электрического поля в диэлектрике сводится к решению соответствующей задачи электростатики.

#### 8.4. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ СТАЦИОНАРНОГО МАГНИТНОГО ПОЛЯ

Уравнения в дифференциальной форме магнитного поля, обусловленного постоянным электрическим током, имеют вид (7.4).

Наиболее распространенной задачей является определение стационарного магнитного поля по заданному распределению плотности тока  $\delta$ . Решение этой задачи для изотропной линейной однородной среды удобно проводить при помощи векторного потенциала  $\mathbf{A}$ , через который векторы  $\mathbf{B}$  и  $\mathbf{H}$  можно выразить соотношениями вида (6.12) и (6.16):

$$\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}, \quad \mathbf{H} = \frac{1}{\mu_a} \text{rot } \mathbf{A}. \quad (8.10)$$

Векторный потенциал  $\mathbf{A}$  стационарного магнитного поля удовлетворяет условию калибровки

$$\text{div } \mathbf{A} = 0 \quad (8.11)$$

и векторному уравнению Пуассона

$$\nabla^2 \mathbf{A} = -\mu_a \delta, \quad (8.12)$$

которые получаются соответственно из ур-ний (6.18) и (6.19), если в них полагать все величины постоянными во времени.

В тех областях пространства, где отсутствует электрический ток, ур-ние (8.12) переходит в *векторное уравнение Лапласа*

$$\nabla^2 \mathbf{A}_i = 0. \quad (8.13)$$

Уравнение Пуассона (8.12) можно рассматривать как частный случай векторного уравнения Гельмгольца (6.39) при  $k=0$ . Поэтому при распределении постоянного тока в конечной области  $V$  однородной безграничной среды решение ур-ния (8.12) определя-

ется решением (6.44) векторного уравнения Гельмгольца при  $k=0$ :

$$\mathbf{A}(\mathbf{R}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\mathbf{j}(\mathbf{R}') dV'}{r}. \quad (8.14)$$

Исходя из ф-лы (8.14) и рассуждая таким же образом, как при выводе соотношения (7.15), легко прийти к выводу, что при удалении в бесконечность от занятого током ограниченного объема  $V$  векторный потенциал убывает не медленнее, чем  $1/R$ . При этом в соответствии с (8.10) и (П1.37) векторы магнитного поля убывают не медленнее, чем  $1/R^2$ .

Отметим, что в наиболее простых случаях определять стационарное магнитное поле через потенциал  $\mathbf{A}$  нецелесообразно. Если можно заранее предвидеть цилиндрическую симметрию поля, при которой магнитные векторные линии представляют собой концентрические окружности (например, поле цилиндрического провода с током), то это поле можно непосредственно и легко определить из интегрального соотношения (2.52):

$$\oint_L \mathbf{H} d\mathbf{l} = \int_S \mathbf{j} d\mathbf{S} \quad (8.15)$$

(см. § 8.5, пп. 1, 2).

### 8.5. ПРОСТЕЙШИЕ ПРИМЕРЫ СТАЦИОНАРНОГО МАГНИТНОГО ПОЛЯ

1. Круглый провод радиуса  $a$  с электрическим током  $I$  (рис. 8.2). В силу цилиндрической симметрии задачи линии  $\mathbf{H}$  являются окружностями, плоскости которых перпендикулярны оси  $z$  провода, а центры лежат на этой оси. Применим уравнение (8.15) к контуру  $L$ , представляющему собой окружность радиуса  $r$  и совпадающему с векторной линией  $\mathbf{H}$ . Поскольку вектор  $\mathbf{H}$  вдоль этого контура имеет одинаковую величину и направлен по касательной к линии  $L$ , а постоянный ток  $I$  распределен равномерно по сечению провода с плотностью  $\mathbf{j} = \mathbf{z}^0 \frac{I}{\pi a^2}$ , то вместо (8.15) получим

$$H 2\pi r = \frac{I}{\pi a^2} S, \quad (8.16)$$

где  $S = \pi r^2$  при  $a \geq r$  (контур  $L$  проходит внутри провода) и  $S = \pi a^2$  при  $a \leq r$  (контур проходит вне провода). Соответственно этому имеем:

$$\mathbf{H} = \mathbf{z}^0 \frac{I}{2\pi a^2} r \quad \text{при } a \geq r; \quad (8.17)$$

$$\mathbf{H} = \mathbf{z}^0 \frac{I}{2\pi r} \quad \text{при } a \leq r. \quad (8.18)$$

Таким образом, величина  $\mathbf{H}$  внутри провода линейно возрастает с увеличением  $r$ , вне провода — убывает по закону  $1/r$  (см. рис. 8.2).

2. Коаксиальная двухпроводная система (рис. 8.3), у которой постоянные токи во внутреннем цилиндрическом и наружном трубчатом проводниках равны по величине и противоположны по направлению. Ось  $z$  совместим с осью коаксиальной системы и направим по току внутреннего проводника. Постоянный

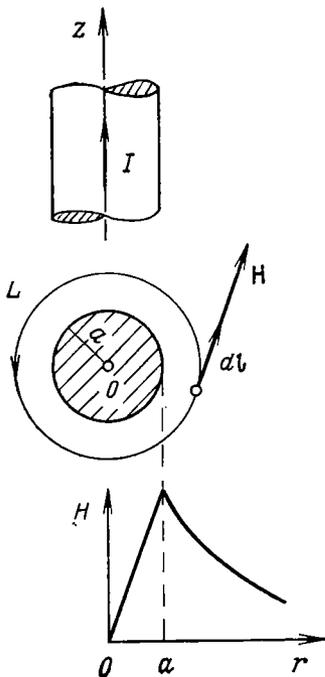


РИС. 8.2

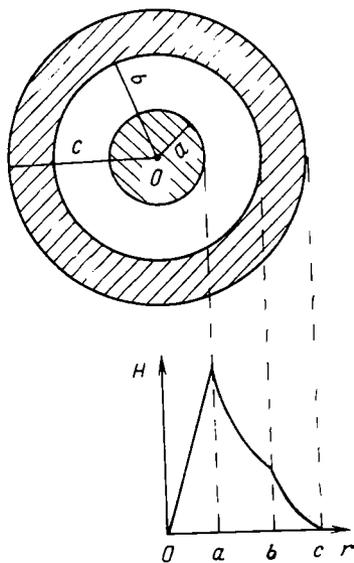


РИС. 8.3

ток  $I$  внутреннего проводника распределен равномерно по сечению с плотностью  $\delta_{\text{вн}} = z^0 \frac{I}{\pi a^2}$ , постоянный ток  $-I$  наружного проводника распределен равномерно по сечению с плотностью  $\delta_{\text{нар}} = z^0 \frac{-I}{\pi(c^2 - b^2)}$ . Благодаря цилиндрической симметрии задачи напряженность магнитного поля можно определить по ф-ле (8.15). Рассуждая таким же образом, как в п. 1, получаем следующие выражения для напряженности магнитного поля:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{H} &= \psi^0 \frac{I}{2\pi a^2} r \text{ при } a \geq r; & \mathbf{H} &= \psi^0 \frac{I}{2\pi r} \text{ при } a \leq r \leq b; \\ \mathbf{H} &= \psi^0 \frac{I}{2\pi(c^2 - b^2)} \frac{c^2 - r^2}{r} \text{ при } b \leq r \leq c; & \mathbf{H} &= 0 \text{ при } c \leq r. \end{aligned} \right\} \quad (8.19)$$

Изменение величины  $\mathbf{H}$  согласно (8.19) в зависимости от  $r$  показано на рис. 8.3.

## 8.6. ЭНЕРГИЯ СТАЦИОНАРНОГО МАГНИТНОГО ПОЛЯ

Из общих выражений для электромагнитной энергии (4.13), (4.14) следует, что энергия стационарного магнитного поля распределена в пространстве с объемной плотностью

$$W'_m = \mu_a H^2 / 2 = \mathbf{H}\mathbf{B} / 2 \quad (8.20)$$

и в некотором объеме  $V$  определяется интегралом

$$W_m = \int_V W'_m dV = \frac{1}{2} \int_V \mathbf{H}\mathbf{B} dV. \quad (8.21)$$

При распределении постоянного тока в *конечной* области  $V_0$  однородной безграничной среды *полная* энергия стационарного магнитного поля может быть выражена другим соотношением, которым удобно пользоваться для вычислений. Подставив в (8.21)  $\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}$  и воспользовавшись (П1.16), найдем

$$W_m = \frac{1}{2} \int_V \text{div} [\mathbf{A}\mathbf{H}] dV + \frac{1}{2} \int_V \mathbf{A} \text{rot } \mathbf{H} dV. \quad (8.22)$$

Преобразуем первый интеграл в (8.22) при помощи (П1.5):

$$\frac{1}{2} \int_V \text{div} [\mathbf{A}\mathbf{H}] dV = \frac{1}{2} \oint_{S_\infty} [\mathbf{A}\mathbf{H}] dS, \quad (8.23)$$

где поверхность  $S_\infty$  можно представить в виде поверхности бесконечно удаленной сферы, ограничивающей снаружи полное поле. Поскольку в точках поверхности  $S_\infty$  величина  $\mathbf{A}$  убывает не медленнее, чем  $1/R$ , величина  $\mathbf{H}$  убывает не медленнее, чем  $1/R^2$  (см. § 8.4), а площадь поверхности сферы возрастает пропорционально  $R^2$ , то поверхностный интеграл (8.23) при  $R \rightarrow \infty$  обращается в нуль.

Учитывая это и заменяя  $\text{rot } \mathbf{H}$  во втором интеграле (8.22) в соответствии с уравнением  $\text{rot } \mathbf{H} = \delta$ , получим

$$W_m = \frac{1}{2} \int_{V_0} \mathbf{A} \delta dV, \quad (8.24)$$

где интегрирование распространено по объему  $V_0$ , в пределах которого  $\delta \neq 0$ .

## 8.7. ИНДУКТИВНОСТЬ, ВЗАИМНАЯ ИНДУКТИВНОСТЬ

Постоянный ток в реальном контуре, образованном проводником *конечного* поперечного сечения, можно разложить на совокупность бесконечно тонких замкнутых элементарных *трубок тока*. Чтобы получить такую трубку тока, выделим мысленно внутри проводника элементарную площадку  $dS$  и проведем через все точки контура этой площадки линии тока. Область, ограниченная непрерывной поверхностью, образующими которой являются эти ли-

нии тока, и представляют собой элементарную трубку тока. Поскольку линии постоянного тока замкнуты, то соответственно и каждая трубка тока замкнута сама на себя, причем сила тока  $dI$  во всех сечениях трубки постоянна и равна  $dI = \delta dS$ .

Представим себе систему, состоящую из  $n$  контуров с токами. Различные элементарные трубки тока контура  $k$  имеют различную форму и размеры и, следовательно, сцепляющиеся с ними магнитные потоки (обусловленные как током рассматриваемого контура, так и токами других контуров) будут также различными. Полным магнитным потоком, сцепляющимся со всем током  $I_k$ , или *потоко-сцеплением*  $\Psi_k$  контура  $k$  называют величину

$$\Psi_k = \frac{1}{I_k} \int_{I_k} \Phi dI_k, \quad (8.25)$$

где  $dI_k$  — ток в элементарной трубке контура  $k$ ;  $\Phi$  — магнитный поток, сцепляющийся с этой трубкой; интегрирование производится по всем трубкам тока контура.

Магнитный поток  $\Phi$ , который сцепляется с элементарной трубкой тока, ограничивающей поверхность  $S'_k$ , определяется соотношением

$$\Phi = \int_{S'_k} \mathbf{B} d\mathbf{S}. \quad (8.26)$$

Условимся, что положительная нормаль к поверхности в (8.26) связана с направлением  $\delta_k$  в трубке правилом правого винта. При этом, заменив  $\mathbf{B}$  согласно (8.10) и воспользовавшись (П.6), получаем вместо (8.26)

$$\Phi = \oint_{I_k} \mathbf{A} dI_k, \quad (8.27)$$

где  $dI_k$  совпадает по направлению с  $\delta_k$ ;  $I_k$  — контур, ограничивающий поверхность  $S'_k$ .

Подставив (8.27) и  $dI_k = \delta_k dS_k$  в (8.25), получим

$$\Psi_k = \frac{1}{I_k} \int_{S'_k} \oint_{I_k} (\mathbf{A} dI_k) (\delta_k dS_k) = \frac{1}{I_k} \int_{V_k} \mathbf{A} \delta_k dV_k, \quad (8.28)$$

где интегрирование производится по объему  $V_k$  контура  $k$ . При выводе (8.28) было учтено, что векторы  $\delta_k$  и  $dI_k$  имеют одно и то же направление, вследствие чего  $(\mathbf{A} dI_k) (\delta_k dS_k) = (\mathbf{A} \delta_k) (dS_k dI_k) = \mathbf{A} \delta_k dV_k$ .

Для системы, состоящей из  $n$  контуров с токами, фигурирующий в (8.28) потенциал  $\mathbf{A}$  можно представить согласно принципу суперпозиции векторной суммой  $\mathbf{A} = \sum_{i=1}^n \mathbf{A}_i$ , где  $\mathbf{A}_i$  — потенциал, создаваемый в элементарном объеме  $dV_k$  контура  $k$  током контура

*i*. Соответственно этому потокосцепление (8.28) контура *k* складывается из суммы потокосцеплений:

$$\Psi_k = \frac{1}{I_k} \sum_{i=1}^n \int_{V_k} \mathbf{A}_i \delta_k dV_k = \Psi_{k1} + \Psi_{k2} + \dots + \Psi_{kk} + \dots + \Psi_{km} + \dots + \Psi_{kn}, \quad (8.29)$$

где

$$\Psi_{kk} = \frac{1}{I_k} \int_{V_k} \mathbf{A}_k \delta_k dV_k \quad (8.30)$$

есть *потокосцепление самоиндукции* контура *k*, представляющее собой полный магнитный поток, сцепляющийся с контуром *k* и обусловленный электрическим током этого же контура,

$$\Psi_{km} = \frac{1}{I_k} \int_{V_k} \mathbf{A}_m \delta_k dV_k \quad (8.31)$$

есть *потокосцепление взаимной индукции* между контуром *k* и контуром *m*, представляющее собой полный магнитный поток, сцепляющийся с контуром *k* и обусловленный электрическим током контура *m*.

Если материал контуров и окружающая их среда линейны в магнитном отношении, то потокосцепления  $\Psi_{kk}$  и  $\Psi_{km}$  пропорциональны обуславливающим их токам:

$$\Psi_{kk} = L_k I_k, \quad \Psi_{km} = M_{km} I_m, \quad (8.32)$$

причем постоянный коэффициент пропорциональности  $L_k$  называют *индуктивностью* контура *k*;  $M_{km}$  — *взаимной индуктивностью* контуров. Индуктивности  $L_k$  и  $M_{km}$  измеряются в генри.

Ограничиваясь далее линейной и однородной в магнитном отношении средой, для фигурирующих в (8.30) и (8.31) потенциалов  $\mathbf{A}_k$  и  $\mathbf{A}_m$  имеем согласно (8.14) соотношение

$$\mathbf{A}_i = \frac{\mu_a}{4\pi} \int_{V_i} \frac{\mathbf{z}_i dV_i}{r}, \quad (8.33)$$

где  $r$  — расстояние от элемента объема  $dV_i$  контура *i* до элемента объема  $dV_k$  контура *k*. Из (8.30) — (8.33) получаем следующие формулы для индуктивностей:

$$L_k = \frac{\mu_a}{4\pi I_k^2} \int_{V_k} \int_{V'_k} \delta_k \delta'_k \frac{dV_k dV'_k}{r}, \quad M_{km} = \frac{\mu_a}{4\pi I_k I_m} \int_{V_k} \int_{V'_m} \delta_k \delta'_m \frac{dV_k dV'_m}{r}, \quad (8.34)$$

где  $\delta_k$ ,  $\delta'_k$  и  $\delta_m$  — плотность тока соответственно в элементе объема  $dV_k$ ,  $dV'_k$  и  $dV'_m$ ;  $r$  — расстояние между двумя соответствующими элементами объема.

При внесении в (8.34) токов под знак интеграла получаем в подынтегральных выражениях отношения  $\delta_k/I_k$  и  $\delta_m/I_m$ , которые определяются только формой проводников и не зависят от силы

постоянного тока. Следовательно, индуктивности (8.34) пропорциональны значению  $\mu_a$ , причем  $L_k$  определяется геометрическими параметрами только контура  $k$ , а  $M_{km}$  определяется геометрическими параметрами контуров  $k$  и  $m$  и их взаимным расположением.

Полную энергию стационарного магнитного поля, создаваемого системой  $n$  контуров с токами, удобно выражать через токи и индуктивности. Разделив в (8.24) объем  $V_0$  на  $n$  областей, соответствующих отдельным контурам, и учитывая (8.28), найдем

$$W_M = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \int_{V_k} \mathbf{A} \delta_k dV_k = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \Psi_k I_k. \quad (8.35)$$

Представим  $\Psi_k$  [ф-ла (8.29)] с учетом (8.32) следующей формулой:

$$\Psi_k = \Psi_{kk} + \sum_{i=1}^n \Psi_{ki} = L_k I_k + \sum_{i=1}^n M_{ki} I_i, \quad i \neq k. \quad (8.36)$$

Подставив (8.36) в (8.35), получим

$$W_M = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n L_k I_k^2 + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^n M_{ki} I_k I_i, \quad i \neq k. \quad (8.37)$$

Здесь слагаемые  $L_k I_k^2/2$  не зависят от взаимного расположения контуров и определяют *собственную* энергию магнитных полей, создаваемых токами отдельных контуров. В двойной сумме слагаемые с двумя фиксированными индексами фигурируют дважды:  $M_{ki} I_k I_i/2$  и  $M_{ik} I_i I_k/2$ . Они одинаковы, так как  $M_{ki} = M_{ik}$ . Их суммы  $M_{ki} I_k I_i$  зависят от взаимного расположения пары контуров и определяют *взаимную* энергию магнитных полей, создаваемых токами этих контуров.

Подставив в (8.37)  $n=1$ , получим энергию магнитного поля, создаваемого током единственного контура:

$$W_M = LI^2/2. \quad (8.38)$$

Для определения индуктивности  $L$  часто вместо (8.34) удобно использовать соотношения (8.32) или (8.38).

# Излучение и распространение электромагнитных волн

## Глава 9

### ЭЛЕМЕНТАРНЫЙ ЭЛЕКТРИЧЕСКИЙ ИЗЛУЧАТЕЛЬ



#### 9.1. ИЗЛУЧЕНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН

Электромагнитное поле, создаваемое в безграничном пространстве *переменными во времени* источниками, частично отделяется от этих источников и приобретает полную самостоятельность существования (ср. § 6.3). Это обособившееся поле существует благодаря способности переменных во времени электрического поля (ток смещения) и магнитного поля взаимно возбуждать друг друга и представляет собой свободно распространяющиеся от источников в окружающее их пространство электромагнитные волны. Процесс создания ускоренно движущимися зарядами (т. е. переменными во времени источниками) этих электромагнитных волн называют *излучением* электромагнитных волн. В среде без потерь величина векторов  $E$  и  $H$  излученных волн изменяется обратно пропорционально *первой степени* расстояния от источников. Благодаря этому сравнительно медленному изменению величины векторов поля и оказывается возможной радиосвязь на весьма больших расстояниях. Свободно распространяющиеся в пространстве излученные электромагнитные волны уносят с собой определенную мощность, которую они отбирают у сторонних источников (ср. § 5.2).

Устройство, предназначенное для излучения электромагнитных волн, называют излучателем или передающей антенной.

#### 9.2. ПОНЯТИЕ ОБ ЭЛЕМЕНТАРНОМ ЭЛЕКТРИЧЕСКОМ ИЗЛУЧАТЕЛЕ

*Элементарным электрическим излучателем* называют элемент электрического линейного гармонического тока, характеризуемый следующими особенностями: во-первых, его длина  $l$  весьма мала по сравнению с длиной волны  $\lambda$  создаваемого им поля и, во-вторых, в каждый момент времени ток имеет одно и то же значение вдоль всего элемента.

Пусть ось  $z$  направлена вдоль элементарного электрического излучателя, который занимает интервал  $-l/2 \leq z \leq l/2$ . В соответ-

ствии с приведенным определением мгновенные значения тока излучателя от координаты  $z$  не зависят, т. е.

$$\mathbb{E} i(z, t) = I_m \cos(\omega t + \varphi), \quad -l/2 \leq z \leq l/2. \quad (9.1)$$

На рис. 9.1 изображено распределение тока (9.1) вдоль элементарного излучателя, соответствующее различным моментам времени (полагаем  $\varphi=0$ ). Будем для определенности считать ток (9.1) положительным, если его направление совпадает с ортом  $z^0$  (рис. 9.2). Поскольку этот ток изменяет свое значение только в

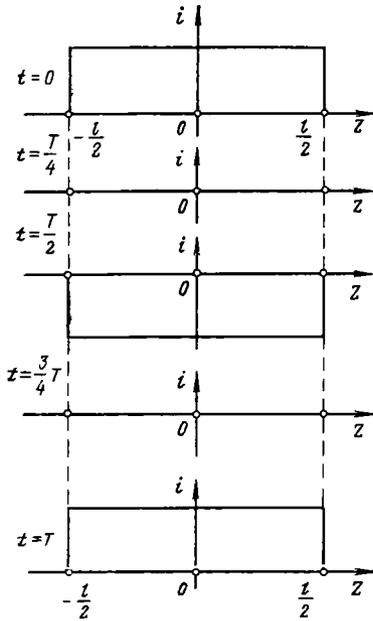


РИС. 9.1

точках  $z_1 = -l/2$  и  $z_2 = l/2$ , то согласно (2.59) в этих точках должны существовать сосредоточенные электрические заряды, связанные с током (9.1) соотношениями

$$i = -\frac{dQ_1}{dt}, \quad i = \frac{dQ_2}{dt} \quad (9.2)$$

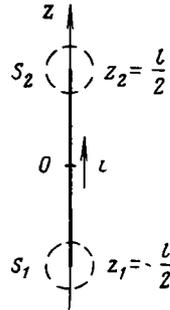


РИС. 9.2

и, следовательно, равные друг другу по величине и противоположные по знаку:

$$Q_1(t) = -Q_m \sin(\omega t + \varphi), \quad Q_2(t) = Q_m \sin(\omega t + \varphi), \quad (9.3)$$

причем  $Q_m = I_m/\omega$ . Действительно, применяя (2.59) к небольшой замкнутой поверхности  $S_1$ , ограничивающей точку  $z_1$  (см. рис. 9.2), сразу же получаем первое соотношение (9.2). При применении (2.59) к поверхности  $S_2$ , охватывающей точку  $z_2$ , нужно учесть, что поскольку мы условились считать положительным ток  $i$ , текущий в направлении  $z^0$ , то  $\oint_{S_2} \delta dS = \oint_{S_1} \delta(-z^0) dS = -i$  и, следовательно, имеет место второе соотношение (9.2).

Таким образом, элементу электрического тока (9.1) длиной  $l$  соответствует электрический диполь с гармонически изменяющим-

ся во времени электрическим моментом

$$\mathbf{p}(t) = Q_m \sin(\omega t + \varphi) l \mathbf{z}^0 = p(t) \mathbf{z}^0. \quad (9.4)$$

Направление  $\mathbf{p}$  совпадает с  $\mathbf{z}^0$  при  $Q_2 > 0$  и противоположно ему при  $Q_2 < 0$ . Элементарный электрический излучатель называют также *электрическим диполем* с переменными зарядами.

Элементарный электрический излучатель со строго неизменным вдоль его длины  $l$  током практически неосуществим и представляет собой идеализированную излучающую систему, удобную для теоретического анализа. Реальная антенна, близкая по своим свойствам к элементарному электрическому излучателю и называемая диполем Герца, представляет собой два тонких провода с металлическими шарами на концах (рис. 9.3). Высокочастотный генератор подключается в зазоре между проводами. Благодаря тому что  $l \ll \lambda$  и емкости шаров значительны, величина тока мало изменяется вдоль длины антенны  $l$ .

### 9.3. КОМПЛЕКСНЫЕ АМПЛИТУДЫ ВЕКТОРОВ ПОЛЯ ЭЛЕМЕНТАРНОГО ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ИЗЛУЧАТЕЛЯ

Пусть в безграничной однородной среде без потерь с параметрами  $\epsilon_a$  и  $\mu_a$  расположен элементарный электрический излучатель с известным током  $i = i_{ст}$ . Комплексные амплитуды векторов поля этого излучателя определим через векторный потенциал (6.44).

Если поместить начало координат  $O$  в центре элементарного излучателя (рис. 9.4) и расстояние  $r$  между точкой наблюдения



РИС. 9.3

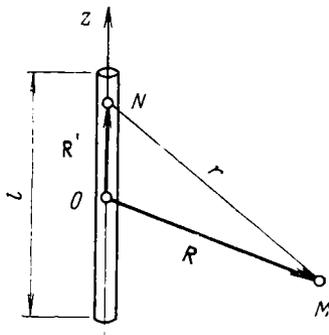


РИС. 9.4

$M(\mathbf{R})$  и текущей точкой излучателя  $N(\mathbf{R}')$  представить в виде  $r = R + \Delta r$ , то при любом положении точки наблюдения выполняется соотношение  $|\Delta r| \leq l/2$ . Учитывая, что  $k = 2\pi/\lambda$  и для элементарного излучателя  $l \ll \lambda$ , имеем  $k|\Delta r| \leq \pi l/\lambda \ll 1$ . Следовательно, для фигурирующей в (6.44) периодической функции имеем  $e^{-ikr} = e^{-ik(R+\Delta r)} \approx e^{-ikR}$ .

Ограничимся далее только такими точками наблюдения, для которых выполняется неравенство  $l \ll R$ . Поскольку  $R' \leq l/2$ , то для

этих точек наблюдения  $R'/R \ll 1$  и согласно (7.14) фигурирующее в знаменателе (6.44) расстояние  $r$  можно приближенно заменить постоянным значением  $R$ .

Вынося  $e^{-ikr}/r \approx e^{-ikR}/R$  в (6.44) из-под знака интеграла, получим

$$\dot{\mathbf{A}}(R) = \frac{\mu_a}{4\pi} \frac{e^{-ikR}}{R} \dot{\mathbf{M}}_a. \quad (9.5)$$

где  $\dot{\mathbf{M}}_a = \int_V \dot{\delta}_{ct}(R') dV$  называют *моментом тока* элементарного электрического излучателя. Плотность тока  $\dot{\delta}_{ct} = z^0 \delta_{ct}$  направлена вдоль оси излучателя. Представим элемент объема излучателя в виде  $dV = dS dl$ , где  $dS = z^0 dS$  — элемент площади поперечного сечения  $S$  и  $dl = z^0 dl$  — элемент длины  $l$  излучателя, совпадающие по направлению с  $\delta_{ct}$ . Учтя, что у элементарного излучателя  $\dot{\delta}_{ct}$  вдоль его длины  $l$  не изменяется, найдем

$$\dot{\mathbf{M}}_a = \int_V \dot{\delta}_{ct}(R') dV = \int_S \dot{\delta}_{ct} dS \int_l dl = I_{ct} l z^0 = I_{ct} l. \quad (9.6)$$

Подставив (9.6) в (9.5), получим

$$\dot{\mathbf{A}}(R) = \frac{\mu_a I_{ct} l}{4\pi} \frac{e^{-ikR}}{R} z^0. \quad (9.7)$$

Из (9.7) следует, что векторный потенциал  $\dot{\mathbf{A}}$  элементарного электрического излучателя направлен в точке наблюдения *параллельно* его оси и зависит только от расстояния  $R$ , представляющего собой радиальную координату точки наблюдения в сферической системе координат, начало которой совмещено с центром излучателя. Поэтому дальнейшие преобразования целесообразно проводить в сферической системе, направление полярной оси которой совпадает с моментом тока излучателя (рис. 9.5).

В точке наблюдения  $M$  вектор  $z^0$  разложим в сферической системе координат по двум взаимно перпендикулярным направлениям (см. рис. 9.5):

$$z^0 = R^0 \cos \theta - \theta^0 \sin \theta. \quad (9.8)$$

РИС. 9.5

В соответствии с (9.7) и (9.8) потенциал  $\dot{\mathbf{A}}$  имеет в точке  $M$  следующие составляющие:

$$\dot{A}_R = \frac{\mu_a I_{ct} l}{4\pi} \frac{e^{-ikR}}{R} \cos \theta, \quad \dot{A}_\theta = -\frac{\mu_a I_{ct} l}{4\pi} \frac{e^{-ikR}}{R} \sin \theta, \quad \dot{A}_\psi = 0. \quad (9.9)$$

Воспользовавшись второй ф-лой (6.42), представив  $\text{rot } \mathbf{A}$  согласно (П1.37) и учтя, что  $\dot{A}_R$  и  $\dot{A}_\theta$  не зависят от координаты  $\psi$ , получим:

$$\dot{H}_{R1} = 0, \quad \dot{H}_{\theta 1} = 0, \quad \dot{H}_\psi = \frac{k^2 \dot{I}_{CT} l}{4\pi} e^{-ikR} \left[ \frac{i}{kR} + \frac{1}{(kR)^2} \right] \sin \theta. \quad (9.10)$$

Для определения  $\dot{\mathbf{E}}$  можно было бы воспользоваться первым соотношением (6.42). Однако при известном  $\dot{\mathbf{H}}$  проще найти  $\dot{\mathbf{E}}$  в области вне источника из первого уравнения Максвелла (6.5) (при  $\tilde{\mathbf{e}}_a = \mathbf{e}_a$ ):  $\dot{\mathbf{E}} = \text{rot } \dot{\mathbf{H}} / i\omega \mathbf{e}_a$ . Представив  $\text{rot } \dot{\mathbf{H}}$  согласно (П1.37) и воспользовавшись соотношениями (9.10), получим:

$$\left. \begin{aligned} \dot{E}_R &= \frac{k^3 \dot{I}_{CT} l}{2\pi\omega \mathbf{e}_a} e^{-ikR} \left[ \frac{1}{(kR)^2} - \frac{i}{(kR)^3} \right] \cos \theta; \\ \dot{E}_\theta &= \frac{k^3 \dot{I}_{CT} l}{4\pi\omega \mathbf{e}_a} e^{-ikR} \left[ \frac{i}{kR} + \frac{1}{(kR)^2} - \frac{i}{(kR)^3} \right] \sin \theta; \\ \dot{E}_\psi &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (9.11)$$

Электромагнитное поле (9.10), (9.11) не зависит от азимутального угла  $\psi$ , что является следствием осевой симметрии излучателя. Зависимость поля от координаты  $R$  точки наблюдения позволяет разбить окружающее излучатель пространство на три зоны — ближнюю, промежуточную и дальнюю. В ближней и дальней зонах справедливы более простые, но приближенные формулы для составляющих векторов поля (§ 9.4, 9.5). В промежуточной зоне, переходной между ближней и дальней зонами и характеризуемой условием  $kR \approx 1$ , должны учитываться все слагаемые в (9.10), (9.11), так как они имеют один порядок.

#### 9.4. ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЕ ПОЛЕ В БЛИЖНЕЙ ЗОНЕ

Ближняя зона, или зона индукции, характеризуется такими расстояниями  $R$  точки наблюдения от излучателя, для которых  $kR \ll 1$ . Конечно, одновременно  $R$  должно удовлетворять и условию  $l \ll R$ , при котором были получены исходные ф-лы (9.10), (9.11). Удерживая в каждой из этих формул лишь один член, содержащий  $1/kR$  в высшей степени, и используя справедливое при  $kR \ll 1$  приближенное соотношение  $e^{-ikR} \approx 1$ , имеем:

$$\dot{E}_R = -i \frac{\dot{I}_{CT} l \cos \theta}{2\pi\omega \mathbf{e}_a R^3}, \quad \dot{E}_\theta = -i \frac{\dot{I}_{CT} l \sin \theta}{4\pi\omega \mathbf{e}_a R^3}, \quad \dot{H}_\psi = \frac{\dot{I}_{CT} l \sin \theta}{4\pi R^2}. \quad (9.12)$$

Учитывая, что  $\dot{I}_{CT} = I_{CTm} e^{i\varphi}$ , и переходя от (9.12) к мгновенным значениям в соответствии с (3.56), получаем:

$$E_R(t) = \frac{\rho_{CT}(t) \cos \theta}{2\pi \mathbf{e}_a R^3}, \quad E_\theta(t) = \frac{\rho_{CT}(t) \sin \theta}{4\pi \mathbf{e}_a R^3}, \quad H_\psi(t) = \frac{i_{CT}(t) l \sin \theta}{4\pi R^2}, \quad (9.13)$$

где  $\rho_{CT}(t) = \frac{I_{CTm} l}{\omega} \sin(\omega t + \varphi)$  и  $i_{CT}(t) = I_{CTm} \cos(\omega t + \varphi)$  (см. § 9.2).

В ближней зоне электрическое поле определяется электрическим моментом диполя, магнитное поле — током. При этом векторы поля в точке наблюдения в момент времени  $t$  определяются значениями переменного электрического момента и тока в этот же момент времени. Таким образом, ближняя зона представляет собой область квазистационарного поля. Использованное нами приближенное соотношение  $e^{-ikR} \approx 1$  как раз и привело к пренебрежению временем запаздывания.

Из (9.13) следует, что вектор Пойнтинга в ближней зоне имеет две составляющие:  $\Pi_R = [\mathbf{E}_\theta \mathbf{H}_\psi] = R^0 \Pi_R$  и  $\Pi_\theta = [\mathbf{E}_R \mathbf{H}_\psi] = \theta^0 \Pi_\theta$ . Компоненты напряженности электрического поля (9.13) отстают по фазе от напряженности магнитного поля на  $\pi/2$  [ $\sin(\omega t + \varphi) = = \cos(\omega t + \varphi - \pi/2)$ ]. Вследствие этого обе составляющие вектора Пойнтинга изменяются во времени по закону  $\sin 2(\omega t + \varphi)$ , принимая как положительные, так и отрицательные мгновенные значения. При этом средние значения составляющих вектора Пойнтинга за период  $T$  равны нулю. Это означает, что движение энергии ближнего поля имеет колебательный характер — в течение четверти периода  $T$  энергия течет в одном направлении (положительные значения  $\Pi_R$  и  $\Pi_\theta$ ), в течение следующей четверти периода энергия течет в противоположном направлении, возвращается обратно (отрицательные значения  $\Pi_R$  и  $\Pi_\theta$ ). Таким образом, ближнее электромагнитное поле не участвует в процессе излучения. В § 9.5 будет показано, что излученные электромагнитные волны, которые уносят с собой от излучателя энергию, определяются другими членами ф-л (9.10), (9.11). Конечно, эти волны существуют и в ближней зоне, но здесь их поля весьма малы по сравнению с рассмотренными выше полями.

### 9.5. ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЕ ПОЛЕ В ДАЛЬНОЙ ЗОНЕ

Дальняя зона характеризуется такими расстояниями  $R$  точки наблюдения от излучателя, для которых  $kR \gg 1$ . Удерживая при этом в (9.10), (9.11) члены, содержащие  $1/kR$  в *низшей* степени, имеем:

$$\left. \begin{aligned} \dot{E}_R &= \frac{kI_{CT}l}{2\pi\omega\epsilon_a} \frac{e^{-ikR}}{R^2} \cos\theta, & \dot{E}_\theta &= i \frac{kI_{CT}l}{4\pi} Z_c \frac{e^{-ikR}}{R} \sin\theta, \\ \dot{H}_\psi &= i \frac{kI_{CT}l}{4\pi} \frac{e^{-ikR}}{R} \sin\theta, \end{aligned} \right\} (9.14)$$

где  $Z_c = k/\omega\epsilon_a = \sqrt{\mu_a/\epsilon_a}$  и измеряется в омах. Составляющая  $\dot{E}_R$  по порядку величины в  $kR$  раз меньше, чем  $\dot{E}_\theta$ , и в дальней зоне ею можно пренебречь по сравнению с  $\dot{E}_\theta$ .

Перейдя от (9.14) к мгновенным значениям, найдем:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(t) &= -\theta^0 \frac{kI_{CT}l}{4\pi R} Z_c \sin\theta \sin(\omega t - kR + \varphi), \\ \mathbf{H}(t) &= -\psi^0 \frac{kI_{CT}l}{4\pi R} \sin\theta \sin(\omega t - kR + \varphi). \end{aligned} \quad (9.15)$$

Согласно (9.15) в среде без потерь векторы  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  в любой точке дальней зоны имеют одинаковую фазу, в которую время  $t$  и расстояние  $R$  входят в виде *линейной комбинации*  $\omega t - kR = \omega(t - R/v)$ , где  $v = \omega/k = 1/\sqrt{\epsilon_a \mu_a}$ , м/с. Уравнение постоянных значений фазы имеет вид

$$t - R/v = C. \quad (9.16)$$

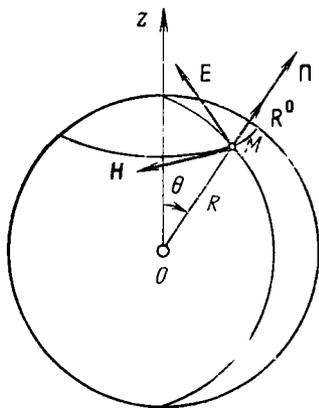


Рис. 9.6

Подставив в (9.16) два последовательных момента времени  $t_1$  и  $t_1 + \Delta t_1$ , получим  $t_1 - R_1/v = t_1 + \Delta t_1 - R_2/v$ , откуда  $R_2 = R_1 + v\Delta t_1$ . Это означает, что с увеличением времени  $t$  постоянное значение фазы поля (9.15) распространяется в направлении возрастающих значений  $R$  со скоростью  $v$  (ср. § 6.3). Таким образом, в дальней зоне распространяется монохроматическая электромагнитная волна в направлениях  $\mathbf{R}^0$ . Скорость  $v$  распространения фазы монохроматической волны называют *фазовой скоростью*.

Вектор  $\mathbf{E}(t)$  направлен по касательной к дуге меридиана,  $\mathbf{H}$  — по касательной к дуге параллели, причем  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{H}$  и направление распространения волны  $\mathbf{R}^0$  взаимно перпендикулярны и образуют правую ортогональную тройку векторов (рис. 9.6). При этом комплексные амплитуды  $\dot{\mathbf{E}} = \theta^0 \dot{E}_\theta$  и  $\dot{\mathbf{H}} = \psi^0 H_\psi$  (и мгновенные значения векторов  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$ ) связаны между собой соотношениями

$$\dot{\mathbf{H}} = \frac{1}{Z_c} [\mathbf{R}^0 \dot{\mathbf{E}}], \quad \dot{\mathbf{E}} = Z_c [\mathbf{H} \mathbf{R}^0]. \quad (9.17)$$

Вектор Пойнтинга в дальней зоне имеет только одну радиальную составляющую

$$\mathbf{P} = [\mathbf{E}\mathbf{H}] = E_\theta H_\psi [\theta^0 \psi^0] = Z_c H_\psi^2 \mathbf{R}^0 = \Pi_R \mathbf{R}^0, \quad (9.18)$$

причем ее мгновенное значение всегда оказывается положительным ( $\Pi_R = Z_c H_\psi^2 > 0$ ) вследствие того, что векторы  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  имеют *одинаковую* фазу колебаний. Это означает, что энергия движется в направлении радиусов только *от* излучателя. Она не возвращается обратно к излучателю и представляет собой энергию *излученной* электромагнитной волны.

С помощью (4.18) определим скорость движения этой энергии  $v_\Phi$ . Согласно (9.15) имеем  $\sqrt{\epsilon_a} E_\theta = \sqrt{\mu_a} H_\psi$ . При этом объемные плотности электрической и магнитной энергий волны равны друг другу:  $\omega'_\Phi = \frac{\epsilon_a E_\theta^2}{2} = \frac{\mu_a H_\psi^2}{2} = \omega'_M$  и  $\omega' = \omega'_\Phi + \omega'_M = \epsilon_a E_\theta^2 = \mu_a H_\psi^2$ . Соответственно получаем  $v_\Phi = \frac{\mathbf{P}}{\omega'} = \frac{Z_c}{\mu_a} \mathbf{R}^0 = \mathbf{v}$ , т. е. в

среде без потерь скорость переноса энергии совпадает с фазовой скоростью волны.

Электромагнитную волну, у которой фаза векторов  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  меняется от точки к точке в направлении распространения волны <sup>1)</sup> и которая переносит в пространстве энергию электромагнитного поля, называют *бегущей волной*. Формулы (9.15) определяют бегущую электромагнитную волну.

Отношение величин комплексных амплитуд векторов  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  бегущей волны, ориентированных перпендикулярно направлению ее распространения, есть постоянная величина, зависящая от параметров среды, измеряемая в омах и называемая *характеристическим сопротивлением волны*  $Z_c$ . Согласно (9.14) характеристическое сопротивление волны в среде без потерь есть вещественная величина:

$$Z_c = \dot{E}_0 / \dot{H}_\psi = \sqrt{\mu_a / \epsilon_a}, \quad (9.19)$$

причем в вакууме  $Z_c = \sqrt{\mu_0 / \epsilon_0} = 120 \pi$  Ом.

*Волновой поверхностью* (фронтом) монохроматической волны называют геометрическое место точек, в которых в фиксированный момент времени колебания вектора  $\mathbf{E}$  (и  $\mathbf{H}$ ) имеют одну и ту же фазу. Волновую поверхность называют также поверхностью постоянной фазы или эквифазной поверхностью.

В фиксированный момент времени  $t = t_1$  уравнение (9.16) переходит в уравнение  $R = R_1$  и, следовательно, определяет *сферическую* волновую поверхность с центром в середине излучателя. Таким образом, в дальней зоне поле представляет собой *сферические бегущие* электромагнитные волны, излученные элементарным излучателем, расходящиеся от него во все стороны вдоль радиусов  $R$  со скоростью  $v = 1 / \sqrt{\epsilon_a \mu_a}$  и удаляющиеся в бесконечность. Это поле называют *полем излучения*, а дальнюю зону называют также *зоной излучения* или *волновой зоной*.

Рассмотрим зависимость амплитуд векторов поля излучения от сферических координат  $R$ ,  $\theta$ ,  $\psi$  точки наблюдения. Согласно (9.15) амплитуды  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  изменяются *обратно пропорционально первой степени* расстояния  $R$ , т. е. значительно медленнее, чем в ближней зоне. Напомним, что убывание по закону  $1/R$  величин векторов поля сферических бегущих волн является следствием закона сохранения энергии для среды без потерь (см. § 5.2).

Входящая в выражения для амплитуд векторов поля излучения антенны функция угловых сферических координат  $f(\theta, \psi)$ , определяющая их зависимость от направления на точку наблюдения, носит название *амплитудной характеристики направленности*. Графическое изображение характеристики направленности называют диаграммой направленности.

<sup>1)</sup> Т. е. в выражение для фазы время  $t$  и некоторая пространственная координата  $l$  входят в виде линейной комбинации  $\omega t \pm kl$ .

Согласно (9.15) характеристика направленности элементарного электрического излучателя  $f(\theta, \psi) = \sin \theta$ . Она не зависит от азимутального угла  $\psi$  вследствие осевой симметрии излучателя и показывает, что его поле излучения максимально в экваториальной плоскости ( $\theta = \pi/2$ ) и равно нулю вдоль оси излучателя ( $\theta = 0, \theta = \pi$ ). В плоскости, которая проходит через ось излучателя, характеристика направленности, построенная в полярной системе

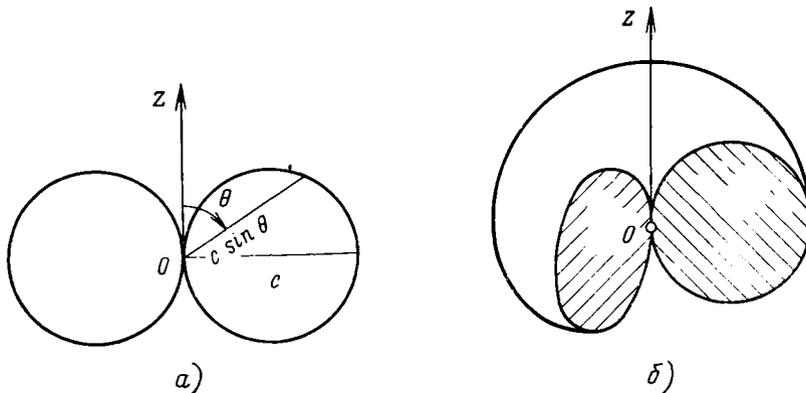


РИС. 9.7

координат, изображена на рис. 9.7а. (Уравнение  $\rho = \sin \theta$  в полярных координатах представляет собой две соприкасающиеся окружности.) Пространственная характеристика направленности есть тор, образованный вращением фигуры рис. 9.7а вокруг вертикальной оси (рис. 9.7б).

## 9.6. МОЩНОСТЬ ИЗЛУЧЕНИЯ, СОПРОТИВЛЕНИЕ ИЗЛУЧЕНИЯ

Среднее за период значение мощности, переносимой полем элементарного электрического излучателя, определяет соотношение

$$P_{\Sigma \text{ ср}} = \oint_S \mathbf{P}_{\text{ср}} d\mathbf{S}, \quad (9.20)$$

где  $\mathbf{P}_{\text{ср}} = \text{Re } \tilde{\mathbf{\Pi}} = \frac{1}{2} \text{Re} [\dot{\mathbf{E}} \dot{\mathbf{H}}^*]$  и интегрирование производится по произвольной замкнутой поверхности, окружающей излучатель.

Легко убедиться, что вещественная часть комплексного вектора Пойнтинга  $\tilde{\mathbf{\Pi}}$  обусловлена лишь теми членами ф-л (9.10), (9.11), которые изменяются обратно пропорционально первой степени  $R$  и определяют излученные электромагнитные волны. Следовательно, соотношение (9.20) определяет среднюю мощность, которую переносит *излученная* волна и которую называют поэтому *мощностью излучения*.

→ В соответствии с (9.19) и (9.14) имеем <

$$P_{\text{ср}} = \frac{1}{2} \operatorname{Re} [\dot{\mathbf{E}}_{\theta} \dot{\mathbf{H}}_{\psi}^*] = R_0 \frac{1}{2} Z_c |\dot{\mathbf{H}}_{\psi}|^2 = R^0 \frac{1}{2} Z_c \left( \frac{kI_{\text{сгм}} l \sin \theta}{4\pi R} \right)^2. \quad (9.21)$$

Отсюда следует, что в качестве поверхности  $S$  в (9.20) удобно выбрать сферическую поверхность с центром в середине излучателя, элемент площади которой  $dS = R^0 R^2 \sin \theta d\theta d\psi$ . Подставив (9.21) в (9.20) и учитывая, что  $k = 2\pi/\lambda$ , получим

$$P_{\Sigma \text{ ср}} = \frac{1}{2} \left( \frac{kI_{\text{сгм}} l}{4\pi R} \right)^2 Z_c R^2 \int_0^{2\pi} d\psi \int_0^{\pi} \sin^3 \theta d\theta = \frac{\pi}{3} I_{\text{сгм}}^2 Z_c \left( \frac{l}{\lambda} \right)^2. \quad (9.22)$$

Мощность излучения (9.22) возрастает с уменьшением длины волны  $\lambda$  (при этом должно сохраняться исходное условие  $l \ll \lambda$ ), т. е. с увеличением частоты колебаний.

Для сравнения различных излучателей в теории антенн используют понятие *сопротивления излучения*  $R_{\Sigma}$ , которое вводят соотношением, аналогичным закону Джоуля — Ленца:

$$P_{\Sigma \text{ ср}} = \frac{1}{2} I_{\text{сгм}}^2 R_{\Sigma}. \quad (9.23)$$

Сопротивление излучения пропорционально мощности излучения, но не зависит от величины тока в антенне. Очевидно, что при одинаковом токе большей мощностью излучения обладает та антенна, которая имеет большее сопротивление излучения.

Определим из (9.22) и (9.23) сопротивление излучения элементарного электрического излучателя:  $R_{\Sigma} = \frac{2}{3} \pi Z_c \left( \frac{l}{\lambda} \right)^2$ , где  $R_{\Sigma}$  дано в омах.

В вакууме  $Z_c = 120\pi$  Ом и соответственно  $P_{\Sigma \text{ ср}} = 10(kI_{\text{сгм}} l)^2$ ,  $R_{\Sigma} = 20(kl)^2$ .

## Глава 10

### ОБЩИЕ ПРИНЦИПЫ ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ. ЭЛЕМЕНТАРНЫЙ МАГНИТНЫЙ ИЗЛУЧАТЕЛЬ, ЭЛЕМЕНТ ГЮЙГЕНСА



#### 10.1. УРАВНЕНИЯ МАКСВЕЛЛА ПРИ НАЛИЧИИ ФИКТИВНЫХ МАГНИТНЫХ ТОКОВ И ЗАРЯДОВ

Если в некотором объеме  $V$  известна напряженность стороннего магнитного поля  $\mathbf{H}_{\text{сг}}$ , то она вводится во второе уравнение Максвелла подобно тому, как  $\mathbf{E}_{\text{сг}}$  вводится в первое уравнение

(ср. § 3.5):  $\text{rot } \mathbf{E} = -\mu_a \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} - \mu_a \frac{\partial \mathbf{H}_{\text{ст}}}{\partial t}$ . В этом случае первичное возбуждение электромагнитного поля вызывается известной в каждой точке объема  $V$  величиной  $\delta_{\text{ст.м}} = \mu_a \frac{\partial \mathbf{H}_{\text{ст}}}{\partial t}$ , которую по аналогии с плотностью стороннего электрического тока  $\delta_{\text{ст}}$  называют плотностью стороннего магнитного тока.

При возбуждении поля сторонними магнитными токами уравнения Максвелла для комплексных амплитуд (3.67) принимают вид:

$$\text{rot } \dot{\mathbf{H}} = i \omega \tilde{\epsilon}_a \dot{\mathbf{E}}, \quad \text{rot } \dot{\mathbf{E}} = -i \omega \mu_a \dot{\mathbf{H}} - \dot{\delta}_{\text{ст.м}}, \quad (10.1)$$

где  $\dot{\delta}_{\text{ст.м}} = i \omega \mu_a \dot{\mathbf{H}}_{\text{ст}}$  — комплексная амплитуда плотности стороннего магнитного тока. Согласно (10.1) единицей измерения  $\dot{\delta}_{\text{ст.м}}$  является В/м<sup>2</sup>.

Введение в уравнения электродинамики  $\dot{\delta}_{\text{ст.м}}$  сопровождается введением также объемной плотности сторонних магнитных зарядов  $\dot{\rho}_{\text{ст.м}}$ . Величины  $\dot{\delta}_{\text{ст.м}}$  и  $\dot{\rho}_{\text{ст.м}}$  связаны между собой «законом сохранения магнитного заряда», аналогичным первому соотношению (3.60):

$$\text{div } \dot{\delta}_{\text{ст.м}} = -i \omega \dot{\rho}_{\text{ст.м}}. \quad (10.2)$$

Согласно (10.2) единицей измерения  $\dot{\rho}_{\text{ст.м}}$  служит В·с/м<sup>3</sup> = Вб/м<sup>3</sup>.

Напомним, что в природе не существует магнитных зарядов и магнитного тока, представляющего собой упорядоченное движение этих зарядов. Поэтому ф-лу (10.2) следует рассматривать как результат *формального* введения в теорию фиктивных магнитных зарядов и обусловленных ими *фиктивных* магнитных токов, благодаря которому приобретает бóльшую гибкость в описании магнитных полей.

Например, нам задана  $\dot{\mathbf{H}}_{\text{ст}}$  в некоторой ограниченной области  $V$  (вне этой области  $\dot{\mathbf{H}}_{\text{ст}} = 0$ ). Конечно, реально существующее магнитное поле продолжается и за границей этой области, причем векторные линии  $\mathbf{B}$  непрерывны ( $\text{div } \mathbf{B} = 0$ ). Однако мы формально считаем, что линии магнитного поля  $\dot{\mathbf{B}}_{\text{ст}} = \mu_a \dot{\mathbf{H}}_{\text{ст}}$  и соответственно линии  $\dot{\delta}_{\text{ст.м}}$  обрываются на *воображаемых* поверхностных магнитных зарядах, распределенных на границе объема  $V$  (вне объема  $V$   $\dot{\mathbf{B}}_{\text{ст}} = 0$  и  $\dot{\delta}_{\text{ст.м}} = 0$ ).

Применяя операцию дивергенции ко второму ур-нию (10.1) и учитывая (10.2), получаем аналог ур-ния (3.65) для магнитного поля:

$$\text{div } (\mu_a \dot{\mathbf{H}}) = \dot{\rho}_{\text{ст.м}}, \quad (10.3)$$

согласно которому фиктивные сторонние магнитные заряды являются *воображаемыми* истоками рассматриваемого магнитного поля.

Формальное введение в уравнения Максвелла фиктивных магнитных токов и зарядов является весьма удобным приемом в тех

случаях, когда решение этих уравнений с фиктивными магнитными источниками поля проще, чем решение уравнений, содержащих реально существующие электрические токи и заряды. Например, поле элементарной рамки с электрическим током легче определить, вводя эквивалентные фиктивные магнитные источники, чем рассматривая непосредственно контур с электрическим током (см. § 10.3).

Если монохроматическое поле обусловлено электрическими токами и фиктивными магнитными токами, то оно удовлетворяет симметричным уравнениям Максвелла следующего вида:

$$\operatorname{rot} \dot{\mathbf{H}} = i\omega \tilde{\epsilon}_a \dot{\mathbf{E}} + \dot{\delta}_{\text{ст}}, \quad \operatorname{rot} \dot{\mathbf{E}} = -i\omega \mu_a \dot{\mathbf{H}} - \dot{\delta}_{\text{ст.м}}. \quad (10.4)$$

Благодаря линейности ур-ний (10.4) можно воспользоваться принципом суперпозиции и искать их решение в виде сумм  $\dot{\mathbf{E}} = \dot{\mathbf{E}}_1 + \dot{\mathbf{E}}_2$ ,  $\dot{\mathbf{H}} = \dot{\mathbf{H}}_1 + \dot{\mathbf{H}}_2$ , где поле  $\dot{\mathbf{E}}_1$ ,  $\dot{\mathbf{H}}_1$  удовлетворяет ур-ниям (3.67) и обусловлено электрическим током, поле  $\dot{\mathbf{E}}_2$ ,  $\dot{\mathbf{H}}_2$  удовлетворяет ур-ниям (10.1) и обусловлено фиктивным магнитным током.

## 10.2. ПРИНЦИП ПЕРЕСТАНОВОЧНОЙ ДВОЙСТВЕННОСТИ УРАВНЕНИЙ МАКСВЕЛЛА

Легко проверить, что перестановка

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &\rightarrow \dot{\mathbf{H}}, & \tilde{\epsilon}_a &\rightarrow \mu_a, & \dot{\delta}_{\text{ст}} &\rightarrow \dot{\delta}_{\text{ст.м}}, \\ \dot{\mathbf{H}} &\rightarrow -\dot{\mathbf{E}}, & \mu_a &\rightarrow \tilde{\epsilon}_a, & \dot{\delta}_{\text{ст.м}} &\rightarrow -\dot{\delta}_{\text{ст}} \end{aligned} \quad (10.5)$$

преобразует систему ур-ний (3.67) в систему (10.1) и наоборот, а также не нарушает условий на бесконечности (5.13) или (5.17), которым должны удовлетворять решения этих систем в случае внешних задач<sup>1)</sup>.

Отсюда следует важный вывод. Достаточно знать решение системы (3.67), удовлетворяющее заданному распределению электрического тока  $\dot{\delta}_{\text{ст}}$ , чтобы одновременно иметь решение и системы (10.1), удовлетворяющее аналогичному распределению магнитного тока. Для этого необходимо только в известном решении ур-ний (3.67) произвести перестановку (10.5). Конечно, решение системы (10.1) можно получить из решения системы (3.67) только в том случае, если в обеих задачах одинакова форма поверхности  $S$ , на которой заданы граничные условия, и если перестановка (10.5) преобразует граничные условия при системе (3.67) в граничные условия при системе (10.1). Это требование, в частности, выполняется для граничных условий (3.70). Точно так же известное решение системы (10.1) позволяет получить при помощи перестановки (10.5) соответствующее решение системы (3.67).

Этот прием перехода от системы (3.67) и ее решения к системе (10.1) и ее решению или наоборот называют *принципом перестановочной двойственности* уравнений Максвелла. Этот принцип

<sup>1)</sup> Отметим, что существуют и другие формы записи перестановки (10.5).

широко используется при решении различных задач и имеет большое практическое значение.

В § 6.4 отмечалось, что в однородной среде с  $\sigma > 0$  решение системы уравнений (3.67) выражается через векторный потенциал электрического тока  $\mathbf{A}$ -лами (6.42) и (6.39), в которых заменены  $\epsilon_a$  на  $\tilde{\epsilon}_a$  и  $k^2 = \omega^2 \epsilon_a \mu_a$  на  $\tilde{k}^2 = \omega^2 \tilde{\epsilon}_a \mu_a$ . Произведя в этих формулах перестановку (10.5), получим выражения для поля магнитных токов в однородной среде, удовлетворяющего системе (10.1):

$$\dot{\mathbf{E}} = -\frac{1}{\tilde{\epsilon}_a} \operatorname{rot} \dot{\mathbf{A}}_M, \quad \dot{\mathbf{H}} = -\frac{i\omega}{\tilde{k}^2} (\operatorname{grad} \operatorname{div} \dot{\mathbf{A}}_M + \tilde{k}^2 \dot{\mathbf{A}}_M), \quad (10.6)$$

где  $\dot{\mathbf{A}}_M$  — векторный потенциал магнитного тока, определяемый из дифференциального уравнения

$$\nabla^2 \dot{\mathbf{A}}_M + \tilde{k}^2 \dot{\mathbf{A}}_M = -\tilde{\epsilon}_a \dot{\mathbf{j}}_{\text{ст.м}}. \quad (10.7)$$

Решение уравнения (10.7) в безграничной среде для случая распределения магнитных токов в конечном объеме  $V$  можно получить, производя перестановку (10.5) в ф-ле (6.44) и заменяя  $k$  на  $\tilde{k}$ :

$$\dot{\mathbf{A}}_M = \frac{\tilde{\epsilon}_a}{4\pi} \int_V \frac{\dot{\mathbf{j}}_{\text{ст.м}} e^{-i\tilde{k}r} dV}{r}. \quad (10.8)$$

В однородной среде решение системы (10.4) согласно принципу суперпозиции выражается суммой полей (6.42) (при замене  $k^2$  на  $\tilde{k}^2$ ) и (10.6):

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{E}} &= -\frac{i\omega}{\tilde{k}^2} (\operatorname{grad} \operatorname{div} \dot{\mathbf{A}} + \tilde{k}^2 \dot{\mathbf{A}}) - \frac{1}{\tilde{\epsilon}_a} \operatorname{rot} \dot{\mathbf{A}}_M; \\ \dot{\mathbf{H}} &= \frac{1}{\mu_a} \operatorname{rot} \dot{\mathbf{A}} - \frac{i\omega}{\tilde{k}^2} (\operatorname{grad} \operatorname{div} \dot{\mathbf{A}}_M + \tilde{k}^2 \dot{\mathbf{A}}_M). \end{aligned} \quad (10.9)$$

### 10.3. ПОЛЕ ИЗЛУЧЕНИЯ ЭЛЕМЕНТАРНОГО МАГНИТНОГО ИЗЛУЧАТЕЛЯ

Если в определении элементарного электрического излучателя (см. § 9.2) заменить элемент электрического тока элементом фиктивного магнитного тока, то мы придем к понятию элементарного магнитного излучателя. Этот воображаемый излучатель характеризуется соотношениями (9.1) — (9.4), в которых электрический ток и заряды заменены фиктивными магнитными током и зарядами, изменяющимися по гармоническим законам.

Поле, которое создает элементарный магнитный излучатель в безграничной однородной среде без потерь, проще всего найти с помощью принципа перестановочной двойственности, позволяющего сразу перейти от известного нам поля элементарного электрического излучателя к искомому полю. Если элементарный магнитный излучатель расположить в сферической системе координат таким же образом, как ранее был расположен элементарный элек-

трический излучатель (см. рис. 9.5), то для этого перехода достаточно произвести перестановку (10.5) (при  $\tilde{\epsilon}_a = \epsilon_a$ ) в формулах для комплексных амплитуд векторов поля, полученных в § 9.3—9.5. Замена  $\delta_{ст} \rightarrow \delta_{ст.м}$  сводится в этих формулах к замене  $I_{ст} \rightarrow I_{ст.м}$ .

Ограничимся далее выражениями для поля элементарного магнитного излучателя в дальней зоне. Производя в (9.14) указанную перестановку и пренебрегая компонентой  $\dot{H}_R$  по сравнению с  $\dot{H}_\theta$ , получим:

$$\begin{aligned} \dot{E}_\psi &= -i \frac{k I_{ст.м} l}{4\pi} \frac{e^{-ikR}}{R} \sin \theta, \quad \dot{H}_\theta = \frac{i k^2 I_{ст.м} l}{4\pi \omega \mu_a} \frac{e^{-ikR}}{R} \sin \theta = \\ &= i \frac{k I_{ст.м} l}{4\pi Z_c} \frac{e^{-ikR}}{R} \sin \theta, \end{aligned} \quad (10.10)$$

где  $Z_c = \omega \mu_a / k = \sqrt{\mu_a / \epsilon_a}$  и выражается в омах.

Перейдем от (10.10) к мгновенным значениям:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(t) &= \psi^0 \frac{k I_{ст.м} m l}{4\pi R} \sin \theta \sin(\omega t - kR + \varphi_m); \\ \mathbf{H}(t) &= -\theta^0 \frac{k I_{ст.м} m l}{4\pi R Z_c} \sin \theta \sin(\omega t - kR + \varphi_m). \end{aligned} \quad (10.11)$$

По своей структуре ф-лы (10.11) аналогичны (9.15). Поэтому отмеченные в § 9.5 особенности поля излучения электрического излучателя полностью присущи и полю излучения (10.11) элементарного магнитного излучателя. Различие между этими полями состоит в разной ориентировке в пространстве векторов  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$ , которая следует из перестановки (10.5), — ср. рис. 9.6 и рис. 10.1, иллюстрирующий соотношения (10.11).

Допустим, что элементарный магнитный излучатель физически представляет собой малый цилиндрический объем  $V = lS$ , в пределах которого создана напряженность стороннего магнитного поля, направленная вдоль его длины ( $\dot{\mathbf{H}}_{ст} = I^0 \dot{\mathbf{H}}_{ст}$ ) и равномерно распределенная по площади поперечного сечения  $S$ . В этом случае при учете соотношения  $\delta_{ст.м} = i\omega \mu_a \dot{\mathbf{H}}_{ст}$  имеем

$$I_{ст.м} l = \delta_{ст.м} S l = i\omega \mu_a \dot{\mathbf{H}}_{ст} l S. \quad (10.12)$$

Поскольку вне объема  $V$  напряженность  $\dot{\mathbf{H}}_{ст} = 0$ , то касательная к цилиндрической поверхности объема  $V$  составляющая  $\dot{H}_{ст\tau}$  при переходе через эту поверхность претерпевает скачкообразное изменение (внутри  $V$   $\dot{H}_{ст1\tau} = \dot{H}_{ст}$ , вне  $V$   $\dot{H}_{ст2\tau} = 0$ ). Это изменение идентично поведению касательной составляющей  $\mathbf{H}$  при переходе через поверхность идеального проводника (см. § 3.10) и возможно только при существовании на цилиндрической поверхности объема  $V$  поверхностного стороннего электрического тока, плотность которого  $\dot{\eta}_{ст}$  связана с  $\dot{\mathbf{H}}_{ст1\tau} = \dot{\mathbf{H}}_{ст}$  соотношением вида (3.52):  $[\dot{\mathbf{H}}_{ст} \mathbf{n}^0_{21}] = \dot{\eta}_{ст}$ . Согласно последней формуле векторные линии

$\eta_{ст}$  образуют окружности на этой цилиндрической поверхности (рис. 10.2), причем  $\eta_{ст} = H_{ст}$  и, следовательно,  $H_{ст}l = \eta_{ст}l = I_{ст}$ , где  $I_{ст}$  — комплексная амплитуда стороннего замкнутого электрического тока, текущего по поверхности цилиндра. Подставив последнее

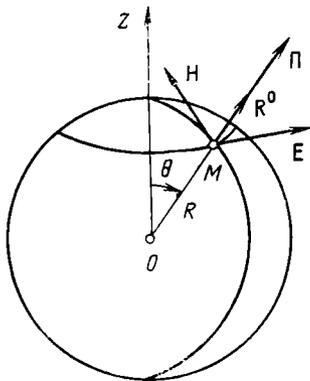


РИС. 10.1

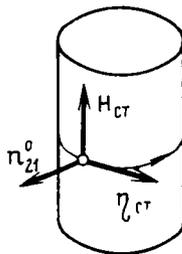


РИС. 10.2

равенство в (10.12), найдем связь между параметрами замкнутого поверхностного электрического тока и эквивалентного ему элементарного магнитного излучателя:

$$I_{ст.эл}l = i\omega\mu_a J_{ст}S, \quad (10.13)$$

где  $S$  — площадь, ограниченная замкнутым электрическим током.

В реальных условиях такой ток можно имитировать, выполнив на цилиндрической поверхности спиральную катушку из тонкого провода с малым шагом витков и подведя к получившейся катушке гармонический электрический ток. Для обеспечения во всех витках синфазного и равноамплитудного тока полная длина провода должна быть значительно меньше длины волны  $\lambda$ . При этом можно считать, что  $I_{ст} = NI'_{ст}$ , где  $N$  — общее число витков;  $I'_{ст}$  — ток в одном витке.

Простейший физически осуществимой моделью элементарного магнитного излучателя является плоская проводящая рамка (одиночный виток провода) с электрическим линейным гармоническим током, периметр которой весьма мал по сравнению с длиной волны  $\lambda$  создаваемого ею поля. Такой излучатель называют элементарной электрической рамкой. Очевидно, что эквивалентный такой рамке фиктивный элементарный магнитный излучатель ориентирован перпендикулярно плоскости рамки. Следовательно, при расположении элементарного магнитного излучателя в центре сферической системы координат вдоль полярной оси  $Oz$  элементарная электрическая рамка должна лежать в экваториальной плоскости  $\theta = \pi/2$  (см. рис. 10.1).

Подставив в (10.10) соотношение (10.13) и введя обозначение  $l_{\text{экв}} = kS$ , получим для элементарной электрической рамки ( $N=1$ ,  $I'_{\text{ст}} = I_{\text{ст}}$ ):

$$\begin{aligned} \dot{E}_{\psi} &= \frac{kI_{\text{ст}}S\omega\mu_a}{4\pi} \frac{e^{-ikR}}{R} \sin\theta = \frac{kI_{\text{ст}}l_{\text{экв}}}{4\pi} Z_c \frac{e^{-ikR}}{R} \sin\theta, \\ \dot{H}_{\theta} &= -\frac{kI_{\text{ст}}l_{\text{экв}}}{4\pi} \frac{e^{-ikR}}{R} \sin\theta. \end{aligned} \quad (10.14)$$

Из сходства ф-л (9.14) и (10.14) следует, что мощность излучения электрической рамки определяется ф-лой вида (9.22)  $R_{\Sigma_{\text{ср}}} = \frac{\pi}{3} I_{\text{ст}}^2 Z_c \left(\frac{l_{\text{экв}}}{\lambda}\right)^2$ . Вводя соотношением (9.23) сопротивление излучения  $R_{\Sigma_{\text{р}}}$  электрической рамки, получаем  $R_{\Sigma_{\text{р}}} = \frac{2}{3} \pi Z_c \left(\frac{l_{\text{экв}}}{\lambda}\right)^2$ .

Для сравнения излучающей способности элементарных электрических излучателя и рамки найдем отношение их сопротивлений излучения  $R_{\Sigma}/R_{\Sigma_{\text{р}}} = (l/l_{\text{экв}})^2$ . Полагая, что электрическая рамка круглая и имеет радиус  $a$  ( $l_{\text{экв}} = kS = k\pi a^2$ ) и что линейные размеры обоих излучателей одинаковы ( $l=2a$ ), получаем  $R_{\Sigma}/R_{\Sigma_{\text{р}}} = (4/\pi kl)^2 \gg 1$ . Таким образом, излучающая способность элементарного электрического излучателя (разомкнутая система) значительно больше, чем элементарной рамки (замкнутая система). Разомкнутые системы излучают более эффективно.

#### 10.4. ЛЕММА ЛОРЕНЦА. ТЕОРЕМА ВЗАИМНОСТИ

В электродинамике важную роль играет лемма Лоренца, которая устанавливает связь между векторами двух монохроматических электромагнитных полей одной и той же частоты  $\omega$  и возбуждающими их сторонними токами.

Пусть в изотропной линейной среде существуют сторонние токи, характеризующиеся плотностями  $\delta_{\text{ст}1}$  и  $\delta_{\text{ст}2}$ . Возбуждаемое ими поле  $\mathbf{E}_1$ ,  $\mathbf{H}_1$  удовлетворяет уравнениям (10.4):

$$\text{rot } \mathbf{H}_1 = i\omega \tilde{\epsilon}_a \mathbf{E}_1 + \dot{\delta}_{\text{ст}1}; \quad (10.15)$$

$$\text{rot } \mathbf{E}_1 = -i\omega\mu_a \mathbf{H}_1 - \dot{\delta}_{\text{ст}2}. \quad (10.16)$$

Таким же уравнениям удовлетворяет поле  $\mathbf{E}_2$ ,  $\mathbf{H}_2$ , возбуждаемое сторонними токами  $\delta_{\text{ст}2}$ ,  $\delta_{\text{ст}1}$ :

$$\text{rot } \mathbf{H}_2 = i\omega \tilde{\epsilon}_a \mathbf{E}_2 + \dot{\delta}_{\text{ст}2}; \quad (10.17)$$

$$\text{rot } \mathbf{E}_2 = -i\omega\mu_a \mathbf{H}_2 - \dot{\delta}_{\text{ст}1}. \quad (10.18)$$

Умножим (10.18) скалярно на  $\mathbf{H}_1$ , а (10.15) — на  $\mathbf{E}_2$  и вычтем из первого результата второй:

$$\mathbf{H}_1 \text{ rot } \mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_2 \text{ rot } \mathbf{H}_1 = -i\omega\mu_a \mathbf{H}_1 \mathbf{H}_2 - i\omega \tilde{\epsilon}_a \mathbf{E}_1 \mathbf{E}_2 - \dot{\delta}_{\text{ст}2} \mathbf{H}_1 - \dot{\delta}_{\text{ст}1} \mathbf{E}_2. \quad (10.19)$$

Умножим (10.16) скалярно на  $\dot{\mathbf{H}}_2$ , а (10.17) — на  $\dot{\mathbf{E}}_1$  и вновь вычтем из первого результата второй:

$$\dot{\mathbf{H}}_2 \operatorname{rot} \dot{\mathbf{E}}_1 - \dot{\mathbf{E}}_1 \operatorname{rot} \dot{\mathbf{H}}_2 = -i\omega\mu_a \dot{\mathbf{H}}_1 \dot{\mathbf{H}}_2 - i\omega \tilde{\epsilon}_a \dot{\mathbf{E}}_1 \dot{\mathbf{E}}_2 - \dot{\delta}_{\text{ст.м1}} \dot{\mathbf{H}}_2 - \dot{\delta}_{\text{ст.2}} \dot{\mathbf{E}}_1. \quad (10.20)$$

С помощью (П1.16) преобразуем левые части двух последних выражений и вычтем из (10.20) ур-ние (10.19):

$$\operatorname{div} [\dot{\mathbf{E}}_1 \dot{\mathbf{H}}_2] - \operatorname{div} [\dot{\mathbf{E}}_2 \dot{\mathbf{H}}_1] = \dot{\delta}_{\text{ст1}} \dot{\mathbf{E}}_2 - \dot{\delta}_{\text{ст2}} \dot{\mathbf{E}}_1 + \dot{\delta}_{\text{ст.м2}} \dot{\mathbf{H}}_1 - \dot{\delta}_{\text{ст.м1}} \dot{\mathbf{H}}_2. \quad (10.21)$$

Соотношение (10.21) представляет собой *лемму Лоренца в дифференциальной форме*. Проинтегрировав (10.21) по произвольному объему  $V$ , ограниченному поверхностью  $S$ , и преобразовав согласно (П1.5) объемный интеграл слева в поверхностный, получаем *лемму Лоренца в интегральной форме*:

$$\oint_S \{[\dot{\mathbf{E}}_1 \dot{\mathbf{H}}_2] - [\dot{\mathbf{E}}_2 \dot{\mathbf{H}}_1]\} \mathbf{n}^0 dS = \int_V (\dot{\delta}_{\text{ст1}} \dot{\mathbf{E}}_2 - \dot{\delta}_{\text{ст2}} \dot{\mathbf{E}}_1 + \dot{\delta}_{\text{ст.м2}} \dot{\mathbf{H}}_1 - \dot{\delta}_{\text{ст.м1}} \dot{\mathbf{H}}_2) dV. \quad (10.22)$$

Здесь  $\mathbf{n}^0$  — внешняя нормаль к  $S$ , направленная наружу по отношению к  $V$ .

Если источники обоих полей распределены в *конечной* области  $V$  и лемма (10.22) применяется ко всему бесконечному пространству, ограниченному поверхностью сферы  $S_\infty$  с радиусом  $R \rightarrow \infty$ , то поверхностный интеграл обращается в нуль и лемма Лоренца принимает следующий вид:

$$\int_V (\dot{\delta}_{\text{ст1}} \dot{\mathbf{E}}_2 - \dot{\delta}_{\text{ст2}} \dot{\mathbf{E}}_1 + \dot{\delta}_{\text{ст.м2}} \dot{\mathbf{H}}_1 - \dot{\delta}_{\text{ст.м1}} \dot{\mathbf{H}}_2) dV = 0. \quad (10.23)$$

Интегрирование производится только по объему  $V$ , так как вне этого объема сторонние токи отсутствуют.

Для доказательства равенства

$$\oint_{S_\infty} \{[\dot{\mathbf{E}}_1 \dot{\mathbf{H}}_2] - [\dot{\mathbf{E}}_2 \dot{\mathbf{H}}_1]\} R^0 dS = \oint_{S_\infty} \{\dot{\mathbf{E}}_1 [\dot{\mathbf{H}}_2 R^0] - \dot{\mathbf{E}}_2 [\dot{\mathbf{H}}_1 R^0]\} R^2 d\Omega = 0 \quad (10.24)$$

в среде без потерь учтем, что оба поля удовлетворяют на бесконечности условиям излучения (5.13). Выразив при  $R \rightarrow \infty$  произведение  $[\dot{\mathbf{H}} R^0] R$  из (5.13а) и учтя (5.13б), легко обнаружить, что подинтегральное выражение в (10.24) обращается в нуль. В среде с потерями выполняются условия (5.17) и равенство (10.24) следует из оценок вида (5.19).

Лемма Лоренца (10.22) принимает вид (10.23) и в том случае, когда объем  $V$  ограничен замкнутой идеально проводящей поверхностью. На этой поверхности в соответствии с (3.71) имеем  $[\dot{\mathbf{E}} \mathbf{n}^0] = 0$  и подинтегральное выражение в поверхностном интеграле согласно (П1.3) вновь обращается в нуль.

Пусть источники каждого из полей  $\dot{\delta}_{\text{ст1}}$ ,  $\dot{\delta}_{\text{ст.м1}}$  и  $\dot{\delta}_{\text{ст2}}$ ,  $\dot{\delta}_{\text{ст.м2}}$  распределены соответственно в объемах  $V_1$  и  $V_2$  области  $V$ . При этом выражение (10.23) можно переписать следующим образом:

$$\int_{V_1} (\dot{\delta}_{\text{ст1}} \dot{\mathbf{E}}_2 - \dot{\delta}_{\text{ст.м1}} \dot{\mathbf{H}}_2) dV = \int_{V_2} (\dot{\delta}_{\text{ст2}} \dot{\mathbf{E}}_1 - \dot{\delta}_{\text{ст.м2}} \dot{\mathbf{H}}_1) dV. \quad (10.25)$$

Здесь  $\dot{\mathbf{E}}_1, \dot{\mathbf{H}}_1$  — векторы поля, создаваемого в объеме  $V_2$  токами  $\dot{\mathbf{d}}_{ст1}, \dot{\mathbf{d}}_{ст.м1}$ ;  $\mathbf{E}_2, \mathbf{H}_2$  — векторы поля, создаваемого в объеме  $V_1$  токами  $\dot{\mathbf{d}}_{ст2}, \dot{\mathbf{d}}_{ст.м2}$ .

Вытекающее из леммы Лоренца соотношение (10.25) имеет большое практическое значение и представляет собой наиболее общую формулировку *теоремы взаимности*. Из нее следует, что если распределения токов  $\dot{\mathbf{d}}_{ст1}, \dot{\mathbf{d}}_{ст.м1}$  в объеме  $V_1$  и  $\dot{\mathbf{d}}_{ст2}, \dot{\mathbf{d}}_{ст.м2}$  в объеме  $V_2$  совершенно одинаковы, то одинаковы и фигурирующие в (10.25) поля  $\dot{\mathbf{E}}_1, \dot{\mathbf{H}}_1$  и  $\mathbf{E}_2, \mathbf{H}_2$ , создаваемые этими токами. Таким образом в изотропных средах между двумя произвольными областями  $V_1$  и  $V_2$  в двух взаимно обратных направлениях условия распространения электромагнитного поля одинаковы.

При решении задач электродинамики лемму Лоренца и теорему взаимности часто используют следующим образом. Одно из полей в приведенных выше формулах отождествляют с искомым, другое поле искусственно вводят как вспомогательное. Вспомогательным может служить любое поле, удовлетворяющее уравнениям (10.4). В качестве него удобно выбрать поле элементарного электрического или магнитного излучателя, которое позволяет упростить лемму Лоренца или теорему взаимности и определить искомое поле. Это вспомогательное поле называют векторной функцией Грина.

## 10.5. ТЕОРЕМА ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ

Пусть произвольная замкнутая поверхность  $S$  разделяет все бесконечное пространство на две области  $V_0$  и  $V'$ . Требуется найти электромагнитное поле  $\mathbf{E}, \mathbf{H}$  в области  $V_0$ , которая заполнена изотропной линейной средой, причем все источники этого поля  $\dot{\mathbf{d}}_{ст}, \dot{\mathbf{d}}_{ст.м}$  находятся в некотором конечном объеме области  $V'$ . Распределение источников поля может быть неизвестным, но предполагаются известными значения касательных составляющих создаваемого ими поля  $\dot{\mathbf{E}}_\tau, \dot{\mathbf{H}}_\tau$  на поверхности  $S$ . Сформулированная задача может быть внешней (область  $V_0$  ограничена изнутри поверхностью  $S$ ) и внутренней (область  $V_0$  ограничена снаружи поверхностью  $S$ ). Приведенных выше данных согласно теореме единственности заведомо достаточно для определения поля  $\mathbf{E}, \mathbf{H}$  в области  $V_0$  (за исключением случая внутренней задачи, среды без потерь и совпадения частоты с одной из резонансных).

Чтобы воспользоваться этими данными для определения поля в области  $V_0$ , применим следующий искусственный прием. Поскольку реально существующее в области  $V'$  поле нас не интересует, заменим действительные источники поля  $\mathbf{E}, \mathbf{H}$  воображаемыми, которые распределены таким образом, что создаваемое ими поле  $\dot{\mathbf{E}}', \dot{\mathbf{H}}'$  равно нулю в области  $V'$  и совпадает с искомым полем  $\mathbf{E}, \mathbf{H}$  в области  $V_0$ . При этом на поверхности  $S$  касательные составляющие

щие воображаемого поля  $\dot{\mathbf{E}}'$ ,  $\dot{\mathbf{H}}'$  претерпевают скачкообразные изменения. Скачкообразное изменение при переходе через поверхность  $S$  касательной составляющей вектора  $\dot{\mathbf{H}}'$  ( $\dot{\mathbf{H}}'_\tau = \dot{\mathbf{H}}_\tau$  со стороны области  $V_0$ ,  $\dot{\mathbf{H}}'_\tau = 0$  со стороны области  $V'$ ) возможно только при существовании на  $S$  воображаемого поверхностного электрического тока, плотность которого определяется соотношением вида (3.71)

$$\dot{\eta}_{\text{ЭК}} = [\dot{\mathbf{H}}_\tau \mathbf{n}^0] = [\dot{\mathbf{H}} \mathbf{n}^0], \quad (10.26)$$

где  $\mathbf{n}^0$  — внешняя относительно  $V_0$  нормаль к  $S$ .

Точно так же скачкообразное изменение на поверхности  $S$  касательной составляющей  $\dot{\mathbf{E}}'$  ( $\dot{\mathbf{E}}'_\tau = \dot{\mathbf{E}}_\tau$  со стороны  $V_0$ ,  $\dot{\mathbf{E}}'_\tau = 0$  со стороны  $V'$ ) возможно только при существовании на  $S$  воображаемого поверхностного магнитного тока, формула для плотности которого получается из (10.26) с помощью принципа перестановочной двойственности:

$$\dot{\eta}_{\text{ЭК.М}} = [\mathbf{n}^0 \dot{\mathbf{E}}_\tau] = [\mathbf{n}^0 \dot{\mathbf{E}}]. \quad (10.27)$$

В (10.26) и (10.27) учтено, что векторные произведения  $[\dot{\mathbf{H}} \mathbf{n}^0]$  и  $[\mathbf{n}^0 \dot{\mathbf{E}}]$  определяются только касательными составляющими поля  $\dot{\mathbf{E}}_\tau$  и  $\dot{\mathbf{H}}_\tau$ .

Источники, распределенные на поверхности  $S$  с плотностями (10.26), (10.27), создают на этой поверхности со стороны области  $V_0$  касательные составляющие  $\dot{\mathbf{E}}_\tau$ ,  $\dot{\mathbf{H}}_\tau$ . Следовательно, при определении поля  $\dot{\mathbf{E}}$ ,  $\dot{\mathbf{H}}$  в области  $V_0$  его действительные источники, распределенные с плотностями  $\dot{\mathbf{b}}_{\text{СТ}}$  и  $\dot{\mathbf{b}}_{\text{СТ.М}}$  вне этой области, могут быть изменены эквивалентными им воображаемыми поверхностными электрическим и магнитным токами, которые распределены с плотностями (10.26), (10.27) на поверхности  $S$ , ограничивающей область  $V_0$ . Это утверждение и представляет собой *теорему эквивалентных токов* или, более кратко, *теорему эквивалентности*.

Если среда в области  $V_0$  однородна, то при определении в  $V_0$  поля  $\dot{\mathbf{E}}$ ,  $\dot{\mathbf{H}}$  по эквивалентным токам  $\eta_{\text{ЭК}}$ ,  $\eta_{\text{ЭК.М}}$  можно считать все бесконечное пространство  $V_0 + V'$  заполненным этой средой. Реально существующие в области  $V'$  неоднородности роли не играют, так как поле  $\dot{\mathbf{E}}$ ,  $\dot{\mathbf{H}}$  в  $V'$  равно нулю. Таким образом, приходим к задаче об определении в бесконечной однородной среде электромагнитного поля, которое создается эквивалентными поверхностными токами, распределенными с плотностями  $\eta_{\text{ЭК}}$  и  $\eta_{\text{ЭК.М}}$  на поверхности  $S$ . Это поле выражается через векторные потенциалы соотношениями (10.9). Потенциалы  $\dot{\mathbf{A}}$  и  $\dot{\mathbf{A}}_{\text{М}}$  определяются теперь вместо объемных интегралов вида (6.44) и (10.8) поверхностными интегралами, поскольку поверхностные токи можно рассматривать как предельный случай объемных. Например, в обла-

сти  $V_0$  для однородной среды без потерь ( $\sigma=0$ ) имеем:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{E}} &= -\frac{i\omega}{k^2} (\text{grad div } \dot{\mathbf{A}} + k^2 \dot{\mathbf{A}}) - \frac{1}{\varepsilon_a} \text{rot } \dot{\mathbf{A}}_{\mathbf{M}}, \\ \dot{\mathbf{H}} &= \frac{1}{\mu_a} \text{rot } \dot{\mathbf{A}} - \frac{i\omega}{k^2} (\text{grad div } \dot{\mathbf{A}}_{\mathbf{M}} + k^2 \dot{\mathbf{A}}_{\mathbf{M}}),\end{aligned}\quad (10.28)$$

где

$$\dot{\mathbf{A}} = \frac{\mu_a}{4\pi} \oint_S \dot{\eta}_{\text{ЭК}} \frac{e^{-ikr}}{r} dS, \quad \dot{\mathbf{A}}_{\mathbf{M}} = \frac{\varepsilon_a}{4\pi} \oint_S \dot{\eta}_{\text{ЭК.М}} \frac{e^{-ikr}}{r} dS. \quad (10.29)$$

Принципиальное затруднение при использовании строгих ф-л (10.28), (10.29) состоит в том, что в большинстве задач точные значения  $\dot{\mathbf{E}}_{\tau}$  и  $\dot{\mathbf{H}}_{\tau}$  на поверхности  $S$  неизвестны. В самом деле, эти значения могли бы быть известными лишь в случае уже имеющегося точного решения поставленной задачи. Поэтому для определения на  $S$  значений  $\dot{\mathbf{E}}_{\tau}$  и  $\dot{\mathbf{H}}_{\tau}$  обычно применяют приближенные методы, основанные на идеях Гюйгенса и Кирхгофа (см. § 15.6).

#### 10.6. ПРИНЦИП ГЮЙГЕНСА — ФРЕНЕЛЯ. ЭЛЕМЕНТ ГЮЙГЕНСА

Пусть, например, сторонние источники  $\dot{\delta}_{\text{СТ}}$ ,  $\dot{\delta}_{\text{СТ.М}}$  распределены в конечной области  $V$  безграничной изотропной линейной однородной среды без потерь ( $\sigma=0$ ) и требуется найти создаваемое ими поле  $\dot{\mathbf{E}}$ ,  $\dot{\mathbf{H}}$  вне области расположения этих источников. Это поле определяется соотношениями (10.9)

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{E}} &= -\frac{i\omega}{k^2} (\text{grad div } \dot{\mathbf{A}} + k^2 \dot{\mathbf{A}}) - \frac{1}{\varepsilon_a} \text{rot } \dot{\mathbf{A}}_{\mathbf{M}}, \\ \dot{\mathbf{H}} &= \frac{1}{\mu_a} \text{rot } \dot{\mathbf{A}} - \frac{i\omega}{k^2} (\text{grad div } \dot{\mathbf{A}}_{\mathbf{M}} + k^2 \dot{\mathbf{A}}_{\mathbf{M}}),\end{aligned}\quad (10.30)$$

в которых согласно (6.44) и (10.8)

$$\dot{\mathbf{A}} = \frac{\mu_a}{4\pi} \int_V \dot{\delta}_{\text{СТ}} \frac{e^{-ikr}}{r} dV, \quad \dot{\mathbf{A}}_{\mathbf{M}} = \frac{\varepsilon_a}{4\pi} \int_V \dot{\delta}_{\text{СТ.М}} \frac{e^{-ikr}}{r} dV. \quad (10.31)$$

С другой стороны, поле  $\dot{\mathbf{E}}$ ,  $\dot{\mathbf{H}}$  может быть найдено с помощью (10.28), (10.29), где  $S$  — произвольная замкнутая поверхность, отделяющая область  $V_0$ , в которой определяется поле, от сторонних источников.

Поскольку в (10.30), (10.31) дифференцирование проводится по координатам точки наблюдения, а интегрирование — по координатам точек сторонних источников, то возможно изменение очередности этих операций. При этом каждый элемент объема  $V$  характеризуется векторными потенциалами

$$d\dot{\mathbf{A}} = \frac{\mu_a}{4\pi} \dot{\delta}_{\text{СТ}} \frac{e^{-ikr}}{r} dV, \quad d\dot{\mathbf{A}}_{\mathbf{M}} = \frac{\varepsilon_a}{4\pi} \dot{\delta}_{\text{СТ.М}} \frac{e^{-ikr}}{r} dV$$

и создает согласно (10.30) в точке наблюдения элементарную сферическую волну с векторами  $d\mathbf{E}$ ,  $d\mathbf{H}$ . Соответственно полное поле в точке наблюдения является результатом суперпозиции всех элементарных сферических волн, которые создаются в этой точке сторонними источниками, распределенными с плотностями  $\delta_{\text{ст}}$  и  $\delta'_{\text{ст.м}}$  в объеме  $V$ :  $\mathbf{E} = \int_V d\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{H} = \int_V d\mathbf{H}$  (ср. § 6.3).

Соотношения (10.28), (10.29) также допускают изменение очередности операций дифференцирования и интегрирования и аналогичную интерпретацию: поле в некоторой точке однородной области  $V_0$ , свободной от источников и ограниченной произвольной замкнутой поверхностью  $S$ , можно рассматривать как результат суперпозиции элементарных *вторичных* сферических волн, которые создаются в этой точке вторичными *фиктивными* источниками, распределенными с плотностями  $\eta_{\text{эк}}$  и  $\eta_{\text{эк.м}}$  на поверхности  $S$ . Плотности поверхностных фиктивных токов (источников) определяются в соответствии с (10.26), (10.27) значениями векторов электромагнитного поля на поверхности  $S$ .

Эта интерпретация, тесно связанная с рассмотренной в § 1.05 теоремой эквивалентности, и является, по существу, формулировкой *принципа Гюйгенса — Френеля*, согласно которому каждый элемент произвольной замкнутой поверхности, окружающей источники поля, можно рассматривать как вторичный источник, порождающий элементарную вторичную волну, а поле в точке наблюдения — как суперпозицию этих элементарных вторичных волн.

При решении внешних задач с помощью ф-л (10.28), (10.29) часто удобно совмещать поверхность  $S$ , окружающую источники поля, с волновой поверхностью этого поля. Это объясняется тем, что во многих практически важных случаях касательные к волновой поверхности составляющие  $\mathbf{E}_\tau$  и  $\mathbf{H}_\tau$  поля (которые определяют  $\eta_{\text{эк}}$  и  $\eta_{\text{эк.м}}$ ) можно считать связанными между собой таким же простым соотношением, каким связаны векторы поля в дальней зоне [формулы вида (9.17)], т. е. можно полагать их взаимно перпендикулярными и отличающимися друг от друга по величине на постоянный множитель  $Z'_c$ :

$$\mathbf{H}_\tau = \frac{1}{Z'_c} [\mathbf{N}^0 \mathbf{E}_\tau], \quad (10.32)$$

где  $\mathbf{N}^0$  — орт в направлении распространения поля.

При достаточном удалении точки наблюдения от поверхности  $S$ , совмещенной с волновой поверхностью, отмеченная выше осуществимость перестановки операций интегрирования и дифференцирования может облегчить определение поля. Действительно, пусть заранее найдено элементарное поле  $d\mathbf{E}$ ,  $d\mathbf{H}$ , создаваемое в удаленной точке наблюдения элементом  $dS$  волновой поверхности. Тогда поле в точке наблюдения, обусловленное всей поверхностью  $S$ , можно определить, вычислив интегралы по этой поверхности от известного элементарного поля.

Элементом Гюйгенса называют элемент  $dS$  волновой поверхности бегущей волны, линейные размеры которого много меньше  $\lambda$ , который можно считать плоским и в пределах которого касательные составляющие  $\dot{\mathbf{E}}_\tau$  и  $\dot{\mathbf{H}}_\tau$  поля, связанные соотношением (10.32), сохраняют постоянные значения.

Совместим начало декартовой системы координат  $O$  с центром прямоугольного элемента Гюйгенса, стороны и площадь которого равны  $dx$ ,  $dy$  и  $dS = dx dy$  и в пределах которого  $\dot{\mathbf{E}}_\tau$  параллельна оси  $x$ ,  $\dot{\mathbf{H}}_\tau$  — оси  $y$ . Пусть ось  $Oz$  направлена в сторону распространения волны ( $z^0 = N^0$ ). Если при этом, например,  $\dot{\mathbf{E}}_\tau = -x^0 \dot{E}_x$ , то согласно (10.32)  $\dot{\mathbf{H}}_\tau = -y^0 \dot{H}_y$  и  $H_y = \dot{E}_x / Z'_c$ . При определении поля элемента Гюйгенса в полупространстве  $z > 0$  можно в соответствии с теоремой эквивалентности заменить касательные составляющие  $\dot{\mathbf{E}}_\tau$ ,  $\dot{\mathbf{H}}_\tau$  плотностями поверхностных эквивалентных токов  $\dot{\eta}_{\text{ЭК.М}}$ ,  $\dot{\eta}_{\text{ЭК}}$  и найти создаваемое ими электромагнитное поле. При учете (10.26), (10.27) и  $\mathbf{n}^0 = -z^0$  имеем:

$$\dot{\eta}_{\text{ЭК}} = x^0 \dot{H}_y = x^0 \frac{\dot{E}_x}{Z'_c}, \quad \dot{\eta}_{\text{ЭК.М}} = y^0 \dot{E}_x. \quad (10.33)$$

Отсюда следует, что комплексные амплитуды эквивалентных электрического и магнитного токов на  $dS$  равны соответственно

$\dot{I}_{\text{ЭК}} = \dot{\eta}_{\text{ЭК}} dy = \frac{\dot{E}_x}{Z'_c} dy$  и  $\dot{I}_{\text{ЭК.М}} = \dot{\eta}_{\text{ЭК.М}} dx = \dot{E}_x dx$ . Элемент электрического тока  $\dot{I}_{\text{ЭК}}$  длиной  $l_\partial = dy$  и элемент магнитного тока  $\dot{I}_{\text{ЭК.М}}$  длиной  $l_{\text{М}} = dx$  можно рассматривать как эквивалентные элементарные электрический и магнитный излучатели. Таким образом, элемент

Гюйгенса можно представить как совокупность взаимно перпендикулярных элементарных электрического и магнитного излучателей, моменты эквивалентных токов которых соответственно равны:

$$\dot{I}_{\text{ЭК}} l_\partial = \dot{\eta}_{\text{ЭК}} dy dx = x^0 \frac{\dot{E}_x dS}{Z'_c},$$

$$\dot{I}_{\text{ЭК.М}} l_{\text{М}} = \dot{\eta}_{\text{ЭК.М}} dx dy = y^0 \dot{E}_x dS. \quad (10.34)$$

Ограничимся определением поля элемента Гюйгенса в дальней зоне, т. е. на расстояниях  $R$ , для которых выполняется условие  $kR \gg 1$ . Это поле проще всего найти суммированием в дальней зоне уже известных полей элементарных электрического и магнитного излучателей.

Введем сферическую систему координат, полярная ось которой совмещена с осью  $Oz$  декартовой системы и азимутальный угол  $\psi$  отсчитывается от меридиональной полуплоскости, совмещенной с  $xOz$  (рис. 10.3). Поле, создаваемое в произвольной точке наблюдения  $M(R, \theta, \psi)$  ориентированным вдоль оси  $x$  элементарным электрическим излучателем, можно определить суммированием полей двух элементарных излучателей, один из которых лежит в меридиональной полуплоскости, проходящей через точку наблюде-

ния  $M$ , и имеет момент тока  $I_{\text{ЭК}} l'_3 = r^0 I_{\text{ЭК}} l_3 \cos \psi$ , а другой перпендикулярен этой полуплоскости и имеет момент тока  $I_{\text{ЭК}} l''_3 = -\psi^0 I_{\text{ЭК}} l_3 \sin \psi$ . Первый излучатель создает в точке  $M$  составляющую  $dE_{\theta^0}$ , которая согласно (9.14) и (10.34) определяется выражением

$$dE_{\theta^0} = -i \frac{k I_{\text{ЭК}} l'_3}{4\pi} Z_c \frac{e^{-ikR}}{R} \cos \theta = -i \frac{k E_x dS}{4\pi} \frac{Z_c}{Z_c'} \cos \psi \cos \theta \frac{e^{-ikR}}{R}. \quad (10.35)$$

При получении (10.35) учтено, что в (9.14) угол  $\theta$  отсчитывается от оси излучателя, а в (10.35) — от перпендикуляра к этой оси (см. рис. 10.3) и что орты  $\theta^0$  в координатных системах, соответствующих ф-лам (9.14) и (10.35), имеют в точке  $M$  противоположные направления.

Проходящая через точку  $M$  меридиональная полуплоскость совпадает с экваториальной плоскостью второго элементарного излучателя, имеющего момент тока  $I_3 l''_3$ . Этот излучатель создает в

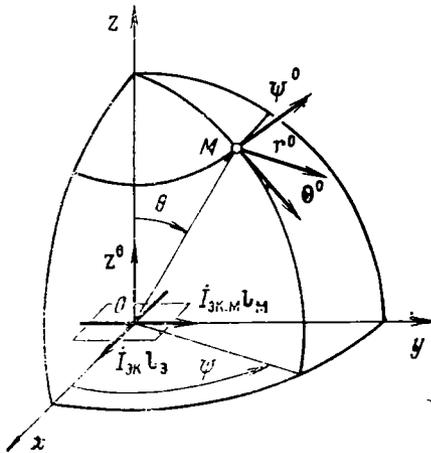


РИС. 10.3

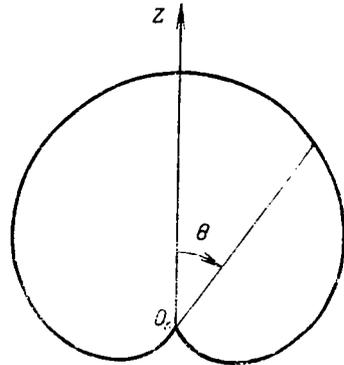


РИС. 10.4

точке  $M$  составляющую  $dE_{\psi^0}$ , причем орт  $\psi^0$  в системе координат рис. 10.3 и орт  $\theta^0$  в системе координат, соответствующей ф-ле (9.14), имеют в точке  $M$  одно и то же направление. Подставив в (9.14)  $\sin \theta = 1$  (экваториальная плоскость) и заменив  $\theta^0$  на  $\psi^0$ , получим с учетом (10.34) для рассматриваемого электрического излучателя следующее выражение в точке  $M$ :

$$dE_{\psi^0} = i \frac{k I_{\text{ЭК}} l''_3}{4\pi} Z_c \frac{e^{-ikR}}{R} = i \frac{k E_x dS}{4\pi} \frac{Z_c}{Z_c'} \sin \psi \frac{e^{-ikR}}{R}. \quad (10.36)$$

Определяя аналогичным путем напряженность электрического поля, которую создает в точке наблюдения  $M$  ( $R, \theta, \psi$ ) элементарный магнитный излучатель, ориентированный вдоль оси  $y$ , полу-

чим при помощи (10.10) и (10.34) соотношения:

$$d\dot{E}_{\theta m} = -i \frac{k\dot{E}_x dS}{4\pi} \cos \psi \frac{e^{-ikR}}{R}, \quad d\dot{E}_{\psi m} = i \frac{k\dot{E}_x dS}{4\pi} \sin \psi \cos \theta \frac{e^{-ikR}}{R}. \quad (10.37)$$

Выражение для комплексной амплитуды  $d\dot{E}$  элемента Гюйгенса в дальней зоне легко получить, подставив (10.35)—(10.37) в соотношение  $d\dot{E} = \theta^0(d\dot{E}_{\theta \text{э}} + d\dot{E}_{\theta m}) + \psi^0(d\dot{E}_{\psi \text{э}} + d\dot{E}_{\psi m})$ . Если аналогичным образом определить в дальней зоне комплексную амплитуду  $d\dot{H}$  элемента Гюйгенса, то нетрудно убедиться, что  $d\dot{E}$  и  $d\dot{H}$  связаны между собой соотношениями (9.17). Поэтому, зная  $d\dot{E}$ , легко определить и  $d\dot{H}$ .

В дальней зоне электромагнитному полю элемента Гюйгенса присущи все основные особенности поля излучения элементарных излучателей. Это поле представляет собой вторичные сферические бегущие волны, расходящиеся в полупространстве  $z > 0$  от элемента Гюйгенса вдоль радиусов  $R$  в бесконечность со скоростью  $v = 1/\sqrt{\epsilon_a \mu_a}$  и убывающие по амплитуде по закону  $1/R$ . Его называют *полем излучения* элемента Гюйгенса.

Определим характеристику направленности элемента Гюйгенса для случая  $Z'_c = Z_c$ . Перейдя в этом случае от комплексных амплитуд (10.35)—(10.37) к мгновенным значениям, получим:

$$\left. \begin{aligned} dE_{\theta}(t) &= dE_{\theta \text{э}}(t) + dE_{\theta m}(t) = \frac{k}{4\pi R} E_{xm} dS \cos \psi (1 + \cos \theta) \sin(\omega t - kR + \varphi); \\ dE_{\psi}(t) &= dE_{\psi \text{э}}(t) + dE_{\psi m}(t) = -\frac{k}{4\pi R} E_{xm} dS \sin \psi (1 + \cos \theta) \sin(\omega t - kR + \varphi). \end{aligned} \right\} \quad (10.38)$$

Из (10.38) следует, что при  $Z'_c = Z_c$  величина *результатирующего* вектора  $dE$  не зависит от азимутального угла  $\psi$ :

$$dE(t) = \sqrt{dE_{\theta}^2 + dE_{\psi}^2} = \frac{k}{4\pi R} E_{xm} dS (1 + \cos \theta) \sin(\omega t - kR + \varphi). \quad (10.39)$$

Следовательно, амплитудная характеристика направленности, определяющая изменение амплитуды результирующего вектора  $dE$ , одинакова во всех меридиональных полуплоскостях и выражается формулой  $f(\theta, \psi) = 1 + \cos \theta$ , которая является уравнением кардиоиды (рис. 10.4). Пространственная характеристика направленности представляет собой тело вращения кардиоиды рис. 10.4 вокруг оси  $Oz$ .

**ОДНОРОДНЫЕ ПЛОСКИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ВОЛНЫ  
В БЕЗГРАНИЧНОЙ ИЗОТРОПНОЙ СРЕДЕ**



**11.1. ОДНОРОДНАЯ ПЛОСКАЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНАЯ ВОЛНА**

Изучение однородных плоских волн имеет важное значение, так как реально существующие поля излучения антенн во многих практических задачах могут быть с достаточной точностью заменены этими волнами.

Монохроматическую электромагнитную волну, волновые (эквивалентные) поверхности которой представляют собой параллельные друг другу плоскости, называют *плоской волной*. Плоскую волну, во всех точках каждой волновой поверхности которой вектор  $\mathbf{E}$  (и вектор  $\mathbf{H}$ ) имеет одно и то же значение амплитуды и одно и то же направление, называют *однородной плоской волной*. Поскольку у однородной плоской волны векторы поля одинаковы во всех точках каждой плоской волновой поверхности, то они вообще не зависят от координат этих плоскостей. Поэтому если эти плоскости параллельны, например плоскости  $xOy$ , то однородная плоская волна характеризуется соотношениями

$$\frac{\partial \dot{\mathbf{E}}}{\partial x} = \frac{\partial \dot{\mathbf{E}}}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \dot{\mathbf{H}}}{\partial x} = \frac{\partial \dot{\mathbf{H}}}{\partial y} = 0. \quad (11.1)$$

Если излученные некоторой антенной в однородной среде волны рассматривать в ограниченной области пространства, линейные размеры которой  $a$ ,  $b$  и  $c$  весьма малы по сравнению с расстоянием  $OO' = R$  до антенны (рис. 11.1) и велики по сравнению с длиной волны  $\lambda$ , то можно с хорошим приближением считать их однородными плоскими волнами. Действительно, при условиях

$$a \ll R, \quad b \ll R, \quad c \ll R \quad (11.2)$$

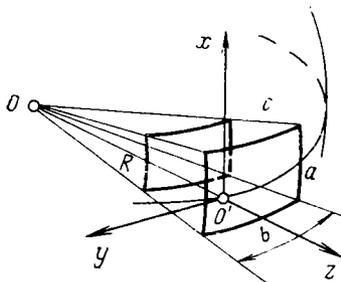


РИС. 11.1

можно в пределах указанной области с достаточной точностью заменить участки сферических (или более сложной формы) волновых поверхностей участками параллельных плоскостей. Зависимость амплитуд векторов поля излучения антенны от сферических координат  $R$ ,  $\theta$ ,  $\psi$  точки наблюдения определяется функцией  $f(\theta, \psi)/R$ , где  $f(\theta, \psi)$  — амплитудная характеристика направленности. При условиях (11.2) координаты  $R$ ,  $\theta$ ,  $\psi$  точек наблюдения в рассматриваемой области изменяются

весьма незначительно и можно приближенно полагать, что функция  $f(\theta, \psi)/R = \text{const}$ . Таким образом, в пределах этой области векторы поля излучения можно считать одинаковыми во всех точках каждой плоской волновой поверхности. Если расстояние до антенны  $R \gg \lambda$ , то всегда можно выбрать рассматриваемую область с такими линейными размерами, которые и удовлетворяют условиям (11.2) и оказываются велики по сравнению с  $\lambda$ .

Если в каждой достаточно малой области пространства, которая, однако, велика по сравнению с длиной волны  $\lambda$ , некоторую электромагнитную волну можно рассматривать как плоскую и однородную, то ее называют *локально плоской волной*. Практически для этого необходимо, чтобы радиусы кривизны волновой поверхности были много больше длины волны. Поле излучения антенны является примером локально плоской волны.

## 11.2. ОДНОРОДНАЯ ПЛОСКАЯ ВОЛНА В СРЕДЕ БЕЗ ПОТЕРЬ

Из § 11.1 следует, что векторы  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$  однородной плоской волны удовлетворяют уравнениям Максвелла без сторонних источников. Поэтому в однородной среде без потерь  $\vec{E}$  можно определить из системы ур-ний (6.10) с вещественным волновым числом  $k = \omega \sqrt{\epsilon_a \mu_a}$ , а  $\vec{H}$  — из ур-ния (6.11).

Разложив векторное уравнение Гельмгольца (6.10) в прямоугольной системе координат с помощью (П1.39) и учтя затем справедливые для однородной плоской волны соотношения (11.1), получим:

$$\frac{d^2 \dot{E}_x}{dz^2} + k^2 \dot{E}_x = 0, \quad \frac{d^2 \dot{E}_y}{dz^2} + k^2 \dot{E}_y = 0, \quad \frac{d^2 \dot{E}_z}{dz^2} + k^2 \dot{E}_z = 0. \quad (11.3)$$

Поскольку в однородной плоской волне составляющие  $\vec{E}$  могут зависеть только от одной координаты, перпендикулярной плоским волновым поверхностям, то в (11.3) частные производные заменены полными.

Второе ур-ние (6.10) согласно (П1.28) и (11.1) принимает вид  $d\dot{E}_z/dz = 0$ . Из этого уравнения и третьего ур-ния (11.3) следует, что  $\dot{E}_z = 0$ .

Дифференциальные уравнения второго порядка для  $\dot{E}_x$  и  $\dot{E}_y$  (11.3) имеют общие решения:

$$\dot{E}_x = \dot{A}_0 e^{-ikz} + \dot{B}_0 e^{ikz}, \quad \dot{E}_y = \dot{C}_0 e^{-ikz} + \dot{D}_0 e^{ikz}, \quad (11.4)$$

где  $\dot{A}_0, \dot{B}_0, \dot{C}_0, \dot{D}_0$  — произвольные постоянные интегрирования, представляющие собой комплексные амплитуды при  $z=0$  (например,  $\dot{A}_0 = A_m e^{i\varphi_A}$ ).

Заменив векторное ур-ние (6.11) с помощью (П1.29) тремя скалярными уравнениями, определим составляющие  $\vec{H}$ :

$$\left. \begin{aligned} \dot{H}_x &= \frac{1}{i\omega\mu_a} \frac{\partial \dot{E}_y}{\partial z} = \frac{1}{Z_c} (-\dot{C}_0 e^{-ikz} + \dot{D}_0 e^{ikz}); \\ \dot{H}_y &= -\frac{1}{i\omega\mu_a} \frac{\partial \dot{E}_x}{\partial z} = \frac{1}{Z_c} (\dot{A}_0 e^{-ikz} - \dot{B}_0 e^{ikz}); \\ \dot{H}_z &= -\frac{1}{i\omega\mu_a} \left( \frac{\partial \dot{E}_y}{\partial x} - \frac{\partial \dot{E}_x}{\partial y} \right) = 0, \end{aligned} \right\} (11.5)$$

где  $Z_c = \sqrt{\mu_a/\epsilon_a}$  — характеристическое сопротивление волны в среде без потерь.

Перейдя от комплексных амплитуд (11.4), (11.5) к мгновенным значениям, найдем:

$$\mathbf{E}_x = x^0 (E_{x+} + E_{x-}) = \mathbf{E}_{x+} + \mathbf{E}_{x-}, \quad \mathbf{H}_y = y^0 \left( \frac{E_{x+}}{Z_c} - \frac{E_{x-}}{Z_c} \right) = \mathbf{H}_{y+} + \mathbf{H}_{y-}, \quad (11.6)$$

где

$$\begin{aligned} E_{x+} &= A_m \cos(\omega t - kz + \varphi_A), \quad E_{x-} = B_m \cos(\omega t + kz + \varphi_B); \\ \mathbf{E}_y &= y^0 (E_{y+} + E_{y-}) = \mathbf{E}_{y+} + \mathbf{E}_{y-}, \quad \mathbf{H}_x = x^0 \left( -\frac{E_{y+}}{Z_c} + \frac{E_{y-}}{Z_c} \right) = \\ &= \mathbf{H}_{x+} + \mathbf{H}_{x-}, \end{aligned} \quad (11.7)$$

где

$$\begin{aligned} E_{y+} &= C_m \cos(\omega t - kz + \varphi_C), \quad E_{y-} = D_m \cos(\omega t + kz + \varphi_D); \\ \mathbf{E}_z &= 0, \quad \mathbf{H}_z = 0. \end{aligned} \quad (11.8)$$

Электромагнитное поле (11.6)—(11.8) представляет собой суперпозицию четырех не зависящих друг от друга бегущих волн, определяемых соответственно векторами  $\mathbf{E}_{x+}$  и  $\mathbf{H}_{y+}$ ,  $\mathbf{E}_{x-}$  и  $\mathbf{H}_{y-}$ ,  $\mathbf{E}_{y+}$  и  $\mathbf{H}_{x+}$ ,  $\mathbf{E}_{y-}$  и  $\mathbf{H}_{x-}$ . Две волны, снабженные индексом «+», распространяются в направлении *возрастающих* значений координаты  $z$  с фазовой скоростью  $v = \omega/k = 1/\sqrt{\epsilon_a \mu_a}$  и имеют плоские волновые поверхности  $z = \text{const}$  (ср. § 9.5). Две другие волны, снабженные индексом «-», распространяются в направлении *убывающих* значений  $z$  с фазовой скоростью  $v = \omega/k$ . Действительно, уравнение постоянных значений фазы этих волн  $\omega t + kz = \text{const}$  при увеличении времени  $t$  удовлетворяется убывающими значениями  $z$ .

Однородные плоские бегущие волны (11.6)—(11.8) распространяются вдоль декартовой координаты (ось  $z$ ), перпендикулярной их волновым плоскостям. Согласно (11.8) векторы  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  этих волн лежат в волновых плоскостях и представляют собой *поперечные* составляющие векторов поля по отношению к направлению распространения. Электромагнитную волну, имеющую только поперечные составляющие векторов  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$ , называют *поперечной электромагнитной волной* или волной Т<sup>1)</sup>.

<sup>1)</sup> От латинского слова transversus — поперечный.

Многие отмеченные в § 9.5 особенности сферических бегущих электромагнитных волн присущи также и каждой из четырех однородных плоских бегущих волн, которые определяются соотношениями (11.6)—(11.8) и могут рассматриваться как предельный случай в среде без потерь сферических бегущих волн. В частности, у каждой из этих волн напряженности  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{H}$  и направление распространения волны  $s^0$  (равное  $+z^0$  или  $-z^0$ ), взаимно перпендикулярны и образуют первую ортогональную тройку векторов:

$$\mathbf{H} = \frac{1}{Z_c} [\mathbf{s}^0 \mathbf{E}], \quad \mathbf{E} = Z_c [\mathbf{H} \mathbf{s}^0]. \quad (11.9)$$

Векторы  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  каждой волны отличаются друг от друга по величине в  $Z_c = \sqrt{\mu_a/\epsilon_a}$  раз и колеблются в одинаковой фазе. При этом вектор Пойнтинга  $\mathbf{\Pi} = [\mathbf{E} \mathbf{H}]$  каждой волны всегда направлен в сторону ее движения. Таким же образом, как в § 9.5, легко убедиться, что в среде без потерь объемные плотности электрической

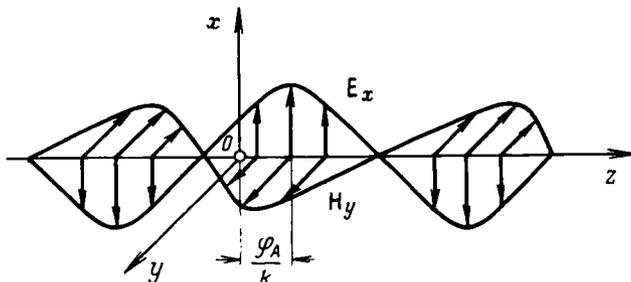


РИС. 11.2

и магнитной энергий однородной плоской бегущей волны равны друг другу и скорость переноса энергии волной совпадает с ее фазовой скоростью ( $v_g = v$ ).

В практических задачах источники волн часто локализованы в одной области пространства. Если, например, считать, что они расположены где-то в области больших отрицательных значений  $z$ , то в общем решении должны быть оставлены лишь волны, бегущие от источников и распространяющиеся в направлении  $+z^0$ . Структура поля в среде без потерь такой однородной плоской волны, определяемой согласно (11.6)—(11.8) векторами

$$\mathbf{E}_x(t) = x^0 A_m \cos(\omega t - kz + \varphi_A), \quad \mathbf{H}_y(t) = y^0 \frac{A_m}{Z_c} \cos(\omega t - kz + \varphi_A), \quad (11.10)$$

приведена для фиксированного момента времени  $t=0$  на рис. 11.2. С течением времени эта картина перемещается в направлении возрастающих значений  $z$  со скоростью  $v = \omega/k = 1/\sqrt{\epsilon_a \mu_a}$ .

Структура поля другой волны:

$$\mathbf{E}_y(t) = y^0 C_m \cos(\omega t - kz + \varphi_C), \quad \mathbf{H}_x(t) = -x^0 \frac{C_m}{Z_c} \cos(\omega t - kz + \varphi_C) \quad (11.11)$$

— аналогична приведенной на рис. 11.2.

Результирующая однородная плоская волна, распространяющаяся в направлении  $+z^0$ , представляет собой сумму волн (11.10) и (11.11) и будет рассмотрена в гл. 12.

### 11.3. ОДНОРОДНАЯ ПЛОСКАЯ ВОЛНА В СРЕДЕ С ПОТЕРЯМИ

В безграничной однородной среде с электрическими потерями ( $\sigma > 0$ ) векторы  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  однородной плоской волны удовлетворяют уравнениям (6.10), (6.11). Поэтому относящиеся к среде с потерями результаты можно сразу получить из соответствующих формул в комплексной форме для среды без потерь путем замены в них  $\epsilon_a$  на  $\tilde{\epsilon}_a$ .

Если, например, ограничиться только волнами, распространяющимися в направлении  $+z^0$ , то на основании (11.4), (11.5) можно сразу написать:

$$\begin{aligned} \dot{E}_x = \dot{A}_0 e^{-\gamma z}, \quad \dot{H}_y = \frac{\dot{A}_0}{Z_c} e^{-\gamma z}, \quad \dot{E}_y = \dot{C}_0 e^{-\gamma z}, \quad \dot{H}_x = -\frac{\dot{C}_0 e^{-\gamma z}}{Z_c}, \\ \dot{E}_z = 0, \quad \dot{H}_z = 0. \end{aligned} \quad (11.12)$$

В этих формулах введено обозначение

$$\gamma = i\tilde{k} = i\omega \sqrt{\tilde{\epsilon}_a \mu_a} = i\omega \sqrt{\epsilon_a \mu_a (1 - i \operatorname{tg} \delta)}, \quad (11.13)$$

где  $\operatorname{tg} \delta = \sigma / \omega \epsilon_a$  — тангенс угла диэлектрических потерь (3.69). Определяемую ф-лой (11.13) комплексную величину  $\gamma$  называют *коэффициентом распространения* и представляют в виде суммы вещественной и мнимой частей:

$$\gamma = \alpha + i\beta. \quad (11.14)$$

Характеристическое сопротивление волны в среде с потерями является комплексной величиной:

$$Z_c = \sqrt{\frac{\mu_a}{\tilde{\epsilon}_a}} = \sqrt{\frac{\mu_a}{\epsilon_a (1 - i \operatorname{tg} \delta)}} = |Z_c| e^{i\psi}, \quad (11.15)$$

где

$$|Z_c| = \sqrt{\frac{\mu_a}{\epsilon_a \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \delta}}} = \sqrt{\frac{\mu_a \cos \delta}{\epsilon_a}}, \quad \psi = \frac{1}{2} \operatorname{arc} \operatorname{tg} (\operatorname{tg} \delta) = \frac{\delta}{2}.$$

При увеличении  $\sigma$  в интервале  $0 \leq \sigma \leq \infty$  соответственно имеем:  $0 \leq \delta \leq \pi/2$ ,  $0 \leq \psi \leq \pi/4$  и  $\sqrt{\mu_a / \epsilon_a} \geq |Z_c| \geq 0$ .

Подставив (11.14), (11.15), например, в первых два соотношения (11.12), имеем:

$$\dot{E}_x = A_m e^{-\alpha z} e^{-i\beta z + i\varphi_A}, \quad \dot{H}_y = \frac{A_m}{|Z_c|} e^{-\alpha z} e^{-i\beta z + i\varphi_A - i\delta/2}. \quad (11.16)$$

Перейдя от комплексных амплитуд (11.16) к мгновенным значениям, получим:

$$\mathbf{E}_x(t) = x^0 A_m e^{-\alpha z} \cos(\omega t - \beta z + \varphi_A),$$

$$\mathbf{H}_y(t) = \mathbf{y}^0 \frac{A_m}{|Z_c|} e^{-\alpha z} \cos(\omega t - \beta z + \varphi_A - \delta/2). \quad (11.17)$$

Формулы (11.17) определяют однородную плоскую волну, распространяющуюся в направлении возрастающих значений  $z$  с фазовой скоростью  $v = \omega/\beta$  (ср. § 11.2). Из (11.17) следует, что в среде с потерями амплитуды векторов поля однородной плоской волны затухают в направлении распространения по экспоненциальному закону:  $E_m(z) = A_m e^{-\alpha z}$ ,  $H_m(z) = \frac{A_m}{|Z_c|} e^{-\alpha z}$ . Это затухание обусловлено постепенным поглощением электромагнитной энергии, вызванным необратимым преобразованием ее в тепло, и характеризуется действительной частью  $\alpha$  коэффициента распространения, которую называют поэтому *коэффициентом затухания*. Единицей измерения  $\alpha$  является 1/м.

Затухание амплитуд, происходящее при прохождении волной пути  $l$ , характеризуется отношением  $E_m(z)/E_m(z-l) = e^{\alpha l}$ . Затухание амплитуд  $L$ , выраженное в *децибелах* (дБ), определяется как 20 десятичных логарифмов отношения  $E_m(z)/E_m(z+l)$ :  $L = 20 \lg(E_m(z)/E_m(z+l)) = 20\alpha l \lg e = 8,686\alpha l$ . Если в соответствии с этим соотношением ввести измерение коэффициента затухания в *децибелах на метр* (дБ/м) и обозначить его через  $\alpha'$ , то получим  $\alpha' = L/l = 8,686\alpha$ . Таким образом, единицы измерения коэффициента затухания связаны между собой равенствами  $1 \frac{1}{\text{м}} = 8,686 \frac{\text{дБ}}{\text{м}}$ ,  $1 \frac{\text{дБ}}{\text{м}} = 0,1151 \frac{1}{\text{м}}$ . Если, например,  $\alpha' = 30$  дБ/м, то соответствующее ему значение  $\alpha = 0,1151 \cdot 30 = 3,453$  1/м.

Амплитуды векторов поля уменьшаются в  $e = 2,718$  раз при прохождении волной расстояния  $d = 1/\alpha$ . Это расстояние называют *глубиной проникновения* поля в среду. При прохождении волной расстояния в несколько  $d$  амплитуды векторов поля оказываются настолько сильно уменьшенными, что дальше волна практически не проникает. Например, при прохождении расстояния в  $10d$  амплитуды поля уменьшаются в  $e^{10} = 22\,026$  раз.

Мнимая часть  $\beta$  коэффициента распространения определяет изменение фазы векторов поля от точки к точке в направлении распространения, играет ту же роль, что и волновое число  $k$  в среде без потерь, и называется *коэффициентом фазы*. Коэффициент фазы измеряют в радианах на метр (рад/м).

Найдем явные выражения для  $\alpha$  и  $\beta$ . Согласно (11.13) и (11.14) имеем  $\alpha + i\beta = i\omega \sqrt{\epsilon_a \mu_a (1 - i \operatorname{tg} \delta)}$ . Проведем над этим равенством две операции: во-первых, приравняем квадраты модулей слева и справа; во-вторых, возведем исходное равенство в квадрат и приравняем вещественные части слева и справа:

$$\alpha^2 + \beta^2 = \omega^2 \epsilon_a \mu_a \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \delta}, \quad \alpha^2 - \beta^2 = -\omega^2 \epsilon_a \mu_a. \quad (11.18)$$

Отсюда находим:

$$\alpha = \omega \sqrt{\frac{\epsilon_a \mu_a}{2} (\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \delta} - 1)}, \quad \beta = \omega \sqrt{\frac{\epsilon_a \mu_a}{2} (\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \delta} + 1)}. \quad (11.19)$$

При  $\sigma=0$  ф-лы (11.19) дают значения  $\alpha=0$ ,  $\beta=\omega\sqrt{\varepsilon_a\mu_a}=k$  (ср. § 11.2).

В среде с потерями взаимно перпендикулярные векторы  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  однородной плоской бегущей волны (11.17) сдвинуты друг относительно друга по фазе на величину аргумента  $\delta/2$  комплексного характеристического сопротивления и отличаются по амплитуде в  $|Z_c|$  раз. На рис. 11.3 изображена структура поля волны (11.17) для фиксированного момента времени  $t=\text{const}$ . С течением времени волна, изображенная на рис. 11.3, перемещается в направлении

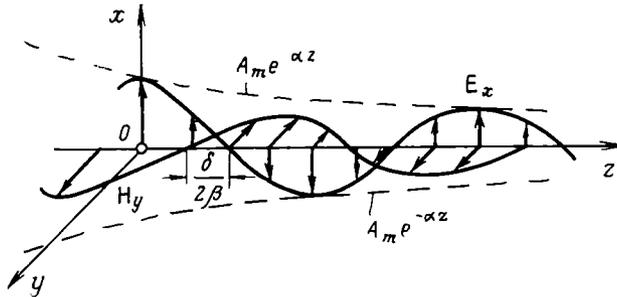


РИС. 11.3

возрастающих значений  $z$  со скоростью  $v=\omega/\beta$ , причем векторы  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  ограничены по амплитуде «неподвижными» экспонентами  $A_m e^{-\alpha z}$  и  $\frac{A_m}{|Z_c|} e^{-\alpha z}$ .

Определим мгновенное значение вектора Пойнтинга волны (11.17):

$$\mathbf{\Pi} = [\mathbf{E}_x \mathbf{H}_y] = \frac{A_m^2}{|Z_c|} e^{-2\alpha z} \cos(\omega t - \beta z + \varphi_A) \cos\left(\omega t - \beta z + \varphi_A - \frac{\delta}{2}\right) \mathbf{z}^0. \quad (11.20)$$

Таким образом, вектор Пойнтинга имеет только одну составляющую  $\Pi_z$ . Однако из-за существования в среде с потерями сдвига по фазе  $\delta/2$  между векторами  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  эта составляющая принимает как положительные значения [когда косинусы в (11.20) имеют одинаковые знаки], так и отрицательные (когда косинусы имеют противоположные знаки). Это означает, что в фиксированной точке наблюдения в течение одной части периода  $T$  энергия течет в направлении распространения волны ( $\Pi_z > 0$ ), а в течение другой части периода она течет в противоположном направлении ( $\Pi_z < 0$ ).

В соответствии с (4.27) и (11.16) найдем

$$\Pi_{cp} = \frac{1}{2} \operatorname{Re} [\mathbf{E}_x \mathbf{H}_y^*] = \frac{A_m^2}{2|Z_c|} e^{-2\alpha z} \cos \frac{\delta}{2} \mathbf{z}^0 = \Pi_{cpz} \mathbf{z}^0. \quad (11.21)$$

Поскольку  $0 \leq \delta/2 \leq \pi/4$ , то  $\cos(\delta/2) > 0$  и, следовательно,  $\Pi_{\text{срз}} > 0$ . Это означает, что в среде с потерями однородная плоская волна переносит в среднем за период энергию в направлении своего распространения.

Средние за период значения объемных плотностей энергий электрического и магнитного полей согласно (4.26) и (11.16) определяются соотношениями:

$$W'_{\text{э.ср}} = \frac{\epsilon_a A_m^2 e^{-2\alpha z}}{4}, \quad W'_{\text{м.ср}} = \frac{\mu_a A_m^2 e^{-2\alpha z}}{4 |Z_c|^2} = \frac{\epsilon_a A_m^2 e^{-2\alpha z}}{4} \sqrt{1 + \text{tg}^2 \delta}. \quad (11.22)$$

Таким образом,  $W'_{\text{м.ср}}/W'_{\text{э.ср}} = \sqrt{1 + \text{tg}^2 \delta} \geq 1$ , т. е. в среде с потерями  $W'_{\text{м.ср}} > W'_{\text{э.ср}}$ . С увеличением  $\sigma$  отношение  $W'_{\text{м.ср}}/W'_{\text{э.ср}}$  возрастает.

Подставив в (4.37) выражения для  $\Pi_{\text{ср}}$  и  $W'_{\text{ср}} = W'_{\text{э.ср}} + W'_{\text{м.ср}}$  и приняв во внимание формулу для  $\beta$  (11.19), получим  $v_3 = \frac{\omega}{\beta} z^0 = v z^0$ . Таким образом, в среде с потерями средняя скорость переноса энергии гармонической однородной плоской волной равна фазовой скорости этой волны.

Воспользовавшись выражением для  $\beta$  (11.19), получим следующую формулу для фазовой скорости:

$$v = \frac{\omega}{\beta} = \frac{1}{\sqrt{\frac{\epsilon_a \mu_a}{2} (\sqrt{1 + \text{tg}^2 \delta} + 1)}} = \frac{c}{\sqrt{\frac{\epsilon \mu}{2} (\sqrt{1 + \text{tg}^2 \delta} + 1)}}, \quad (11.23)$$

где  $c = 1/\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}$  — скорость электромагнитных волн в вакууме. Поскольку  $\text{tg} \delta = \sigma/\omega \epsilon_a$  зависит от  $\omega$ , то согласно (11.23) фазовая скорость зависит как от параметров среды, так и от частоты колебаний. Явление зависимости фазовой скорости от частоты называют *дисперсией* электромагнитных волн. Различают нормальную и аномальную дисперсии. Если при увеличении частоты колебаний фазовая скорость уменьшается, то дисперсию называют *нормальной*, если же фазовая скорость увеличивается, то — *аномальной*. Формула (11.23) характеризует аномальную дисперсию электромагнитных волн.

Согласно (11.17) и определению длины волны  $\lambda$  (см. § 6.3) имеем  $\beta \lambda = \frac{\omega}{v} \lambda = 2\pi$  и

$$\lambda = vT = \frac{2\pi}{\beta} = \frac{T}{\sqrt{\frac{\epsilon_a \mu_a}{2} (\sqrt{1 + \text{tg}^2 \delta} + 1)}}. \quad (11.24)$$

В средах с  $\text{tg} \delta \ll 1$  и  $\text{tg} \delta \gg 1$  формулы, определяющие параметры волны (11.17), могут быть упрощены.

Реальный диэлектрик ( $\text{tg} \delta \ll 1$ ). Используя приближенную формулу  $\sqrt{1+x} \approx 1+x/2$ , справедливую при  $x \ll 1$ , получаем

вместо (11.19), (11.23) и (11.15) следующие соотношения:

$$\left. \begin{aligned} \alpha &\approx \frac{\omega}{2} \sqrt{\epsilon_a \mu_a} \operatorname{tg} \delta = \frac{\sigma}{2} \sqrt{\frac{\mu_a}{\epsilon_a}}, \quad \beta \approx \omega \sqrt{\epsilon_a \mu_a} \left(1 + \frac{\operatorname{tg}^2 \delta}{8}\right) \approx \\ &\approx \omega \sqrt{\epsilon_a \mu_a}, \quad v \approx \frac{c}{\sqrt{\epsilon_a \mu_a} \left(1 + \frac{\operatorname{tg}^2 \delta}{8}\right)} \approx \frac{c}{\sqrt{\epsilon_a \mu_a}}, \\ |Z_c| &\approx \sqrt{\frac{\mu_a}{\epsilon_a}} \frac{1}{1 + \frac{\operatorname{tg}^2 \delta}{2}} \approx \sqrt{\frac{\mu_a}{\epsilon_a}}, \quad \psi = \frac{\delta}{2} \approx 0. \end{aligned} \right\} (11.25)$$

Таким образом, при  $\operatorname{tg} \delta \ll 1$  приближенный расчет  $\beta$ ,  $v$  и  $Z_c$  дает те же результаты, что и в среде без потерь.

/ Проводник ( $\operatorname{tg} \delta \gg 1$ ). Пренебрегая в суммах единицей по сравнению с  $\operatorname{tg}^2 \delta$  и  $\operatorname{tg} \delta$ , приходим к следующим приближенным выражениям:

$$\left. \begin{aligned} \alpha = \beta &\approx \omega \sqrt{\frac{\epsilon_a \mu_a}{2} \operatorname{tg} \delta} = \sqrt{\frac{\mu_a \sigma \omega}{2}}, \quad v \approx \frac{1}{\sqrt{\frac{\epsilon_a \mu_a}{2} \operatorname{tg} \delta}} = \\ &= \sqrt{\frac{2\omega}{\mu_a \sigma}}, \quad |Z_c| \approx \sqrt{\frac{\mu_a}{\epsilon_a \operatorname{tg} \delta}} = \sqrt{\frac{\mu_a \omega}{\sigma}}, \quad \psi = \frac{\delta}{2} \approx \frac{\pi}{4}. \end{aligned} \right\} (11.26)$$

> Отсюда следует, что при  $\operatorname{tg} \delta \gg 1$  коэффициенты затухания и фазы численно равны друг другу, принимают весьма большие значения и возрастают с увеличением частоты <sup>1)</sup> и проводимости; значения  $v$  и  $|Z_c|$  оказываются очень малыми. <

Поскольку в проводнике  $\alpha = \beta$ , то легко определить затухание амплитуд при прохождении волной расстояния, равного  $\lambda$ :  $E_m(z)/E_m(z+\lambda) = e^{-\alpha\lambda} = e^{-\beta\lambda} = e^{-2\pi} > 500$ . Вследствие столь сильного уменьшения амплитуд на расстоянии  $\lambda$  пространственная периодичность поля однородной плоской волны в проводнике отсутствует.

В соответствии с (11.26) глубина проникновения поля в проводник  $d$  и длина волны  $\lambda$  в проводнике определяются выражениями

$$d = 1/\alpha = 1/\sqrt{\pi f \mu_a \sigma}, \quad \lambda = 2\pi/\beta = 2\pi d = \sqrt{4\pi/f \mu_a \sigma} \quad (11.27)$$

и принимают весьма малые значения.

• Проиллюстрируем полученные для проводника соотношения числовым примером. Пусть в меди ( $\sigma = 5,7 \cdot 10^7$  См/м,  $\mu_a = \mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$  Г/м) распространяется однородная плоская волна с частотой  $f = 10^6$  Гц (длина волны в вакууме  $\lambda_0 = c/f = 300$  м). В этом случае имеем:  $\alpha \approx 15 \cdot 10^3$  1/м,  $\beta \approx 15 \cdot 10^3$  рад/м,  $v \approx 420$  м/с,  $|Z_c| = 3,7 \cdot 10^{-4}$  Ом,  $d \approx 0,067 \cdot 10^{-3}$  м = 0,067 мм,  $\lambda \approx 0,42 \cdot 10^{-3}$  м = 0,42 мм. /

<sup>1)</sup> Увеличение частоты  $\omega$  ограничено неравенством  $\sigma/\omega\epsilon_a \gg 1$ , при котором получены ф-лы (11.26).

Поскольку на высоких частотах  $\lambda$  в металле весьма мала и волна, проходя это расстояние, практически полностью затухает, то электромагнитное поле проникает лишь в очень тонкий поверхностный слой металла.

## Глава 12

### ПОЛЯРИЗАЦИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН



#### 12.1. ЛИНЕЙНО ПОЛЯРИЗОВАННЫЕ ВОЛНЫ

Из § 11.2 следует, что в общем случае однородная плоская волна, которая распространяется в среде без потерь в фиксированном направлении  $+z^0$ , является суммой двух однородных плоских волн (11.10) и (11.11). Мгновенные значения векторов  $\mathbf{E}_x$ ,  $\mathbf{H}_y$  волны (11.10) и  $\mathbf{E}_y$ ,  $\mathbf{H}_x$  волны (11.11) связаны соотношениями (11.9). Отсюда следует, что и мгновенные значения векторов  $\mathbf{E} = \mathbf{E}_x + \mathbf{E}_y$  и  $\mathbf{H} = \mathbf{H}_x + \mathbf{H}_y$  результирующей волны тоже связаны соотношениями (11.9). Поэтому в среде без потерь достаточно рассмотреть только один из векторов результирующей волны, который полностью определяет и другой вектор. Будем рассматривать, например, вектор  $\mathbf{E}$ :

$$\mathbf{E} = x^0 E_{xm} \cos(\omega t - kz + \varphi_x) + y^0 E_{ym} \cos(\omega t - kz + \varphi_y). \quad (12.1)$$

Далее будет показано, что в зависимости от соотношений амплитуд и начальных фаз суммируемых волн результирующая волна характеризуется тем или иным видом поляризации. *Поляризация монохроматической волны* определяет закон изменения направления и величины вектора  $\mathbf{E}$  (и  $\mathbf{H}$ ) этой волны в данной точке пространства за период колебания. Существуют три вида поляризации монохроматических волн: линейная, круговая и эллиптическая.

*Линейно поляризованной* называют волну, у которой направления колебаний векторов  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  в любой точке пространства остаются неизменными с течением времени. Примерами такой волны являются однородные плоские волны (11.10), (11.11) и поле излучения элементарного электрического излучателя (9.15).

Согласно (12.1) результирующая однородная плоская волна в общем случае представляет собой сумму двух линейно поляризованных однородных плоских волн, имеющих взаимно перпендикулярные векторы  $\mathbf{E}$  (и  $\mathbf{H}$ ).

Если начальные фазы суммируемых волн совпадают ( $\Delta\varphi = \varphi_y - \varphi_x = 0$ ) или сдвинуты друг относительно друга на  $\pi$  ( $\Delta\varphi = \varphi_y - \varphi_x = \pm\pi$ ), то суперпозиция (12.1) дает результирующую волну, которая также будет иметь линейную поляризацию. Действительно, подставив в (12.1)  $\varphi_y = \varphi_x + n\pi$  (где  $n=0$  при  $\Delta\varphi=0$  и  $n=\pm 1$  при

$\Delta\varphi = \pm\pi$ ), имеем  $\mathbf{E} = m^0 E_m \cos(\omega t - kz + \varphi_x)$ , причем

$$m^0 E_m = x^0 E_{xm} + y^0 (-1)^n E_{ym}. \quad (12.2)$$

Из (12.2) следует, что  $E_m = \sqrt{E_{xm}^2 + E_{ym}^2}$  и что направление  $m^0$  колебаний вектора  $\mathbf{E}$  образует с осью  $Ox$  угол  $\vartheta$ , который определяется соотношением

$$\operatorname{tg} \vartheta = (-1)^n \frac{E_{ym}}{E_{xm}} \left( -\frac{\pi}{2} < \vartheta \leq \frac{\pi}{2} \right) \quad (12.3)$$

и, следовательно, не изменяется с течением времени (рис. 12.1).

Плоскость, проходящую через направление распространения электромагнитной волны и вектор  $\mathbf{E}$ , называют *плоскостью поляризации*. (Иногда плоскость поляризации проводят через направ-

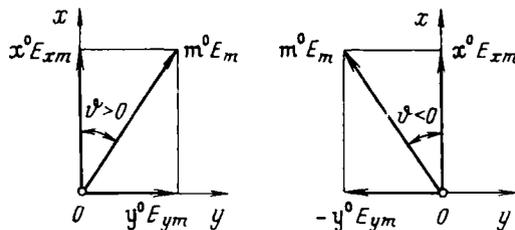


РИС. 12.1

ление распространения и вектор  $\mathbf{H}$ .) Плоскость поляризации линейно поляризованной волны в каждой точке пространства не изменяет своего положения с течением времени.

## 12.2. ПОЛЯРИЗОВАННЫЕ ПО КРУГУ И ЭЛЛИПТИЧЕСКИ ПОЛЯРИЗОВАННЫЕ ВОЛНЫ

*Поляризованной по кругу* называют волну, у которой векторы  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  в любой точке пространства равномерно вращаются, описывая за время одного периода  $T$  своими концами окружности.

Однородная плоская волна с круговой поляризацией получается в результате суперпозиции [ф-ла (12.1)] двух линейно поляризованных волн, имеющих взаимно перпендикулярные векторы  $\mathbf{E}$  с равными амплитудами ( $E_{xm} = E_{ym} = E_m$ ) и сдвигом начальных фаз на  $\pi/2$  ( $\Delta\varphi = \varphi_y - \varphi_x = \pm\pi/2$ ). Пусть, например, составляющая  $E_y$  отстает по фазе:  $\Delta\varphi = -\pi/2$ ,  $\varphi_y = \varphi_x - \pi/2$ . В этом случае согласно (12.1) имеем:

$$E_x(t) = E_m \cos(\omega t - kz + \varphi_x), \quad E_y(t) = E_m \sin(\omega t - kz + \varphi_x). \quad (12.4)$$

Определим мгновенное значение вектора  $\mathbf{E}$  результирующей волны:  $E(t) = \sqrt{E_x^2(t) + E_y^2(t)} = E_m$ . Таким образом, вектор  $\mathbf{E}$  постоянен по величине. Угол  $\vartheta$  между осью  $Ox$  и направлением мгновенного значения вектора  $\mathbf{E}$  определяется соотношением

$$\operatorname{tg} \vartheta = E_y(t)/E_x(t) = \operatorname{tg} (\omega t - kz + \varphi_x) \text{ или}$$

$$\vartheta = \omega t - kz + \varphi_x. \quad (12.5)$$

Из (12.5) следует, что в каждой фиксированной точке наблюдения ( $z = \text{const}$ ) угол  $\vartheta$  *линейно возрастает* по закону  $\omega t$  с увеличением  $t$ , изменяясь на  $2\pi$  за время одного периода  $T$  ( $\omega T = 2\pi$ ). Таким образом, при  $\Delta\varphi = -\pi/2$  суперпозиция (12.1) определяет в точке  $z = \text{const}$  равномерное вращение вектора  $\mathbf{E}$  с угловой скоростью  $2\pi/T = \omega$  в направлении от  $\mathbf{x}^0$  и  $\mathbf{y}^0$  (по часовой стрелке, если смотреть в направлении  $\mathbf{z}^0$ ), т. е. в сторону составляющей, отстающей по фазе; конец вектора  $\mathbf{E}$  описывает при этом вращении окружность (рис. 12.2а).

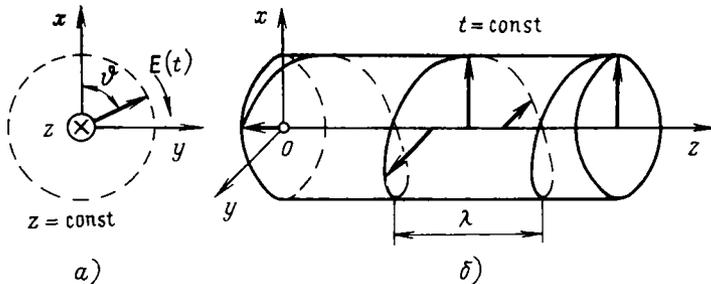


РИС. 12.2

Из (12.5) также следует, что в каждый фиксированный момент времени  $t = \text{const}$  угол  $\vartheta$  *линейно уменьшается* по закону  $-kz$  с увеличением координаты  $z$ , изменяясь на  $2\pi$  на расстоянии, равном  $\lambda$  ( $k\lambda = 2\pi$ ). Таким образом, в момент времени  $t = \text{const}$  вектор  $\mathbf{E}$  равномерно поворачивается с увеличением координаты  $z$  в направлении от  $\mathbf{y}^0$  к  $\mathbf{x}^0$  (против часовой стрелки, если смотреть в направлении  $\mathbf{z}^0$ ), делая один оборот на расстоянии  $\lambda$ . Концы векторов  $\mathbf{E}$ , относящихся к различным точкам оси  $Oz$ , расположены при этом на *левовинтовой* круговой спирали (рис. 12.2б).

Если положить в (12.1)  $E_{xm} = E_{ym} = E_m$  и  $\Delta\varphi = \varphi_y - \varphi_x = \pi/2$ , то вместо (12.4) имеем:

$$E_x(t) = E_m \cos(\omega t - kz + \varphi_x), \quad E_y(t) = -E_m \sin(\omega t - kz + \varphi_x). \quad (12.6)$$

и аналогичным путем вновь получаем однородную плоскую волну с круговой поляризацией. Однако у этой волны в точке  $z = \text{const}$  вектор  $\mathbf{E}$  равномерно вращается в направлении от  $\mathbf{y}^0$  к  $\mathbf{x}^0$  (рис. 12.3а), а в момент времени  $t = \text{const}$  концы векторов  $\mathbf{E}$  расположены на *правовинтовой* круговой спирали (рис. 12.3б).

Условимся называть поляризацию *правой* (левой), если в фиксированной точке  $z = \text{const}$  направление вращения вектора  $\mathbf{E}$  образует с направлением распространения волны *правовинтовую* (левовинтовую) систему.

Плоскость поляризации волны, которая поляризована по кругу, в каждой точке пространства равномерно вращается с течением времени.

Иногда бывает целесообразно рассматривать линейно поляризованную волну как результат суперпозиции двух поляризованных по кругу волн левого и правого направлений вращения, которые

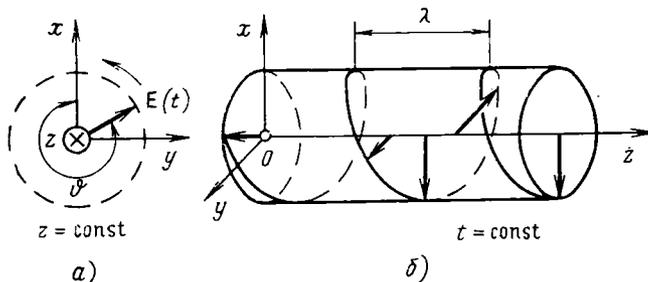


РИС. 12.3

имеют одинаковую величину векторов поля, равную половине амплитуды линейно поляризованной волны. Пусть, например, линейно поляризованная волна распространяется в направлении  $z^0$  и имеет вектор  $\mathbf{E}$ , параллельный оси  $Ox$ :  $\mathbf{E}(t) = x^0 E_m \cos(\omega t - kz + \varphi)$ .

Прибавив и вычтя справа выражение  $y^0 \frac{E_m}{2} \sin(\omega t - kz + \varphi)$ , получим

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(t) = & \frac{E_m}{2} [x^0 \cos(\omega t - kz + \varphi) + y^0 \sin(\omega t - kz + \varphi)] + \\ & + \frac{E_m}{2} [x^0 \cos(\omega t - kz + \varphi) - y^0 \sin(\omega t - kz + \varphi)]. \end{aligned} \quad (12.7)$$

Согласно (12.4) и (12.6) первая квадратная скобка определяет волну правой круговой поляризации, вторая — волну левой круговой поляризации (рис. 12.4).

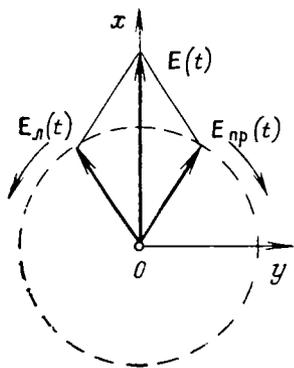


РИС. 12.4

Эллиптически поляризованной называют волну, у которой векторы  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  в любой точке пространства вращаются, описывая за время одного периода  $T$  своими концами эллипсы.

Можно показать, что однородные плоские волны с эллиптической поляризацией получаются в результате суперпозиции (12.1) двух линейно поляризованных волн со взаимно перпендикулярными векторами  $\mathbf{E}$  во всех случаях, когда не выполняются рассмотренные выше условия возникновения линейной и круговой поляризации.

Полученные результаты показывают, что любая однородная плоская волна линейной,

$$= \dot{E}_{\text{пр}0\tau} e^{-ik_z (y \cos \eta_{\text{пр}} + z \cos \zeta_{\text{пр}})} \quad (13.10)$$

[ $\tau = y$  в граничном условии из (13.5) и  $\tau = z$  в условии из (13.6)]. Равенство (13.10) должно выполняться в каждой точке поверхности раздела, т. е. при любых значениях  $y$  и  $z$ . Оно выполняется при любых  $y$  только в том случае, если

$$\cos \eta_{\text{отр}} = \cos \eta_{\text{пр}} = 0, \quad (13.11)$$

и при любых  $z$ , если

$$k_1 \cos \zeta_{\text{п}} = k_1 \cos \zeta_{\text{отр}} = k_2 \cos \zeta_{\text{пр}}. \quad (13.12)$$

Из (13.11) следует, что  $\eta_{\text{отр}} = \eta_{\text{пр}} = \pi/2$ , т. е. направления распространения отраженной и преломленной волн лежат в плоскости падения.

Угол  $\theta$ , образуемый направлением распространения падающей на поверхность раздела волны  $s_{\text{п}}^0$  и нормалью к этой поверхности, называют *углом падения*. Угол  $\theta_{\text{отр}}$ , образуемый направлением распространения отраженной от поверхности раздела волны  $s_{\text{отр}}^0$  и нормалью к этой поверхности, называют *углом отражения*. Угол  $\theta_{\text{пр}}$ , образуемый направлением распространения преломленной на поверхности раздела волны  $s_{\text{пр}}^0$  и нормалью к этой поверхности, называют *углом преломления*. Чтобы каждый из углов  $\theta$ ,  $\theta_{\text{отр}}$  и  $\theta_{\text{пр}}$  по своей величине не превышал  $\pi/2$ , углы  $\theta$  и  $\theta_{\text{пр}}$  отсчитываются от нормали, направленной внутрь второй среды, а угол  $\theta_{\text{отр}}$  — от нормали, направленной внутрь первой среды (см. рис. 13.2).

Учитывая, что для каждой волны  $\zeta_i = \pi/2 - \theta_i$ , получаем вместо (13.12) так называемый *закон синусов*:

$$k_1 \sin \theta = k_1 \sin \theta_{\text{отр}} = k_2 \sin \theta_{\text{пр}}. \quad (13.13)$$

Из (13.13), во-первых, следует, что  $\theta_{\text{отр}} = \theta$  — угол отражения равен углу падения. Это соотношение вместе с утверждением, что направление  $s_{\text{отр}}^0$  лежит в плоскости падения, называют *законом отражения*. Закон отражения определяет направление распространения отраженной однородной плоской волны.

Во-вторых, из (13.13) следует, что

$$\frac{\sin \theta}{\sin \theta_{\text{пр}}} = \frac{k_2}{k_1} = \sqrt{\frac{\epsilon_{2a}\mu_{2a}}{\epsilon_{1a}\mu_{1a}}} = \frac{v_1}{v_2} = \frac{n_2}{n_1} = n_{21}, \quad (13.14)$$

где  $v_1 = 1/\sqrt{\epsilon_{1a}\mu_{1a}}$ ,  $v_2 = 1/\sqrt{\epsilon_{2a}\mu_{2a}}$  — скорости волн в первой и второй диэлектрических средах;  $n_1 = c/v_1 = \sqrt{\epsilon_{a1}\mu_{a1}/\epsilon_0\mu_0} = \sqrt{\epsilon_1\mu_1}$ ,  $n_2 = c/v_2 = \sqrt{\epsilon_{2a}\mu_{2a}/\epsilon_0\mu_0} = \sqrt{\epsilon_2\mu_2}$  — коэффициенты преломления первой и второй сред;  $n_{21} = v_1/v_2 = n_2/n_1$  — относительный коэффициент преломления из первой среды во вторую. Таким образом, отношение синусов углов падения и преломления равно постоянной величине  $n_{21}$ , зависящей только от параметров граничащих сред. Соотно-

шение (13.14) вместе с утверждением, что направление  $s_{пр}^0$  лежит в плоскости падения, называют *законом преломления* (законом Снеллиуса). Этот закон определяет направление распространения преломленной однородной плоской волны.

При  $n_2 > n_1$ ,  $n_{21} > 1$  (оптическая плотность второго диэлектрика больше, чем первого) согласно (13.14) имеем  $\sin \theta_{пр} = \sin \theta / n_{21} < \sin \theta$ . В этом случае каждому углу падения  $\theta$  соответствует вещественный угол преломления  $\theta_{пр}$ , вследствие чего при всех значениях  $\theta$  во второй среде существует однородная плоская преломленная волна. При преломлении волны в оптически более плотную среду направление ее распространения  $s_{пр}^0$  приближается к нормали ( $\theta_{пр} < \theta$ ).

Если оптическая плотность второй среды меньше, чем первой ( $n_2 < n_1$ ,  $n_{21} < 1$ ), то  $\sin \theta_{пр} = \sin \theta / n_{21} > \sin \theta$  и  $\theta_{пр}$  имеет вещественные значения лишь при таких углах падения  $\theta$ , для которых

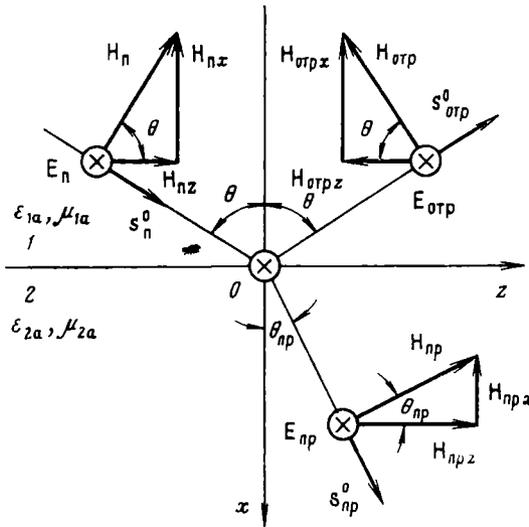


РИС. 13.3

$\sin \theta \leq n_{21}$ . При этих углах падения во второй среде существует однородная плоская преломленная волна, причем ее направление распространения  $s_{пр}^0$  приближается к границе раздела ( $\theta_{пр} > \theta$ ). Большим углам падения, определяемым неравенством

$$\sin \theta > n_{21}, \quad (13.15)$$

соответствуют значения  $\sin \theta_{пр} > 1$  и, следовательно, комплексные значения угла преломления  $\theta_{пр}$ . Неравенство (13.15) представляет собой условие, при котором во второй среде уже не существует однородной плоской преломленной волны и происходит *полное внутреннее отражение* (см. § 13.5).

Поскольку законы отражения и преломления одинаковы для нормальной и параллельной поляризаций падающей волны, то они остаются справедливыми и при ее произвольной поляризации.

2. Коэффициенты отражения и прохождения. Эти коэффициенты позволяют выразить амплитуды и начальные фазы отраженной и преломленной волн через параметры падающей волны и диэлектрических сред и оказываются различными для нормально и параллельно поляризованных волн.

Коэффициентом отражения  $R$  будем называть отношение комплексных амплитуд касательных к границе раздела составляющих векторов  $\mathbf{E}$  отраженной и падающей волн, а коэффициентом прохождения  $T$  — отношение комплексных амплитуд касательных к границе раздела составляющих векторов  $\mathbf{E}$  преломленной и падающей волн.

У нормально поляризованных волн касательными к границе раздела являются составляющие  $E_y$ , у параллельно поляризован-

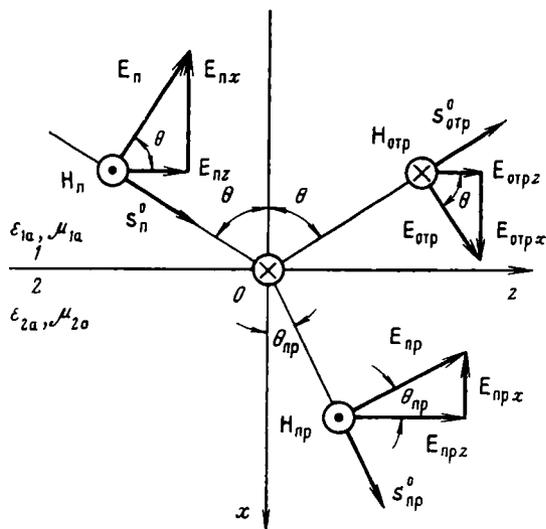


РИС. 13.4

ных волн — составляющие  $E_z$ . Направив касательные составляющие векторов  $\mathbf{E}$  падающей, отраженной и преломленной волн по соответствующим ортам и учитывая, что согласно (13.7)–(13.9) векторы напряженностей  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{H}$  и направление распространения  $\mathbf{s}^0$  каждой однородной плоской волны образуют правую ортонормальную тройку векторов, получим у границы раздела взаимные ориентации векторов, которые представлены на рис. 13.3 (нормальная поляризация волн) и рис. 13.4 (параллельная поляризация волн).

А. Нормально поляризованные волны. Приняв во внимание равенства  $\xi_n = \theta$ ,  $\xi_{отр} = \pi - \theta_{отр}$ ,  $\xi_{пр} = \theta_{пр}$ ,  $\zeta_i = \pi/2 - \theta_i$ ,  $\theta_{отр} = \theta$  и (13.11),

для нормально поляризованных волн согласно (13.7)–(13.9) и рис. 13.3 получим выражения:

$$\left. \begin{aligned} \dot{E}_n &= y^0 \dot{E}_{n0} e^{-ik_1(x \cos \theta + z \sin \theta)}; \\ \dot{E}_{отр} &= y^0 \dot{E}_{отр0} e^{-ik_1(-x \cos \theta + z \sin \theta)}; \\ \dot{E}_{пр} &= y^0 \dot{E}_{пр0} e^{-ik_2(x \cos \theta_{пр} + z \sin \theta_{пр})}; \end{aligned} \right\} \quad (13.16)$$

$$\left. \begin{aligned} \dot{H}_n &= (-x^0 \sin \theta + z^0 \cos \theta) \frac{\dot{E}_{n0}}{Z_{c1}} e^{-ik_1(x \cos \theta + z \sin \theta)}; \\ \dot{H}_{отр} &= -(x^0 \sin \theta + z^0 \cos \theta) \frac{\dot{E}_{отр0}}{Z_{c1}} e^{-ik_1(-x \cos \theta + z \sin \theta)}; \\ \dot{H}_{пр} &= (-x^0 \sin \theta_{пр} + z^0 \cos \theta_{пр}) \frac{\dot{E}_{пр0}}{Z_{c2}} e^{-ik_2(x \cos \theta_{пр} + z \sin \theta_{пр})}. \end{aligned} \right\} \quad (13.17)$$

На поверхности раздела полное поле удовлетворяет граничным условиям (13.5):  $\dot{E}_{ny} + \dot{E}_{отрy} = \dot{E}_{пры}$ ,  $\dot{H}_{nz} + \dot{H}_{отрz} = \dot{H}_{пrz}$  при  $x=0$ . Подставив в них соответствующие компоненты из (13.16), (13.17) и сократив согласно равенствам (13.13) экспоненциальные множители, получим уравнения:

$$\dot{E}_{n0} + \dot{E}_{отр0} = \dot{E}_{пр0}, \quad \frac{\cos \theta}{Z_{c1}} (\dot{E}_{n0} - \dot{E}_{отр0}) = \frac{\cos \theta_{пр}}{Z_{c2}} \dot{E}_{пр0}. \quad (13.18)$$

Для коэффициентов отражения и прохождения согласно (13.16) имеем:

$$R_{\perp} = \frac{\dot{E}_{отрy}}{\dot{E}_{ny}} \Big|_{x=0} = \frac{\dot{E}_{отр0}}{\dot{E}_{n0}}, \quad T_{\perp} = \frac{\dot{E}_{пры}}{\dot{E}_{ny}} \Big|_{x=0} = \frac{\dot{E}_{пр0}}{\dot{E}_{n0}}; \quad (13.19)$$

где индекс « $\perp$ » указывает, что формулы относятся к случаю нормально поляризованных волн.

При учете (13.19) получаем вместо (13.18) систему двух уравнений

$$1 + R_{\perp} = T_{\perp}, \quad 1 - R_{\perp} = \frac{Z_{c1} \cos \theta_{пр}}{Z_{c2} \cos \theta} T_{\perp} \quad (13.20)$$

с двумя неизвестными  $R_{\perp}$  и  $T_{\perp}$ . Решив эту систему, находим:

$$\begin{aligned} R_{\perp} &= \frac{\dot{E}_{отр0}}{\dot{E}_{n0}} = \frac{Z_{c2} \cos \theta - Z_{c1} \cos \theta_{пр}}{Z_{c2} \cos \theta + Z_{c1} \cos \theta_{пр}}; \\ T_{\perp} &= \frac{\dot{E}_{пр0}}{\dot{E}_{n0}} = \frac{2Z_{c2} \cos \theta}{Z_{c2} \cos \theta + Z_{c1} \cos \theta_{пр}}. \end{aligned} \quad (13.21)$$

Соотношения (13.21) называют *формулами Френеля*. Они позволяют при известном  $\dot{E}_{n0}$  определить  $\dot{E}_{отр0}$  и  $\dot{E}_{пр0}$ , знания которых

нам недоставало для полного определения поля при наличии границы раздела.

Б. *Параллельно поляризованные волны.* В этом случае формулы (13.7) — (13.9) в соответствии с рис. 13.4 принимают вид:

$$\left. \begin{aligned} \dot{E}_n &= (-x^0 \sin \theta + z^0 \cos \theta) \dot{E}_{n0} e^{-ik_1(x \cos \theta + z \sin \theta)}; \\ \dot{E}_{отр} &= (x^0 \sin \theta + z^0 \cos \theta) \dot{E}_{отр0} e^{-ik_1(-x \cos \theta + z \sin \theta)}; \\ \dot{E}_{пр} &= (-x^0 \sin \theta_{пр} + z^0 \cos \theta_{пр}) \dot{E}_{пр0} e^{-ik_2(x \cos \theta_{пр} + z \sin \theta_{пр})}; \end{aligned} \right\} (13.22)$$

$$\left. \begin{aligned} \dot{H}_n &= -y^0 \frac{\dot{E}_{n0}}{Z_{c1}} e^{-ik_1(x \cos \theta + z \sin \theta)}; \\ \dot{H}_{отр} &= y^0 \frac{\dot{E}_{отр0}}{Z_{c1}} e^{-ik_1(-x \cos \theta + z \sin \theta)}; \\ \dot{H}_{пр} &= -y^0 \frac{\dot{E}_{пр0}}{Z_{c2}} e^{-ik_2(x \cos \theta_{пр} + z \sin \theta_{пр})}. \end{aligned} \right\} (13.23)$$

На поверхности раздела полное поле удовлетворяет граничным условиям (13.6):  $\dot{E}_{nz} + \dot{E}_{отрnz} = \dot{E}_{прz}$ ,  $\dot{H}_{ny} + \dot{H}_{отрny} = \dot{H}_{прy}$  при  $x=0$ . Подставив в них соответствующие компоненты из (13.22), (13.23) и сократив экспоненциальные множители, получим:

$$\cos \theta (\dot{E}_{n0} + \dot{E}_{отр0}) = \cos \theta_{пр} \dot{E}_{пр0}, \quad \frac{1}{Z_{c1}} (-\dot{E}_{n0} + \dot{E}_{отр0}) = -\frac{1}{Z_{c2}} \dot{E}_{пр0}. \quad (13.24)$$

Для коэффициентов отражения и прохождения согласно (13.22) имеем:

$$R_{\parallel} = \frac{\dot{E}_{отрz}}{\dot{E}_nz} \Big|_{x=0} = \frac{\dot{E}_{отр0}}{\dot{E}_{n0}}, \quad T_{\parallel} = \frac{\dot{E}_{прz}}{\dot{E}_nz} \Big|_{x=0} = \frac{\cos \theta_{пр}}{\cos \theta} \frac{\dot{E}_{пр0}}{\dot{E}_{n0}}, \quad (13.25)$$

где индекс « $\parallel$ » указывает, что формулы относятся к случаю параллельно поляризованных волн.

При учете (13.25) получим вместо (13.24) систему уравнений

$$1 + R_{\parallel} = T_{\parallel}, \quad -1 + R_{\parallel} = -\frac{Z_{c1} \cos \theta}{Z_{c2} \cos \theta_{пр}} T_{\parallel}, \quad (13.26)$$

из которой находим формулы Френеля:

$$\begin{aligned} R_{\parallel} &= \frac{\dot{E}_{отр0}}{\dot{E}_{n0}} = \frac{Z_{c2} \cos \theta_{пр} - Z_{c1} \cos \theta}{Z_{c2} \cos \theta_{пр} + Z_{c1} \cos \theta}, \quad T'_{\parallel} = \frac{\dot{E}_{пр0}}{\dot{E}_{n0}} = \\ &= \frac{\cos \theta}{\cos \theta_{пр}} T_{\parallel} = \frac{2Z_{c2} \cos \theta}{Z_{c2} \cos \theta_{пр} + Z_{c1} \cos \theta}. \end{aligned} \quad (13.27)$$

Выше были введены коэффициенты отражения и прохождения по электрическому полю. Аналогично можно ввести эти коэффици-

енты и по магнитному полю. При этом коэффициент отражения по магнитному полю определяется правой частью соответствующего выражения (13.21) или (13.27), взятой с *обратным* знаком (см. рис. 13.3 и рис. 13.4).

В формулах Френеля удобно исключить угол преломления. При учете (13.14) имеем  $\cos \theta_{\text{пр}} = \sqrt{1 - \sin^2 \theta_{\text{пр}}} = \sqrt{n_{21}^2 - \sin^2 \theta} / n_{21}$ . Если воспользоваться этим соотношением и ограничиться рассмотрением немагнитных сред, для которых можно принять  $\mu_1 = \mu_2 = 1$  и  $Z_{c1}/Z_{c2} = n_{21}$ , то вместо (13.21) и (13.27) получим:

$$R_{\perp} = \frac{\dot{E}_{\text{отр } 0}}{\dot{E}_{\text{по}}} = \frac{\cos \theta - \sqrt{n_{21}^2 - \sin^2 \theta}}{\cos \theta + \sqrt{n_{21}^2 - \sin^2 \theta}}, \quad T_{\perp} = \frac{\dot{E}_{\text{пр } 0}}{\dot{E}_{\text{по}}} = \frac{2 \cos \theta}{\cos \theta + \sqrt{n_{21}^2 - \sin^2 \theta}}; \quad (13.28)$$

$$R_{\parallel} = \frac{\dot{E}_{\text{отр } 0}}{\dot{E}_{\text{по}}} = \frac{\sqrt{n_{21}^2 - \sin^2 \theta} - n_{21}^2 \cos \theta}{\sqrt{n_{21}^2 - \sin^2 \theta} + n_{21}^2 \cos \theta},$$

$$T'_{\parallel} = \frac{\dot{E}_{\text{пр } 0}}{\dot{E}_{\text{по}}} = \frac{2n_{21} \cos \theta}{\sqrt{n_{21}^2 - \sin^2 \theta} + n_{21}^2 \cos \theta}. \quad (13.29)$$

Соотношения этого параграфа были получены в предположении, что обе среды являются диэлектриками и что внутри второй среды существует преломленная однородная плоская волна. Однако можно строго показать (например, [5]), что форма этих соотношений сохраняется и в тех случаях, когда эти предположения не выполняются. Например, если вторая среда обладает проводимостью, то достаточно заменить в приведенных выше формулах  $\epsilon_{2a}$  на  $\tilde{\epsilon}_{2a} = \epsilon_{2a} - i \frac{\sigma_2}{\omega}$ . Как мы увидим далее, в результате подобных преобразований уже известные нам формулы наполняются новым содержанием, описывают физические явления, качественно отличающиеся от рассмотренных выше (§ 13.5—13.7).

### 13.3. НОРМАЛЬНОЕ ПАДЕНИЕ ПЛОСКОЙ ВОЛНЫ НА ГРАНИЦУ РАЗДЕЛА ДИЭЛЕКТРИКОВ

При нормальном падении однородной волны на границу раздела угол падения  $\theta=0$  и согласно (13.14) угол преломления  $\theta_{\text{пр}}=0$ . Подставив эти значения в (13.21) и (13.27), получим:

$$R_{\perp} = R_{\parallel} = \frac{Z_{c2} - Z_{c1}}{Z_{c2} + Z_{c1}}, \quad T_{\perp} = T_{\parallel} = \frac{2Z_{c2}}{Z_{c2} + Z_{c1}}. \quad (13.30)$$

При нормальном падении волны на поверхность раздела положение плоскости падения становится неопределенным и исчезает различие между нормально и параллельно поляризованными волнами. Это обстоятельство отражено в ф-лах (13.30).

#### 13.4. ПОЛНОЕ ПРОХОЖДЕНИЕ ВОЛНЫ ЧЕРЕЗ ГРАНИЦУ РАЗДЕЛА ДИЭЛЕКТРИКОВ

Коэффициент отражения  $R_{\perp}$  (13.28) обращается в нуль только при значении  $n_{21}=1$ , соответствующем отсутствию границы раздела двух сред. Коэффициент отражения  $R_{\parallel}$  (13.29) обращается в нуль не только при  $n_{21}=1$ . В случае  $n_{21} \neq 1$   $R_{\parallel}$  обращается в нуль при некотором угле падения  $\theta'$ , определяемом из уравнения

$$\sqrt{n_{21}^2 - \sin^2 \theta'} - n_{21} \cos \theta' = 0 \quad (13.31)$$

и зависящем от величины  $n_{21}$ . Угол падения  $\theta'$ , при котором параллельно поляризованная волна не отражается от границы раздела двух диэлектриков и после преломления полностью проходит во вторую среду, называют *углом Брюстера*.

Чтобы определить угол Брюстера  $\theta'$ , перенесем в (13.31) второе слагаемое в правую часть, возведем результат в квадрат и поделим на  $\cos^2 \theta'$ :  $n_{21}^2 / \cos^2 \theta' - \operatorname{tg}^2 \theta' = n_{21}^4$ . Подставив сюда равенство  $1 / \cos^2 \theta' = 1 + \operatorname{tg}^2 \theta'$ , сгруппировав слагаемые и сократив на  $n_{21}^2 - 1$ , получим

$$\operatorname{tg} \theta' = n_{21}. \quad (13.32)$$

Здесь  $n_{21} \neq 1$ , так как значение  $n_{21} = 1$  было исключено при сокращении.

Если падающая волна произвольно поляризована, то при угле падения, равном углу Брюстера, отраженная волна будет поляризована только нормально плоскости падения.

#### 13.5. ПОЛНОЕ ВНУТРЕННЕЕ ОТРАЖЕНИЕ

Рассмотрим падение однородной плоской волны на границу раздела с оптически менее плотным диэлектриком ( $n_{21} < 1$ ) под такими углами  $\theta$ , для которых выполняется условие (13.15). В этом случае из соотношения

$$\sin \theta_{\text{пр}} = \frac{\sin \theta}{n_{21}} = \frac{k_1 \sin \theta}{k_2} \quad (13.33)$$

вытекает неравенство  $\sin \theta_{\text{пр}} > 1$ , которое удовлетворяется лишь при некотором комплексном угле преломления  $\theta_{\text{пр}} = \pi/2 + i\chi$ :  $\sin \theta_{\text{пр}} = \sin(\pi/2 + i\chi) = \cos(i\chi) = \operatorname{ch} \chi > 0$ . Далее будет показано, что физически комплексный угол преломления характеризует, во-первых, полное отражение падающей волны от оптически менее плотного диэлектрика и, во-вторых, существование в оптически менее плотном диэлектрике вместо однородной плоской прелом-

ленной волны так называемой *поверхностной волны*. Совокупность этих явлений называют *полным внутренним отражением*.

При значениях  $\sin\theta > n_{21}$  и  $\sin\theta_{\text{пр}} > 1$   $\cos\theta_{\text{пр}}$  оказывается чисто мнимым:

$$\begin{aligned} \cos\theta_{\text{пр}} &= -\sqrt{1 - \sin^2\theta_{\text{пр}}} = -i\sqrt{\sin^2\theta_{\text{пр}} - 1} = \\ &= -i\frac{\sqrt{\sin^2\theta - n_{21}^2}}{n_{21}} = -i\frac{\kappa}{n_{21}} = -i\frac{k_1\kappa}{k_2}, \end{aligned} \quad (13.34)$$

где  $\kappa = \sqrt{\sin^2\theta - n_{21}^2}$  — вещественная положительная величина.

Подстановка соотношений (13.33) и (13.34) в формулы § 13.2 приводит к выражениям, описывающим полное внутреннее отражение. Воспользовавшись, например, выражением для  $\dot{\mathbf{E}}_{\text{пр}}$  (13.16) и заменив индекс «пр» на «2», получим при учете (13.33) и (13.34)

$$\dot{\mathbf{E}}_2 = y^0 \dot{\mathbf{E}}_{20} e^{-k_1 \kappa x} e^{-i k_1 z \sin\theta}. \quad (13.35)$$

Из (13.35) следует, что амплитуда поля во втором диэлектрике уменьшается экспоненциально с увеличением расстояния  $x$  от поверхности раздела.

Если бы в (13.34) перед квадратным корнем был выбран знак «+», то при увеличении расстояния  $x$  амплитуда неограниченно бы возрастала, что лишено физического смысла.

Подставив (13.34),  $Z_{c1} = \sqrt{\mu_{1a}/\epsilon_{1a}}$  и  $Z_{c2} = \sqrt{\mu_{2a}/\epsilon_{2a}}$  в первые соотношения (13.21) и (13.27), получим:

$$R_{\perp} = \frac{\mu_2 \cos\theta + i \mu_1 \kappa}{\mu_2 \cos\theta - i \mu_1 \kappa}, \quad R_{\parallel} = -\frac{\epsilon_2 \cos\theta + i \epsilon_1 \kappa}{\epsilon_2 \cos\theta - i \epsilon_1 \kappa}. \quad (13.36)$$

Из (13.36) следует, что модули коэффициентов отражения равны единице, т. е.

$$R_{\perp} = e^{i2\delta_{\perp}}, \quad R_{\parallel} = -e^{i2\delta_{\parallel}}, \quad (13.37)$$

причем  $\text{tg}\delta_{\perp} = \mu_1 \kappa / \mu_2 \cos\theta$ ,  $\text{tg}\delta_{\parallel} = \epsilon_1 \kappa / \epsilon_2 \cos\theta$ . Значения  $|R_{\perp}| = 1$  и  $|R_{\parallel}| = 1$  характеризуют полное отражение падающей волны, при котором амплитуды векторов поля отраженной и падающей однородных плоских волн равны.

Определим результирующее поле в первой среде при полном отражении. Учтя, что согласно первой ф-ле (13.37)  $\dot{\mathbf{E}}_{\text{отпр}} = \dot{\mathbf{E}}_{\text{по}} e^{i2\delta_{\perp}}$ , получим в соответствии с (13.16), (13.17) следующие выражения для комплексных амплитуд векторов этого поля при нормальной поляризации:

$$\left. \begin{aligned} \dot{\mathbf{E}}_1 &= \dot{\mathbf{E}}_{\text{п}} + \dot{\mathbf{E}}_{\text{отпр}} = y^0 2\dot{\mathbf{E}}_{\text{по}} \cos(k_1 x \cos\theta + \delta_{\perp}) e^{-i(k_1 z \sin\theta - \delta_{\perp})}, \\ \dot{\mathbf{H}}_1 &= \dot{\mathbf{H}}_{\text{п}} + \dot{\mathbf{H}}_{\text{отпр}} = -\frac{2\dot{\mathbf{E}}_{\text{по}}}{Z_{c1}} \left[ x^0 \sin\theta \cos(k_1 x \cos\theta + \delta_{\perp}) + \right. \\ &\quad \left. -i(k_1 z \sin\theta - \delta_{\perp}) \right] e \end{aligned} \right\} \quad (13.38)$$

Аналогичным путем получим в соответствии с (13.22), (13.23) следующие выражения при параллельной поляризации:

$$\left. \begin{aligned} \vec{E}_1 &= \vec{E}_n + \vec{E}_{отр} = -2\vec{E}_{n0} [x^0 \sin \theta \cos (k_1 x \cos \theta + \delta_{\parallel}) + \\ &+ z^0 i \cos \theta \sin (k_1 x \cos \theta + \delta_{\parallel})] e^{-i(k_1 z \sin \theta - \delta_{\parallel})}, \\ \vec{H}_1 &= \vec{H}_n + \vec{H}_{отр} = -y^0 \frac{2\vec{E}_{n0}}{Z_{с1}} \cos (k_1 x \cos \theta + \delta_{\parallel}) e^{-i(k_1 z \sin \theta - \delta_{\parallel})}. \end{aligned} \right\} (13.39)$$

Согласно (3.56) составляющие векторов результирующего поля (13.38) или (13.39) характеризуются уравнением постоянного значения фазы

$$\omega t - k_1 z \sin \theta = \text{const.} \quad (13.40)$$

Уравнение (13.40) показывает, что ф-лы (13.38) или (13.39) определяют плоскую волну, волновые поверхности которой описываются уравнением  $z = \text{const}$ . Амплитуды составляющих векторов поля этой волны имеют одно и то же значение в плоскостях, определяемых уравнением  $x = \text{const}$  и перпендикулярных плоским волновым поверхностям. Электромагнитную волну, у которой плоские волновые поверхности и плоские поверхности одинаковых амплитуд не совпадают друг с другом, называют *неоднородной плоской волной*.

Из (13.40) следует, что неоднородная плоская волна (13.38) или (13.39) характеризуется коэффициентом фазы  $\beta = k_1 \sin \theta < k_1$  и ее поверхности одинаковой фазы с увеличением времени  $t$  распространяются в направлении возрастающих значений  $z$  (т. е. вдоль поверхности раздела в плоскости падения) с фазовой скоростью

$$v_{\phi} = \omega/\beta = \omega/k_1 \sin \theta = v_1/\sin \theta > v_1. \quad (13.41)$$

Фазовая скорость (13.41) определяет скорость распространения вдоль координаты  $z$  фиксированного значения фазы и в рассматриваемом случае *не является* скоростью переноса энергии. Поясним это утверждение при помощи рис.13.5, на котором изображена одна и та же волновая поверхность падающей волны в различные моменты времени  $t_1$  и  $t_1 + \Delta t$ . Нетрудно показать, что приведенные ниже рассуждения полностью применимы и к результирующей волне, образованной наложением падающей и отраженной волн.

Выделенная волновая поверхность, перемещаясь в направлении  $z^0$  со скоростью  $v_1 = 1/\sqrt{\epsilon_{1a}\mu_{1a}}$ , пройдет из точки  $A$  в точку  $B$  за время  $\Delta t = AB/v_1$ . Однако если наблюдать при этом за движением фиксированного значения фазы вдоль оси  $z$ , то будет казаться, что за время  $\Delta t$  оно переместилось из точки  $A$  в точку  $C$ , т. е. движется с фазовой скоростью (13.41):  $v_{\phi} = AC/\Delta t = v_1 AC/AB = v_1/\sin \theta$ .

Поскольку фазовая скорость результирующей волны в первой среде оказывается *больше* скорости  $v_1$  волны, свободно распространяющейся в этой же среде, то результирующую волну называют *ускоренной*.

Неоднородная плоская волна (13.38) или (13.39) характеризуется длиной волны  $\Lambda$ , определяемой расстоянием, на которое распространяется волновая поверхность (вдоль оси  $z$ ) за время одного периода колебаний:

$$\Lambda = v_{\phi} T = \frac{2\pi}{\beta} = \frac{2\pi}{k_1 \sin \theta} = \frac{\lambda_1}{\sin \theta}, \quad (13.42)$$

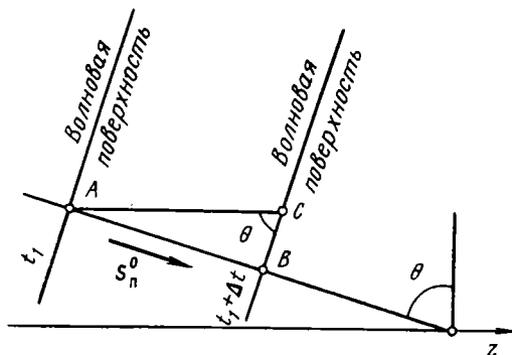


РИС. 13.5

где  $\lambda_1 = v_1 T$  — длина волны, свободно распространяющейся в первой среде.

Каждая из волн (13.38) и (13.39) наряду с поперечными составляющими обоих векторов  $\mathbf{E}_1$  и  $\mathbf{H}_1$  имеет также *продольную* составляющую одного из этих векторов, ориентированную вдоль направления  $z^0$  распространения волны. Такие электромагнитные волны называют *поперечно-продольными*. Они подразделяются на волны *магнитного* класса или класса  $\mathbf{H}$ , который характеризуется наличием продольной составляющей  $\mathbf{H}$  [например, волна (13.38)], и волны *электрического* класса или класса  $\mathbf{E}$ , который характеризуется наличием продольной составляющей  $\mathbf{E}$  [например, волна (13.39)].

Из ф-л (13.38) и (13.39) следует, что существует бесчисленное множество плоскостей, параллельных поверхности раздела, на которых тангенциальная к ним составляющая  $\mathbf{E}_1$  и нормальная составляющая  $\mathbf{H}_1$  равны нулю. При нормальной поляризации уравнение этих плоскостей определяется из соотношения  $\cos(k_1 x \cos \theta + \delta_{\perp}) = 0$ , откуда

$$x_n = - \frac{(2n+1)\pi + 2\delta_{\perp}}{2k_1 \cos \theta}, \quad n = 0, 1, 2, 3 \dots; \quad (13.43)$$

при параллельной поляризации — из соотношения  $\sin(k_1 x \cos \theta + \delta_{\parallel}) = 0$ , откуда

$$x_n = -\frac{n\pi + \delta_{\parallel}}{k_1 \cos \theta}, \quad n = 0, 1, 2, 3 \dots \quad (13.44)$$

На рис. 13.6 эти плоскости изображены штриховыми линиями.

Комплексный вектор Пойнтинга каждой из волн (13.38) и (13.39) имеет вид

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{P}}_1 = \frac{1}{2} [\dot{\mathbf{E}}_1 \mathbf{H}_1^*] = \frac{2E_{nm}^2}{Z_{c1}} [z^0 \sin \theta \cos^2(k_1 x \cos \theta + \delta) \pm x^0 i \cos \theta \sin \theta \times \\ \times (k_1 x \cos \theta + \delta) \cos(k_1 x \cos \theta + \delta)], \end{aligned} \quad (13.45)$$

где знак «плюс» соответствует нормальной поляризации, знак «минус» — параллельной поляризации.

Поскольку поперечные составляющие  $\mathbf{E}_1$  и  $\mathbf{H}_1$  колеблются в одинаковой фазе, то продольная компонента  $\tilde{P}_z$  оказалась чисто вещественной и положительной. Это означает, что электромагнитная энергия движется параллельно границе раздела только в направлении распространения волны  $z^0$  (ср. § 9.5). Поскольку продольные составляющие  $\mathbf{E}_1$  и  $\mathbf{H}_1$  сдвинуты по фазе относительно поперечных на  $\pi/2$  ( $i = e^{i\pi/2}$ ), то поперечная компонента  $\tilde{P}_x$  оказалась чисто мнимой. Это означает, что движение энергии в поперечном направлении имеет колебательный характер (ср. § 9.4). Среднее за период значение вектора Пойнтинга имеет только одну продольную компоненту

$$P_{1cp} = \text{Re } \tilde{\mathbf{P}}_1 = z^0 \frac{2E_{nm}^2}{Z_{c1}} \sin \theta \cos^2(k_1 x \cos \theta + \delta), \quad (13.46)$$

а среднее значение мощности, протекающей сквозь произвольный участок любой поперечной плоскости  $x = \text{const}$ , равно нулю.

Среднюю скорость переноса электромагнитной энергии в первой среде в направлении  $z^0$  определим с помощью (4.36). Трубнообразная поверхность образована в рассматриваемом случае пересечением четырех плоскостей:  $x = x_i$ ,  $x = x_h$ ,  $y = y_1$  и  $y = y_2$ .

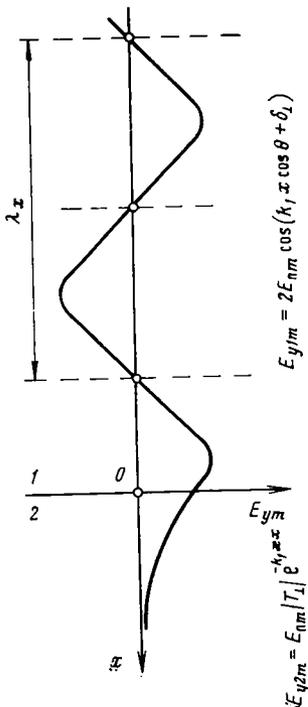


РИС. 13.6

Две первые плоскости должны удовлетворять уравнению (13.43) или (13.44) (при этом нормальная к ним компонента  $\tilde{\Pi}_{1x}=0$ ). Поскольку компонента  $\tilde{\Pi}_{1y}$  тождественно равна нулю, то плоскости  $y=y_1$  и  $y=y_2$  могут быть удалены друг от друга на произвольное расстояние  $a$ . При этом имеем

$$v_3 = \frac{\int_{x_i}^{x_k} \Pi_{cp} adx}{\int_{x_i}^{x_k} W'_{cp} adx} = \frac{\sin \theta}{\sqrt{\epsilon_{1a}\mu_{1a}}} = v_1 \sin \theta < v_1. \quad (13.47)$$

Таким образом, скорость переноса энергии оказывается *меньше* скорости  $v_1$ . Согласно (13.41) и (13.47)  $v_\Phi v_3 = v^2_1$ .

Найдем теперь поле во втором диэлектрике при полном внутреннем отражении. С помощью (13.34),  $Z_{c1} = \sqrt{\mu_{1a}/\epsilon_{1a}}$  и  $Z_{c2} = \sqrt{\mu_{2a}/\epsilon_{2a}}$  из вторых соотношений (13.21) и (13.27) находим:

$$T_\perp = \frac{2\mu_2 \cos \theta}{\mu_2 \cos \theta - i\mu_1 \kappa}, \quad T_\parallel = \frac{2n_{21} \epsilon_1 \cos \theta}{\epsilon_2 \cos \theta - i\epsilon_1 \kappa}. \quad (13.48)$$

Подставив (13.33) и (13.34) в те выражения (13.16), (13.17) и (13.22), (13.23), которые определяют векторы поля во второй среде, получим для нормально поляризованных волн:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_2 = y^0 \dot{E}_{n0} T_\perp e^{-k_1 \kappa x} e^{-ik_1 z \sin \theta}, \quad \mathbf{H}_2 = - (x^0 \sin \theta + z^0 i \kappa) \times \\ \times \frac{\dot{E}_{n0} T_\perp}{Z_{c2} n_{21}} e^{-k_1 \kappa x} e^{-ik_1 z \sin \theta} \end{aligned} \quad (13.49)$$

и для параллельно поляризованных волн:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_2 = - (x^0 \sin \theta + z^0 i \kappa) \frac{\dot{E}_{n0} T_\parallel}{n_{21}} e^{-k_1 \kappa x} e^{-ik_1 z \sin \theta}, \quad \mathbf{H}_2 = \\ = - y^0 \frac{\dot{E}_{n0} T_\parallel}{Z_{c2}} e^{-k_1 \kappa x} e^{-ik_1 z \sin \theta}. \end{aligned} \quad (13.50)$$

Формулы (13.49) или (13.50) определяют неоднородную плоскую волну, волновые поверхности которой  $z = \text{const}$  перпендикулярны поверхностям одинаковых амплитуд  $x = \text{const}$ . Эта волна характеризуется таким же коэффициентом фазы  $\beta = k_1 \sin \theta$ , распространяется с такой же фазовой скоростью (13.41), в том же направлении  $z^0$  и имеет такую же длину волны (13.42), что и результирующая волна в первой среде. Из условия (13.15), необходимого для существования полного внутреннего отражения, следует неравенство  $k_1 \sin \theta > k_2$  или  $\beta > k_2$ , откуда  $v_\Phi = \omega/\beta < \omega/k_2 = v_2$ . Таким образом, фазовая скорость волн (13.49) и (13.50) во второй среде оказывается *меньше* скорости  $v_2 = 1/\sqrt{\epsilon_{2a}\mu_{2a}}$  волны, свободно распространяющейся в этой же среде. По этой причине рассматриваемые волны называют *замедленными*.

Амплитуды составляющих векторов  $\mathbf{E}_2$  и  $\mathbf{H}_2$  волн (13.49) и (13.50) экспоненциально затухают с увеличением расстояния  $x$  от поверхности раздела (см. рис. 13.6). Это затухание поля во второй среде (без потерь) означает, что поле не распространяется в глубь этой среды, и обусловлено тем, что при полном внутреннем отражении среднее значение мощности, выходящей через границу раздела из первой среды во вторую, равно нулю. Быстрота затухания определяется произведением  $k_1 x = k_1 \sqrt{\sin^2 \theta - n_{21}^2} = \sqrt{k_1^2 \sin^2 \theta - k_2^2}$  и возрастает с увеличением  $\theta$ .

Поперечные составляющие векторов  $\mathbf{E}_2$  и  $\mathbf{H}_2$  поперечно-продольных волн (13.49) и (13.50) имеют одинаковую фазу колебаний, а продольные составляющие сдвинуты по фазе относительно поперечных на  $\pi/2$ . Поэтому во второй среде, так же как и в первой, перенос энергии происходит только вдоль поверхности раздела (в направлении  $z^0$ ). С помощью (4.36) можно показать, что скорость распространения энергии во второй среде такая же, как и в первой, т. е. определяется соотношением  $v_s = v_1 \sin \theta$ .

Таким образом, при полном внутреннем отражении в оптически менее плотном диэлектрике вдоль границы раздела распространяется поперечно-продольная замедленная волна с экспоненциально убывающими по мере удаления от этой границы амплитудами составляющих векторов поля. Эта волна фактически существует лишь в некотором слое, прилегающем к поверхности раздела, и носит название *поверхностной* волны. В силу граничных условий (13.5) или (13.6) касательные составляющие векторов поля непрерывны на поверхности раздела. Поэтому поверхностная волна непосредственно связана с результирующей волной, распространяющейся в оптически более плотном диэлектрике, и является ее продолжением по другую сторону границы раздела.

Утверждение, что при полном внутреннем отражении энергия в среднем за период не проникает во вторую среду, может показаться противоречащим тому факту, что во второй среде существует энергия, переносимая поверхностной волной. Здесь следует подчеркнуть, что полученные выше результаты относятся к уже установившемуся режиму, а проникновение энергии во вторую среду и образование поверхностной волны происходят в процессе установления режима.

### 13.6. ПАДЕНИЕ ПЛОСКОЙ ВОЛНЫ НА ГРАНИЦУ РАЗДЕЛА ДИЭЛЕКТРИКА И ИДЕАЛЬНОГО ПРОВОДНИКА

Поскольку внутри идеального проводника поле тождественно равно нулю, то  $\dot{T}_\perp = \dot{T}_\parallel = 0$ . Для определения коэффициентов отражения воспользуемся тем, что на поверхности идеального проводника согласно (3.71) касательные составляющие результирующего вектора  $\dot{\mathbf{E}}_1$  равны нулю:

$$\dot{E}_{ny} + \dot{E}_{отр y} = 0, \quad \dot{E}_{nz} + \dot{E}_{отр z} = 0 \quad \text{при } x = 0. \quad (13.51)$$

Из (13.51) получаем в соответствии с (13.19) и (13.25) коэффициенты отражения по электрическому полю

$$R_{\perp} = R_{\parallel} = -1. \quad (13.52)$$

При этом коэффициенты отражения по магнитному полю  $R_{\perp m} = R_{\parallel m} = 1$  (ср. § 13.2).

Физически эти результаты означают, что на поверхности идеального проводника касательные составляющие векторов  $\mathbf{E}$  падающей и отраженной волн всегда равны по величине и противоположны по направлению и соответственно касательные составляющие векторов  $\mathbf{H}$  равны по величине и направлены в одну и ту же сторону (касательная составляющая вектора  $\mathbf{H}_1$  результирующего поля  $\mathbf{H}_{1\tau} = \mathbf{H}_{\text{пт}} + \mathbf{H}_{\text{отрт}} = 2\mathbf{H}_{\text{пт}}$ ) — ср. рис. 13.3 и рис. 13.4.

Значения  $|R_{\perp}| = 1$  и  $|R_{\parallel}| = 1$  характеризуют полное отражение падающей волны от поверхности идеального проводника, которое происходит при любых углах падения  $\theta$ . Результирующее поле  $\mathbf{E}_1$ ,  $\mathbf{H}_1$  в диэлектрике представляет собой при этом суперпозицию падающей и отраженной однородных плоских волн с одинаковыми амплитудами. Явные выражения для этого поля легко получить из (13.38) или (13.39), если подставить в них согласно (13.37) и (13.52) значения  $\delta_{\perp} = \pi/2$ ,  $\delta_{\parallel} = 0$ . Все отмеченные в § 13.5 свойства результирующей волны, существующей в первой среде, присущи и результирующей волне при отражении от идеально проводящей поверхности.

### 13.7. ПАДЕНИЕ ПЛОСКОЙ ВОЛНЫ НА ГРАНИЦУ РАЗДЕЛА ДИЭЛЕКТРИКА И СРЕДЫ С ПОТЕРЯМИ

Пусть однородная плоская волна, распространяющаяся в диэлектрике с параметрами  $\epsilon_{1a}$ ,  $\mu_{1a}$ , падает под углом  $\theta$  на плоскую поверхность раздела со второй средой, характеризующей параметрами  $\epsilon_{2a}$ ,  $\mu_{2a}$ ,  $\sigma_2$ . В этом случае величины  $\tilde{k}_2 = \omega \sqrt{\epsilon_{2a}\mu_{2a}}$ ,  $\tilde{n}_{21} = \sqrt{\epsilon_{2a}\mu_{2a}/\epsilon_{1a}\mu_{1a}}$  и соответственно

$$\sin \theta_{\text{пр}} = \frac{\sin \theta}{\tilde{n}_{21}} = \frac{k_1}{\tilde{k}_2} \sin \theta \quad (13.53)$$

являются комплексными, вследствие чего параметр  $\theta_{\text{пр}}$  нельзя рассматривать как геометрический угол, определяющий направление распространения преломленной волны.

Комплексному  $\sin \theta_{\text{пр}}$  соответствует комплексная величина

$$\cos \theta_{\text{пр}} = \sqrt{1 - \sin^2 \theta_{\text{пр}}} = \sqrt{\frac{\tilde{n}_{21}^2 - \sin^2 \theta}{\tilde{n}_{21}^2}} = \frac{v' - i v''}{\tilde{n}_{21}} = \frac{k_1 (v' - i v'')}{\tilde{k}_2}, \quad (13.54)$$

где введено обозначение  $v = \sqrt{\tilde{n}_{21}^2 - \sin^2 \theta} = v' - i v''$ , причем  $v'$  и  $v''$  принимают вещественные положительные значения.

Подстановка соотношений (13.53) и (13.54) в формулы § 13.2 приводит к выражениям, описывающим падение плоской волны на границу раздела диэлектрика и среды с потерями. В (13.54) физический смысл имеет лишь то значение квадратного корня, которое даст отрицательную мнимую часть  $v$ . При втором значении квадратного корня мнимая часть  $v$  получается положительной, что приводит к неограниченному возрастанию амплитуд векторов поля во второй среде с увеличением  $x$  [см. ф-лы (13.55) и (13.56); ср. § 13.5].

В диэлектрике однородные плоские падающая и отраженная волны определяются соответствующими ф-лами (13.16), (13.17) или (13.22), (13.23). Подстановка (13.54) в первое соотношение (13.21) или (13.27) позволяет легко найти коэффициент отражения, необходимый для определения комплексной амплитуды  $\dot{E}_{отр.0}$ .

Для нахождения поля во второй среде нужно определить  $T_{\perp}$  или  $T'_{\perp}$  при помощи подстановки (13.54) во вторую ф-лу (13.21) или (13.27). Подставив (13.53) и (13.54) в те выражения (13.16), (13.17) и (13.22), (13.23), которые определяют векторы поля во второй среде, получим для нормально поляризованных волн:

$$\begin{aligned} \dot{E}_2 = y^0 \dot{E}_{n0} T_{\perp} e^{-k_1 v'' x} e^{-ik_1 (v' x + z \sin \theta)}, \quad \dot{H}_2 = [-x^0 \sin \theta + \\ + z^0 (v' - i v'')] \frac{\dot{E}_{n0} T_{\perp}}{Z_{c2} \widetilde{n}_{21}} e^{-k_1 v'' x} e^{-ik_1 (v' x + z \sin \theta)} \end{aligned} \quad (13.55)$$

и для параллельно поляризованных волн:

$$\begin{aligned} \dot{E}_2 = [-x^0 \sin \theta + z^0 (v' - i v'')] \frac{\dot{E}_{n0} T'_{\parallel}}{\widetilde{n}_{11}} e^{-k_1 v'' x} e^{-ik_1 (v' x + z \sin \theta)}, \\ \dot{H}_2 = -y^0 \frac{\dot{E}_{n0} T'_{\parallel}}{Z_{c2}} e^{-k_1 v'' x} e^{-ik_1 (v' x + z \sin \theta)}. \end{aligned} \quad (13.56)$$

Волновые поверхности волн (13.55) и (13.56) описываются уравнением  $v'x + z \sin \theta = C$ , которое при различных значениях постоянной  $C$  определяет семейство параллельных плоскостей. В момент времени  $t=0$  волновая поверхность, соответствующая значению  $C=C_1$ , отсекает на осях  $x$  и  $z$  отрезки  $OA=C_1/v'$  и  $OB=C_1/\sin \theta$  (рис. 13.7). Таким образом, волны в среде с потерями являются плоскими. Направление распространения этих волн  $s^0_{np}$  перпендикулярно волновым поверхностям и образует с нормалью к поверхности раздела угол  $\varphi_{np}$ , называемый *истинным углом преломления*. Угол  $\varphi_{np}$  можно определить из соотношения (рис. 13.7):

$$\operatorname{tg} \varphi_{np} = \frac{OA}{OB} = \frac{\sin \theta}{v'} = \frac{\sin \theta}{\operatorname{Re} \sqrt{\widetilde{n}_{21}^2 - \sin^2 \theta}}. \quad (13.57)$$

При распространении в среде с потерями преломленные волны (13.55) и (13.56) затухают по закону  $e^{-k_1 v'' x}$ . Затухание этих

Подстановка соотношений (13.53) и (13.54) в формулы § 13.2 приводит к выражениям, описывающим падение плоской волны на границу раздела диэлектрика и среды с потерями. В (13.54) физический смысл имеет лишь то значение квадратного корня, которое дает отрицательную мнимую часть  $v$ . При втором значении квадратного корня мнимая часть  $v$  получается положительной, что приводит к неограниченному возрастанию амплитуд векторов поля во второй среде с увеличением  $x$  [см. ф-лы (13.55) и (13.56); ср. § 13.5].

В диэлектрике однородные плоские падающая и отраженная волны определяются соответствующими ф-лами (13.16), (13.17) или (13.22), (13.23). Подстановка (13.54) в первое соотношение (13.21) или (13.27) позволяет легко найти коэффициент отражения, необходимый для определения комплексной амплитуды  $\dot{E}_{отр.0}$ .

Для нахождения поля во второй среде нужно определить  $T_{\parallel}$  или  $T'_{\perp}$  при помощи подстановки (13.54) во вторую ф-лу (13.21) или (13.27). Подставив (13.53) и (13.54) в те выражения (13.16), (13.17) и (13.22), (13.23), которые определяют векторы поля во второй среде, получим для нормально поляризованных волн:

$$\begin{aligned} \dot{E}_2 = y^0 \dot{E}_{п0} T_{\perp} e^{-k_1 v' x} e^{-i k_1 (v' x + z \sin \theta)}, \quad \dot{H}_2 = [-x^0 \sin \theta + \\ + z^0 (v' - i v'')] \frac{\dot{E}_{п0} T_{\perp}}{Z_{c2} \tilde{n}_{21}} e^{-k_1 v' x} e^{-i k_1 (v' x + z \sin \theta)} \end{aligned} \quad (13.55)$$

и для параллельно поляризованных волн:

$$\begin{aligned} \dot{E}_2 = [-x^0 \sin \theta + z^0 (v' - i v'')] \frac{\dot{E}_{п0} T'_{\parallel}}{\tilde{n}_{11}} e^{-k_1 v' x} e^{-i k_1 (v' x + z \sin \theta)}, \\ \dot{H}_2 = -y^0 \frac{\dot{E}_{п0} T'_{\parallel}}{Z_{c2}} e^{-k_1 v' x} e^{-i k_1 (v' x + z \sin \theta)}. \end{aligned} \quad (13.56)$$

Волновые поверхности волн (13.55) и (13.56) описываются уравнением  $v'x + z \sin \theta = C$ , которое при различных значениях постоянной  $C$  определяет семейство параллельных плоскостей. В момент времени  $t=0$  волновая поверхность, соответствующая значению  $C=C_1$ , отсекает на осях  $x$  и  $z$  отрезки  $OA=C_1/v'$  и  $OB=C_1/\sin \theta$  (рис. 13.7). Таким образом, волны в среде с потерями являются плоскими. Направление распространения этих волн  $s_{пр}^0$  перпендикулярно волновым поверхностям и образует с нормалью к поверхности раздела угол  $\varphi_{пр}$ , называемый *истинным углом преломления*. Угол  $\varphi_{пр}$  можно определить из соотношения (рис. 13.7):

$$\operatorname{tg} \varphi_{пр} = \frac{OA}{OB} = \frac{\sin \theta}{v'} = \frac{\sin \theta}{\operatorname{Re} \sqrt{\tilde{n}_{21}^2 - \sin^2 \theta}}. \quad (13.57)$$

При распространении в среде с потерями преломленные волны (13.55) и (13.56) затухают по закону  $e^{-k_1 v' x}$ . Затухание этих

волн определяется расстоянием, пройденным ими в поглощающей среде, вследствие чего поверхности одинаковых амплитуд представляют собой плоскости  $x = \text{const}$ , параллельные поверхности раздела. Поскольку плоскости одинаковых амплитуд и плоские волновые поверхности пересекаются друг с другом под углом

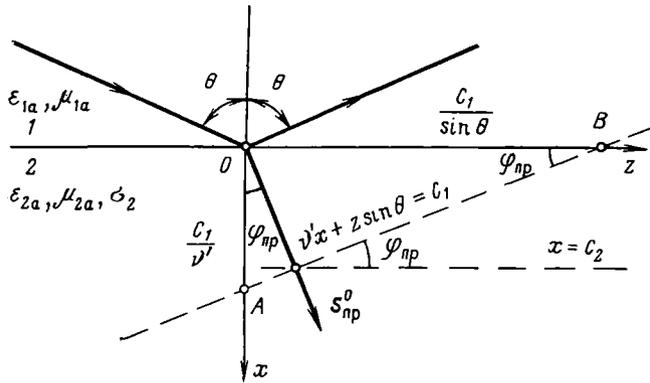


РИС. 13.7

$\varphi_{np}$  (см. рис. 13.7), то при угле падения  $\theta \neq 0$  в среде с потерями распространяются неоднородные плоские преломленные волны.

Рассмотрим важный для практики случай падения однородной волны на границу раздела с проводником (например, реальным металлом). Учтя справедливое для проводника неравенство  $\sigma_2/\omega\epsilon_{2a} \gg 1$  (см. § 3.12), получим

$$\begin{aligned} \tilde{n}_{21} &= \sqrt{\frac{(\epsilon_{2a} - i \frac{\sigma_2}{\omega}) \mu_{2a}}{\epsilon_{1a} \mu_{1a}}} \approx \sqrt{-i \frac{\sigma_2 \mu_{2a}}{\epsilon_{1a} \mu_{1a} \omega}} = \\ &= \sqrt{\frac{\sigma_2 \mu_{2a}}{\epsilon_{1a} \mu_{1a} \omega}} e^{-i \frac{\pi}{4}} = \sqrt{\frac{\sigma_2 \mu_{2a}}{2 \epsilon_{1a} \mu_{1a} \omega}} (1 - i), \end{aligned} \quad (13.58)$$

где  $|\tilde{n}_{21}| = \sqrt{\sigma_2 \mu_{2a} / \epsilon_{1a} \mu_{1a} \omega} \gg 1$ . При этом в выражении для  $v$  можно пренебречь  $\sin^2 \theta$  по сравнению с  $\tilde{n}_{21}^2$ :

$$v = \sqrt{\tilde{n}_{21}^2 - \sin^2 \theta} \approx \tilde{n}_{21} = v' - i v'', \quad (13.59)$$

где  $v' = v'' = \sqrt{\sigma_2 \mu_{2a} / 2 \epsilon_{1a} \mu_{1a} \omega} \gg 1$ . В рассматриваемом случае составляющая  $H_z$  в (13.55) по порядку величины в  $\tilde{n}_{21}$  раз больше  $H_x$ , в (13.56) то же самое можно сказать относительно  $E_z$  и  $E_x$ . Пренебрегая  $H_x$  и  $E_x$  по сравнению с  $H_z$  и  $E_z$  и воспользовавшись (13.59), получим для преломленных волн (13.55) и (13.56) соот-

ветственно следующие приближенные выражения:

$$\begin{aligned} \dot{E}_{\text{пр}y} &= Z_{c2} \dot{H}_{\text{пр}z} = \dot{E}_{\text{н}0} T_{\perp} e^{-k_1 v'' x} e^{-i k_1 (v' x + z \sin \theta)}, \\ \dot{E}_{\text{пр}z} &= -Z_{c2} \dot{H}_{\text{пр}y} = \dot{E}_{\text{н}0} T'_{\parallel} e^{-k_1 v'' x} e^{-i k_1 (v' x + z \sin \theta)}. \end{aligned} \quad (13.60)$$

Согласно (13.57) при учете неравенства  $v' \gg 1$  имеем

$$\text{tg } \varphi_{\text{пр}} = \frac{\sin \theta}{v'} \approx 0, \quad \varphi_{\text{пр}} \approx 0. \quad (13.61)$$

Таким образом, при любом угле падения  $\theta$  преломленные волны распространяются в глубь проводника почти в направлении нормали к поверхности раздела и являются практически поперечными волнами. В (13.60) произведение  $k_1 v''$  играет роль коэффициента затухания. Учтя вытекающее из (13.59) выражение для  $v''$ , находим  $k_1 v'' = \sqrt{\mu_{2a} \sigma_2 \omega / 2} = \alpha_2$ , где  $\alpha_2$  совпадает с коэффициентом затухания (11.26), характеризующим однородную волну в проводнике. Таким образом, можно приближенно считать, что преломленные волны в проводнике представляются собой однородные плоские волны, распространяющиеся нормально к границе раздела. Напряженности  $\dot{E}_{\text{пр}}$  и  $\dot{H}_{\text{пр}}$  этих волн отличаются по величине друг от друга в  $Z_{c2}$  раз, параллельны границе раздела и образуют с направлением распространения волны правую ортогональную тройку векторов:

$$\dot{E}_{\text{пр}} = Z_{c2} [\dot{H}_{\text{пр}} n_{21}^0], \quad (13.62)$$

где  $n_{21}^0 = x^0$  — орт, направленный по нормали к поверхности раздела внутрь проводника. В соответствии с § 11.3 амплитуды векторов  $\dot{E}_{\text{пр}}$  и  $\dot{H}_{\text{пр}}$  весьма быстро затухают по экспоненциальному закону в направлении распространения, вследствие чего волны проникают лишь в очень тонкий поверхностный слой проводника, прилегающий к границе раздела.

### 13.8. ПРИБЛИЖЕННЫЕ ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ ЛЕОНТОВИЧА — ЩУКИНА

Соотношение (13.62) справедливо во второй среде и возле поверхности раздела. Поскольку векторы  $\dot{E}_{\text{пр}}$  и  $\dot{H}_{\text{пр}}$  касательны к этой поверхности, то в силу граничных условий (3.70) такое же соотношение должно быть справедливо на границе раздела и в первой среде для касательных составляющих векторов *результующего* поля  $\dot{E}_{1\tau}$  и  $\dot{H}_{1\tau}$ :

$$\dot{E}_{1\tau} = Z_{c2} [\dot{H}_{1\tau} n_{21}^0]. \quad (13.63)$$

Независимость ф-л (13.62) и (13.63) от угла падения  $\theta$  приводит к их приближенной справедливости не только при наклонном падении однородной плоской волны на плоскую поверхность раздела, но и в случае падения произвольной волны на криволинейную поверхность проводящего тела. Если глубина проникновения  $d$  волны в проводник весьма мала по сравнению со всеми раз-

мерами проводящего тела и минимальными радиусами кривизны поверхности тела и волновой поверхности падающей волны возле этого тела, то поле в окрестности каждой точки внутри проводника приближенно представляет собой однородную плоскую волну вида (13.62). Эта локально плоская волна распространяется в глубину проводника в направлении нормалей к его поверхности и весьма быстро затухает по амплитуде в этом направлении. Отсюда следует приближенная справедливость и ф-лы (13.63).

Формула (13.63) связывает между собой касательные составляющие векторов поля в *одной и той же среде* на границе раздела с проводником и носит название *приближенных граничных условий Леонтовича—Шукина*. Фигурирующее в этих условиях характеристическое сопротивление волны в проводнике, которое определяет на поверхности раздела соотношение между касательными компонентами  $\dot{E}_{1\tau}$  и  $\dot{H}_{1\tau}$  поля в диэлектрике, называют *поверхностным импедансом*. Соответственно граничные условия вида (13.63) часто называют *импедансными граничными условиями*.

Важный аспект использования граничных условий Леонтовича—Шукина связан с приближенным определением мощности поля, поглощаемой проводником и выделяемой в нем в форме тепла. Из (13.63) следует, что на поверхности реального проводника касательная составляющая  $\dot{E}_{1\tau} \neq 0$ . Поскольку в хорошем проводнике значение  $|Z_c|$  согласно (11.26) весьма мало, то и касательная составляющая  $\dot{E}_{1\tau}$  на его поверхности будет весьма мала по величине. Поэтому ею часто пренебрегают при отыскании поля вне проводника, что равносильно замене реального проводника идеальным (см. § 3.10). Однако касательная составляющая  $\dot{E}_{1\tau}$  определяет нормальную к поверхности проводника компоненту вектора Пойнтинга, обуславливающую уходящую в проводник мощность. Вследствие этого при определении тепловых потерь в проводнике необходимо учитывать эту составляющую. В простейшем приближенном методе составляющую  $\dot{E}_{1\tau}$  находят следующим образом. Вначале определяют электромагнитное поле в диэлектрике, полагая поверхность проводника идеально проводящей ( $\sigma_2 = \infty$ ,  $E_{1\tau} = 0$ ). Затем касательную составляющую  $\dot{H}_{1\tau}$  на поверхности реального проводника приближенно принимают такой же, какой она получилась для идеального проводника<sup>1)</sup>, и при помощи (13.63) по известному значению  $\dot{H}_{1\tau}$  определяют  $\dot{E}_{1\tau}$ .

Можно доказать (например, [16]), что единственность решения уравнений Максвелла обеспечивается не только заданием в явном виде значений  $\dot{E}_\tau$  или  $\dot{H}_\tau$  на поверхности  $S$ , ограничиваю-

<sup>1)</sup> Касательная составляющая  $\dot{H}_{1\tau}$  отлична от нуля на поверхности идеального проводника, и при переходе к реальному хорошему проводнику поправка первого порядка малости по сравнению со значением этой составляющей может не учитываться.

щей рассматриваемый объем  $V$  (как это было показано в гл. 5), но и в случае удовлетворения полем на поверхности  $S$  импедансным граничным условиям вида (13.63). Использование этих условий позволяет решать внешние и внутренние задачи только для диэлектрической области и учитывать при этом влияние хорошо проводящих тел на поле в диэлектрике.

## Глава 14

### ПОВЕРХНОСТНЫЙ ЭФФЕКТ



#### 14.1. СИЛЬНЫЙ И СЛАБЫЙ ПОВЕРХНОСТНЫЙ ЭФФЕКТ

Из § 13.8 нам известно, что если глубина проникновения  $d$  в проводник электромагнитного поля частоты  $\omega$  весьма мала по сравнению с размерами проводящего тела и радиусами кривизны его поверхности, то поле внутри этого тела приближенно представляет собой локально плоскую волну, распространяющуюся в глубь проводника в направлениях нормалей  $\mathbf{k}$  к его поверхности. Амплитуды этой волны весьма быстро затухают по экспоненциальному закону в направлении ее распространения, вследствие чего поле существует лишь в очень тонком *поверхностном* слое, толщина которого равна нескольким глубинам проникновения  $d$  (см. § 11.3). Это явление называют *сильно выраженным поверхностным эффектом* (скин-эффектом). При сильном поверхностном эффекте на поверхности проводящего тела справедливы приближенные граничные условия Леонтовича—Щукина (13.63).

Сильный поверхностный эффект, в частности, используют для создания металлических экранов, защищающих от ненужного воздействия переменного электромагнитного поля. Если замкнутый экран толщиной в несколько  $d$  охватывает некоторый объем, то внешнее и внутреннее по отношению к этому объему переменные поля практически не проникают сквозь экран.

Если не выполняются отмеченные выше требования к размерам и радиусам кривизны проводящего тела, то поверхностный эффект является *слабым* и выражается в концентрации электромагнитного поля внутри тела вблизи его поверхности, которая подчиняется более сложным закономерностям, чем при сильном поверхностном эффекте. Например, если толщина проводящего тела соизмерима с глубиной проникновения  $d$ , то наряду с волнами, идущими в глубь тела, существуют также волны, идущие к его поверхности, вследствие чего приближенные граничные условия (13.63) несправедливы. Эти идущие к поверхности тела волны появляются в результате прохождения волн через всю толщу тела и отражения от границы раздела проводник—диэлектрик.

Внутри проводника согласно соотношению  $\delta_{\text{пр}} = \sigma \dot{\mathbf{E}}$  плотность тока проводимости изменяется по тому же закону, что и напряженность электрического поля. В силу поверхностного эффекта переменный ток оказывается сконцентрированным у поверхности проводника. Ниже будет показано, что концентрация поля и тока в поверхностном слое проводника приводит к увеличению активного сопротивления проводника и уменьшению его внутренней индуктивности по сравнению со значениями этих величин для стационарного поля и постоянного тока.

#### 14.2. ЭКВИВАЛЕНТНЫЙ ПОВЕРХНОСТНЫЙ ТОК И СОПРОТИВЛЕНИЕ ПРОВОДНИКА ПРИ СИЛЬНОМ ПОВЕРХНОСТНОМ ЭФФЕКТЕ

Пусть плоскость  $yOz$  совмещена с поверхностью раздела однородных диэлектрика и проводника и в глубь проводника (область  $x > 0$ ) нормально к его поверхности распространяется *однородная плоская волна* (рис. 14.1). Условимся, что вектор  $\mathbf{E}_2$  этой волны и, следовательно, вектор  $\delta_{\text{пр}} = \sigma_2 \dot{\mathbf{E}}_2$  направлены по оси  $y$ . Выде-

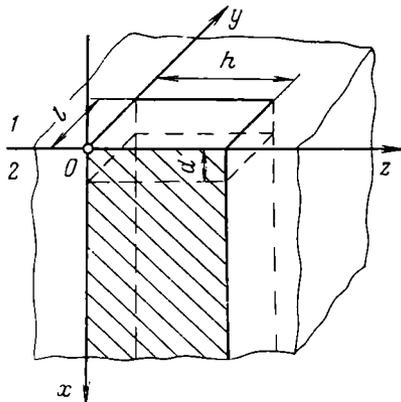


РИС. 14.1

лим мысленно в проводнике площадь единичной ширины  $h$ , ориентированную перпендикулярно вектору  $\delta_{\text{пр}}$  (на рисунке заштрихована), и определим ток проводимости сквозь нее

$$I_{\text{пр}} = \int_S \dot{\mathbf{e}}_{\text{пр}} d\mathbf{S} = \int_0^1 dz \int_0^{\infty} \delta_{\text{пр}} dx = \int_0^{\infty} \delta_{\text{пр}} dx. \quad (14.1)$$

Здесь учтено, что в случае однородной плоской волны вектор  $\delta_{\text{пр}}$  от координаты  $z$  не зависит. Введение в (14.1) бесконечного верхнего предела отражает то обстоятельство, что при сильном поверхностном эффекте распределения поля и плотности тока в

направлении нормали к поверхности раздела такие же, как и при бесконечной глубине проводника.

Поскольку при сильном поверхностном эффекте ток проводимости занимает лишь весьма малую часть объема проводящего тела, прилегающую к его поверхности, то часто оказывается удобным условно заменить этот ток равным ему по величине (эквивалентным) поверхностным током. Плотность  $\dot{\eta}$  этого эквивалентного *поверхностного* тока связана с  $\dot{\delta}_{\text{пр}}$  очевидным соотношением

$$\dot{\eta} = \int_0^{\infty} \dot{\delta}_{\text{пр}} dx = \sigma_2 \int_0^{\infty} \dot{E}_2 dx. \quad (14.2)$$

Для комплексной амплитуды  $\dot{E}_2$  имеем

$$\dot{E}_2 = \dot{E}_{1\tau} e^{-\gamma_2 x}, \quad (14.3)$$

где  $\dot{E}_{1\tau}$  — значение амплитуды на поверхности проводника, равное касательной к этой поверхности компоненте вектора  $\dot{E}_1$  в диэлектрике;  $\gamma_2 = \alpha_2 + i\beta_2$  определяется соотношениями (11.26) и с учетом выражения для  $d$  (11.27) приводится к виду

$$\gamma_2 = \alpha_2 + i\beta_2 = (1 + i)/d, \quad d = \sqrt{\frac{2}{\mu_{2a}\sigma_2\omega}}. \quad (14.4)$$

Подставив (14.3) и (14.4) в (14.2), получим

$$\dot{\eta} = \sigma_2 \int_0^{\infty} \dot{E}_{1\tau} e^{-\frac{1+i}{d}x} dx = \frac{\sigma_2 d \dot{E}_{1\tau}}{1+i}. \quad (14.5)$$

Выразив  $\dot{E}_{1\tau}$  из (13.63) и заменив при этом  $Z_{c2}$  согласно (11.26) соотношением

$$Z_{c2} = \sqrt{\frac{\mu_{2a}\omega}{\sigma_2}} e^{i\pi/4} = \sqrt{\frac{\mu_{2a}\omega}{2\sigma_2}} (1+i) = \frac{1+i}{\sigma_2 d}, \quad (14.6)$$

получим вместо (14.5) следующую приближенную формулу для плотности эквивалентного поверхностного тока:

$$\dot{\eta} = [\dot{H}_{1\tau} n_{21}^0], \quad (14.7)$$

где  $n_{21}^0 = x^0$  — нормаль, направленная внутрь проводника. При учете тождества  $[\dot{H}_{1\tau} n_{21}^0] = H_{1\tau} [n_{21}^0 n_{21}^0] \equiv 0$  ф-ла (14.7) может быть представлена также в виде

$$\eta = [\dot{H}_1 n_{21}^0]. \quad (14.8)$$

Приближенная ф-ла (14.8) по своему виду аналогична граничному условию (3.71) на поверхности идеального проводника.

Из (14.5) следует, что величина касательной составляющей напряженности электрического поля на поверхности проводника

$\dot{E}_{1\tau}$  пропорциональна плотности эквивалентного поверхностного тока  $\eta$ :

$$\dot{E}_{1\tau} = Z_S \dot{\eta}. \quad (14.9)$$

Коэффициент пропорциональности  $Z_S$  называют *поверхностным сопротивлением* проводника при сильном поверхностном эффекте. Из (14.9), (14.5) и (14.6) видно, что поверхностное сопротивление проводника равно характеристическому сопротивлению волны в нем:

$$Z_S = Z_{c2} = (1 + i)/\sigma_2 d = r_S + i x_S. \quad (14.10)$$

Таким образом, значения активного  $r_S$  и реактивного  $x_S$  поверхностных сопротивлений проводника одинаковы и выражаются соотношением

$$r_S = x_S = \sqrt{\frac{\mu_{22}\omega}{2\sigma_2}} = 1/\sigma_2 d. \quad (14.11)$$

Выделим мысленно в проводнике объем в виде прямоугольного параллелепипеда, имеющего квадратное основание  $l \times h$  с площадью, равной единице (см. рис. 14.1). Покажем, что поверхностное сопротивление  $Z_S$  определяет при сильном поверхностном эффекте активное и внутреннее реактивное сопротивления этого проводящего объема. С этой целью применим к указанному объему теорему о комплексной мощности (4.32). Учтя, что внутри объема отсутствуют сторонние токи, и воспользовавшись справедливым для проводника приближенным соотношением  $\epsilon_{2a} \approx \approx -i\sigma_2/\omega$ , что эквивалентно пренебрежению в теореме слагаемым  $W_{в.ср}$  (как нам известно, в проводнике энергия магнитного поля значительно превышает энергию электрического поля), имеем

$$-\oint_S \tilde{\mathbf{P}} d\mathbf{S} = P_{п.ср} + i 2\omega W_{в.ср}, \quad (14.12)$$

где нормаль к  $d\mathbf{S}$  направлена *наружу* из параллелепипеда. Величина  $\tilde{S} = -\oint_S \tilde{\mathbf{P}} d\mathbf{S}$  есть комплексная мощность, поступающая

*внутрь* объема параллелепипеда через его поверхность  $S$ .

Поскольку в глубь проводника распространяется однородная волна, вектор  $\tilde{\mathbf{P}}$  которой направлен по оси  $x$  и которая полностью затухает, не достигнув нижнего основания параллелепипеда, то  $\tilde{S}$  определяется лишь потоком вектора  $\tilde{\mathbf{P}}$  сквозь верхнее основание, лежащее на поверхности проводника:

$$\tilde{S} = -\oint_S \tilde{\mathbf{P}} d\mathbf{S} = -\tilde{\mathbf{P}}_1 (-\mathbf{n}_{21}^0) hl = \tilde{\mathbf{P}}_1 \mathbf{n}_{21}^0 = \tilde{\mathbf{P}}_{1n}. \quad (14.13)$$

Здесь  $\tilde{\mathbf{P}}_{1n}$  — нормальная компонента вектора  $\tilde{\mathbf{P}}_1$  в диэлектрике у поверхности проводника, которая при учете (13.63) определяется из соотношения  $\tilde{\mathbf{P}}_{1n} = \frac{1}{2} [\dot{E}_{1\tau} \dot{\mathbf{H}}_{1\tau}^*] = \frac{Z_{c2}}{2} [\dot{\mathbf{H}}_{1\tau} \mathbf{n}_{021}^0] \dot{\mathbf{H}}_{1\tau}^*$ . С по-

мощью (П1.2), (П1.4) и (14.10) вместо этого соотношения получим  $\tilde{\Pi}_{1n} = n^0_{21} Z_S \frac{|\dot{H}_{1\tau}|^2}{2}$  и соответственно вместо (14.13) имеем

$$\tilde{S} = - \oint_S \tilde{\Pi} dS = Z_S \frac{|\dot{H}_{1\tau}|^2}{2} = (r_S + i x_S) \frac{|\dot{H}_{1\tau}|^2}{2}. \quad (14.14)$$

Выделив в (14.12) вещественную и мнимую части и приняв во внимание (14.14), находим:

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \tilde{S} &= r_S \frac{|\dot{H}_{1\tau}|^2}{2} = P_{\text{п.ср}}, \\ \operatorname{Im} \tilde{S} &= x_S \frac{|\dot{H}_{1\tau}|^2}{2} = 2\omega W_{\text{м.ср}}. \end{aligned} \quad (14.15)$$

В соответствии с (14.1), (14.2) и (14.7) имеем  $I_{\text{пр}m} = |\dot{\eta}| = |\dot{H}_{1\tau}|$ . Зная согласно (14.15) выражения для средней мощности  $P_{\text{п.ср}}$ , поглощаемой в параллелепипеде с единичной площадью квадратного основания в результате тепловых потерь, и реактивной мощности, определяемой в проводящем параллелепипеде энергией внутреннего магнитного поля, а также действующее значение тока  $I_{\text{пр}} = I_{\text{пр}m} / \sqrt{2} = |\dot{H}_{1\tau}| / \sqrt{2}$ , протекающего через параллелепипед, легко определить активное сопротивление  $r$  и внутреннюю индуктивность  $L_{\text{вн}}$  этого параллелепипеда

$$Z_{\text{вн}} = r + i\omega L_{\text{вн}} = \frac{\tilde{S}}{I_{\text{пр}}^2} = \frac{\operatorname{Re} \tilde{S} + i \operatorname{Im} \tilde{S}}{\frac{1}{2} |\dot{H}_{1\tau}|^2} = r_S + i x_S = Z_S. \quad (14.16)$$

Таким образом, действительно, при сильном поверхностном эффекте внутреннее сопротивление  $Z_{\text{вн}}$  части проводящего тела, которая приходится на единицу его поверхности, равно поверхностному сопротивлению проводника  $Z_S$ .

При постоянном токе, равномерно заполняющем все поперечное сечение  $S$  проводника, сопротивление проводника длиной  $l$  определяется формулой  $r = \frac{l}{\sigma_2 S}$ . Сопоставление соотношения (14.11) для  $r_S$  с последним выражением показывает, что активное поверхностное сопротивление проводника численно равно сопротивлению при постоянном токе слоя проводника толщины  $d$  и единичных длины  $l$  и ширины  $h$  (см. рис. 14.1). Отсюда и из (14.16) следует, что в случае сильного поверхностного эффекта при определении тепловых потерь можно заменить реальный переменный ток, экспоненциально убывающий в глубину проводника, воображаемым постоянным током, который равен действующему значению переменного тока и равномерно заполняет поверхностный слой толщины  $d$ . С увеличением частоты  $\omega$  толщина слоя  $d$  уменьшается и соответственно активное сопротивление проводника *увеличивается*.

При сильном поверхностном эффекте внутренняя индуктивность  $L_{вн}$ , приходящаяся на единицу поверхности проводника определится в соответствии с (14.16) и (14.11) выражением

$$L_{вн} = x_S/\omega = \sqrt{\frac{\mu_2 a}{2\sigma_2 \omega}}. \quad (14.17)$$

С увеличением  $\omega$  увеличивается коэффициент затухания  $\alpha_2$  и соответственно уменьшается запасенная внутри проводника энергия  $W_{м.ср}$ . Поскольку  $L_{вн} = 2W_{м.ср}/I^2_{пр}$ , то это приводит к уменьшению  $L_{вн}$  с ростом  $\omega$  (см. [14, 17]).

Введенные выше понятия поверхностных эквивалентного тока и сопротивления можно обобщить и на другие случаи сильного поверхностного эффекта, характеризуемого существованием в проводнике локально плоской волны, которая распространяется в глубь проводника нормально к его поверхности (см., например, § 14.4).

#### 14.3. СРЕДНЯЯ МОЩНОСТЬ ТЕПЛОВЫХ ПОТЕРЬ В ПРОВОДЯЩЕМ ТЕЛЕ ПРИ СИЛЬНОМ ПОВЕРХНОСТНОМ ЭФФЕКТЕ

При сильном поверхностном эффекте средняя мощность, проходящая через элемент  $dS$  поверхности проводящего тела и поглощаемая в нем в результате тепловых потерь, определится согласно § 14.2 соотношением

$$dP_{п.ср} = \text{Re} \tilde{\Pi}_n dS = r_S \frac{|\dot{H}_\tau|^2}{2} dS. \quad (14.18)$$

Здесь  $\dot{H}_\tau$  — тангенциальная составляющая напряженности магнитного поля на элементе  $dS$ . Средняя мощность тепловых потерь во всем проводящем теле находится путем интегрирования (14.18) по поверхности  $S$  тела:

$$P_{п.ср} = \frac{r_S}{2} \oint_S |\dot{H}_\tau|^2 dS, \quad (14.19)$$

где  $r_S = \sqrt{\mu_a \omega / 2\sigma} = 1/\sigma d$ ,  $d = \sqrt{2/\mu_a \sigma \omega}$ ,  $\mu_a$  и  $\sigma$  — параметры проводящего тела.

Для практического использования ф-лы (14.19) нужно знать значения  $\dot{H}_\tau$  на поверхности тела. В соответствии с методом определения потерь, изложенным в § 13.8, обычно приближенно принимают касательную составляющую  $\dot{H}_\tau$  на поверхности проводника такой же, какой бы она была при  $\sigma = \infty$ .

#### 14.4. СОПРОТИВЛЕНИЕ ЦИЛИНДРИЧЕСКОГО ПРОВОДА

Рассмотрим прямолинейный металлический цилиндрический провод радиуса  $a$ , по которому течет ток проводимости частоты  $\omega$ . Введем цилиндрическую систему координат  $(r, \psi, z)$ , ось  $z$

которой совмещена с осью провода. Будем считать, что внутри провода плотность тока проводимости и связанная с ней напряженность электрического поля имеют лишь составляющие вдоль оси  $z$  ( $\dot{\delta}_{\text{пр}} = \sigma_2 \dot{E}_z$ ,  $\dot{E}_z = z^0 E_{2z}$ ) и что на рассматриваемом участке провода можно пренебречь зависимостью тока и поля от расстояния вдоль этой оси. Вследствие осевой симметрии задачи распределение тока и электромагнитного поля не зависит от цилиндрической угловой координаты  $\psi$  и векторные линии  $\mathbf{H}$  представляют собой окружности ( $\mathbf{H} = \psi^0 \dot{H}_\psi$ ).

Докажем, прежде всего, что при осесимметричном распределении электромагнитного поля погонным внутренним сопротивлением цилиндрического провода является коэффициент пропорциональности  $Z'_{\text{вн}}$  в соотношении

$$\dot{E}_{1z} = Z'_{\text{вн}} \dot{I}_{\text{пр}}, \quad (14.20)$$

где  $\dot{E}_{1z}$  — комплексная амплитуда на поверхности провода продольной составляющей  $E_z$ ;  $\dot{I}_{\text{пр}}$  — комплексная амплитуда тока проводимости через все поперечное сечение провода.

Для доказательства определим комплексную мощность  $\tilde{S} = - \oint_S \tilde{\Pi} dS$ , которая поступает внутрь объема провода единичной длины через ограничивающую его поверхность  $S$  (нормаль к  $dS$  направлена наружу из объема). Нормальная к боковой поверхности провода  $S_6$  компонента вектора  $\tilde{\Pi}$  определяется касательными к этой поверхности составляющими  $\dot{E}_{1z} = z^0 \dot{E}_{1z}$  и  $\dot{H}_{1\psi} = \psi^0 \dot{H}_{1\psi}$ :

$$\tilde{\Pi}_{1r} = \frac{1}{2} [\dot{E}_{1z} \dot{H}_{1\psi}^*] = \frac{1}{2} \dot{E}_{1z} \dot{H}_{1\psi}^* [z^0 \psi^0] = -r^0 \frac{1}{2} \dot{E}_{1z} \dot{H}_{1\psi}^*. \quad (14.21)$$

Здесь знак «минус» указывает, что вектор  $\tilde{\Pi}_{1r}$  направлен *внутрь* провода. Поскольку у вектора  $\dot{E}_z = z^0 \dot{E}_{2z}$  составляющая, касательная к поперечным сечениям провода, отсутствует, то нормальная к этим сечениям компонента  $\tilde{\Pi}_{2z} = 0$ . Таким образом, имеем

$$\tilde{S} = - \int_{S_6} \tilde{\Pi}_{1r} r^0 dS = \frac{1}{2} \int_{S_6} \dot{E}_{1z} \dot{H}_{1\psi}^* dS. \quad (14.22)$$

Вынеся  $\dot{E}_{1z}$  из-под интеграла, представив  $dS$  как  $dl dz$ , где  $dl$  — элемент дуги окружности, и учтя, что интегрирование по  $z$  дает единицу длины (провода), получим вместо (14.22)

$$\tilde{S} = \frac{1}{2} \dot{E}_{1z} \oint_L \dot{H}_{1\psi}^* dl, \quad (14.23)$$

где интегрирование осуществляется по контуру  $L$ , имеющему вид окружности радиуса  $r = a$ .

Пренебрегая внутри хорошего проводника током смещения по сравнению с током проводимости, получим следующее выраже-

ние закона полного тока для контура  $L$  (совпадающего с линией  $\mathbf{H}$  осесимметричного поля):

$$\oint_L \dot{\mathbf{H}}_{1\psi} dl = \oint_L \dot{H}_{1\psi} dl = \int_S \dot{\delta}_{\text{пр}z} z^0 dS = I_{\text{пр}}. \quad (14.24)$$

Заменим в (14.23)  $\dot{E}_{1z}$  согласно (14.20) и интеграл согласно (14.24):

$$\tilde{S} = \frac{1}{2} Z'_{\text{вн}} |I_{\text{пр}}|^2 = Z'_{\text{вн}} \left( \frac{I_{\text{пр}m}}{\sqrt{2}} \right)^2, \quad (14.25)$$

где  $I_{\text{пр}m}/\sqrt{2}$  — действующее значение тока проводимости через все поперечное сечение провода. Из (14.25) следует, что введенная соотношением (14.20) величина  $Z'_{\text{вн}}$  действительно определяет внутреннее сопротивление единицы длины цилиндрического провода [ср. с (14.16)].

При сильном поверхностном эффекте ( $d \ll a$ ) осесимметрично распределенный ток  $I_{\text{пр}}$  через поперечное сечение провода связан с плотностью эквивалентного поверхностного тока очевидным соотношением

$$I_{\text{пр}} = \dot{\eta} 2\pi a, \quad (14.26)$$

где  $2\pi a$  — периметр провода. Выразив  $Z'_{\text{вн}}$  из (14.20), получим при учете (14.26) и (14.9) следующий простой результат:

$$Z'_{\text{вн}} = \frac{\dot{E}_{1z}}{I_{\text{пр}}} = \frac{\dot{E}_{1z}}{2\pi a \dot{\eta}} = \frac{Z_S}{2\pi a} = \frac{1+i}{2\pi a \sigma_2 d}. \quad (14.27)$$

Таким образом, на достаточно высоких частотах  $\omega$  (при  $d \ll a$ ) погонное внутреннее сопротивление цилиндрического провода имеет индуктивный характер:  $Z'_{\text{вн}} = r' + i\omega L'_{\text{вн}}$ , причем согласно (14.17)

$$L'_{\text{вн}} = \frac{1}{2\pi a} \sqrt{\frac{\mu_{2a}}{2\sigma_2 \omega}}.$$

При слабом поверхностном эффекте ток проводимости  $I_{\text{пр}}$  нельзя выразить соотношением (14.26). Чтобы в этом случае из (14.20) определить  $Z'_{\text{вн}}$  провода, нужно вначале найти распределение  $\dot{\mathbf{E}}_2$  в проводе, а затем интегрированием  $\delta_{\text{пр}} = \sigma_2 \dot{\mathbf{E}}_2$  по поперечному сечению найти значение  $I_{\text{пр}}$ .

Внутри однородного провода вектор  $\dot{\mathbf{E}}_2$  удовлетворяет ур-ниям (6.10) и условиям  $\dot{\mathbf{E}}_2 = z^0 \dot{E}_{2z}$ ,  $\frac{\partial \dot{E}_{2z}}{\partial \psi} = 0$  (осевая симметрия поля) и  $\frac{\partial \dot{E}_{2z}}{\partial z} = 0$  (поле не зависит от расстояния вдоль оси). С помощью (П1.32) легко проверить, что при этих условиях второе ур-ние (6.10) удовлетворяется само собой. Соотношения (П1.39) и  $\dot{\mathbf{E}}_2 = z^0 \dot{E}_{2z}$  позволяют перейти от векторного ур-ния (6.10) к скалярному:

$$\nabla^2 \dot{E}_{2z} + \tilde{k}_2^2 \dot{E}_{2z} = 0. \quad (14.28)$$

В соответствии с (П1.34) и условиями  $\frac{\partial \dot{E}_{2z}}{\partial \psi} = \frac{\partial \dot{E}_{2z}}{\partial z} = 0$  получим вместо (14.28)

$$\frac{\partial^2 \dot{E}_{2z}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \dot{E}_{2z}}{\partial r} + \tilde{k}_2^2 \dot{E}_{2z} = 0. \quad (14.29)$$

Это уравнение совпадает с ур-нием (П2.1), в котором  $m=0$ . Поскольку точка  $r=0$  принадлежит объему цилиндрического провода, то согласно (П2.9) и (П2.2) решением ур-ния (14.29) является функция Бесселя нулевого порядка:

$$\dot{E}_{2z} = A J_0(\tilde{k}_2 r). \quad (14.30)$$

При  $r=a$  (на поверхности провода) имеем  $\dot{E}_{2z} = \dot{E}_{1z} = A J_0(\tilde{k}_2 a)$ . Определив отсюда произвольную постоянную  $A$ , получим вместо (14.30)

$$\dot{E}_{2z} = \dot{E}_{1z} \frac{J_0(\tilde{k}_2 r)}{J_0(\tilde{k}_2 a)}. \quad (14.31)$$

Для определения тока проводимости  $I_{\text{пр}}$  проинтегрируем  $\dot{E}_{2z}$  по поперечному сечению провода:

$$I_{\text{пр}} = \sigma_2 \int_0^{2\pi} d\psi \int_0^a \dot{E}_{2z} r dr = \frac{2\pi \sigma_2 \dot{E}_{1z}}{J_0(\tilde{k}_2 a)} \int_0^a r J_0(\tilde{k}_2 r) dr. \quad (14.32)$$

Вычислив интеграл в (14.32) с помощью (П2.17), получим

$$I_{\text{пр}} = \frac{2\pi a \sigma_2 \dot{E}_{1z}}{\tilde{k}_2} \frac{J_1(\tilde{k}_2 a)}{J_0(\tilde{k}_2 a)}. \quad (14.33)$$

В соответствии с (14.20) и (14.33) погонное внутреннее сопротивление цилиндрического провода

$$Z'_{\text{вн}} = \frac{\dot{E}_{1z}}{I_{\text{пр}}} = \frac{\tilde{k}_2}{2\pi a \sigma_2} \frac{J_0(\tilde{k}_2 a)}{J_1(\tilde{k}_2 a)}. \quad (14.34)$$

Выражение (14.34) справедливо при любых значениях частоты  $\omega$  и включает в себя как предельные частные случаи и сильный поверхностный эффект, и постоянный ток. Покажем это.

В проводнике согласно (11.13), (11.26) и (11.27)  $\tilde{k}_2 = -i\gamma_2 = = \beta_2 - i\alpha_2 = (1-i)/d$ . Следовательно, при  $a \gg d$  (сильный поверхностный эффект) модуль комплексного аргумента  $|\tilde{k}_2 a| \gg 1$  и в (14.34) функции Бесселя можно заменить согласно (П2.10):

$$\frac{J_0(\tilde{k}_2 a)}{J_1(\tilde{k}_2 a)} \approx \frac{\cos(\tilde{k}_2 a - \pi/4)}{\cos(\tilde{k}_2 a - \frac{3}{4}\pi)} = \frac{e^{i(\tilde{k}_2 a - \pi/4)} + e^{-i(\tilde{k}_2 a - \pi/4)}}{e^{i(\tilde{k}_2 a - \frac{3}{4}\pi)} + e^{-i(\tilde{k}_2 a - \frac{3}{4}\pi)}}. \quad (14.35)$$

Подставив в (14.35) комплексный аргумент  $\tilde{k}_2 a = a/d - ia/d$ , в котором  $a/d \gg 1$ , легко убедиться, что вторыми слагаемыми в числителе и знаменателе можно пренебречь по сравнению с первыми.

При этом отношение функций Бесселя (14.35) окажется равным  $i$  и выражение (14.34) совпадет с (14.27).

Если поверхностный эффект выражен слабо, то  $a \ll d$ ,  $|\tilde{k}_2 a| \ll 1$  и в (14.34) функции Бесселя можно заменить согласно (П2.7):

$$\frac{J_0(\tilde{k}_2 a)}{J_1(\tilde{k}_2 a)} \approx \frac{1 - \left(\frac{\tilde{k}_2 a}{2}\right)^2}{\frac{\tilde{k}_2 a}{2} \left[1 - \frac{1}{2} \left(\frac{\tilde{k}_2 a}{2}\right)^2\right]} \approx \frac{2}{\tilde{k}_2 a} \left[1 - \frac{1}{2} \left(\frac{\tilde{k}_2 a}{2}\right)^2\right]. \quad (14.36)$$

Подставив (14.36) в (14.34) и учтя, что в проводнике  $\tilde{k}_2^2 = \omega_2 (\epsilon_{2a} - i\sigma_2/\omega) \mu_{2a} \approx -i\omega\sigma_2\mu_{2a}$ , найдем

$$Z'_{\text{вн}} = \frac{1}{\pi a^2 \sigma_2} \left(1 - \frac{1}{8} \tilde{k}_2^2 a^2\right) = \frac{1}{\pi a^2 \sigma} + i\omega \frac{\mu_a}{8\pi} = r' + i\omega L'_{\text{вн}}. \quad (14.37)$$

В принятом нами приближении  $r'$  и  $L'_{\text{вн}}$  совпадают соответственно с погонным активным сопротивлением и погонной внутренней индуктивностью при постоянном токе.

## Глава 15

### ДИФРАКЦИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН



#### 15.1. ЗАДАЧИ ДИФРАКЦИИ

Пусть в безграничной области  $V$ , кроме сторонних источников монохроматического поля, имеется тело (или несколько тел). В этом случае электромагнитное поле в  $V$  будет отличаться от поля, которое существовало бы при отсутствии тела. Это объясняется тем, что под действием *первичной* или *падающей* волны сторонних источников в теле возникают вынужденные колебания зарядов, обуславливающие возникновение *вторичной* волны, частота которой совпадает с частотой первичной волны. Вторичную волну вне области, занятой телом, называют *рассеянным* или *отраженным* полем. *Результирующее* или *полное* поле вне тела представляет собой векторную сумму первичного и рассеянного полей. Поле внутри тела называют *преломленным*. Совокупность явлений, происходящих при распространении электромагнитных волн в присутствии тел с теми или иными электромагнитными параметрами, называют *дифракцией* волн на этих телах.

Если тело является идеально проводящим, то задача дифракции состоит в отыскании для области вне тела решения уравнений Максвелла, удовлетворяющего условию (5.13) или (5.17) на бесконечности и краевым условиям  $E_t = 0$  на поверхности тела. В этих случаях оказываются заранее известными все условия, обеспечивающие единственность решения дифракционной задачи.

При наличии на поверхности тела острых ребер решение дифракционной задачи является единственным, если оно удовлетворяет также и дополнительному условию на ребре (см., например, [47]). Это условие ограничивает скорость возрастания величины векторов поля по мере приближения к ребру таким образом, чтобы поток  $\Pi_{ср}$  сквозь поверхность тонкого окружающего ребро кольцеобразного валика радиуса  $r$  в пределе при  $r \rightarrow 0$  (при стягивании валика к кромке ребра) обращался в нуль. Другими словами, условие на ребре исключает из рассмотрения лишние физического смысла случаи испускания электромагнитной энергии непосредственно ребрами и соответственно является одним из условий единственности решения.

Если тело прозрачно для электромагнитных волн, то при формулировке задач дифракции не представляется возможным задать заранее, до решения самой задачи, краевые условия. В этих случаях приходится решать уравнения электродинамики отдельно вне тела (внешняя задача) и внутри тела (внутренняя задача), а затем сопрягать полученные решения при помощи условий непрерывности (3.70) на поверхности тела. Из сказанного следует, что в этих наиболее сложных случаях выделение внешней и внутренней задач должно рассматриваться лишь как промежуточный прием при решении электродинамической задачи для всего объема.

Различают строгие и приближенные аналитические методы решения задач дифракции. В аналитических методах решение задачи дается в виде формулы, которая позволяет произвести необходимые расчеты, а иногда сделать анализ решения даже без расчетов.

Строгие решения дифракционных задач удается получить только при очень простой форме граничных поверхностей, когда они совпадают с координатными поверхностями некоторых ортогональных систем координат. С основными особенностями получения такого строгого решения, осуществляемого методом разделения переменных (методом собственных функций), мы познакомимся в задачах, родственных задачам дифракции и состоящих в определении электромагнитного поля в различных линиях передачи (см. гл. 17—20).

Поскольку строгими методами удается решать лишь сравнительно узкий круг задач, то широкое распространение получили различные приближенные методы. Особенно важную роль играют приближенные методы решения задач дифракции, которые применимы в тех случаях, когда размеры тела и радиусы кривизны его поверхности велики по сравнению с длиной волны. Эти методы можно разделить на лучевые и волновые. Лучевые методы включают в себя метод геометрической оптики, метод геометрической теории дифракции, позволяющий уточнить результаты метода геометрической оптики в областях тени и полутени, метод параболического уравнения. К волновым методам относятся метод физической оптики (приближение Гюйгенса — Кирхго-

фа), метод краевых волн, позволяющий найти поправки к методу физической оптики, необходимые при наличии изломов на поверхности тел, метод построения приближенных собственных функций. В последующих параграфах будут рассмотрены более подробно методы геометрической и физической оптики.

Отметим, что в связи с быстрым развитием вычислительной техники важное значение приобрели численные методы решения задач дифракции. В этих методах решение дается не в виде формулы, а в виде алгоритма, на основании которого составляется программа для электронной вычислительной машины. Главным преимуществом численных методов состоит в широкой области их применения. При их использовании отпадает необходимость в идеализации многих задач, которую приходится вводить при применении аналитических методов решения. Отсутствие идеализации задачи позволяет заменить эксперимент расчетом, что дает значительную экономию времени и средств.

## 15.2. ПЕРЕХОД ОТ УРАВНЕНИЙ МАКСВЕЛЛА К УРАВНЕНИЯМ ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ ОПТИКИ. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ВОЛНОВЫЕ ПОВЕРХНОСТИ И ЛУЧИ

При изучении любой локально плоской электромагнитной волны (см. § 11.1) можно перейти от однородных уравнений Максвелла, которым удовлетворяет эта волна, к значительно более простым приближенным уравнениям геометрической оптики. Геометрическая оптика рассматривает распространение электромагнитной волны при помощи геометрических соотношений, отвлекаясь при этом от волновой природы явления.

Рассмотрим переход в изотропной линейной среде без потерь от однородных уравнений Максвелла

$$\operatorname{rot} \dot{\mathbf{H}} - i\omega \epsilon_a \dot{\mathbf{E}}, \operatorname{rot} \dot{\mathbf{E}} - -i\omega \mu_a \dot{\mathbf{H}} \quad (15.1)$$

к уравнениям геометрической оптики. Будем искать решение уравнений (15.1) в виде:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{E}}(x, y, z) &= \frac{\mathbf{E}_0(x, y, z)}{\sqrt{\epsilon_a}} e^{-ik_0 L(x, y, z)}, \\ \dot{\mathbf{H}}(x, y, z) &= \frac{\mathbf{H}_0(x, y, z)}{\sqrt{\mu_a}} e^{-ik_c L(x, y, z)}, \end{aligned} \quad (15.2)$$

где фазы комплексных амплитуд  $\mathbf{E}_0$  и  $\mathbf{H}_0$  не зависят от пространственных координат;  $L(x, y, z)$  — скалярная функция координат, определяющая волновые поверхности рассматриваемой произвольной монохроматической волны;  $k_0 = \omega \sqrt{\epsilon_0 \mu_0} = \omega/c = 2\pi/\lambda_0$  — волновое число в вакууме. Подставив (15.2) в (15.1), воспользовавшись (П1.17), ограничившись для простоты случаем однородных сред, параметры которых можно выносить из-под знака про-

странственных производных, и учтя, что  $\text{grad } e^{-ik_0 L} = -ik_0 e^{-ik_0 L} \times \text{grad } L$ , получим следующие точные уравнения:

$$\begin{aligned} [\dot{\mathbf{H}}_0 \text{ grad } L] - n \dot{\mathbf{E}}_0 + \frac{1}{ik_0} \text{rot } \dot{\mathbf{H}}_0 = 0, \quad [\dot{\mathbf{E}}_0 \text{ grad } L] + n \dot{\mathbf{H}}_0 + \\ + \frac{1}{ik_0} \text{rot } \dot{\mathbf{E}}_0 = 0, \end{aligned} \quad (15.3)$$

где  $n = c/v = \sqrt{\epsilon_a \mu_a / \epsilon_0 \mu_0}$  — коэффициент преломления среды. В предельном случае  $\lambda_0 \rightarrow 0$  ( $\omega \rightarrow \infty$ ) множитель  $1/k_0$  стремится к нулю и ур-ния (15.3) переходят в систему уравнений геометрической оптики:

$$[\dot{\mathbf{H}}_0 \text{ grad } L] = n \dot{\mathbf{E}}_0, \quad [\dot{\mathbf{E}}_0 \text{ grad } L] = -n \dot{\mathbf{H}}_0. \quad (15.4)$$

Следовательно, вытекающие из системы (15.4) законы геометрической оптики являются точными при  $\lambda_0 \rightarrow 0$ . Практически мы имеем дело всегда с конечной длиной волны  $\lambda_0$ , при которой уравнения геометрической оптики являются приближенными. Условия применимости этих уравнений и соответственно методов геометрической оптики на практике будут рассмотрены в конце параграфа.

Выразим  $\dot{\mathbf{H}}_0$  из второго ур-ния (15.4) и подставим его в первое:

$$[\text{grad } L [\dot{\mathbf{E}}_0 \text{ grad } L]] = n^2 \dot{\mathbf{E}}_0. \quad (15.5)$$

Воспользовавшись (П1.4) и приняв во внимание, что согласно первому ур-нию (15.4) векторы  $\text{grad } L$  и  $\dot{\mathbf{E}}_0$  взаимно перпендикулярны, получим из (15.5) дифференциальное уравнение

$$(\text{grad } L)^2 = n^2, \quad (15.6)$$

представляющее собой необходимое условие разрешимости системы (15.4).

Функцию  $L(x, y, z)$ , являющуюся решением ур-ния (15.6) и определяющую волновые поверхности в приближении геометрической оптики, называют *эйконалом*. Соответственно дифференциальное ур-ние (15.6) называют *уравнением эйконала*. Оно является основным уравнением геометрической оптики. Поверхности постоянных значений эйконала

$$L(x, y, z) = C, \quad \text{где } C = C_1, C_2, \dots, \quad (15.7)$$

называют *геометрическими волновыми поверхностями*.

Введя орт  $s^0$ , совпадающий по направлению с  $\text{grad } L$  и ориентированный нормально к волновой поверхности (15.7), можно вместо (15.6) написать уравнение

$$\text{grad } L = n s^0. \quad (15.8)$$

При помощи (15.8) придадим системе (15.4) вид:

$$\dot{\mathbf{E}}_0 = -[s^0 \dot{\mathbf{H}}_0], \quad \dot{\mathbf{H}}_0 = [s^0 \dot{\mathbf{E}}_0]. \quad (15.9)$$

Выразив  $\dot{\mathbf{E}}_0$  и  $\dot{\mathbf{H}}_0$  из ф-л (15.2), получим вместо (15.9) соотношения:

$$\dot{\mathbf{E}} = -Z_c [s^0 \dot{\mathbf{H}}], \quad \dot{\mathbf{H}} = \frac{1}{Z_c} [s^0 \dot{\mathbf{E}}], \quad (15.10)$$

где  $Z_c = \sqrt{\mu_a / \epsilon_a}$  — характеристическое сопротивление волны. Совпадение (15.10) с выражениями (9.17) означает, что при выполнении условий применимости геометрической оптики произвольная волна (15.2) обладает свойствами, присущими полю излучения, т. е. имеет характер локально плоской волны (см. § 11.1), распространяющейся в направлении нормали  $s^0$  к геометрической волновой поверхности.

При помощи (15.10) и (П1.4) определим комплексный вектор Пойнтинга

$$\tilde{\mathbf{P}} = \frac{1}{2} [\dot{\mathbf{E}} \dot{\mathbf{H}}^*] = \frac{1}{Z_c} |\dot{\mathbf{E}}|^2 s^0 = \frac{1}{2} Z_c |\dot{\mathbf{H}}|^2 s^0. \quad (15.11)$$

Вектор  $\tilde{\mathbf{P}}$  веществен и направлен по  $s^0$ . Следовательно, в приближении геометрической оптики энергия переносится в направлениях векторных линий  $s^0$ . Эти линии, вдоль которых распространяется электромагнитная энергия, называются *лучами*. Таким образом, в изотропной среде лучи образуют семейство линий, ортогональных семейству волновых поверхностей (15.7).

Решение уравнений геометрической оптики сводится к определению в рассматриваемой области пространства семейства лучей или эквивалентного ему семейства волновых поверхностей (15.7). Для определения волновых поверхностей нужно найти эйконал  $L(x, y, z)$  из ур-ния (15.6). Граничным условием при решении этого уравнения является задание фазы исследуемой волны на некоторой поверхности. Если эйконал  $L(x, y, z)$  известен, то выражение (15.8) позволяет в любой точке определить  $s^0$  и, следовательно, построить семейство лучей.

Очевидно, что замена точных ур-ний (15.3) приближенными ур-ниями (15.4) справедлива при выполнении неравенств:

$$\begin{aligned} \frac{1}{k_0} |\text{rot } \dot{\mathbf{H}}_0| &\ll |\dot{\mathbf{H}}_0 \text{ grad } L|, \\ \frac{1}{k_0} |\text{rot } \dot{\mathbf{E}}_0| &\ll |\dot{\mathbf{E}}_0 \text{ grad } L|, \end{aligned} \quad (15.12)$$

которые и являются условиями перехода к приближениям геометрической оптики в однородной среде. Приняв во внимание, что  $k_0 = 2\pi/\lambda_0$ ,  $|\text{grad } L| = n$  и длина волны в рассматриваемой среде  $\lambda = vT = \lambda_0/n$ , представим неравенства (15.12) в следующем виде:

$$\frac{\lambda}{2\pi} |\text{rot } \dot{\mathbf{H}}_0| \ll |\dot{\mathbf{H}}_0|, \quad \frac{\lambda}{2\pi} |\text{rot } \dot{\mathbf{E}}_0| \ll |\dot{\mathbf{E}}_0|. \quad (15.13)$$

Поскольку ротор определяет операции дифференцирования по пространственным координатам, то смысл неравенств (15.13)

практически сводится к тому, что изменения амплитуд  $\dot{E}_0$  и  $\dot{H}_0$  на расстоянии, сравнимом с длиной волны  $\lambda$  в рассматриваемой среде (точнее, на расстоянии, равном  $\lambda/2\pi$ ), должны быть много меньше самих амплитуд.

Эти условия не соблюдаются, и соответственно приближения геометрической оптики неприменимы в тех пространственных областях, в которых волна претерпевает резкие изменения и не имеет локально плоского характера (см. § 15.4, 15.5).

В случае неоднородной среды подстановка (15.2) в уравнения Максвелла (15.1) приводит к приближенной справедливости уравнений геометрической оптики (15.4) при выполнении не только условий (15.13), но и дополнительных условий:

$$\frac{\lambda}{4\pi} |\text{grad } \mu_a| \ll \mu_a, \quad \frac{\lambda}{4\pi} |\text{grad } \epsilon_a| \ll \epsilon_a. \quad (15.14)$$

Смысл этих неравенств практически сводится к тому, что изменения параметров среды  $\mu_a$  и  $\epsilon_a$  на расстоянии, сравнимом с  $\lambda$ , должны быть много меньше величин самих параметров. Следовательно, в неоднородной среде приближения геометрической оптики неприменимы и в тех областях, в которых резко изменяются параметры среды.

### 15.3. ОПТИЧЕСКАЯ ДЛИНА ПУТИ. ПРИНЦИП ФЕРМА

Рассмотрим линейный интеграл от (15.8) вдоль некоторого пути  $l$  между точками  $M$  и  $N$  (рис. 15.1)

$$\int_l n s^0 dl = \int_l \text{grad } L dl. \quad (15.15)$$

Поскольку  $\text{grad } L dl = Ld$  (ср. § 7.3), то  $\int_l \text{grad } L dl = \int_M^N dL = L(N) - L(M)$ . Поэтому вместо (15.15) имеем

$$\int_l n \cos \alpha dl = L(N) - L(M), \quad (15.16)$$

где  $\alpha$  — угол между направлением луча  $s^0$  в текущей точке интегрирования и вектором  $dl$ , касательным к пути  $l$  в этой же точке (см. рис. 15.1).

Если путь интегрирования совпадает с каким-либо лучом, то  $\cos \alpha = 1$  и вместо (15.16) получим

$$\int_l n dl = L(N) - L(M). \quad (15.17)$$

Интеграл  $\int_l n dl$ , взятый вдоль произвольного криволинейного

пути  $l$ , называют *оптической длиной этого пути*. Подставим в оптическую длину пути  $l$  значение  $n=c/v$ :

$$\int_l n dl = c \int_l \frac{dl}{v} = c \int_{t_M}^{t_N} dt = c(t_N - t_M). \quad (15.18)$$

Здесь  $t_N - t_M$  — время распространения волны со скоростью  $v(x, y, z)$  вдоль пути  $l$  от точки  $M$  до точки  $N$ . Если среда является вакуумом, то оптическая длина произвольного пути  $l$  равна его геометрической длине (в вакууме  $n=1$  и  $\int_l n dl = \int_l dl$ ).

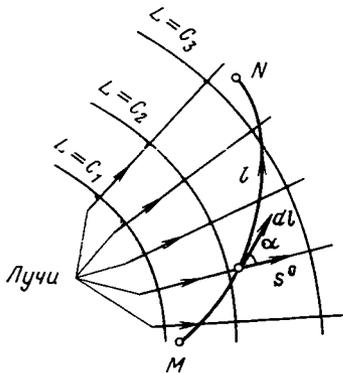


РИС. 15.1

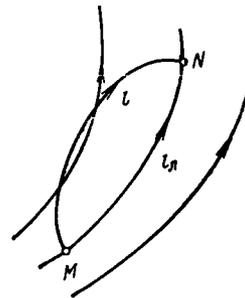


РИС. 15.2

Формула (15.17) показывает, что оптическая длина пути вдоль луча равна разности эйконалов в точках конца и начала пути интегрирования. Следовательно, оптическая длина пути вдоль любых лучей, идущих от одной волновой поверхности до другой, имеет одно и то же значение.

Возьмем две произвольные точки  $M$  и  $N$ , лежащие на некотором луче, и рассмотрим два пути  $l_n$  и  $l$ , соединяющих их (рис. 15.2). На основании (15.16) и (15.17) имеем для интегралов вдоль этих путей равенство

$$\int_{l_n} n dl = \int_l n \cos \alpha dl. \quad (15.19)$$

Поскольку  $|\cos \alpha| \leq 1$ , то  $\int_l n \cos \alpha dl \leq \int_l n dl$  и из (15.19) следует соотношение

$$\int_{l_n} n dl \leq \int_l n dl. \quad (15.20)$$

Здесь знак равенства соответствует случаю  $l = l_n$ .

Соотношение (15.20) выражает собой *принцип Ферма*. Этот принцип утверждает, что лучом между двумя точками является такая кривая, соединяющая эти точки, вдоль которой оптическая длина пути минимальна.

В однородной среде [ $n(x, y, z) = \text{const}$ ] оптическая длина пути между двумя точками будет минимальна при минимальной геометрической длине пути  $\int dl$ , которая представляет собой прямую линию, соединяющую эти точки. Таким образом, из принципа Ферма непосредственно следует, что в однородной среде лучи представляют собой прямые линии.

#### 15.4. ИЗМЕНЕНИЕ ПОЛЯ ВДОЛЬ ЛУЧА

Выделим мысленно на некоторой геометрической волновой поверхности элемент  $\Delta S$  и проведем через все точки его контура лучи (рис. 15.3). Область, ограниченную непрерывной поверхностью, образующими которой являются лучи, называют *лучевой трубкой*. Поскольку в приближении геометрической оптики энергия распространяется вдоль лучей, то обмена энергией между



РИС. 15.3

лучевыми трубками не происходит. Поэтому в среде без потерь поток вектора Пойнтинга (15.11) сквозь ограниченные трубкой элементы различных волновых поверхностей есть величина постоянная.

Остановимся далее на случае однородных сред и применим этот закон к элементарной лучевой трубке, которая ограничивает на двух различных волновых поверхностях элементы  $dS$  и  $dS'$ :

$$|\mathbf{E}|^2 dS = |\mathbf{E}'|^2 dS' = \text{const.} \quad (15.21)$$

Из дифференциальной геометрии известно, что любая элементарная площадка характеризуется двумя, в общем случае различными, главными радиусами кривизны. Пусть  $ab$  и  $cd$  являются элементами линий кривизны, проведенными на элементе волновой поверхности  $dS$  (рис. 15.4). Через точку их пересечения  $O$  проходит луч  $MN$  (в однородной среде все лучи являются прямыми линиями). При этом лучи, проходящие через точки  $a$  и  $b$ , пересекутся друг с другом на луче  $MN$  в центре кривизны  $O_1$ , а лучи, проходящие через  $c$  и  $d$ , пересекутся на луче  $MN$  в другом центре кривизны  $O_2$ ;  $R_1 = O_1O$  и  $R_2 = O_2O$  — соответственно главные радиусы кривизны площадки  $dS$ . Если  $da$  и  $db$  — углы, под кото-

рыми видны отрезки  $ab$  и  $cd$  из соответствующих центров кривизны  $O_1$  и  $O_2$ , то  $ab=R_1d\alpha$ ,  $cd=R_2d\beta$  и

$$dS = ab \cdot cd = R_1 R_2 d\alpha d\beta. \quad (15.22)$$

В случае прямолинейных лучей для одной и той же лучевой трубки произведение  $d\alpha d\beta = \text{const}$  (ср. элементы  $dS$  и  $dS'$ , ограничен-

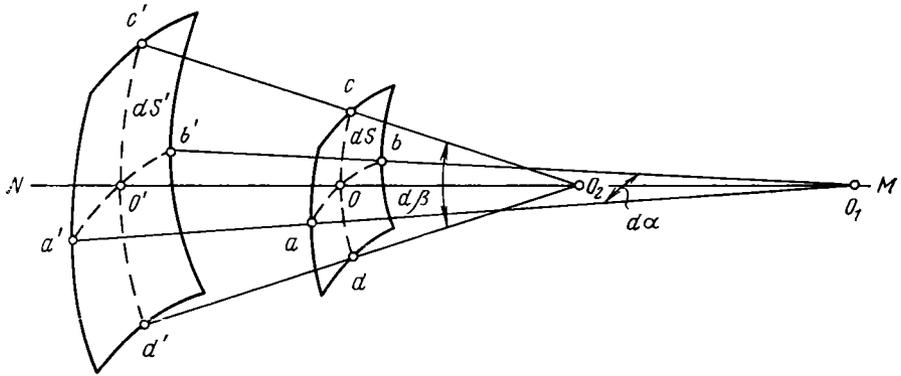


РИС. 15.4

ные трубкой на различных волновых поверхностях). Поэтому из (15.21) и (15.22) имеем

$$|\dot{\mathbf{E}}| = \sqrt{|\dot{\mathbf{E}}|^2} = C/\sqrt{R_1 R_2}, \quad (15.23)$$

где  $C$  — постоянная для данной трубки величина.

Таким образом, на каждом прямолинейном луче (например,  $MN$  на рис. 15.4) существуют в общем случае две точки  $O_1$  и  $O_2$ , являющиеся центрами кривизны любой волновой поверхности в точке  $O$  ее пересечения с лучом и называемые *фокусами*. Расстояния  $OO_1$  и  $OO_2$  есть главные радиусы кривизны  $R_1$  и  $R_2$  волновой поверхности в точке  $O$ . Формула (15.23) определяет зависимость амплитуды поля в любой точке прямолинейного луча от значений главных радиусов кривизны волновой поверхности, проходящей через эту точку.

Фокусы всего множества лучей, характеризующих волну, образуют в общем случае две поверхности (являющиеся геометрическим местом всех центров кривизны каждой волновой поверхности), которые называются *фокальными* или *каустическими поверхностями* (или просто *каустиками*). В частном случае сферических волновых поверхностей обе каустики сливаются в одну точку, называемую *фазовым центром*. Это справедливо, например, для поля тех антенн, которые излучают сферические волны. Центр волновых поверхностей этих волн и является фазовым центром. При существовании фазового центра соотношение (15.23) принимает вид  $|\dot{\mathbf{E}}| = C/R$ , где  $R$  — расстояние от фазового центра до точки наблюдения.

Из (15.23) следует, что в точках каустик ( $R_1=0$  или  $R_2=0$ ) поле обращается в бесконечность. Этот результат указывает на неприменимость приближения геометрической оптики вблизи каустик (в частности, вблизи источника), где волна претерпевает резкие изменения и не имеет локально плоского характера (ср. § 15.2).

Установим связь, которая существует в геометрической оптике между векторами  $\vec{E}$  (и  $\vec{H}$ ) линейно поляризованной волны в двух различных точках  $O$  и  $O'$  одного и того же прямолинейного луча. Волны с круговой и эллиптической поляризацией можно представить как суперпозицию двух линейно поляризованных волн, их здесь рассматривать не будем.

Если точки  $O$  и  $O'$  удалены друг от друга на расстояние  $l$  и между ними нет фокусов (см. рис. 15.4), то главные радиусы кривизны волновых поверхностей в этих точках соответственно равны  $R_1, R_2$  и  $R_1+l, R_2+l$  и согласно (15.23) имеем

$$|\dot{E}(0)|\sqrt{R_1 R_2} = |\dot{E}(0')|\sqrt{(R_1+l)(R_2+l)}. \quad (15.24)$$

Соотношение (15.24) характеризует изменение амплитуды поля вдоль луча.

Из (15.17) видно, что в однородной среде ( $n=\text{const}$ ) эйконалы в точках  $O$  и  $O'$  отличаются друг от друга на величину  $nl$ . При этом согласно (15.2) фазы поля в этих точках отличаются друг от друга на величину  $k_0 nl = kl$ , где  $k=2\pi/\lambda = \omega\sqrt{\epsilon_a \mu_a}$  — волновое число в рассматриваемой среде.

Зная теперь изменение амплитуды и фазы поля вдоль луча и учитывая, что в линейно поляризованной волне вектор  $\vec{E}$  не изменяет своего направления вдоль луча, легко выразить поле в одной точке через поле в другой. Если, например, луч на рис. 15.4 направлен от  $M$  к  $N$  (волновые поверхности *выпуклые* и лучи *расходятся*) и известно поле  $\dot{E}(0)$ , то

$$\dot{E}(0') = \dot{E}(0) \sqrt{\frac{R_1 R_2}{(R_1+l)(R_2+l)}} e^{-ikl}. \quad (15.25)$$

Здесь множитель  $\sqrt{\frac{R_1 R_2}{(R_1+l)(R_2+l)}} < 1$  характеризует расходимость лучей, которая сопровождается уменьшением амплитуды поля вдоль луча.

## 15.5. ОТРАЖЕНИЕ И ПРЕЛОМЛЕНИЕ В ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ ОПТИКЕ

Рассмотренные в гл. 13 закономерности остаются с хорошим приближением справедливыми и в тех случаях, когда радиусы кривизны поверхности раздела и волновой поверхности падающей волны велики по сравнению с  $\lambda$ , вследствие чего в каждой точке поверхность раздела можно рассматривать как плоскость, а падающую волну — как однородную плоскую. Другими словами,

эти закономерности оказываются применимыми и при падении локально плоской волны на локально плоскую поверхность раздела.

Пусть в однородном диэлектрике имеется локально плоское тело, на которое падает локально плоская волна. Каждой локально плоской волне рассматриваемой задачи (падающей, отраженной или преломленной) соответствуют свое семейство геометрических волновых поверхностей и ортогональное им семейство прямолинейных лучей. При этом законы отражения и преломления лучей совпадают с соответствующими законами для плоских волн и плоской поверхности раздела <sup>1)</sup>. Это означает, что направление луча, отраженного или преломленного в некоторой точке *криволинейной* поверхности раздела, определяется известным нам законом отражения или преломления на *плоскости*, касательной к поверхности раздела в этой точке.

Построив семейство лучей, соответствующих отраженной или преломленной волне, и определив на поверхности раздела для какого-либо луча главные радиусы кривизны волновой поверхности (что является чисто геометрической задачей) и комплексную

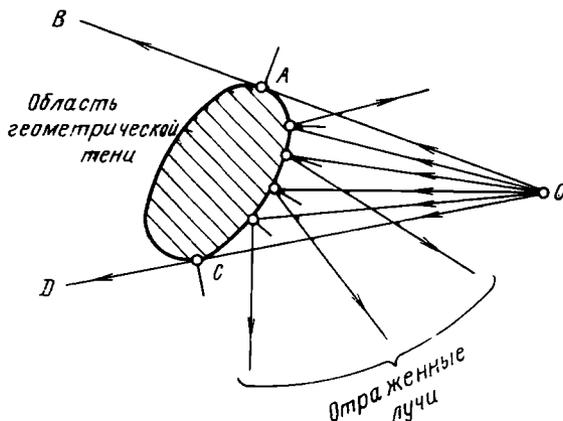


РИС. 15.5

амплитуду поля, легко найти затем с помощью формул вида (15.25) поле в других точках вдоль луча.

В качестве примера на рис. 15.5 изображено падение в однородном диэлектрике на идеально проводящее выпуклое тело созданных антенной сферических волн с фазовым центром в точке *O*. В соответствии с законом отражения лучи, отраженные от выпуклой поверхности, образуют семейство расходящихся прямых линий. Ортогональные к расходящимся отраженным лучам геомет-

<sup>1)</sup> Непосредственный вывод законов отражения и преломления лучей из соотношений геометрической оптики см., например, в [3].

рические волновые поверхности являются выпуклыми, причем фокусы расположены не на самих отраженных лучах, а на их воображаемых продолжениях внутри идеально проводящего тела. Это означает, что в рассматриваемом случае семейство отраженных лучей имеет *мнимые каустики* и геометрическое отраженное поле нигде не обращается в бесконечность.

На рис. 15.5 падающие лучи  $OA$  и  $OC$  направлены по касательным к телу. Соответствующие им отраженные лучи  $AB$  и  $CD$  согласно закону отражения также направлены по касательным и являются границей области геометрической тени, в которой отсутствуют отраженные и падающие лучи. Поскольку обмена энергией между лучевыми трубками нет, то на данной границе поле в приближении геометрической оптики изменяется скачком. Этот результат указывает на неприменимость приближения геометрической оптики вблизи границы области тени (так называемая область полутени), где поле претерпевает резкие изменения и не имеет характера локально плоской волны. Неприменим метод геометрической оптики и в самой области тени, где он дает значения поля, равные нулю. В действительности благодаря волновой природе поле проникает в область геометрической тени.

### 15.6. МЕТОД ФИЗИЧЕСКОЙ ОПТИКИ (ПРИБЛИЖЕНИЕ ГЮЙГЕНСА — КИРХГОФА)

Формулы (10.26) — (10.29) определяют поле в некоторой точке произвольной области  $V_0$ , которая ограничена (изнутри или снаружки) поверхностью  $S$ , заполнена однородным диэлектриком и не содержит сторонних источников. Если же в конечном объеме  $V$  области  $V_0$  существуют сторонние токи  $\dot{\delta}_{ст}$ ,  $\dot{\delta}_{ст.м}$ , то, рассуждая таким же образом, как при выводе (10.26) — (10.29), легко получить следующие соотношения:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{E}} &= -\frac{i\omega}{k^2} (\text{grad div } \dot{\mathbf{A}} + k^2 \dot{\mathbf{A}}) - \frac{1}{\epsilon_a} \text{rot } \dot{\mathbf{A}}_м, \\ \dot{\mathbf{H}} &= \frac{1}{\mu_a} \text{rot } \dot{\mathbf{A}} - \frac{i\omega}{k^2} (\text{grad div } \dot{\mathbf{A}}_м + k^2 \dot{\mathbf{A}}_м),\end{aligned}\quad (15.26)$$

где

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{A}} &= \frac{\mu_a}{4\pi} \int_V \dot{\delta}_{ст} \frac{e^{-ikr}}{r} dV + \frac{\mu_a}{4\pi} \oint_S \dot{\eta}_{эк} \frac{e^{-ikr}}{r} dS, \\ \dot{\mathbf{A}}_м &= \frac{\epsilon_a}{4\pi} \int_V \dot{\delta}_{ст.м} \frac{e^{-ikr}}{r} dV + \frac{\epsilon_a}{4\pi} \oint_S \dot{\eta}_{эк.м} \frac{e^{-ikr}}{r} dS.\end{aligned}\quad (15.27)$$

Формулы (15.26), (15.27) позволяют найти поле в некоторой точке произвольной области  $V_0$ , заполненной однородным диэлектриком, если известны сторонние токи в этой области и касательные составляющие  $\dot{\mathbf{E}}_т$  и  $\dot{\mathbf{H}}_т$  на ее границе  $S$ , определяющие согласно (10.26), (10.27)  $\dot{\eta}_{эк}$  и  $\dot{\eta}_{эк.м}$ . Поскольку, как уже отмеча-

лось в § 10.5, точные значения  $\dot{\mathbf{E}}_\tau$  и  $\dot{\mathbf{H}}_\tau$  обычно неизвестны, то метод физической оптики, основывающийся на ф-лах (15.26), (15.27), требует применения приближенных способов определения  $\dot{\mathbf{E}}_\tau$  и  $\dot{\mathbf{H}}_\tau$ , которые опираются на идеи Гюйгенса и Кирхгофа и пригодны в тех случаях, когда характеризующие дифракционную задачу линейные размеры велики по сравнению с длиной волны  $\lambda$ .

Пусть, например, в однородном безграничном диэлектрике находится идеально проводящее тело, на которое падает электромагнитная волна, создаваемая сторонними источниками. Требуется определить результирующее поле в произвольной точке наблюдения. Для решения этой внешней задачи применяют ф-лы (15.26), (15.27) к бесконечному объему  $V_0$ , ограниченному изнутри поверхностью  $S$ , которая совпадает с поверхностью тела. При этом в выражениях  $\dot{\mathbf{E}}$  и  $\dot{\mathbf{H}}$  слагаемые, содержащие объемные интегралы, определяют падающую волну, а слагаемые, содержащие поверхностные интегралы, определяют рассеянное телом поле.

Поскольку на поверхности  $S$  идеального проводника согласно (3.71) и (10.27)  $\eta_{\text{эк.л}}=0$ , то для применения ф-л (15.26), (15.27) остается задать на этой поверхности плотность поверхностного электрического тока  $\dot{\mathbf{j}}^1$ , определяемую тангенциальной составляющей  $\dot{\mathbf{H}}_\tau$ .

При падении однородной плоской волны на идеально проводящую плоскость тангенциальные составляющие векторов  $\dot{\mathbf{H}}$  падающей и отраженной волн одинаковы (см. § 13.6), вследствие чего тангенциальная составляющая результирующего поля  $\dot{\mathbf{H}}_\tau$  вдвое больше, чем у падающей волны ( $\dot{\mathbf{H}}_\tau = \dot{\mathbf{H}}_{\text{пт}} + \dot{\mathbf{H}}_{\text{отрт}} = 2\dot{\mathbf{H}}_{\text{пт}}$ ). Определение  $\dot{\mathbf{H}}_\tau$  на поверхности идеально проводящего тела в приближении Гюйгенса—Кирхгофа производится при помощи соотношения  $\dot{\mathbf{H}}_\tau = 2\dot{\mathbf{H}}_{\text{пт}}$  и пригодно только в случаях падения локально плоской волны на локально плоскую поверхность тела. При этом в каждой точке «освещенной» части тела плотность поверхностного электрического тока принимают такой же, как на бесконечной идеально проводящей плоскости, касательной к телу в данной точке:  $\dot{\mathbf{j}} = [\dot{\mathbf{H}}\mathbf{n}^0] = [\dot{\mathbf{H}}_\tau\mathbf{n}^0] = 2[\dot{\mathbf{H}}_{\text{пт}}\mathbf{n}^0]$ . На неосвещенной части тела приближенно принимают  $\dot{\mathbf{H}}_\tau = 0$  и  $\dot{\mathbf{j}} = 0$ . Строго говоря, значения  $\dot{\mathbf{j}} = [\dot{\mathbf{H}}_\tau\mathbf{n}^0]$  на «неосвещенной» части тела отличны от нуля, так как сюда затекает поверхностный электрический ток. Однако при больших по сравнению с  $\lambda$  размерах тела этот ток оказывается относительно мал и им пренебрегают. Таким образом, для задания плотности поверхностного тока  $\dot{\mathbf{j}}$  вначале следует найти значения  $\dot{\mathbf{H}}_{\text{пт}}$  падающей волны на «освещенной» части тела.

<sup>1)</sup> Если поверхность  $S$  совпадает с идеально проводящей поверхностью, то распределенный на ней эквивалентный электрический ток является действительно существующим поверхностным током ( $\eta_{\text{эк}} = \eta$ ).

В отличие от метода геометрической оптики, метод физической оптики учитывает волновую природу электромагнитного поля и дает в области геометрической тени результат, отличный от нуля. Приближенность этого метода обусловлена вынужденным приближенным заданием тангенциальных составляющих полей на поверхности  $S$ .

## Глава 16

### ОДНОРОДНЫЕ ПЛОСКИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ВОЛНЫ В БЕЗГРАНИЧНОЙ АНИЗОТРОПНОЙ СРЕДЕ



#### 16.1. СВОЙСТВА И ПАРАМЕТРЫ НАМАГНИЧЕННЫХ ФЕРРИТА И ПЛАЗМЫ ДЛЯ МОНОХРОМАТИЧЕСКИХ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН

Представляющими большой практический интерес анизотропными для электромагнитных волн средами являются намагниченные постоянным полем феррит и плазма. Феррит получают спеканием окиси железа с окислами других металлов (например, магния, никеля, марганца). Намагниченный феррит является для распространяющихся в нем волн анизотропной в магнитном отношении средой и используется в технике сверхвысоких частот (СВЧ)<sup>1)</sup> для создания устройств, не подчиняющихся теореме взаимности (см. гл. 25). Плазмой называют электрически нейтральный газ, который частично или полностью ионизирован. Намагниченная плазма является анизотропной в электрическом отношении средой. Находящиеся в постоянном магнитном поле Земли верхние ионизированные слои земной атмосферы как раз представляют собой намагниченную плазму, которая влияет на распространение радиоволн.

#### Феррит

Феррит одновременно обладает магнитными свойствами ферромагнетика и электрическими свойствами диэлектрика (на СВЧ он имеет  $\sigma = 10^{-7} - 10^{-11}$  См/м,  $\epsilon = 5 - 20$ ,  $\operatorname{tg} \delta \approx 10^{-4}$ ). Таким образом, феррит представляет собой ферромагнитную среду, в которой могут распространяться электромагнитные волны СВЧ. При этом в феррите обнаруживаются такие явления, которые в ферромагнитных металлах остаются скрытыми вследствие поверхностного эффекта и больших тепловых потерь.

<sup>1)</sup> В инженерной практике сверхвысокими принято называть частоты в интервале  $3 \cdot 10^9 - 3 \cdot 10^{12}$  Гц (100 МГц—3 ТГц), которым в вакууме соответствуют длины волн в интервале 10 дм—0,1 мм.

Строгая теория ферромагнетизма основывается на квантомеханических представлениях. Однако качественное рассмотрение физических явлений в намагниченном феррите может быть сделано с помощью представлений классической физики.

Каждый электрон обладает спиновыми (внутренними) механическим моментом количества движения  $\mathbf{L}$  и магнитным моментом  $\mathbf{m}$ , которые упрощенно можно представить себе как следствия вращения электрона вокруг собственной оси. Эти моменты направлены в противоположные стороны и связаны между собой соотношением

$$\mathbf{m} = -(|e|\mathbf{L})/m_0, \quad (16.1)$$

где  $e$  — заряд электрона ( $e < 0$ );  $m_0$  — его масса.

Феррит (ферромагнетик) отличается от парамагнетиков и диамагнетиков тем, что на одной из электронных оболочек его атомов имеются электроны с некомпенсированными спиновыми магнитными моментами. Существование у такого электрона одновременно магнитного и механического спиновых моментов приводит к тому, что во внешнем постоянном магнитном поле  $\mathbf{H}$ , воздействующем на феррит, электрон ведет себя таким же образом, как обычный волчок (гироскоп) в поле силы тяжести. Если на волчок действует вращающий момент  $\mathbf{T}$ , который обусловлен силой тяжести и стремится положить волчок, то на электрон действует вращающий момент  $\mathbf{T} = \mu_0[\mathbf{m}\mathbf{H}]$ , который обусловлен внешним полем  $\mathbf{H}$  и стремится ориентировать момент  $\mathbf{m}$  по  $\mathbf{H}$ . Поскольку и у волчка, и у электрона имеется механический момент  $\mathbf{L}$ , то согласно законам механики вращающий момент  $\mathbf{T}$  вызывает изменение механического момента  $\mathbf{L}$  в соответствии с уравнением

$$\mathbf{T} = d\mathbf{L}/dt. \quad (16.2)$$

Нетрудно показать, что если механический момент  $\mathbf{L}$  электрона не параллелен постоянному магнитному полю  $\mathbf{H}$ , то из (16.2) следует прецессионное движение  $\mathbf{L}$  и соответственно  $\mathbf{m}$  вокруг  $\mathbf{H}$  [точно так же из (16.2) следует прецессионное движение момента  $\mathbf{L}$  волчка вокруг вертикали]. Действительно, подставив, например, в (16.2)  $\mathbf{L}$  из (16.1) и приведенное выше выражение для  $\mathbf{T}$ , имеем

$$d\mathbf{m}/dt = \gamma_0[\mathbf{H}\mathbf{m}] \quad (16.3)$$

или  $d\mathbf{m} = \gamma_0[\mathbf{H}\mathbf{m}]dt$ , где  $\gamma_0 = \mu_0|e|/m_0 = 2,21 \cdot 10^5 \text{ М/А} \cdot \text{с}$ . Поскольку  $d\mathbf{m}$  в любой момент оказывается направлен перпендикулярно плоскости, в которой лежат  $\mathbf{H}$  и  $\mathbf{m}$ , то магнитный момент  $\mathbf{m}$  поворачивается вокруг  $\mathbf{H}$ , описывая своим концом окружность, причем направление вращения  $\mathbf{m}$  всегда образует с вектором  $\mathbf{H}$  праввинтовую систему (рис. 16.1). При этом вращении конец  $\mathbf{m}$  движется с линейной скоростью  $v = \left| \frac{d\mathbf{m}}{dt} \right| = \gamma_0 H m \sin\theta$ , где  $\theta$  — угол между  $\mathbf{H}$  и  $\mathbf{m}$ . Поскольку радиус окружности, описываемой

концом  $\mathbf{m}$ , есть  $R = m \sin \theta$ , то угловая частота  $\omega_0$  свободной прецессии магнитного момента  $\mathbf{m}$  вокруг  $\mathbf{H}$  равна  $\omega_0 = v/R = \gamma_0 H$ . Частоту  $\omega_0$  можно менять путем изменения величины внешнего намагничивающего поля  $H$ .

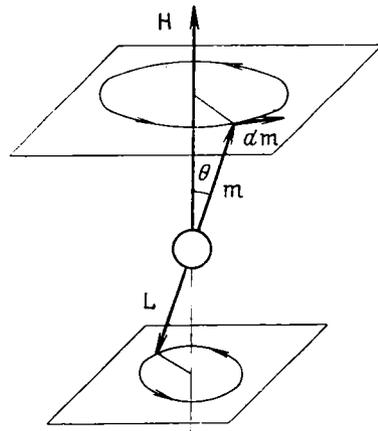


РИС. 16.1

Все некомпенсированные спиновые магнитные моменты одинаковым образом прецессируют вокруг внешнего магнитного поля  $\mathbf{H}$  (орбитальные магнитные моменты электронов феррита в первом приближении можно не принимать во внимание). Поэтому, умножив обе части (16.3) на число электронов с некомпенсированными магнитными моментами, приходящиеся в окрестности рассматриваемой точки феррита на единицу объема, получим уравнение движения намагниченности  $\mathbf{J}$  феррита в магнитном поле  $\mathbf{H}$

$$d\mathbf{J}/dt = \gamma_0 [\mathbf{H}\mathbf{J}]. \quad (16.4)$$

Предположим, что феррит намагничен до насыщения, при котором магнитные моменты всех атомов ориентированы по направлению приложенного постоянного магнитного поля, которое обозначим через  $\mathbf{H}_0$ . Очевидно, что в этом случае и вектор намагниченности  $\mathbf{J} = \mathbf{J}_0$  направлен по полю  $\mathbf{H}_0$ . Если теперь воздействовать на феррит слабым монохроматическим полем  $\mathbf{H}_{\sim}$  ( $|\mathbf{H}_{\sim}| \ll \ll H_0$ ) частоты  $\omega$ , то оно вызовет появление небольшой монохроматической составляющей намагниченности  $\mathbf{J}_{\sim}$  ( $|\mathbf{J}_{\sim}| \ll \ll \mathbf{J}_0$ ). Подставив в (16.4) значения  $\mathbf{H} = \mathbf{H}_0 + \mathbf{H}_{\sim}$ ,  $\mathbf{J} = \mathbf{J}_0 + \mathbf{J}_{\sim}$  и учтя, что  $\frac{d\mathbf{J}_0}{dt} = 0$ ,  $[\mathbf{H}_0\mathbf{J}_0] = 0$ , получим

$$d\mathbf{J}_{\sim}/dt = \gamma_0 \{ [\mathbf{H}_{\sim}\mathbf{J}_0] + [\mathbf{H}_0\mathbf{J}_{\sim}] + [\mathbf{H}_{\sim}\mathbf{J}_{\sim}] \}. \quad (16.5)$$

Пренебрегая членом второго порядка малости  $[\mathbf{H}_{\sim}\mathbf{J}_{\sim}]$  и переходя к уравнению для комплексных амплитуд, имеем вместо (16.5)

$$i\omega \mathbf{J}_{\sim} = \gamma_0 \{ [\mathbf{H}_{\sim}\mathbf{J}_0] + [\mathbf{H}_0\mathbf{J}_{\sim}] \}. \quad (16.6)$$

Если направить вдоль постоянного поля ось  $z$  ( $\mathbf{H}_0 = z^0 H_0$ ,  $\mathbf{J}_0 = z^0 J_0$ ), принять во внимание, что  $\mathbf{H}_{\sim} = x^0 H_x + y^0 H_y + z^0 H_z$ , и  $\mathbf{J}_{\sim} = x^0 J_x + y^0 J_y + z^0 J_z$ , и представить (16.6) в координатной форме, то получим:

$$\left. \begin{aligned} i\omega J_x + \gamma_0 H_0 J_y &= \gamma_0 J_0 H_y, \\ -\gamma_0 H_0 J_x + i\omega J_y &= -\gamma_0 J_0 H_x, \\ i\omega J_z &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (16.7)$$

Решив систему (16.7) относительно  $J_x$ ,  $J_y$  и  $J_z$ , находим:

$$\left. \begin{aligned} j_x &= \frac{\gamma_0 J_0}{\omega_0^2 - \omega^2} (\omega_0 \dot{H}_x + i \omega \dot{H}_y), \\ j_y &= \frac{\gamma_0 J_0}{\omega_0^2 - \omega^2} (-i \omega \dot{H}_x + \omega_0 \dot{H}_y), \\ j_z &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (16.8)$$

где  $\omega_0 = \gamma_0 H_0$ .

Комплексная амплитуда магнитной индукции монохроматического поля в феррите определяется при учете (2.71) выражением  $\mathbf{B} \sim = \mu_0 (\mathbf{H} \sim + \mathbf{J} \sim)$ . Разложив это равенство по координатным осям и воспользовавшись (16.8), получим:

$$\begin{aligned} \dot{B}_x &= \mu_0 (\kappa \dot{H}_x + i \chi \dot{H}_y), \quad \dot{B}_y = \mu_0 (-i \chi \dot{H}_x + \kappa \dot{H}_y), \\ \dot{B}_z &= \mu_0 \mu_{\parallel} \dot{H}_z, \end{aligned} \quad (16.9)$$

где введены обозначения

$$\kappa = 1 + \omega_0 \gamma_0 J_0 / (\omega_0^2 - \omega^2), \quad \chi = \omega \gamma_0 J_0 / (\omega_0^2 - \omega^2), \quad \mu_{\parallel} = 1. \quad (16.10)$$

Из (16.8) и (16.9) следует, что свойства намагниченного постоянным полем  $z^0 H_0$  феррита оказываются разными для различных компонент высокочастотного магнитного поля ( $\mathbf{H}_x$ ,  $\mathbf{H}_y$ ,  $\mathbf{H}_z$ ), т. е. такой феррит является анизотропным магнетиком для монохроматического поля. В намагниченном до насыщения феррите слабое высокочастотное поле  $\mathbf{H}_z$ , *параллельное* постоянному вектору  $\mathbf{H}_0$ , не оказывает влияния на ориентацию некомпенсированных спиновых магнитных моментов, направленных по  $\mathbf{H}_0$ , вследствие чего переменная составляющая намагниченности  $J_z = 0$ , и для этого поля феррит является изотропной линейной средой ( $\dot{B}_z = \mu_0 \mu_{\parallel} \dot{H}_z$ ,  $\dot{B}_x = \dot{B}_y = 0$ ). Если слабое поле  $\mathbf{H} \sim$  имеет только компоненту  $\mathbf{H}_x$ , *перпендикулярную* вектору  $\mathbf{H}_0$ , то оно вызывает отклонение спиновых магнитных моментов от направления  $\mathbf{H}_0$ , возникает переменная составляющая  $\mathbf{J} \sim$  и намагниченность  $\mathbf{J} = \mathbf{J}_0 + \mathbf{J} \sim$  совершает прецессию вокруг  $\mathbf{H}_0$ , направление которой образует с направлением  $\mathbf{H}_0$  правовинтовую систему. Благодаря этой прецессии вектор  $\mathbf{J} \sim$ , а следовательно, и магнитная индукция  $\mathbf{B} \sim$  не совпадают по направлению с вектором  $\mathbf{H}_x$  и имеют составляющие как по оси  $x$ , так и по  $y$ . То же самое происходит, если  $\mathbf{H} \sim = \mathbf{H}_y$ . При одновременном существовании всех трех компонент монохроматического поля ( $\mathbf{H} \sim = \mathbf{H}_x + \mathbf{H}_y + \mathbf{H}_z$ ) имеют место выражения (16.8) и (16.9). Таким образом, анизотропия в намагниченном феррите обусловлена тем, что постоянное поле  $\mathbf{H}_0$  создает фиксированное направление, вокруг которого может происходить прецессия намагниченности  $\mathbf{J}$ .

Соотношения (16.9) удобно представить в матричной форме

$$\begin{bmatrix} \dot{B}_x \\ \dot{B}_y \\ \dot{B}_z \end{bmatrix} = \mu_0 \begin{bmatrix} \kappa & i\chi & 0 \\ -i\chi & \kappa & 0 \\ 0 & 0 & \mu_{\parallel} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{H}_x \\ \dot{H}_y \\ \dot{H}_z \end{bmatrix} \quad (16.11)$$

и в векторной форме  $\dot{\mathbf{B}} = \overset{\leftrightarrow}{\mu} \dot{\mathbf{H}}$ , где

$$\overset{\leftrightarrow}{\mu} = \begin{bmatrix} \kappa & i\chi & 0 \\ -i\chi & \kappa & 0 \\ 0 & 0 & \mu_{\parallel} \end{bmatrix} \quad (16.12)$$

есть тензор магнитной проницаемости феррита в случае  $\mathbf{H}_0 = z^0 H_0$ .

Аналогичным путем легко показать, что если постоянное поле направлено по оси  $y$  ( $\mathbf{H}_0 = y^0 H_0$ ), то тензор магнитной проницаемости феррита принимает вид

$$\overset{\leftrightarrow}{\mu} = \begin{bmatrix} \kappa & 0 & -i\chi \\ 0 & \mu_{\parallel} & 0 \\ i\chi & 0 & \kappa \end{bmatrix}. \quad (16.13)$$

Компоненты (16.10) тензора магнитной проницаемости (16.12) или (16.13) были получены для идеализированного случая феррита без потерь. При воздействии на реальный намагниченный феррит слабым монохроматическим полем существование прецессии  $\mathbf{J}$  сопровождается поглощением в феррите энергии монохроматического поля. Это явление учитывают введением в ур-ние (16.4) так называемого диссипативного члена (см., например, [26]). Компоненты тензора  $\overset{\leftrightarrow}{\mu}$  феррита с потерями оказываются комплексными величинами с отрицательными мнимыми частями:

$$\kappa = \kappa' - i\kappa'', \quad \chi = \chi' - i\chi'', \quad \mu_{\parallel} = \mu'_{\parallel} - i\mu''_{\parallel}. \quad (16.14)$$

Зависимости этих величин от значений  $H_0$  при постоянной частоте  $\omega$  монохроматического поля показаны на рис. 16.2. Значению  $H_0 = H_p = \omega/\gamma_0$ , при котором частота свободной прецессии  $\omega_0$  совпадает с  $\omega$ , соответствуют максимальные значения величин  $\kappa''$  и  $\chi''$ .

По отношению к слабому монохроматическому полю феррит является линейной средой — его параметры не зависят от амплитуд этого поля. Все рассматриваемые ниже явления и невзаимные устройства (см. гл. 25) основываются именно на линейности высокочастотных свойств ферритовой среды.

Рассмотрим особо воздействие на намагниченный феррит монохроматических волн с круговой поляризацией вектора  $\mathbf{H}$ . Поскольку направление оси прецессии намагниченности  $\mathbf{J}$  феррита определяется направлением постоянного поля  $\mathbf{H}_0$ , то и круговая

поляризация вектора  $\mathbf{H}$  монохроматических волн должна существовать по отношению к направлению  $\mathbf{H}_0$  (а не по отношению к направлению распространения волны). Другими словами, поляризованные по кругу векторы  $\mathbf{H}$  должны лежать в плоскостях, перпендикулярных полю  $\mathbf{H}_0$ . Если, например, поле намагничивания направлено по оси  $z$  ( $\mathbf{H}_0 = z^0 H_0$ ), то монохроматические волны имеют две отличные от нуля взаимно перпендикулярные составляющие  $H_x$  и  $H_y$ , которые равны по амплитуде и сдвинуты по фазе друг относительно друга на  $\pi/2$  (см. § 12.2):

$$\dot{H}_x = i \dot{H}_y \text{ или } \dot{H}_y = -i \dot{H}_x; \quad \dot{H}_x = -i \dot{H}_y \text{ или } \dot{H}_y = i \dot{H}_x. \quad (16.15)$$

Первая пара соотношений (16.15) соответствует значению  $\varphi_y = \varphi_x - \pi/2$  и вращению вектора  $\mathbf{H}$  волн в фиксированной точке

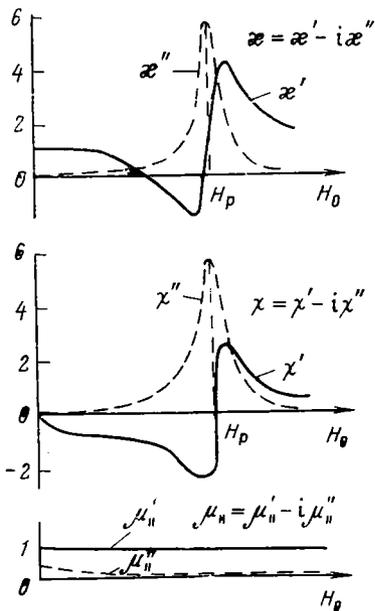


РИС. 16.2

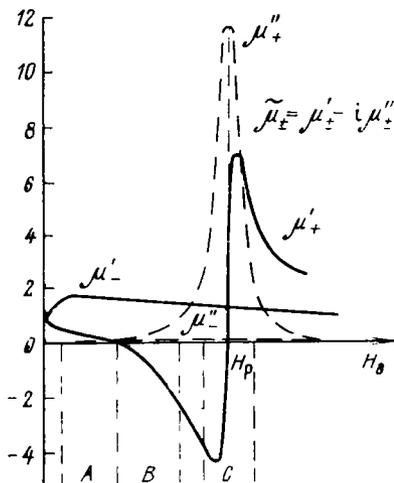


РИС. 16.3

пространства с течением времени *по часовой стрелке*, если смотреть в направлении постоянного намагничивающего поля ( $z^0$ ). Такие волны условимся называть волнами с положительным направлением вращения и снабжать характеризующие их параметры индексом «+». Вторая пара соотношений (16.15) соответствует вращению вектора  $\mathbf{H}$  волн с течением времени *против часовой стрелки*, если смотреть в направлении постоянного намагничивающего поля ( $z^0$ ), — волны с отрицательным направлением вращения, параметры которых будем снабжать индексом «—».

Подставив первую или вторую пару соотношений (16.15) в (16.9), получим:  $\dot{B}_x = \mu_0 \tilde{\mu}_{\pm} H_x$ ,  $\dot{B}_y = \mu_0 \tilde{\mu}_{\pm} H_y$ ,  $\dot{B}_z = 0$ , где

$$\begin{aligned} \tilde{\mu}_{+} &= \kappa + \chi = \mu'_{+} - i\mu''_{+}, \quad \tilde{\mu}_{-} = \kappa - \chi = \mu'_{-} - i\mu''_{-}, \\ \mu'_{\pm} &= \kappa' \pm \chi', \quad \mu''_{\pm} = \kappa'' \pm \chi''. \end{aligned} \quad (16.16)$$

Таким образом, для волн с круговой поляризацией  $\mathbf{H}$  связь между векторами  $\mathbf{B}$  и  $\mathbf{H}$  определяется скалярным множителем  $\mu_0 \tilde{\mu}_{\pm}$ :  $\mathbf{B} = \mu_0 \tilde{\mu}_{\pm} \mathbf{H}$  и, следовательно, для этих волн намагниченный феррит представляет собой изотропную линейную среду, характеризующуюся магнитной проницаемостью  $\tilde{\mu}_{+}$  (волны с положительным направлением вращения) или  $\tilde{\mu}_{-}$  (волны с отрицательным направлением вращения). В случае наличия у магнитной проницаемости мнимой части ( $\tilde{\mu} = \mu' - i\mu''$ ) намагниченный феррит является для соответствующей волны средой, обладающей магнитными потерями (ср. среду с электрическими потерями, которую в методе комплексных амплитуд характеризует диэлектрическая проницаемость  $\tilde{\epsilon} = \epsilon' - i\epsilon''$ , имеющая мнимую часть).

На рис. 16.3 приведены зависимости  $\mu'_{\pm}$  и  $\mu''_{\pm}$  от значений  $H_0$  при постоянной частоте  $\omega$  монохроматических волн, найденные с помощью рис. 16.2. Из рис. 16.3 видно, что для волн с положительным направлением вращения в окрестности  $H_0 = H_p = \omega/\gamma_0$  резко возрастают значения мнимой части  $\mu''_{+}$  магнитной проницаемости, что указывает на существенное увеличение потерь энергии этих волн в феррите (см., например, § 16.3). Вектор  $\mathbf{H}$  рассматриваемых волн лежит в плоскостях, перпендикулярных напряженности  $\mathbf{H}_0$ , и направление его вращения совпадает с направлением прецессии вектора  $\mathbf{J}$  в феррите. При значении  $H_0 = H_p$  угловая частота прецессии  $\omega_0$  совпадает с угловой частотой  $\omega$  вращения  $\mathbf{H}$  и поле  $\mathbf{H}$  непрерывно стремится увеличить отклонение прецессирующего вектора  $\mathbf{J}$  от направления  $\mathbf{H}_0$ . С другой стороны, увеличение этого отклонения сопровождается возрастанием тепловых потерь в феррите. В результате отклонение  $\mathbf{J}$  устанавливается такой величины, при которой существует равенство между энергией, рассеиваемой в феррите, и энергией, отдаваемой волной. Возникающее при  $\omega = \omega_0$  явление наиболее эффективного взаимодействия положительно поляризованных волн с намагниченным ферритом, сопровождаемое интенсивным поглощением ферритом энергии этих волн, называют *ферромагнитным резонансом*. Если  $H_0 \neq H_p$  (частоты  $\omega$  и  $\omega_0$  не совпадают), то поглощение энергии волн уменьшается. Параметры  $\mu'_{+}$  и  $\mu''_{+}$  существенно зависят от значений  $H_0$  (см. рис. 16.3).

Направление вращения вектора  $\mathbf{H}$  отрицательно поляризованных по кругу волн и направление прецессии  $\mathbf{J}$  противоположны. При этом вектор  $\mathbf{H}$  в среднем за период почти не оказывает воздействия на намагниченность  $\mathbf{J}$ . Поэтому для волн с отрицательным направлением вращения намагниченный феррит практиче-

ски представляет собой среду с очень малыми потерями ( $\mu''_- \approx 0$ ,  $\mu_- \approx \mu'_-$ ) и слабой зависимостью магнитной проницаемости от значений  $H_0$ .

Различные значения магнитной проницаемости для волн с положительным и отрицательным направлениями вращения позволяют создавать разнообразные невзаимные устройства СВЧ, обладающие весьма ценными свойствами (см. гл. 25). На рис. 16.3 штриховыми линиями выделены три характерные области, наиболее часто используемые в невзаимных устройствах СВЧ. Области  $A$  соответствуют значения  $H_0 \ll H_p$ ,  $\mu_{\pm} = \mu'_{\pm}$ ,  $0 < \mu'_+ < \mu'_-$ , при которых волны с противоположными направлениями вращения  $H$  распространяются практически без потерь, но с различными коэффициентами фазы (различие параметров  $\mu'_+$  и  $\mu'_-$  приводит к соотношению  $\beta_+ < \beta_-$ ) — см., например, § 16.3.

Области  $B$  соответствуют значения  $H_0 < H_p$ ,  $\mu'_+ < 0$  и близкие к нулю  $\mu''_+$ . Отрицательная проницаемость  $\mu'_+$  (при  $\mu''_+ \approx 0$ ) приводит к вещественному значению коэффициента распространения положительно поляризованных волн в феррите ( $\gamma^2_+ \approx -\omega^2 \epsilon_a \mu_0 \mu'_+ = -\alpha^2_+$ ). Экспоненциальное затухание этих волн не связано с потерями электромагнитной энергии в феррите ( $\mu''_+ \approx 0$ ), а отражает тот факт, что положительно поляризованные волны в рассматриваемом случае не могут распространяться в феррите. Если значение  $H_0$  лежит в области  $B$ , то происходит явление вытеснения из ферритового тела волн с положительным направлением вращения, которое называют *эффектом смещения поля*.

Области  $C$  ( $H_0 \approx H_p$ ) соответствует ферромагнитный резонанс.

## Плазма

Плазма представляет собой систему заряженных частиц — свободных электронов и ионов, а также нейтральных молекул. Пусть плазма находится в постоянном магнитном поле  $\mathbf{H}_0 = z^0 H_0$  и в ней распространяется монохроматическая плоская волна частоты  $\omega$ , имеющая комплексную амплитуду  $\dot{\mathbf{E}} = x^0 \dot{E}_x + y^0 \dot{E}_y + z^0 \dot{E}_z$ . Приняв во внимание малую подвижность ионов по сравнению со свободными электронами и воспользовавшись уравнением движения этих электронов, нетрудно получить следующие соотношения для компонент комплексной амплитуды поляризованности  $\dot{\mathbf{P}}$  (см., например [32]):

$$\left. \begin{aligned} \dot{P}_x &= \frac{\epsilon_0 \omega_p^2}{\omega [\omega_0^2 - (\omega - i\nu)^2]} [(\omega - i\nu) \dot{E}_x + i\omega_0 \dot{E}_y], \\ \dot{P}_y &= \frac{\epsilon_0 \omega_p^2}{\omega [\omega_0^2 - (\omega - i\nu)^2]} [-i\omega_0 \dot{E}_x + (\omega - i\nu) \dot{E}_y], \\ \dot{P}_z &= -\frac{\epsilon_0 \omega_p^2}{\omega (\omega - i\nu)} \dot{E}_z. \end{aligned} \right\} \quad (16.17)$$

Здесь  $\nu$  — среднее число соударений в единицу времени электрона с ионами и молекулами (соударения приводят к поглощению волны в плазме);

$$\omega_0 = \mu_0 \frac{|e|}{m_0} H_0; \quad \omega_p^2 = \frac{e^2 N}{\epsilon_0 m_0};$$

$N$  — концентрация электронов.

Разложив комплексную амплитуду  $\dot{\mathbf{D}} = \epsilon_0 \dot{\mathbf{E}} + \dot{\mathbf{P}}$  монохроматического поля в плазме по координатным осям и воспользовавшись (16.17), находим:

$$\dot{D}_x = \epsilon_0 (p \dot{E}_x + i q \dot{E}_y), \quad \dot{D}_y = \epsilon_0 (-i q \dot{E}_x + p \dot{E}_y), \quad \dot{D}_z = \epsilon_0 \epsilon_{\parallel} \dot{E}_z, \quad (16.18)$$

где введены обозначения:

$$p = 1 + \omega_p^2 (\omega - i \nu) / \omega [\omega_0^2 - (\omega - i \nu)^2], \\ q = \omega_p^2 \omega_0 / \omega [\omega_0^2 - (\omega - i \nu)^2], \quad \epsilon_{\parallel} = 1 - \omega_p^2 / \omega (\omega - i \nu). \quad (16.19)$$

Соотношения (16.18) удобно записать в матричной форме

$$\begin{bmatrix} \dot{D}_x \\ \dot{D}_y \\ \dot{D}_z \end{bmatrix} = \epsilon_0 \begin{bmatrix} p & i q & 0 \\ -i q & p & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_{\parallel} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{E}_x \\ \dot{E}_y \\ \dot{E}_z \end{bmatrix} \quad (16.20)$$

и в векторной форме  $\dot{\mathbf{D}} = \overset{\leftrightarrow}{\epsilon} \dot{\mathbf{E}}$ , где

$$\overset{\leftrightarrow}{\epsilon} = \begin{bmatrix} p & i q & 0 \\ -i q & p & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_{\parallel} \end{bmatrix} \quad (16.21)$$

есть тензор диэлектрической проницаемости плазмы в случае  $\mathbf{H}_0 = z^0 H_0$ .

Нетрудно показать, что в случае  $\mathbf{H}_0 = y^0 H_0$

$$\overset{\leftrightarrow}{\epsilon} = \begin{bmatrix} p & 0 & -i q \\ 0 & \epsilon_{\parallel} & 0 \\ i q & 0 & p \end{bmatrix}. \quad (16.22)$$

Согласно (16.19) компоненты тензора  $\overset{\leftrightarrow}{\epsilon}$  оказываются комплексными величинами с отрицательными мнимыми частями:

$$p = p' - i p'', \quad q = q' - i q'', \quad \epsilon_{\parallel} = \epsilon_{\parallel}' - i \epsilon_{\parallel}''. \quad (16.23)$$

Явные выражения для вещественных и мнимых частей  $p$ ,  $q$  и  $\epsilon_{\parallel}$  легко получить из (16.19), и здесь они не приводятся.

Соотношения (16.18), (16.20) — (16.23) по своей структуре таковы же, что и соответственно (16.9), (16.11) — (16.14), — намагнитченная постоянным полем плазма является для монохро-

матического поля анизотропной в электрическом отношении средой. Анизотропия здесь обусловлена тем, что на упорядоченно движущиеся под влиянием монохроматической силы  $F_0 = eE$  электроны, которые имеют составляющую скорости  $v$ , перпендикулярную постоянному магнитному полю  $H_0$ , действует также сила  $F_M = \mu_0 e [v H_0]$  со стороны поля  $H_0$ . Действие одновременно двух сил  $F_0$  и  $F_M$  приводит к тому, что наряду со смещением электронов параллельно монохроматическому вектору  $E$  существует также другое смещение в плоскости, перпендикулярной  $H_0$ , которое обуславливает компоненты  $P$  и  $D$ , не совпадающие по направлению с  $E$ . Пусть, например,  $E = x^0 E_x$  и, следовательно, существуют упорядоченное смещение электронов вдоль оси  $x$  (которое обуславливает компоненты  $P_x$  и  $D_x$ ) и составляющая скорости  $v_x$ ; при этом в случае  $H_0 = z^0 H_0$  сила  $F_M$  вызовет смещение электронов вдоль оси  $y$ , которое обуславливает компоненты  $P_y$  и  $D_y$  [ср. (16.17) и (16.18)]. Если же монохроматический вектор  $E = z^0 E_z$  параллелен постоянному магнитному полю  $H_0$ , то отсутствует упорядоченная составляющая скорости, перпендикулярная  $H_0$ .  $F_M = 0$ , электроны совершают прямолинейное колебательное движение вместе с силой  $F_0 = eE$  и для рассматриваемого поля намагниченная плазма является изотропной линейной средой, электрические параметры которой не зависят от постоянного поля  $H_0$  ( $D_z = \epsilon_0 \epsilon_{\parallel} E_z$ ,  $D_x = D_y = 0$ ).

Представим себе, что в постоянном магнитном поле  $H_0$  движутся (без соударения с ионами и молекулами) электроны со скоростью  $v_{\perp}$ , перпендикулярной направлению  $H_0$ . На такой электрон действует сила  $F_M = \mu_0 e [v_{\perp} H_0]$ . Поскольку  $e < 0$ , то  $H_0$ ,  $v_{\perp}$  и  $F_M$  образуют правую ортогональную тройку векторов, причем величина силы  $F_M = \mu_0 |e| v_{\perp} H_0$ . Эта сила не совершает работы при движении электрона (так как  $F_M \perp v_{\perp}$ ) и может изменять только направление скорости, не изменяя ее величины. Поэтому траекториями электронов будут окружности, плоскости которых перпендикулярны  $H_0$ , причем направление вращения электронов при движении по этим окружностям образует с направлением  $H_0$  *правовинтовую* систему. Радиус окружностей  $r$  можно найти, приравняв центробежную силу  $m_0 v_{\perp}^2 / r$  силе  $F_M$ :  $r = m_0 v_{\perp} / \mu_0 |e| H_0$ . Период вращения электронов по окружности  $T_0$  определяется из равенства  $v_{\perp} T_0 = 2\pi r$ , а угловая частота вращения электронов — соотношением  $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = \frac{v_{\perp}}{r} = \mu_0 \frac{|e|}{m_0} H_0$ . Таким образом, введенный выше параметр  $\omega_0$  представляет собой угловую частоту вращения электронов в постоянном магнитном поле, называемую *гиротропической частотой* электронов.

При одновременном существовании монохроматического поля  $E$  и постоянного поля  $H_0$  траектория электронов имеет сложную форму, но сохраняет элементы вращательного движения вокруг фиксированного направления  $H_0$ , если существует составляющая скорости  $v_{\perp}$ . Это обстоятельство и обуславливает анизотропные электрические свойства намагниченной плазмы.

## 16.2. УРАВНЕНИЯ МАКСВЕЛЛА ДЛЯ НАМАГНИЧЕННЫХ ФЕРРИТА И ПЛАЗМЫ

Рассмотрим далее наиболее простые для анализа идеализированные случаи распространения однородных плоских волн в безграничных намагниченных однородных феррите и плазме. Комплексные амплитуды векторов  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  этих волн удовлетворяют однородным (без сторонних источников) уравнениям Максвелла, которые для намагниченного феррита вследствие материальных уравнений  $\mathbf{D} = \epsilon_a \mathbf{E}$  и  $\mathbf{B} = \mu_0 \overset{\leftrightarrow}{\mu} \mathbf{H}$  принимают вид:

$$\begin{aligned} \text{rot } \dot{\mathbf{H}} &= i \omega \epsilon_a \dot{\mathbf{E}}, \\ \text{rot } \dot{\mathbf{E}} &= -i \omega \mu_0 \overset{\leftrightarrow}{\mu} \dot{\mathbf{H}}, \end{aligned} \quad (16.24)$$

а для намагниченной плазмы вследствие уравнений  $\mathbf{D} = \epsilon_0 \overset{\leftrightarrow}{\epsilon} \mathbf{E}$  и  $\mathbf{B} = \mu_a \mathbf{H}$  — вид:

$$\begin{aligned} \text{rot } \dot{\mathbf{H}} &= i \omega \epsilon_0 \overset{\leftrightarrow}{\epsilon} \dot{\mathbf{E}}, \\ \text{rot } \dot{\mathbf{E}} &= -i \omega \mu_a \dot{\mathbf{H}}. \end{aligned} \quad (16.25)$$

Если направление намагничивающего поля в обеих средах одно и то же (например,  $\mathbf{H}_0 = z^0 H_0$ ), то тензоры  $\overset{\leftrightarrow}{\mu}$  феррита и  $\overset{\leftrightarrow}{\epsilon}$  плазмы одинаковы по структуре и перестановка

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{E}} \rightarrow \dot{\mathbf{H}}, \quad \dot{\mathbf{H}} \rightarrow -\dot{\mathbf{E}}, \\ \epsilon_a \overset{\leftrightarrow}{\epsilon} \mu_a, \quad \epsilon_0 \overset{\leftrightarrow}{\epsilon} \mu_0 \overset{\leftrightarrow}{\mu} \end{aligned} \quad (16.26a)$$

преобразует систему (16.24) в систему (16.25) и наоборот. Отсюда следует, что из известного решения системы (16.24) для распространяющейся в некотором направлении волны в феррите с помощью перестановки (16.26a) легко получить решение системы (16.25) для распространяющейся в том же направлении волны в плазме (или наоборот). В этом проявляется принцип перестановочной двойственности для анизотропных сред (ср. § 10.2). Распространение двух соответствующих друг другу волн в намагниченных феррите и плазме характеризуется сходными явлениями, причем в силу замен (16.26a) свойства магнитного (электрического) поля в феррите оказываются аналогичными свойствам электрического (магнитного) поля в плазме.

Сопоставление (16.12) с (16.21) показывает, что замены в (16.26a)  $\epsilon_0 \overset{\leftrightarrow}{\epsilon} \mu_0 \overset{\leftrightarrow}{\mu}$  раскрываются следующим образом:

$$\epsilon_0 p \overset{\leftrightarrow}{\epsilon} \mu_0 \chi, \quad \epsilon_0 q \overset{\leftrightarrow}{\epsilon} \mu_0 \chi, \quad \epsilon_0 \epsilon_{\parallel} \overset{\leftrightarrow}{\epsilon} \mu_0 \mu_{\parallel}. \quad (16.26b)$$

## 16.3. РАСПРОСТРАНЕНИЕ ОДНОРОДНЫХ ПЛОСКИХ ВОЛН В ПРОДОЛЬНО НАМАГНИЧЕННЫХ ФЕРРИТЕ И ПЛАЗМЕ

Если волна распространяется вдоль направления постоянного намагничивающего поля  $\mathbf{H}_0$ , то этот случай называют распро-

странением в продольно намагниченных анизотропных средах. Пусть, например,  $\mathbf{H}_0 = z^0 H_0$ , и, следовательно, однородная плоская волна распространяется вдоль оси  $z$ :

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{E}} &= \dot{\mathbf{E}}_0 e^{\mp \gamma z}, \quad \dot{\mathbf{H}} = \dot{\mathbf{H}}_0 e^{\mp \gamma z}, \\ \frac{\partial \dot{\mathbf{E}}}{\partial x} &= \frac{\partial \dot{\mathbf{E}}}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \dot{\mathbf{H}}}{\partial x} = \frac{\partial \dot{\mathbf{H}}}{\partial y} = 0, \end{aligned} \quad (16.27)$$

где  $\gamma = \alpha + i\beta$  — коэффициент распространения. Зависимости  $e^{-\gamma z}$  и  $e^{+\gamma z}$  описывают две волны, распространяющиеся в противоположных направлениях (соответственно  $+z^0$  и  $-z^0$ ).

Рассмотрим особенности распространения волн (16.27) в продольно намагниченных феррите и плазме.

1. Феррит. Представив ур-ния (16.24) в декартовой системе координат и учтя (16.12), получим:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \dot{H}_z}{\partial y} - \frac{\partial \dot{H}_y}{\partial z} &= i \omega \varepsilon_a \dot{E}_x, \\ \frac{\partial \dot{H}_x}{\partial z} - \frac{\partial \dot{H}_z}{\partial x} &= i \omega \varepsilon_a \dot{E}_y, \\ \frac{\partial \dot{H}_y}{\partial x} - \frac{\partial \dot{H}_x}{\partial y} &= i \omega \varepsilon_a \dot{E}_z, \\ \frac{\partial \dot{E}_z}{\partial y} - \frac{\partial \dot{E}_y}{\partial z} &= -i \omega \mu_0 (\kappa \dot{H}_x + i \chi \dot{H}_y), \\ \frac{\partial \dot{E}_x}{\partial z} - \frac{\partial \dot{E}_z}{\partial x} &= -i \omega \mu_0 (-i \chi \dot{H}_x + \kappa \dot{H}_y), \\ \frac{\partial \dot{E}_y}{\partial x} - \frac{\partial \dot{E}_x}{\partial y} &= -i \omega \mu_0 \mu_{\parallel} \dot{H}_z. \end{aligned} \right\} \quad (16.28)$$

Подставив (16.27) в (16.28) и сократив левые и правые части на  $e^{\mp \gamma z}$ , найдем:

$$\left. \begin{aligned} \pm \gamma \dot{H}_{0y} &= i \omega \varepsilon_a \dot{E}_{0x}, \\ \mp \gamma \dot{H}_{0x} &= i \omega \varepsilon_a \dot{E}_{0y}, \quad 0 = \dot{E}_{0z}, \\ \pm \gamma \dot{E}_{0y} &= -i \omega \mu_0 (\kappa \dot{H}_{0x} + i \chi \dot{H}_{0y}), \\ \mp \gamma \dot{E}_{0x} &= -i \omega \mu_0 (-i \chi \dot{H}_{0x} + \kappa \dot{H}_{0y}), \quad 0 = \dot{H}_{0z}. \end{aligned} \right\} \quad (16.29)$$

Из полученных значений  $\dot{E}_z = \dot{H}_z = 0$  следует, что однородная плоская волна в продольно намагниченном феррите относится к классу Т (подобно однородной волне в изотропной среде).

Исключив из (16.29)  $\dot{E}_{0x}$  и  $\dot{E}_{0y}$ , получим:

$$\begin{aligned} (\gamma^2 + \omega^2 \varepsilon_a \mu_0 \kappa) \dot{H}_{0y} &= i \omega^2 \varepsilon_a \mu_0 \chi \dot{H}_{0x}, \\ (\gamma^2 + \omega^2 \varepsilon_a \mu_0 \kappa) \dot{H}_{0x} &= -i \omega^2 \varepsilon_a \mu_0 \dot{H}_{0y}. \end{aligned} \quad (16.30)$$

Перемножив левые и правые части этих соотношений, приходим к уравнению  $(\gamma^2 + \omega^2 \varepsilon_a \mu_0 \kappa)^2 = \omega^4 \varepsilon_a^2 \mu_0^2 \chi^2$  или  $\gamma^2 = -\omega^2 \varepsilon_a \mu_0 (\kappa \mp \chi)$ .

Таким образом, для коэффициента распространения  $\gamma$  получили два решения:

$$\gamma_+ = i\omega \sqrt{\varepsilon_a \mu_0 (\kappa + \chi)}, \quad \gamma_- = i\omega \sqrt{\varepsilon_a \mu_0 (\kappa - \chi)}. \quad (16.31)$$

Это означает, что в продольно намагниченном феррите для каждого направления распространения ( $\pm z^0$ ) могут существовать две разновидности однородных плоских волн, имеющие различные коэффициенты распространения.

Подставив значения  $\gamma$  из (16.31) в (16.30), получим:

$$\begin{aligned} \dot{H}_{0y} &= -i \dot{H}_{0x} \text{ и } \dot{H}_{0x} = i \dot{H}_{0y} \text{ при } \gamma_+; \quad \dot{H}_{0y} = i \dot{H}_{0x} \text{ и} \\ \dot{H}_{0x} &= -i \dot{H}_{0y} \text{ при } \gamma_-. \end{aligned} \quad (16.32)$$

Соотношения (16.32) аналогичны (16.15). Следовательно, в продольно намагниченном феррите любая однородная плоская волна (распространяющаяся в направлении  $+z^0$  или  $-z^0$  и относящаяся к классу Т) распадается на две поляризованные по кругу волны, одна из которых имеет положительное направление вращения (см. § 16.1) и коэффициент распространения  $\gamma_+$ , другая — отрицательное направление вращения и  $\gamma_-$ . Из результатов § 16.1 [а также из сопоставления соотношений (16.31) с коэффициентом распространения (11.13) в среде с электрическими потерями] следует, что по отношению к этим волнам феррит является изотропной линейной средой с магнитными потерями, характеризующейся соответственно комплексными магнитными проницаемостями  $\tilde{\mu}_+$  и  $\tilde{\mu}_-$  — см. ф-лы (16.16) и рис. 16.3.

Представив коэффициенты распространения (16.31) в виде

$$\gamma_{\pm} = i\omega \sqrt{\varepsilon_a \mu_0 (\mu'_{\pm} - i\mu''_{\pm})} = \alpha_{\pm} + i\beta_{\pm} \quad (16.33)$$

и проделав такие же действия, как при выводе соотношений (11.19), получим следующие выражения для коэффициентов затухания  $\alpha_{\pm}$  и фазы  $\beta_{\pm}$ :

$$\begin{aligned} \alpha_{\pm} &= \omega \sqrt{\frac{\varepsilon_a \mu_0}{2} \left[ \sqrt{(\mu'_{\pm})^2 + (\mu''_{\pm})^2} - \mu'_{\pm} \right]}, \\ \beta_{\pm} &= \omega \sqrt{\frac{\varepsilon_a \mu_0}{2} \left[ \sqrt{(\mu'_{\pm})^2 + (\mu''_{\pm})^2} + \mu'_{\pm} \right]}. \end{aligned} \quad (16.34)$$

Поскольку при всех значениях  $H_0$   $\mu'_- > 0$  и  $\mu''_- \approx 0$ , то согласно (16.34) имеем  $\alpha_- \approx 0$  и  $\beta_- \approx \omega \sqrt{\varepsilon_a \mu_0 \mu'_-}$ , т. е. для отрицательно поляризованных волн продольно намагниченный феррит представляет собой среду, распространение в которой происходит практически без затухания (ср. § 16.1).

Если значение  $H_0$  соответствует области А (см. рис. 16.3), то  $0 < \mu'_+ < \mu'_-$ ,  $\mu''_+ \approx 0$  и согласно (16.34) получаем  $\alpha_+ \approx 0$  и  $\beta_+ < \beta_-$ . Таким образом, в области А распространение волн обоих

направлений вращения не сопровождается заметным затуханием и коэффициент фазы положительно поляризованных волн меньше, чем отрицательно поляризованных.

В области  $B$ , как было показано в § 16.1, существует эффект смещения поля.

В области  $C$  (при  $H_0 \approx H_p = \omega/\gamma_0$ , т. е. при  $\omega_0 \approx \omega$ ) имеем  $\mu''_+ \gg 1$ , вследствие чего  $\alpha_+$  принимает большие значения. Возникающее в продольно намагниченном феррите при  $\omega_0 = \omega$  интенсивное затухание поляризованных по кругу в положительном направлении однородных плоских волн называют продольным ферромагнитным резонансом (ср. § 16.1).

Распространение однородной плоской волны с *линейно* поляризованным полем в продольно намагниченном феррите при значении  $H_0$ , соответствующем области  $A$ , сопровождается поворотом плоскости поляризации этого поля, который не подчиняется теореме взаимности. Это явление называют *эффектом Фарадея*.

Распространяющуюся без поглощения в феррите плоскую волну с линейно поляризованным вектором напряженности магнитного поля можно представить суммой двух поляризованных по кругу волн, которые имеют противоположные направления вращения и одинаковые величины векторов  $\mathbf{H}$ , равные половине амплитуды исходной волны (см. § 12.2). Пусть, например, исходная волна распространяется в направлении намагничивающего поля  $\mathbf{H}_0 = z^0 H_0$  и в некоторый момент времени  $t_1$  в точке  $z_1$  имеет вектор  $\mathbf{H}(t_1)$ , ориентированный вертикально и равный амплитуде  $H_m$  [т. е. векторы  $\mathbf{H}_+(t_1)$  и  $\mathbf{H}_-(t_1)$  поляризованных по кругу волн направлены в точке  $z_1$  вверх], — см. рис. 16.4. В этот же момент времени  $t_1$  в точке  $z_1 + l$  вектор  $\mathbf{H}_+$  окажется повернут относительно вертикали *против* часовой стрелки на угол  $\theta_+ = \beta_+ l$  (ср. рис. 12.26), а вектор  $\mathbf{H}_-$  — *по* часовой стрелке на угол  $\theta_- = \beta_- l$  (ср. рис. 12.36). Поскольку  $\beta_- > \beta_+$ , то  $\theta_- > \theta_+$  и суммарный вектор  $\mathbf{H}$  в момент  $t_1$  в точке  $z_1 + l$  будет повернут относительно вертикали *по часовой стрелке* на угол (см. рис. 16.4)

$$\theta = \theta_- - \frac{\theta_+ + \theta_-}{2} = \frac{\theta_- - \theta_+}{2} = \frac{\beta_- - \beta_+}{2} l. \quad (16.35)$$

Суммарное магнитное поле в точке  $z_1 + l$  также линейно поляризовано и имеет амплитуду  $H_m$  — оно является результатом суперпозиции двух поляризованных по кругу волн, которые имеют противоположные направления вращения и одинаковые величины векторов  $\mathbf{H}$ , равные  $H_m/2$ .

Рассуждая точно таким же образом при распространении исходной волны в направлении, противоположном направлению намагничивающего поля  $\mathbf{H} = z_0 H_0$ , легко прийти к выводу, что и в этом случае поворот линейно поляризованного вектора  $\mathbf{H}$ , а следовательно, и плоскости поляризации происходит также *по*

часовой стрелке, если смотреть в направлении вектора  $\mathbf{H}_0$ , причем величина этого поворота вновь определяется ф-лой (16.35). Таким образом, если плоская волна распространяется навстречу полю  $\mathbf{H}_0$  и имеет линейно поляризованный вектор  $\mathbf{H}$ , который в точке  $z_1+l$  образует с вертикалью угол  $\theta$  (рис. 16.4), то в точке  $z_1$  вектор  $\mathbf{H}$  этой волны уже не возвращается к вертикальному положению (как на рис. 16.4), а за счет поворота по часовой стрелке на угол  $\theta$  образует с вертикалью угол  $2\theta$ . Это и означает, что поворот плоскости поляризации в продольно намагниченном феррите не подчиняется теореме взаимности.

2. Плазма. С помощью перестановки (16.26) получаем из (16.31), (16.32), (16.16), (16.33) и (16.34) соответственно следующие соотношения, описывающие распространение однородных плоских волн в продольно намагниченной плазме:

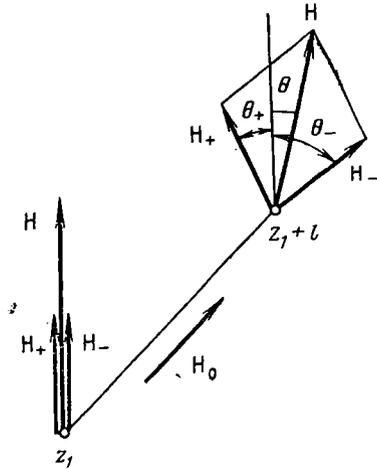


РИС. 16.4

$$\gamma_+ = i\omega \sqrt{\mu_a \varepsilon_0 (p + q)}, \quad \gamma_- = i\omega \sqrt{\mu_a \varepsilon_0 (p - q)}, \quad (16.36)$$

$$\dot{E}_{0x} = i \dot{E}_{0y} \text{ при } \gamma_+, \quad \dot{E}_{0x} = -i \dot{E}_{0y} \text{ при } \gamma_-; \quad (16.37)$$

$$\tilde{\varepsilon}_+ = p + q = \varepsilon'_+ - i\varepsilon''_+, \quad \tilde{\varepsilon}_- = p - q = \varepsilon'_- - i\varepsilon''_-; \quad (16.38)$$

$$\gamma_{\pm} = i\omega \sqrt{\mu_a \varepsilon_0 (\varepsilon'_{\pm} - i\varepsilon''_{\pm})} = \alpha_{\pm} + i\beta_{\pm}; \quad (16.39)$$

$$\alpha_{\pm} = \omega \sqrt{\frac{\mu_a \varepsilon_0}{2} \left[ \sqrt{(\varepsilon'_{\pm})^2 + (\varepsilon''_{\pm})^2} - \varepsilon'_{\pm} \right]},$$

$$\beta_{\pm} = \omega \sqrt{\frac{\mu_a \varepsilon_0}{2} \left[ \sqrt{(\varepsilon'_{\pm})^2 + (\varepsilon''_{\pm})^2} + \varepsilon'_{\pm} \right]}, \quad (16.40)$$

где согласно (16.23)  $\varepsilon'_{\pm} = p' \pm q'$ ,  $\varepsilon''_{\pm} = p'' \pm q''$ .

В продольно намагниченной плазме, как и в феррите, любая однородная плоская волна относится к классу Т ( $\dot{E}_z = H_z = \theta$ ) и распадается на две волны, которые поляризованы по кругу в противоположных направлениях и имеют различные коэффициенты затухания и фазы (16.40), т. е. различные поглощение и фазовую скорость. По отношению к этим волнам плазма представляет собой изотропную линейную среду, обладающую электрическими потерями и характеризуемую комплексными диэлектрическими проницаемостями (16.38).

Если фигурирующие в ф-лах (16.38) слагаемые заменить их явными выражениями, которые легко найти из (16.19), то получим:

$$\epsilon'_+ = 1 - \omega_p^2 (\omega - \omega_0) / \omega [(\omega - \omega_0)^2 + \nu^2], \quad \epsilon''_+ = \omega_p^2 \nu / \omega [(\omega - \omega_0)^2 + \nu^2]; \quad (16.41)$$

$$\epsilon'_- = 1 - \omega_p^2 (\omega + \omega_0) / \omega [(\omega + \omega_0)^2 + \nu^2], \quad \epsilon''_- = \omega_p^2 \nu / \omega [(\omega + \omega_0)^2 + \nu^2]. \quad (16.42)$$

Из (16.41) следует, что для обеих ( $e^{\mp \nu y + z}$ ) поляризованных по кругу волн с положительным направлением вращения (по часовой стрелке, если смотреть в направлении  $\mathbf{H}_0$ ) при совпадении  $\omega$  с гироскопической частотой электронов  $\omega_0 = \mu_0 \frac{|e|}{m_0} H_0$  параметр  $\epsilon''_+$  принимает максимальное значение, которому согласно (16.40) соответствует повышенное значение коэффициента затухания  $\alpha_+$ . Вектор  $\mathbf{E}$  этих волн лежит в плоскости, перпендикулярной  $\mathbf{H}_0$ , и направление его вращения совпадает с направлением вращения электронов в магнитном поле  $\mathbf{H}_0$ . Если при этом частота  $\omega$  вращения  $\mathbf{E}$  совпадает с частотой  $\omega_0$  вращения электронов, то наступает продольный *гиромагнитный резонанс*, который характеризуется эффективным взаимодействием положительно поляризованных по кругу волн с намагниченной плазмой, сопровождаемым повышенным поглощением плазмой энергии этих волн.

Распространение поляризованных по кругу волн с отрицательным направлением вращения характеризуется меньшим поглощением ( $\epsilon''_- < \epsilon''_+$ ) и отсутствием резонанса.

Если в намагниченной плазме поглощение мало и им можно пренебречь, то согласно (16.40) — (16.42) при  $\nu \approx 0$  получаем  $\epsilon'_- > \epsilon'_+$ ,  $\epsilon''_+ \approx \epsilon''_- \approx 0$ ,  $\alpha_{\pm} \approx 0$ ,  $\beta_{\pm} = \omega \sqrt{\mu_0 \epsilon_0 \epsilon'_{\pm}}$ ,  $\beta_- > \beta_+$ . В этом приближении в продольно намагниченной плазме имеет место эффект Фарадея — распространение плоской однородной волны с линейно поляризованным вектором  $\mathbf{E}$  сопровождается взаимным поворотом плоскости поляризации, который всегда происходит по часовой стрелке, если смотреть в направлении намагничивающего поля  $\mathbf{H}_0$ . Величина поворота вновь определяется ф-лой (16.35).

#### 16.4. РАСПРОСТРАНЕНИЕ ОДНОРОДНЫХ ПЛОСКИХ ВОЛН В ПОПЕРЕЧНО НАМАГНИЧЕННЫХ ФЕРРИТЕ И ПЛАЗМЕ

Если волна распространяется *перпендикулярно* направлению постоянного намагничивающего поля  $\mathbf{H}_0$ , то этот случай называют распространением в поперечно намагниченных анизотропных средах. Пусть, например,  $\mathbf{H}_0 = y^0 \mathbf{H}_0$ , а однородная плоская волна распространяется вдоль оси  $z$ .

1. Феррит. Представив ур-ния (16.24) в декартовых координатах и учтя (16.13), получим:

$$\left. \begin{aligned}
\frac{\partial \dot{H}_z}{\partial y} - \frac{\partial \dot{H}_y}{\partial z} &= i \omega \varepsilon_a \dot{E}_x, & \frac{\partial \dot{H}_x}{\partial z} - \frac{\partial \dot{H}_z}{\partial y} &= i \omega \varepsilon_a \dot{E}_y, \\
\frac{\partial \dot{H}_y}{\partial x} - \frac{\partial \dot{H}_x}{\partial y} &= i \omega \varepsilon_a \dot{E}_z, & \frac{\partial \dot{E}_z}{\partial y} - \frac{\partial \dot{E}_y}{\partial z} &= -i \omega \mu_0 (\kappa \dot{H}_x - i \chi \dot{H}_z), \\
\frac{\partial \dot{E}_x}{\partial z} - \frac{\partial \dot{E}_z}{\partial x} &= -i \omega \mu_0 \mu_{\parallel} \dot{H}_y, \\
\frac{\partial \dot{E}_y}{\partial x} - \frac{\partial \dot{E}_x}{\partial y} &= -i \omega \mu_0 (i \chi \dot{H}_x + \kappa \dot{H}_z).
\end{aligned} \right\} (16.43)$$

Подставив (16.27) в (16.43) и сократив левые и правые части на  $e^{\mp \gamma z}$ , находим:

$$\left. \begin{aligned}
\pm \gamma \dot{H}_{0y} &= i \omega \varepsilon_a \dot{E}_{0x}, & \mp \gamma \dot{H}_{0x} &= i \omega \varepsilon_a \dot{E}_{0y}, & 0 &= \dot{E}_{0z}, \\
\pm \gamma \dot{E}_{0y} &= -i \omega \mu_0 (\kappa \dot{H}_{0x} - i \chi \dot{H}_{0z}), & \mp \gamma \dot{E}_{0x} &= -i \omega \mu_0 \mu_{\parallel} \dot{H}_{0y}, \\
0 &= -i \omega \mu_0 (i \chi \dot{H}_{0x} + \kappa \dot{H}_{0z}).
\end{aligned} \right\} (16.44)$$

Уравнения (16.44) распадаются на две независимые системы:

$$\pm \gamma \dot{H}_{0y} = i \omega \varepsilon_a \dot{E}_{0x}, \quad \mp \gamma \dot{E}_{0x} = -i \omega \mu_0 \mu_{\parallel} \dot{H}_{0y}, \quad \dot{E}_{0z} = 0; \quad (16.45)$$

$$\begin{aligned}
\mp \gamma \dot{H}_{0x} &= i \omega \varepsilon_a \dot{E}_{0y}, & \pm \gamma \dot{E}_{0y} &= -i \omega \mu_0 (\kappa \dot{H}_{0x} - i \chi \dot{H}_{0z}), \\
\kappa \dot{H}_{0z} &= -i \chi \dot{H}_{0x}.
\end{aligned} \quad (16.46)$$

Исключив из системы (16.45)  $\dot{E}_{0x}$  и  $\dot{H}_{0y}$ , получим  $\gamma = i \omega \sqrt{\varepsilon_a \mu_0 \mu_{\parallel}}$ . Система (16.45) определяет две распространяющиеся в противоположных направлениях волны с комплексными амплитудами  $\dot{\mathbf{E}} = x_0 \dot{E}_{0x} e^{\mp \gamma z}$  и  $\dot{\mathbf{H}} = \pm y_0 \frac{1}{Z_c} \dot{E}_{0x} e^{\mp \gamma z}$ , где  $Z_c = \sqrt{\frac{\mu_0 \mu_{\parallel}}{\varepsilon_a}}$ . Каждая из этих волн имеет такой же вид, как обычная однородная Т волна в изотропной среде (см. § 11.2, 11.3), и называется *обыкновенной*. Поскольку вектор  $\dot{\mathbf{H}}$  обыкновенной волны параллелен постоянному полю  $\mathbf{H}_0$ , то для нее намагниченный до насыщения феррит является изотропной средой с магнитной проницаемостью  $\mu_{\parallel}$  (ср. § 16.1).

Из системы (16.46) находим коэффициент распространения

$$\gamma = \gamma_{\perp} = i \omega \sqrt{\varepsilon_a \mu_0 \tilde{\mu}_{\perp}}, \quad \tilde{\mu}_{\perp} = (\kappa^2 - \chi^2) / \kappa. \quad (16.47)$$

Система (16.46) определяет две волны с комплексными амплитудами  $\dot{\mathbf{E}} = y^0 \dot{E}_{0y} e^{\mp \gamma_{\perp} z}$ ,  $\dot{\mathbf{H}} = \mp \left( x^0 - z^0 \frac{i \chi}{\kappa} \right) \frac{\dot{E}_{0y}}{Z_{c\perp}} e^{\mp \gamma_{\perp} z}$ , где  $Z_{c\perp} = \sqrt{\frac{\mu_0 \mu_{\perp}}{\varepsilon_a}}$ . Вектор  $\dot{\mathbf{H}}$  каждой из этих волн имеет поперечную  $H_x$  и продольную  $H_z$  составляющие, лежит в плоскости, перпендикулярной постоянному полю  $\mathbf{H}_0$ , и описывает своим концом эллипс;

вектор  $\mathbf{E}$  направлен вдоль  $\mathbf{H}_0$ . Для такой волны феррит ведет себя как изотропная среда, характеризующаяся магнитной проницаемостью  $\tilde{\mu}_\perp = \mu'_\perp - i\mu''_\perp$ . Рассматриваемую однородную плоскую волну называют *необыкновенной*.

На рис. 16.5 приведены зависимости  $\mu'_\perp$  и  $\mu''_\perp$  от значений  $H_0$  при постоянной частоте  $\omega$  необыкновенной волны. Зная  $\mu'_\perp$  и  $\mu''_\perp$ , по формулам вида (16.34) можно определить  $\gamma_\perp = \alpha_\perp + i\beta_\perp$ . Ход кривых на рис. 16.5 напоминает зависимости  $\mu'_+$  и  $\mu''_+$  от  $H_0$  на рис. 16.3. Соответственно этому свойства однородной плоской необыкновенной волны близки свойствам волны с положительным направлением вращения. Явление интенсивного поглощения энергии необыкновенной волны (распространяющейся в направлении  $+z^0$  или  $-z^0$ ) в поперечно намагниченном феррите называют поперечным ферромагнитным резонансом. Этот резонанс возникает при значении  $H_0 = H_\perp$ , которое, как показывает детальный анализ, меньше значения  $H_0 = H_p$ , являющегося условием продольного резонанса. В области  $\mu'_\perp < 0$  существует эффект смещения поля необыкновенной волны.

На рис. 16.6 изображено падение однородной плоской произвольно поляризованной волны на границу раздела с поперечно намагниченной ферритовой средой. При этом направление постоянного магнитного поля  $\mathbf{H}_0$  перпендикулярно плоскости падения.

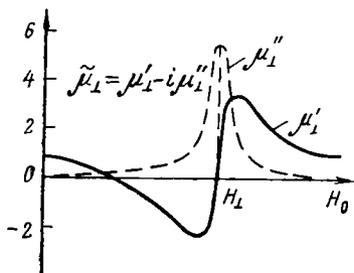


РИС. 16.5

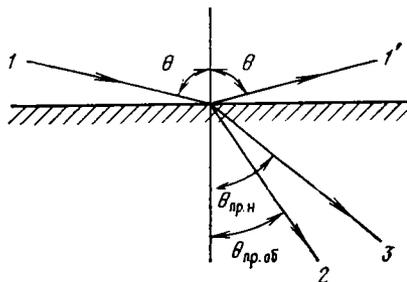


РИС. 16.6

Падающую волну (луч 1) целесообразно представить в виде суперпозиции двух волн, одна из которых поляризована нормально, другая — параллельно (см. § 13.2), и исследовать отражение и преломление каждой из них в отдельности. В рассматриваемом случае одна из преломленных волн является обыкновенной, а другая — необыкновенной. Поскольку магнитные проницаемости феррита для этих волн  $\mu'_\parallel$  и  $\mu'_\perp$  различны (потери пренебрегаем), то согласно (13.14) различны и направления их распространения (лучи 2 и 3). Явление раздвоения преломленных волн в намагниченном феррите называют *двойным лучепреломлением*.

2. Плазма. Распространение волн в поперечно намагниченных феррите и плазме характеризуется сходными явлениями. В частности, и в плазме могут существовать обыкновенная и необыкновенная однородные плоские волны, наблюдается двойное лучепреломление, необыкновенная волна испытывает большее поглощение, чем обыкновенная.

Из соотношений для обыкновенной волны в феррите с помощью (16.26) получаем соответствующие формулы для обыкновенной волны в плазме:  $\dot{\mathbf{H}} = x^0 \dot{H}_{0x} e^{\mp \gamma z}$ ,  $\dot{\mathbf{E}} = \mp y^0 Z_c \dot{H}_{0x} e^{\mp \gamma z}$ , где  $\gamma = i\omega \sqrt{\mu_a \epsilon_0 \epsilon_{\parallel}}$  и  $Z_c = \sqrt{\mu_a / \epsilon_0 \epsilon_{\parallel}}$ . Поскольку вектор  $\dot{\mathbf{E}}$  обыкновенной волны параллелен  $\mathbf{H}_0$ , то для нее намагниченная плазма является изотропной линейной средой с диэлектрической проницаемостью  $\xi_{\parallel}$ , которая не зависит от  $H_0$  (см. § 16.1).

Аналогичным путем для необыкновенной волны в плазме получаем:  $\dot{\mathbf{H}} = y^0 \dot{H}_{0ye} e^{\mp \gamma_{\perp} z}$ ,  $\dot{\mathbf{E}} = \pm \left( x^0 - z^0 \frac{iq}{p} \right) Z_{c\perp} \dot{H}_{0ye} e^{\mp \gamma_{\perp} z}$ , где  $\gamma_{\perp} = i\omega \sqrt{\mu_a \epsilon_0 \tilde{\epsilon}_{\perp}}$ ,  $\tilde{\epsilon}_{\perp} = \frac{p^2 - q^2}{p}$ ,  $Z_{c\perp} = \sqrt{\frac{\mu_a}{\epsilon_0 \tilde{\epsilon}_{\perp}}}$ . Для этой волны плазма ведет себя как изотропная среда, характеризуемая диэлектрической проницаемостью  $\epsilon_{\perp} = \epsilon'_{\perp} - i\epsilon''_{\perp}$ .

# Электромагнитные волны, направляемые регулярными линиями передачи

## Глава 17

### ВВЕДЕНИЕ В ТЕОРИЮ ВОЛН, НАПРАВЛЯЕМЫХ РЕГУЛЯРНЫМИ ЛИНИЯМИ ПЕРЕДАЧИ



#### 17.1. ЛИНИИ ПЕРЕДАЧИ И ИХ КЛАССИФИКАЦИЯ

Устройство, ограничивающее область, в которой распространяются электромагнитные волны, и направляющее поток электромагнитной энергии в заданном направлении (например, от генератора к антенне), называют *линией передачи*. Линия передачи имеет границы раздела, вдоль которых и происходит распространение *направляемых* ею электромагнитных волн (ср. § 13.5—13.6). Часть IV посвящена теории *регулярных линий передачи*, у которых в продольном направлении неизменны поперечное сечение и электромагнитные свойства заполняющих линию сред.

Основные типы регулярных линий передачи (рис. 17.1) можно разделить на две группы — *открытые линии* и *волноводы*. Поперечное сечение открытой линии не имеет замкнутого проводящего (металлического) контура, охватывающего снаружи область распространения электромагнитной энергии. Поэтому в открытых линиях поле направляемой волны не экранировано снаружи и существует в пространстве, окружающем линию. Основными типами этих линий передачи являются: симметричная двухпроводная линия, выполненная из круглых проводов (рис. 17.1а); полосковая линия, состоящая из металлических полосок, разделенных диэлектрической прокладкой (б); однопроводная линия в виде круглого провода (в) и провода с диэлектрическим покрытием (г); диэлектрическая линия, представляющая собой стержень из диэлектрика (д).

Поперечное сечение волновода имеет замкнутый проводящий контур, охватывающий снаружи область распространения электромагнитной энергии. Поэтому в случае волноводов поле направляемой волны не существует в пространстве, окружающем линию передачи. Основными типами волноводов являются: коаксиальный круглый волновод, состоящий из соосных круглых провода и эк-

рана (рис. 17.1e); прямоугольный (ж), круглый (з), П-образный, Н-образный (и, к) и эллиптический (л) волноводы.

Предваряя результаты гл. 19, 20, отметим, что симметричную двухпроводную линию целесообразно применять на метровых и

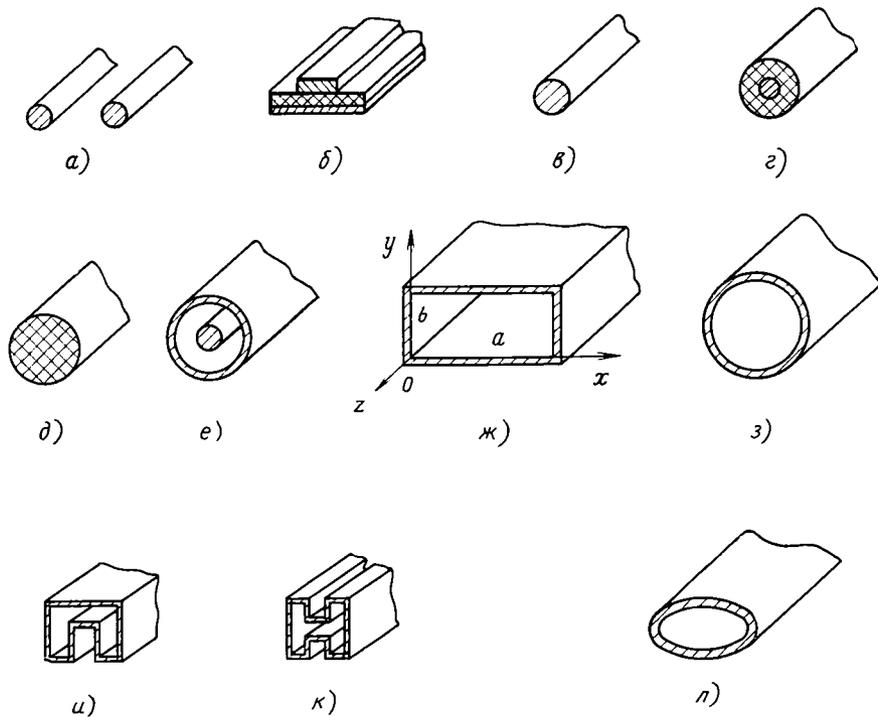


РИС. 17.1

более длинных волнах, коаксиальный круглый волновод — на дециметровых и более длинных волнах, полосковые и однопроводные линии — на дециметровых и сантиметровых волнах, прямоугольный, круглый и эллиптический волноводы — на сантиметровых и миллиметровых волнах, диэлектрическую линию — на миллиметровых и более коротких волнах.

## 17.2. РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ МАКСВЕЛЛА ДЛЯ РЕГУЛЯРНЫХ ЛИНИЙ ПЕРЕДАЧИ

Электромагнитные поля, которые могут существовать в регулярной линии передачи, определяются решением *однородных* уравнений Максвелла для комплексных амплитуд:

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = i \omega \tilde{\epsilon}_a \mathbf{E}, \quad \operatorname{rot} \mathbf{E} = -i \omega \mu_a \mathbf{H}, \quad (17.1)$$

которое удовлетворяет на цилиндрических поверхностях раздела граничным условиям, присущим исследуемой линии передачи.

Для нахождения этого решения следует рассматривать задачу в такой системе координат, в которой каждая поверхность раздела совпадает с координатной поверхностью либо с частями нескольких координатных поверхностей. Например, при изучении поля прямоугольного волновода следует выбрать декартову систему координат  $(x, y, z)$ , ось  $z$  которой направлена вдоль волновода (рис. 17.1ж). При изучении общих свойств полей в регулярных линиях передачи целесообразно рассмотреть решение ур-ний (17.1) в обобщенной цилиндрической ортогональной системе координат  $(u, v, z)$ .

Любая регулярная линия передачи обладает неизменным поперечным сечением и прямолинейной продольной осью  $z$ , вдоль которой может распространяться электромагнитная волна. Вследствие этого зависимость поля от поперечных координат  $u$  и  $v$  должна быть одинаковой во всех поперечных сечениях, а с изменением  $z$  могут изменяться лишь фазы и амплитуды векторов поля:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{E}}(u, v, z) &= \dot{\mathbf{E}}_0(u, v) e^{\mp \gamma z}, \\ \dot{\mathbf{H}}(u, v, z) &= \dot{\mathbf{H}}_0(u, v) e^{\mp \gamma z}, \end{aligned} \quad (17.2)$$

где коэффициент распространения  $\gamma$  есть в общем случае комплексная величина:  $\gamma = \alpha + i\beta$ ;  $\alpha$  — коэффициент затухания;  $\beta$  — коэффициент фазы (ср. § 11.3). При наличии у  $\gamma$  мнимой части зависимость от  $z$  вида  $e^{-\gamma z}$  описывает падающие волны (распространяющиеся в направлении  $+z^0$ ), зависимость  $e^{+\gamma z}$  — отраженные волны (распространяющиеся в направлении  $-z^0$ ).

1. Поле, векторы  $\dot{\mathbf{E}}$  и  $\dot{\mathbf{H}}$  которого имеют поперечные и продольные составляющие. Подставив (17.2) в первое из ур-ний (17.1) и воспользовавшись равенствами (П1.17) и  $\text{grad} e^{\mp \gamma z} = \mp \gamma e^{\mp \gamma z} z^0$ , получим после сокращения на  $e^{\mp \gamma z}$  соотношение

$$\text{rot} \dot{\mathbf{H}}_0 \mp \gamma [\mathbf{z}^0 \dot{\mathbf{H}}_0] = i \omega \tilde{\epsilon}_a \dot{\mathbf{E}}_0. \quad (17.3)$$

Разложим фигурирующие в (17.3) комплексные векторы  $\dot{\mathbf{E}}_0$  и  $\dot{\mathbf{H}}_0$  на поперечные и продольные составляющие:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{E}}_0(u, v) &= \dot{\mathbf{E}}_{0\perp}(u, v) + z^0 \dot{E}_{0z}(u, v), \quad \dot{\mathbf{H}}_0(u, v) = \dot{\mathbf{H}}_{0\perp}(u, v) + \\ &+ z^0 \dot{H}_{0z}(u, v), \end{aligned} \quad (17.4)$$

где

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{E}}_{0\perp}(u, v) &= u^0 \dot{E}_{0u}(u, v) + v^0 \dot{E}_{0v}(u, v), \\ \dot{\mathbf{H}}_{0\perp}(u, v) &= u^0 \dot{H}_{0u}(u, v) + v^0 \dot{H}_{0v}(u, v). \end{aligned} \quad (17.5)$$

Приняв во внимание, что  $\text{rot} z^0 = 0$  и  $\dot{H}_{0z}$  не зависит от координаты  $z$ , получим согласно (П1.17) и (П1.23)

$$\text{rot}(\dot{H}_{0z} z^0) = [\text{grad} \dot{H}_{0z}, z^0] + \dot{H}_{0z} \text{rot} z^0 = [\text{grad}_{\perp} \dot{H}_{0z}, z^0], \quad (17.6)$$

где градиент по поперечным координатам  $\text{grad}_\perp \dot{H}_{0z}$  является вектором, лежащим в поперечном сечении. Подставляя (17.4) в (17.3) и учитывая (17.6) и тождество  $[\mathbf{z}^0 \mathbf{z}^0] = 0$ , имеем

$$\text{rot } \dot{\mathbf{H}}_{0\perp} + [\text{grad}_\perp \dot{H}_{0z}, \mathbf{z}^0] \mp \gamma [\mathbf{z}^0 \dot{\mathbf{H}}_{0\perp}] = i \tilde{\omega} \tilde{\epsilon}_a \dot{\mathbf{E}}_{0\perp} + i \tilde{\omega} \tilde{\epsilon}_a \dot{E}_{0z} \mathbf{z}^0. \quad (17.7)$$

Приравняем слева и справа в (17.7) поперечные и продольные составляющие. Поскольку продольная составляющая вектора  $\dot{\mathbf{H}}_{0\perp}$  равна нулю и он не зависит от координаты  $\mathbf{z}$ , то согласно (П1.25)  $\text{rot } \dot{\mathbf{H}}_{0\perp}$  имеет только продольную составляющую. Таким образом,

$$[\text{grad}_\perp \dot{H}_{0z}, \mathbf{z}^0] \mp \gamma [\mathbf{z}^0 \dot{\mathbf{H}}_{0\perp}] = i \tilde{\omega} \tilde{\epsilon}_a \dot{\mathbf{E}}_{0\perp}; \quad (17.8)$$

$$\text{rot } \dot{\mathbf{H}}_{0\perp} = i \tilde{\omega} \tilde{\epsilon}_a \dot{E}_{0z} \mathbf{z}^0. \quad (17.9)$$

Аналогичным путем из второго уравнения системы (17.1) получим:

$$[\text{grad}_\perp \dot{E}_{0z}, \mathbf{z}^0] \mp \gamma [\mathbf{z}^0 \dot{\mathbf{E}}_{0\perp}] = -i \omega \mu_a \dot{\mathbf{H}}_{0\perp}; \quad (17.10)$$

$$\text{rot } \dot{\mathbf{E}}_{0\perp} = -i \omega \mu_a \dot{H}_{0z} \mathbf{z}^0. \quad (17.11)$$

Выразив  $\dot{\mathbf{H}}_{0\perp}$  из (17.10), подставив его в (17.8) и воспользовавшись (П1.4), найдем с учетом  $(\mathbf{z}^0 / \text{grad}_\perp \dot{E}_{0z})$  и  $(\mathbf{z}^0 \dot{\mathbf{E}}_{0\perp}) = 0$ , что

$$\dot{\mathbf{E}}_{0\perp} = \mp \frac{\gamma}{\kappa^2} \left\{ \text{grad}_\perp \dot{E}_{0z} \pm \frac{i \omega \mu_a}{\gamma} [\text{grad}_\perp \dot{H}_{0z}, \mathbf{z}^0] \right\}, \quad (17.12)$$

где

$$\kappa^2 = \tilde{k}^2 + \gamma^2, \quad (17.13)$$

$\tilde{k}^2 = \omega^2 \tilde{\epsilon}_a \mu_a$ ,  $\tilde{\epsilon}_a$  и  $\mu_a$  — параметры однородной среды, в которой определяется поле.

Выразив  $\dot{\mathbf{E}}_{0\perp}$  из (17.8) и подставив в (17.10), аналогично получим

$$\dot{\mathbf{H}}_{0\perp} = \mp \frac{\gamma}{\kappa^2} \left\{ \text{grad}_\perp \dot{H}_{0z} \mp \frac{i \omega \epsilon_a}{\gamma} [\text{grad}_\perp \dot{E}_{0z}, \mathbf{z}^0] \right\}. \quad (17.14)$$

В вытекающих из уравнений Максвелла (17.1) ф-лах (17.12) и (17.14) поперечные составляющие поля в регулярной линии передачи выражаются через продольные. Верхние знаки в этих формулах соответствуют зависимости от  $z$  вида  $e^{-\gamma z}$ , нижние — вида  $e^{+\gamma z}$ .

Для нахождения уравнений, которые определяют продольные составляющие поля  $\dot{E}_{0z}$  и  $\dot{H}_{0z}$ , вспомним, что в однородной среде без сторонних источников комплексные амплитуды (17.2) удовлетворяют векторным уравнениям (6.7). При этом продольные (декартовы) составляющие  $\dot{E}_z = \dot{E}_{0z} e^{\mp \gamma z}$  и  $\dot{H}_z = \dot{H}_{0z} e^{\mp \gamma z}$  удовлетворяют скалярному уравнению  $\nabla^2 \varphi + \tilde{k}^2 \varphi = 0$ . Подставив  $\dot{E}_z$  и  $\dot{H}_z$  в это уравнение, воспользовавшись (П1.26) и учтя, что  $\dot{E}_{0z}$  и  $\dot{H}_{0z}$  не

зависят от координаты  $z$ , а  $e^{\mp yz}$  не зависит от поперечных координат, получим после сокращения на  $e^{\mp yz}$ :

$$\nabla_{\perp}^2 \dot{E}_{0z} + \kappa^2 \dot{E}_{0z} = 0, \quad \nabla_{\perp}^2 \dot{H}_{0z} + \kappa^2 \dot{H}_{0z} = 0. \quad (17.15)$$

Здесь  $\nabla_{\perp}^2 \varphi = \text{div grad}_{\perp} \varphi$  — двумерный оператор Лапласа по поперечным координатам от скалярной функции.

Для определения поля в линии передачи нужно удовлетворить граничным условиям на поверхностях раздела.

2. Поле, векторы  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  которого имеют только поперечные составляющие. Существует еще одно решение ур-ний (17.1), определяющее поле  $T$  (ср. § 11.2), векторы которого лежат в поперечных сечениях линии передачи, т. е. удовлетворяют условиям

$$E_z = 0, \quad H_z = 0. \quad (17.16)$$

Условия (17.16) выполняются только в том случае, если линия передачи имеет *идеально проводящие* поверхности раздела, причем каждая векторная линия  $\mathbf{H}$  охватывает такой проводник. Действительно, в однородной среде, заполняющей волновод или окружающей открытую линию передачи, в силу ур-ний  $\text{div} \mathbf{H} = 0$  и  $\dot{H}_z = 0$  линии  $\mathbf{H}$  замкнуты и лежат в поперечных сечениях. Применим закон полного тока (2.67) к контуру  $L$ , совпадающему с любой линией  $\mathbf{H}$ . При этом  $\oint_L \mathbf{H} d\mathbf{l} \neq 0$  и, следовательно,  $i_{\text{см}} + i \neq$

$\neq 0$ , где  $i_{\text{см}}$  и  $i$  — ток смещения и ток, образованный движением свободных зарядов, сквозь ограниченную контуром  $L$  поперечную поверхность  $S$ . Поскольку, однако, согласно (17.16)  $E_z = 0$ , то  $i_{\text{см}} = 0$  и ток проводимости сквозь поверхность  $S$  также равен нулю ( $\delta_{\text{пр}z} = \sigma E_z = 0$ ). В рассматриваемом случае для удовлетворения закона полного тока линии  $\mathbf{H}$  должны охватывать *идеальные* проводники, по которым в соответствии с (3.52) текут *поверхностные продольные* токи.

Решение ур-ний (17.1) при выполнении условий (17.16) легко получить, положив в приведенных выше формулах  $\dot{E}_{0z} = 0$ ,  $\dot{H}_{0z} = 0$ . При этом вместо (17.8) и (17.10) имеем:

$$\begin{aligned} \mp \gamma [z^0 \dot{\mathbf{H}}_{0\perp}] &= i \omega \tilde{\epsilon}_a \dot{\mathbf{E}}_{0\perp}, \\ \mp \gamma [z^0 \dot{\mathbf{E}}_{0\perp}] &= -i \omega \mu_a \dot{\mathbf{H}}_{0\perp}. \end{aligned} \quad (17.17)$$

Второе соотношение (17.17) позволяет найти  $\dot{\mathbf{H}}_{0\perp}$ , если известны  $\dot{\mathbf{E}}_{0\perp}$  и коэффициент распространения  $\gamma$ :

$$\dot{\mathbf{H}}_{0\perp} = \pm (\gamma / i \omega \mu_a) [z^0 \dot{\mathbf{E}}_{0\perp}]. \quad (17.18)$$

При подстановке  $\dot{\mathbf{H}}_{0\perp}$  из (17.18) в первое ур-ние (17.17) получим равенство  $\kappa^2 \dot{\mathbf{E}}_{0\perp} = 0$ . Следовательно, у поля  $T$  параметр

$\kappa^2=0$  и согласно (17.13) коэффициент распространения

$$\gamma = \sqrt{\kappa^2 - \tilde{k}^2} = i\tilde{k} = i\omega \sqrt{\varepsilon_{a\mu a}}. \quad (17.19)$$

Наметим теперь путь определения вектора  $\dot{E}_{0\perp}(u, v)$ . В соответствии с (17.11) и условием  $\dot{H}_{0z}=0$  этот вектор удовлетворяет уравнению  $\text{rot}\dot{E}_{0\perp}=0$ , т. е. является потенциальным и может быть выражен через скалярный потенциал  $\dot{\phi}$ :

$$\dot{E}_{0\perp} = -\text{grad}_{\perp}\dot{\phi}. \quad (17.20)$$

В ф-ле (17.20) учтено, что, поскольку вектор  $\dot{E}_{0\perp}$  не имеет продольной составляющей и не зависит от координаты  $z$ , его потенциал  $\dot{\phi}$  согласно (П1.23) также не зависит от координаты  $z$  и  $\text{grad}\dot{\phi} = \text{grad}_{\perp}\dot{\phi}$ .

Для нахождения уравнения, определяющего потенциал  $\dot{\phi}$ , учтем, что комплексная амплитуда  $\dot{E} = \dot{E}_{\perp} = \dot{E}_{0\perp}(u, v)e^{\mp\gamma z}$  удовлетворяет в однородной среде первому из ур-ний (6.6), которое при учете условия  $\dot{E}_z=0$  и соотношения (П1.24) принимает вид  $\text{div}_{\perp}\dot{E}_{0\perp}=0$ . Подставив (17.20) в это уравнение, получим скалярное двумерное уравнение Лапласа для потенциала  $\dot{\phi}$

$$\nabla_{\perp}^2\dot{\phi} = 0. \quad (17.21)$$

Согласно граничным условиям (3.71) вектор  $\dot{E}_{0\perp}$  перпендикулярен к идеально проводящим цилиндрическим поверхностям раздела, т. е. перпендикулярен к каждой замкнутой кривой  $L_{\perp p}$ , образованной этими поверхностями в поперечном сечении линии передачи. В соответствии с (17.20) это означает, что кривые  $L_{\perp p}$  являются линиями постоянного значения потенциала:

$$\dot{\phi} = \dot{\phi}_p = \text{const на } L_{\perp p} (p = 1, 2, \dots, n). \quad (17.22)$$

В математике доказывается, что *краевая задача* (17.21) — (17.22) для волноводов (замкнутая кривая  $L_{\perp 1}$  охватывает снаружи область существования поля) имеет отличное от нуля решение и, следовательно, существует поле  $T$  в тех случаях, когда, во-первых, поперечное сечение ограничено контуром, состоящим из нескольких замкнутых кривых  $L_{\perp p}$ , т. е. является многосвязной областью (например, коаксиальный волновод), и, во-вторых, потенциал  $\dot{\phi}$  принимает на этих кривых постоянные, но различные значения.

### 17.3. КЛАССИФИКАЦИЯ НАПРАВЛЯЕМЫХ ВОЛН

Поле, определяемое в регулярной линии передачи соотношениями (17.12) и (17.14), представляет собой *сумму* полей магнитного  $H$  и электрического  $E$  классов. У поля магнитного класса наряду с поперечными составляющими  $E_{\perp}$  и  $H_{\perp}$  существует продольная составляющая напряженности магнитного поля ( $H_z \neq 0$ )

и отсутствует продольная составляющая напряженности электрического поля ( $E_z=0$ ); у поля электрического класса наряду с  $E_{\perp} \neq 0$  и  $H_{\perp} \neq 0$ , наоборот,  $E_z \neq 0$  и  $H_z=0$  (ср. § 13.5). Выражения для полей обоих этих классов легко получить, полагая в (17.12) и (17.14) либо  $E_{0z}=0$ , либо  $H_{0z}=0$  (см. § 18.2).

Соотношения (17.16), (17.18)—(17.22) определяют поле поперечного электромагнитного класса Т.

Волноводы и двухпроводная симметричная линия имеют только хорошо проводящие поверхности раздела, которые образованы границей металла и однородного диэлектрика. При определении электромагнитного поля этих линий, существующего в диэлектрической среде, идеализируют задачу, заменяя реальный металл идеальным проводником. Эта идеализация позволяет легко найти поле, которое мало отличается от действительно существующего (ср. § 13.8). Конечные значения электрической проводимости металла учитывают только при определении тепловых потерь в металле с помощью приближенных граничных условий Леонтовича — Шукина.

В следующей главе будет показано, что в волноводах с идеально проводящими стенками граничным условиям могут удовлетворять поля магнитного и электрического классов независимо друг от друга. Следовательно, поля этих двух классов *порознь* удовлетворяют уравнениям Максвелла и граничным условиям и поэтому могут существовать в волноводе *раздельно*. Таким образом, в регулярных волноводах, имеющих поперечные сечения в виде двусвязных или многосвязных областей (например, коаксиальный круглый волновод), полное поле в самом общем случае представляет собой сумму независимых друг от друга полей классов Т, Н и Е. В волноводах, поперечные сечения которых являются односвязными областями (например, прямоугольный и круглый волноводы), невозможно существование поля Т и полное поле в общем случае представляет собой сумму независимых полей классов Н и Е.

В симметричной двухпроводной линии (*открытая* линия передачи) с идеально проводящими проводами канализация энергии может осуществляться только с помощью поля класса Т.

В открытых линиях передачи, обладающих осевой симметрией и имеющих поверхности раздела, которые нельзя заменять идеально проводящими границами (например, круглая диэлектрическая линия, круглая однопроводная линия любого типа), в общем случае удовлетворяют граничным условиям поля, векторы  $E$  и  $H$  которых имеют отличные от нуля поперечные составляющие  $E_{\perp}$ ,  $H_{\perp}$  и обе продольные составляющие  $E_z$ ,  $H_z$ . Эти поля называют *гибридными*, обозначают буквами HE и EH и именно они могут распространяться в рассматриваемых открытых линиях передачи. Исключение составляют лишь *обладающие цилиндрической симметрией* поля классов Н и Е, которые порознь удовлетворяют граничным условиям и, следовательно, могут существовать в открытых линиях передачи раздельно (см. § 20.3).

ОБЩАЯ ТЕОРИЯ ВОЛН,  
НАПРАВЛЯЕМЫХ РЕГУЛЯРНЫМИ ВОЛНОВОДАМИ



18.1. ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ ДЛЯ ПРОДОЛЬНЫХ  
СОСТАВЛЯЮЩИХ ПОЛЯ. КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ И НЕЙМАНА

Обычно определение электромагнитного поля производится для идеализированного случая волноводов без потерь, т. е. в предположении идеальной проводимости металлических стенок и отсутствия потерь в диэлектрическом заполнении.

Согласно (3.71) касательные составляющие  $\dot{E}$  обращаются в нуль на идеально проводящих цилиндрических поверхностях раздела, т. е. на контуре  $L_{\perp}$  области, представляющей собой поперечное сечение волновода. В общем случае контур  $L_{\perp}$  поперечного сечения волновода может состоять из нескольких замкнутых кривых  $L_{\perp p}$ , причем одна из них (внешняя) охватывает остальные. Касательными к цилиндрическим поверхностям составляющими являются  $\dot{E}_z = \dot{E}_{0z}(u, v)e^{\mp\gamma z}$  и компонента поперечного вектора  $\dot{E}_{\perp} = \dot{E}_{0\perp}(u, v)e^{\mp\gamma z}$ , тангенциальная к контуру  $L_{\perp}$ . Из условия  $\dot{E}_z = 0$  сразу же следует граничное условие для составляющей  $\dot{E}_{0z}$ :

$$\dot{E}_{0z} = 0 \text{ на } L_{\perp}. \quad (18.1)$$

Введем нормальный к контуру  $L_{\perp}$  орт  $n^0$ , направленный внутрь металла, и тангенциальный орт  $t^0$ , направленный таким образом, чтобы  $n^0, t^0, z^0$  образовали правую тройку векторов (рис. 18.1). Разложим лежащий в поперечном сечении вектор  $\text{grad}_{\perp} \dot{E}_{0z}$  (и  $\text{grad}_{\perp} \dot{H}_{0z}$ ) на составляющие по ортам  $n^0$  и  $t^0$ :

$$\text{grad}_{\perp} \dot{E}_{0z} = (\text{grad}_{\perp} \dot{E}_{0z} n^0) n^0 + (\text{grad}_{\perp} \dot{E}_{0z} t^0) t^0 = \frac{\partial \dot{E}_{0z}}{\partial l_n} n^0 + \frac{\partial \dot{E}_{0z}}{\partial l_t} t^0, \quad (18.2)$$

где  $\frac{\partial \dot{E}_{0z}}{\partial l_n}$ ,  $\frac{\partial \dot{E}_{0z}}{\partial l_t}$  — соответственно производные функции  $\dot{E}_{0z}$  по направлениям нормали  $n^0$  и касательной  $t^0$  к контуру  $L_{\perp}$ . Согласно  $[z^0 t^0] = -n^0$  и (18.2) имеем

$$[\text{grad}_{\perp} \dot{H}_{0z} z^0] t^0 = \text{grad}_{\perp} \dot{H}_{0z} [z^0 t^0] = -\text{grad}_{\perp} \dot{H}_{0z} n^0 = -\frac{\partial \dot{H}_{0z}}{\partial l_n}. \quad (18.3)$$

С помощью (17.12), (18.2) и (18.3) получим выражение для тангенциальной к контуру компоненты вектора  $\dot{E}_{0\perp}$ , которая равна нулю:

$$\dot{E}_{0\perp} t^0 = \mp \frac{\gamma}{\kappa^2} \left\{ \frac{\partial \dot{E}_{0z}}{\partial l_t} \mp \frac{i\omega\mu_a}{\gamma} \frac{\partial \dot{H}_{0z}}{\partial l_n} \right\} = 0 \text{ на } L_{\perp}. \quad (18.4)$$

Поскольку из условия (18.1) сразу же следует равенство  $\frac{\partial \dot{E}_{0z}}{\partial t} = 0$  на  $L_{\perp}$ , то (18.4) приводит к следующему граничному условию для составляющей  $\dot{H}_{0z}$ :

$$\frac{\partial \dot{H}_{0z}}{\partial l_n} = 0 \text{ на } L_{\perp}. \quad (18.5)$$

В случае поля класса Е соотношение (18.5) выполняется автоматически и граничное условие имеет вид (18.1); в случае поля класса Н автоматически выполняется соотношение (18.1) и граничное условие принимает вид (18.5). Таким образом, в волноводах с идеально проводящими поверхностями раздела граничные условия могут быть удовлетворены полями электрического и магнитного классов независимо друг от друга, что приводит к возможности раздельного, независимого существования полей этих классов (ср. § 17.3). При этом функция  $\dot{E}_{0z}$  или  $\dot{H}_{0z}$  определяется путем решения двумерного уравнения Гельмгольца (17.15) при соответствующих граничных условиях:

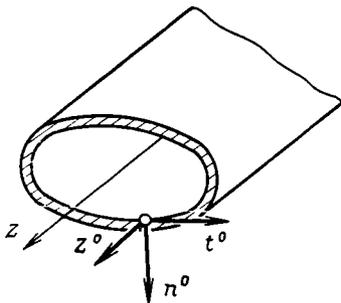


Рис. 18.1

$$\nabla_{\perp}^2 \dot{E}_{0z} + \kappa^2 \dot{E}_{0z} = 0 \text{ при } \dot{E}_{0z} = 0 \text{ на } L_{\perp}; \quad (18.6)$$

$$\nabla_{\perp}^2 \dot{H}_{0z} + \kappa^2 \dot{H}_{0z} = 0 \text{ при } \partial \dot{H}_{0z} / \partial l_n = 0 \text{ на } L_{\perp}. \quad (18.7)$$

Условия (18.6) и (18.7) определяют две *краевые задачи*, называемые соответственно задачей Дирихле и задачей Неймана. В математике доказывается в общем виде, а в следующей главе показывается на частных примерах, что внутри замкнутого контура  $L_{\perp}$  (волновод) отличное от нуля решение задачи (18.6) или (18.7) возможно не при любом  $\kappa^2$ , а лишь при строго определенных *дискретных вещественных положительных значениях*

$$\kappa_1^2, \kappa_2^2, \kappa_3^2 \dots, \quad (18.8)$$

которые называют *собственными числами* краевой задачи. Собственные числа определяются *формой и размерами* контура  $L_{\perp}$ , образуют бесконечную последовательность величин, возрастающих от некоторого наименьшего значения до бесконечности. Далее они обозначаются через  $\kappa_v^2$ . Каждому собственному числу  $\kappa_v^2$  соответствует, по крайней мере, одна функция, удовлетворяющая условию (18.6) или (18.7) и называемая *собственной функцией* краевой задачи. Следовательно, собственные функции  $\dot{E}_{0z}$  или  $\dot{H}_{0z}$  также образуют бесконечную последовательность частных решений краевой задачи. Каждая собственная функция согласно (17.12) и (17.14) определяет поле конкретного *типа* класса Е или

H, которое, как будет показано далее, обладает только ему свойственной картиной векторных линий **E** и **H**.

Из (17.13) следует, что каждому собственному числу  $\kappa_v^2$  соответствует свое значение коэффициента распространения

$$\gamma_v = \sqrt{\kappa_v^2 - k^2}, \quad (18.9)$$

где  $k^2 = \omega^2 \epsilon_a \mu_a$ ,  $\epsilon_a$  и  $\mu_a$  — параметры среды без потерь ( $\sigma = 0$ ), заполняющей волновод.

Поскольку поле *каждого типа* удовлетворяет линейным уравнениям Максвелла и граничным условиям на идеально проводящих поверхностях раздела, то результирующее поле в волноводе в общем случае представляет собой бесконечную сумму полей всех возможных типов.

## 18.2. ПОЛЯ МАГНИТНОГО И ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО КЛАССОВ, ИХ СВОЙСТВА И ПАРАМЕТРЫ

Положив в (17.12) и (17.14)  $\dot{E}_{0z} = 0$  во всех точках поперечного сечения волновода без потерь, получим следующие выражения для поля произвольного типа класса H:

$$\dot{H}_{0z} = z^0 \dot{H}_{0z}; \quad (18.10a)$$

$$\dot{H}_{0\perp} = \mp \frac{\gamma_v}{\kappa_v^2} \text{grad}_{\perp} \dot{H}_{0z}; \quad (18.10б)$$

$$\dot{E}_{0\perp} = - \frac{\gamma_v}{\kappa_v^2} \frac{i \omega \mu_a}{\gamma_v} [\text{grad}_{\perp} \dot{H}_{0z}, z^0] = Z_{hv} [\dot{H}_{0\perp}, \pm z^0]. \quad (18.10в)$$

Здесь введено обозначение

$$Z_{hv} = i \omega \mu_a / \gamma_v; \quad (18.11)$$

$\dot{H}_{0z}$  и  $\kappa_v^2$  определяются из решения краевой задачи (18.7).

Положив в (17.12) и (17.14)  $\dot{H}_{0z} = 0$ , получим выражения для поля произвольного типа класса E:

$$\dot{E}_{0z} = z^0 \dot{E}_{0z}; \quad (18.12a)$$

$$\dot{E}_{0\perp} = \mp (\gamma_v / \kappa_v^2) \text{grad}_{\perp} \dot{E}_{0z}; \quad (18.12б)$$

$$\dot{H}_{0\perp} = \frac{\gamma_v}{\kappa_v^2} \frac{i \omega \epsilon_a}{\gamma_v} [\text{grad}_{\perp} \dot{E}_{0z}, z^0] = \frac{1}{Z_{ev}} [\pm z^0, \dot{E}_{0\perp}], \quad (18.12в)$$

где

$$Z_{ev} = \gamma_v / i \omega \epsilon_a; \quad (18.13)$$

$\dot{E}_{0z}$  и  $\kappa_v^2$  определяются из решения краевой задачи (18.6).

Фигурирующий в ф-лах (18.10) и (18.12) коэффициент распространения  $\gamma_v$  находят из (18.9); в этих формулах и всюду в

дальнейшем верхние знаки соответствуют зависимости комплексных амплитуд (17.2) от  $z$  вида  $e^{-\gamma_v z}$ , нижние — вида  $e^{\gamma_v z}$ .

В соотношениях (18.10б) и (18.12б) поперечные комплексные векторы  $\dot{H}_{0\perp}$  и  $\dot{E}_{0\perp}$  выражены через одноименные продольные составляющие. Формулы (18.10в) и (18.12в) устанавливают связь между поперечными векторами  $\dot{H}_{0\perp}$  и  $\dot{E}_{0\perp}$  и переходят друг в друга. Эти векторные формулы при подстановке в них (17.5) распадаются на два скалярных равенства:

$$\dot{E}_{0u}/\dot{H}_{0v} = \pm Z_{cv}, \quad \dot{E}_{0v}/\dot{H}_{0u} = \mp Z_{cv}, \quad (18.14)$$

где  $Z_{cv}$  есть  $Z_{hv}$  или  $Z_{ev}$ . Разные знаки отношений  $\dot{E}_{0u}/\dot{H}_{0v}$  и  $\dot{E}_{0v}/\dot{H}_{0u}$  обусловлены тем, что согласно (18.10в) и (18.12в)  $\dot{E}_{0\perp}$ ,  $\dot{H}_{0\perp}$  и продольный орт  $z^0$  (при  $e^{-\gamma z}$ ) или  $-z^0$  (при  $e^{\gamma z}$ ) образуют правую ортогональную тройку векторов. Величину  $Z_{cv}$ , определяющую согласно (18.14) отношение комплексных амплитуд взаимно перпендикулярных поперечных составляющих напряженностей электрического и магнитного полей и имеющую размерность сопротивления, называют *характеристическим сопротивлением поля* рассматриваемого типа.

Каждому собственному числу краевой задачи  $\kappa_v^2$  соответствует вещественный положительный параметр  $\kappa_v$ , значение которого определяется формой и размерами поперечного сечения волновода, классом поля и его типом.

Плоские бегущие волны либо местные затухающие поля. В волноводе без потерь согласно (18.9) коэффициент распространения  $\gamma_v$  может быть либо мнимым числом, либо вещественным, что, в свою очередь, приводит к существованию соответственно либо бегущих волн, либо затухающих полей.

При  $k > \kappa_v$   $\gamma_v$  является мнимой величиной:  $\gamma_v = \sqrt{\kappa_v^2 - k^2} = i\sqrt{k^2 - \kappa_v^2} = i\beta_v$ , где  $\beta_v$  — коэффициент фазы. В этом случае согласно (17.2) и (3.56) в выражение для фазы векторов поля время  $t$  и координата  $z$  входят в виде линейной комбинации  $\omega t \mp \beta_v z = \omega(t \mp z/v_v)$ , где

$$v_v = \omega/\beta_v, \quad (18.15)$$

и уравнение постоянного значения фазы имеет вид  $t \mp z/v_v = \text{const}$ . Отсюда следует, что в волноводе существует *плоская волна*, поверхности одинаковой фазы  $z = \text{const}$  которой распространяются вдоль оси  $z$  в направлении  $+z^0$  (падающая волна) или  $-z^0$  (отраженная волна) с *фазовой* скоростью (18.15). Поскольку амплитуды векторов поля этой волны изменяются от точки к точке на волновых поверхностях  $z = \text{const}$ , то она является неоднородной плоской волной. При  $\gamma_v = i\beta_v$  амплитуды векторов поля не затухают в направлении распространения волны, что и следовало ожидать в волноводе без потерь.

При  $\gamma_v = i\beta_v$  характеристические сопротивления полей (18.11) и (18.13) оказываются вещественными:

$$Z_{hv} = \omega\mu_a/\beta_v, \quad Z_{ev} = \beta_v/\omega\epsilon_a. \quad (18.16)$$

В этом случае мгновенные значения поперечных векторов  $\mathbf{E}_\perp$  и  $\mathbf{H}_\perp$  связаны между собой соотношениями, аналогичными (18.10в) и (18.12в):

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_\perp &= Z_{cv} [\mathbf{H}_\perp, \pm \mathbf{z}^0], \\ \mathbf{H}_\perp &= \frac{1}{Z_{cv}} [\pm \mathbf{z}^0, \mathbf{E}_\perp]. \end{aligned} \quad (18.17)$$

Отсюда следует, что в каждой точке поперечного сечения волновода компоненты поля  $\mathbf{E}_\perp$  и  $\mathbf{H}_\perp$  имеют одинаковую фазу колебаний, взаимно перпендикулярны и образуют с направлением распространения волны правую ортогональную тройку векторов. Это означает, что волна переносит электромагнитную энергию вдоль оси  $z$ . Таким образом, при  $\gamma_v = i\beta_v$  в волноводе существует неоднородная плоская бегущая волна.

При  $k < \kappa_v$   $\gamma_v$  является вещественной величиной:  $\gamma_v = \sqrt{\kappa_v^2 - k^2} = \alpha_v$ , где  $\alpha_v$  — коэффициент затухания. В этом случае каждый из векторов поля имеет в любой момент времени фазу, одинаковую во всех точках волновода; амплитуды векторов поля затухают в направлениях  $\pm \mathbf{z}^0$  по экспоненциальному закону  $e^{\mp \alpha_v z}$ .

При  $\gamma_v = \alpha_v$  характеристическое сопротивление (18.11) или (18.13) оказывается мнимым, причем для полей класса  $\mathbf{H}$  оно имеет индуктивный характер, для полей класса  $\mathbf{E}$  — емкостный:

$$\begin{aligned} Z_{hv} &= i\omega\mu_a/\alpha_v, \\ Z_{ev} &= \alpha_v/i\omega\epsilon_a. \end{aligned} \quad (18.18)$$

Согласно (18.14) в случае мнимого  $Z_{cv}$  мгновенные значения взаимно перпендикулярных поперечных составляющих  $E_u$  и  $H_v$ ,  $E_v$  и  $H_u$  оказываются сдвинутыми по фазе друг относительно друга на  $\pi/2$ , что приводит к колебательному характеру движения энергии вдоль оси  $z$ , т. е. к отсутствию ее переноса вдоль волновода (см. § 9.4).

Соответствующий значению  $\gamma_v = \alpha_v$  электромагнитный процесс называют *местным полем*. Экспоненциальное затухание вдоль оси  $z$  местных полей не связано с потерей электромагнитной энергии (рассматривается волновод без потерь), а отражает тот факт, что местные поля не распространяются вдоль волновода. Они существуют как локальные поля вблизи различных нерегулярностей, которые имеются в реальной линии передачи (см. ч. V).

Критические волновое число, частота и длина волны. Волновое число  $k = \omega \sqrt{\epsilon_a \mu_a} = 2\pi f \sqrt{\epsilon_a \mu_a} = 2\pi/\lambda$ , ско-

рость  $v=1/\sqrt{\epsilon_a\mu_a}$  и длина волны  $\lambda=vT=v/f$  представляют собой параметры волны частоты  $f$ , свободно распространяющейся в безграничной среде (проницаемости  $\epsilon_a$  и  $\mu_a$  которой совпадают с проницаемостями среды, заполняющей волновод).

Известно, что значение вещественного положительного параметра  $\kappa_v$  определяется только формой и размерами поперечного сечения волновода, классом и типом поля. Значение волнового числа  $k_{крv}=\kappa_v$ , соответствующее границе двух различных электромагнитных процессов в волноводе без потерь ( $k>\kappa_v$  — бегущая волна,  $k<\kappa_v$  — местное поле), называют *критическим волновым числом* поля рассматриваемого типа. Критическому волновому числу  $\kappa_v$  соответствует *критическая частота* поля рассматриваемого типа  $f_{крv}$ , которая определяется из соотношения  $\kappa_v = =2\pi f_{крv} \sqrt{\epsilon_a\mu_a}$  и зависит от значения  $\kappa_v$  и параметров среды, заполняющей волновод:

$$f_{крv} = \kappa_v/2\pi \sqrt{\epsilon_a\mu_a}. \quad (18.19)$$

*Критическая длина волны* поля рассматриваемого типа определяется формулой

$$\lambda_{крv} = v/f_{крv} = 2\pi/\kappa_v \quad (18.20)$$

и, следовательно, зависит от геометрических параметров поперечного сечения волновода, класса и типа поля и не зависит от частоты  $f$  электромагнитного процесса и параметров среды  $\epsilon_a$ ,  $\mu_a$ , заполняющей волновод.

Если выполняются условия

$$f > f_{крv}, \text{ т. е. } \lambda < \lambda_{крv}, \quad (18.21)$$

то  $k > \kappa_v$  и тип поля, характеризуемый параметрами  $\kappa_v$ ,  $f_{крv}$  и  $\lambda_{крv}$ , представляет собой на частоте  $f$  распространяющуюся вдоль волновода плоскую бегущую волну. При выполнении обратных неравенств

$$f < f_{крv}, \text{ т. е. } \lambda > \lambda_{крv}, \quad (18.22)$$

имеем  $k < \kappa_v$  и поле рассматриваемого типа на частоте  $f$  вдоль волновода не распространяется.

Фазовая скорость и длина волны в волноводе. В случае выполнения условий (18.21) при учете равенств  $k=2\pi/\lambda$  и  $\kappa_v=2\pi/\lambda_{крv}$  имеем

$$\beta_v = \sqrt{k^2 - \kappa_v^2} = k \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_{крv}}\right)^2} = \frac{\omega}{v} \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_{крv}}\right)^2}, \quad (18.23)$$

откуда фазовая скорость плоской бегущей волны

$$v_v = \frac{\omega}{\beta_v} = \frac{v}{\sqrt{1 - (\lambda/\lambda_{крv})^2}} = \frac{v}{\sqrt{1 - (f_{крv}/f)^2}}. \quad (18.24)$$

Из (18.24) следует, что фазовая скорость  $v_v > v$ . Таким образом, в волноводах бегущие волны классов Н и Е являются ускоренными.

Фазовая скорость (18.24) зависит от частоты колебаний  $f$  (рис. 18.2). Поскольку с увеличением  $f$  фазовая скорость умень-

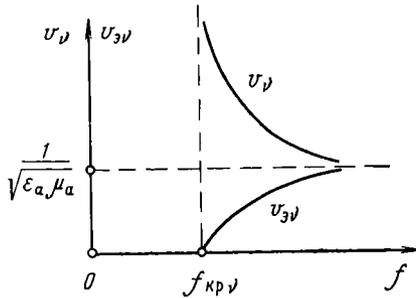


РИС. 18.2

шается, то в волноводе распространение волны любого типа классов Н и Е характеризуется ее нормальной дисперсией (ср. § 11.3).

Каждый тип плоской бегущей волны частоты  $f$  обладает своей длиной волны в волноводе  $\Lambda_v$ , определяемой расстоянием вдоль волновода, на котором фаза электромагнитной волны изменяется на  $2\pi$ . Согласно этому определению  $\beta_v \Lambda_v = \frac{\omega}{v_v} \Lambda_v = 2\pi$ , откуда

$$\Lambda_v = v_v T = \frac{2\pi}{\beta_v} = \frac{\lambda}{\sqrt{1 - (\lambda/\lambda_{крv})^2}} = \frac{\lambda}{\sqrt{1 - (f_{крv}/f)^2}} \quad (18.25)$$

[ср. ф-лу (11.24)]. Из (18.25) следует, что длина волны в волноводе  $\Lambda_v > \lambda$ .

### 18.3. ПОЛЕ ПОПЕРЕЧНОГО ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО КЛАССА, ЕГО СВОЙСТВА И ПАРАМЕТРЫ Г

В регулярном волноводе без потерь коэффициент распространения поля класса Г определится соотношением (17.19) при  $\tilde{\epsilon}_a = \epsilon_a$ :

$$\gamma = i\beta = i\omega \sqrt{\epsilon_a \mu_a} = ik. \quad (18.26)$$

Подставив (18.26) в (17.18), выразим  $\dot{H}_{0\perp}$  через  $\dot{E}_{0\perp}$ :

$$\dot{H}_{0\perp} = \frac{1}{Z_\lambda} [\pm z^0, \dot{E}_{0\perp}], \quad (18.27)$$

где

$$Z_\lambda = \omega \mu_a / k = \sqrt{\mu_a / \epsilon_a}, \quad (18.28)$$

верхний знак, как и всюду, соответствует зависимости комплекс-

ных амплитуд (17.2) от  $z$  вида  $e^{-\gamma z} = e^{-i\beta z}$  (падающая волна), нижний — вида  $e^{\gamma z} = e^{i\beta z}$  (отраженная волна).

Комплексный вектор  $\dot{E}_{0\perp}$  выражается через скалярный потенциал  $\phi$  соотношением (17.20). Потенциал  $\phi$  есть решение краевой задачи (17.21), (17.22), которое отлично от нуля для поперечных сечений в виде многосвязных областей (см. § 17.2). Поскольку это решение не распадается на множество частных решений (ср. § 18.1), то поле *класса* T и поле *типа* T синонимы.

Коэффициент распространения (18.26) на любой частоте является мнимой величиной и равен коэффициенту распространения в безграничном диэлектрике с параметрами  $\epsilon_a$  и  $\mu_a$ . Следовательно, в волноводе без потерь на всех частотах поле класса T существует в виде направляемых плоских неоднородных волн (ср. § 18.2), которые распространяются вдоль оси  $z$  без затухания с фазовой скоростью

$$v = \omega/\beta = \omega/k = 1/\sqrt{\epsilon_a \mu_a}, \quad (18.29)$$

равной скорости волн в безграничном диэлектрике, и имеют длину волны

$$\Lambda = vT = 2\pi/\beta = \lambda, \quad (18.30)$$

равную длине волны в безграничном диэлектрике. Фазовая скорость (18.29) не зависит от частоты колебаний, вследствие чего дисперсия T-волн отсутствует.

Соотношение (18.27) аналогично ф-ле (18.12в). Следовательно, для направляемых T-волн справедливы выражения (18.14), причем характеристическое сопротивление этих волн на всех частотах вещественно:  $Z_\lambda = \sqrt{\mu_a/\epsilon_a} = Z_c$  — и равно характеристическому сопротивлению волны в безграничной среде. При этом согласно (18.27) в каждой точке поперечного сечения волновода мгновенные значения  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  связаны между собой теми же соотношениями (11.9), что и в однородной плоской волне в среде без потерь, т. е.  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  взаимно перпендикулярны, отличаются друг от друга по величине в  $Z_c$  раз, колеблются в одинаковой фазе и образуют с направлением распространения волны  $\pm z^0$  правую ортогональную тройку векторов. Это означает, что на всех частотах направляемая T-волна переносит электромагнитную энергию вдоль оси  $z$  и представляет собой неоднородную плоскую бегущую волну. Возможность существования плоской бегущей T-волны на любой частоте обусловлена тем, что у поля класса T параметр  $\kappa = 0$  (см. § 17.2) и, следовательно,  $\lambda_{кр} = \infty$ ,  $f_{кр} = 0$  (ср. § 18.2).

При описании T-волн в волноводах (например, в коаксиале), а также в открытых линиях передачи, образованных хорошими проводниками можно однозначно ввести понятия напряжения и тока и измерить эти величины. Поскольку в соответствии с (17.20) электрическое поле  $\dot{\mathbf{E}}_\perp = \dot{\mathbf{E}}_{0\perp} e^{\mp i\beta z}$  имеет в каждом поперечном сечении

(при  $e^{\mp ikz} = \text{const}$ ) потенциальный характер, то электрическое напряжение  $\dot{U}$  между проводниками вводится соотношением [ср. ф-лу (7.18)]

$$\begin{aligned} \dot{U}_{\pm}(z) &= \int_1^2 \dot{\mathbf{E}}_{\perp \pm} d\mathbf{l} = -e^{\mp ikz} \int_1^2 \text{grad } \dot{\varphi} d\mathbf{l} = e^{\mp ikz} \int_2^1 d\dot{\varphi} = \\ &= (\dot{\varphi}_1 - \dot{\varphi}_2) e^{\mp ikz} = \dot{U}_0 e^{\mp ikz}. \end{aligned} \quad (18.31)$$

Здесь принадлежащие различным проводникам точки 1 и 2 и сам путь интегрирования лежат в одном и том же поперечном сечении. Линейный интеграл  $\int_1^2 \mathbf{E}_{0\perp} d\mathbf{l}$  равен разности потенциалов двух проводников и не зависит от пути интегрирования в поперечном сечении. При его вычислении удобно совместить этот путь с электрической силовой линией.

Электрический ток  $\dot{I}$  в одном из проводников рассматриваемой линии передачи определим по закону полного тока, вычислив циркуляцию вектора  $\dot{\mathbf{H}}_{\perp} = \dot{\mathbf{H}}_{0\perp} e^{\mp ikz}$  вдоль контура  $L$ , который охватывает этот проводник и лежит в поперечном сечении. Выбрав в качестве  $L$  одну из векторных линий  $\dot{\mathbf{H}}_{\perp}$  и условившись считать положительным обход контура в направлении вектора  $\dot{\mathbf{H}}_{\perp}$  падающей волны, при учете (18.27) и (17.20) получим

$$\begin{aligned} \dot{I}_{\pm}(z) &= \oint_L \dot{\mathbf{H}}_{\perp \pm} d\mathbf{l} = \pm e^{\mp ikz} \oint_L |\dot{H}_{0\perp}| dl = \pm \frac{e^{\mp ikz}}{Z_{\lambda}} \oint_L |\text{grad } \dot{\varphi}| dl = \\ &= \pm \dot{I}_0 e^{\mp ikz}. \end{aligned} \quad (18.32)$$

Появление перед экспонентой знаков « $\pm$ » объясняется тем, что при одинаковых направлениях векторов  $\mathbf{E}_{\perp}$  падающей и отраженной волн векторы  $\dot{\mathbf{H}}_{\perp}$  будут иметь противоположные направления [см. ф-лу (18.27)].

Отношение напряжения  $\dot{U}_+(z)$  к току  $\dot{I}_+(z)$  падающей бегущей волны [или взятое со знаком минус отношение  $\dot{U}_-(z)$  к  $\dot{I}_-(z)$  отраженной бегущей волны] называют *волновым сопротивлением линии передачи*:

$$Z_{\text{в}} = \frac{\dot{U}_+(z)}{\dot{I}_+(z)} = -\frac{\dot{U}_-(z)}{\dot{I}_-(z)} = Z_{\lambda} \frac{\dot{\varphi}_1 - \dot{\varphi}_2}{\oint_L |\text{grad } \dot{\varphi}| dl}. \quad (18.33)$$

Волновое сопротивление  $Z_{\text{в}}$  зависит от геометрических параметров линии передачи и отличается от характеристического сопротивления Т-волны  $Z_{\lambda} = Z_{\text{с}}$ .

#### 18.4. МОЩНОСТЬ, ПЕРЕНОСИМАЯ ВДОЛЬ ВОЛНОВОДА БЕГУЩЕЙ ВОЛНОЙ

Среднее за период значение мощности  $P_{\text{в ср}}$ , переносимой вдоль волновода без потерь бегущей волной произвольного типа в направлении распространения  $\pm z^0$ , определится выражением:

$$\begin{aligned}
 P_{\text{всп}} &= \int_{S_{\perp}} \mathbf{P}_{\text{всп}}(\pm \mathbf{z}^0) dS = \frac{1}{2} \int_{S_{\perp}} \text{Re}[\dot{\mathbf{E}}\dot{\mathbf{H}}^*] (\pm \mathbf{z}^0) dS = \\
 &= \frac{1}{2} \int_{S_{\perp}} \text{Re}[\dot{\mathbf{E}}_{\perp} \dot{\mathbf{H}}_{\perp}^*] (\pm \mathbf{z}^0) dS, \quad (18.34)
 \end{aligned}$$

где  $S_{\perp}$  — площадь поперечного сечения волновода.

Учитывая, что при  $\gamma = i\beta$   $[\dot{\mathbf{E}}_{\perp} \dot{\mathbf{H}}_{\perp}^*] = [\dot{\mathbf{E}}_{0\perp} \dot{\mathbf{H}}_{0\perp}^*]$ , и воспользовавшись (П1.3), имеем

$$[\dot{\mathbf{E}}_{\perp} \dot{\mathbf{H}}_{\perp}^*] (\pm \mathbf{z}^0) = [\dot{\mathbf{H}}_{0\perp}, \pm \mathbf{z}^0] \dot{\mathbf{E}}_{0\perp} = [\pm \mathbf{z}^0, \dot{\mathbf{E}}_{0\perp}] \dot{\mathbf{H}}_{0\perp}^*. \quad (18.35)$$

Заменяя здесь векторные произведения согласно (18.10в), (18.12в) или (18.27), получим вместо (18.34) два равноценных выражения:

$$P_{\text{всп}} = \frac{1}{2Z_{cv}} \int_{S_{\perp}} |\dot{\mathbf{E}}_{0\perp}|^2 dS = \frac{1}{2Z_{cv}} \int_{S_{\perp}} (E_{um}^2 + E_{vm}^2) dS; \quad (18.36)$$

$$P_{\text{всп}} = \frac{1}{2} Z_{cv} \int_{S_{\perp}} |\dot{\mathbf{H}}_{0\perp}|^2 dS = \frac{1}{2} Z_{cv} \int_{S_{\perp}} (H_{um}^2 + H_{vm}^2) dS, \quad (18.37)$$

где  $Z_{cv}$  — характеристическое сопротивление волны рассматриваемого типа.

Из (18.36) видно, что увеличение переносимой мощности сопровождается увеличением напряженности электрического поля. Однако эта напряженность не может быть сделана сколь угодно большой — ее ограничивает предельное значение  $E_{\text{предл}}$ , которое характеризует электрическую прочность диэлектрика, заполняющего волновод. Если наибольшая амплитуда напряженности электрического поля в волноводе превысит  $E_{\text{предл}}$ , то возникнет высокочастотный пробой диэлектрика. Разрядный промежуток обладает большой проводимостью и шунтирует собой волновод, что вызывает значительное отражение падающей волны к генератору. Нормальная передача мощности прекращается; появление отраженной волны может привести к выходу из строя генератора. Значение  $E_{\text{предл}}$  зависит от вида диэлектрика, частоты колебаний и ряда других причин. Например, для сухого воздуха в диапазоне сантиметровых волн при нормальных атмосферном давлении и начальной ионизации имеем  $E_{\text{предл}} = 30 \text{ кВ/см} = 3 \cdot 10^6 \text{ В/м}$ .

Подстановка в (18.36) вместо наибольшей амплитуды электрического поля величины  $E_{\text{предл}}$  позволяет определить *предельную* (наибольшую) мощность  $P_{\text{предл}}$  которую может перенести вдоль данного регулярного волновода бегущая волна рассматриваемого типа. В реальном волноводе в общем случае существует отраженная волна (см. ч. V). Вследствие этого при передаче оди-

наковой мощности вдоль регулярного [ф-ла (18.36)] и вдоль реального волновода в последнем максимальная напряженность электрического поля оказывается больше. Это означает, что передаваемая вдоль реального волновода наибольшая мощность, которую называют *допустимой рабочей мощностью*  $P_{\text{доп}}$ , должна быть меньше, чем  $P_{\text{пред}}$ .

### 18.5. СКОРОСТЬ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ЭНЕРГИИ ВДОЛЬ ВОЛНОВОДА. ГРУППОВАЯ СКОРОСТЬ

Если волновод заполнен воздухом (близким по своим свойствам к вакууму), то  $v = 1/\sqrt{\epsilon_0\mu_0} = c$  и фазовая скорость (18.24) полей магнитного и электрического классов превышает скорость света в вакууме  $c$ . Этот результат не противоречит теории относительности, так как фазовая скорость определяет скорость распространения вдоль волновода поверхности постоянной фазы и в данном случае не идентична скорости распространения энергии (ср. § 13.5) или сигнала.

Средняя скорость распространения энергии, переносимой гармонической бегущей волной произвольного типа вдоль волновода без потерь, определится согласно (4.36) соотношением

$$v_{\text{эв}} = P_{\text{вср}} / \int_{S_{\perp}} W'_{\text{вср}} dS, \quad (18.38)$$

где  $P_{\text{вср}}$  выражается ф-лой (18.36) или (18.37), а  $\int_{S_{\perp}} W'_{\text{вср}} dS$  —

среднее за период значение электромагнитной энергии, приходящейся на единицу длины волновода. Из (18.38) для волны произвольного типа класса Н или Е с помощью соотношений § 18.2 можно получить выражения

$$v_{\text{эв}} = v^2/v_{\text{ф}} = v \sqrt{1 - (\lambda/\lambda_{\text{крв}})^2} = v \sqrt{1 - (f_{\text{крв}}/f)^2} \quad (18.39)$$

и  $v_{\text{ф}} v_{\text{эв}} = v^2$ . Таким образом, в волноводе скорость переноса энергии гармонической волной любого типа классов Н и Е всегда меньше скорости  $v = 1/\sqrt{\epsilon_a\mu_a}$  волны, свободно распространяющейся в безграничной среде. Для гармонической бегущей Т-волны из (18.38) получается выражение  $v_{\text{эв}} = v$ , т. е. в волноводе скорость переноса энергии этой волной равна фазовой скорости (и скорости волны в безграничной среде).

Обсудим теперь вопрос о скорости распространения в волноводе сигнала. Поскольку передать информацию с помощью установившейся чисто гармонической волны невозможно (из-за ее однородности во времени и пространстве), то сигналом является только негармоническая волна, которую всегда можно представить суперпозицией гармонических волн с разными частотами. Далее ограничимся важным для практики случаем узкополосных сигналов, у которых все составляющие их гармонические волны

занимают полосу частот  $2\Omega$ , малую по сравнению со средней (несущей) частотой  $\omega_0$ . Распространение таких сигналов в линии передачи рассмотрим на простом примере амплитудномодулированной одним тоном волны. Полученные при этом результаты можно обобщить на любые узкополосные сигналы.

В некоторой точке поперечного сечения линии  $z=0$  мгновенное значение любой компоненты вектора  $\mathbf{E}$  волны, модулированной одним тоном, можно представить суперпозицией трех гармонических составляющих с разными частотами:

$$E(t, 0) = E_m (1 + m \cos \Omega t) \cos \omega_0 t = E_m \cos \omega_0 t + \frac{mE_m}{2} \cos [(\omega_0 + \Omega) t] + \frac{mE_m}{2} \cos [\omega_0 - \Omega) t], \quad (18.40)$$

где  $\omega_0$  — несущая частота;  $\Omega$ ,  $m$  — частота модуляции и коэффициент модуляции соответственно. Распространение всех гармонических составляющих сигнала осуществляется вдоль волновода волнами одного и того же типа. Поэтому при распространении гармонических составляющих (18.40) в направлении, например,  $+z^0$  имеем для соответствующей точки произвольного поперечного сечения  $z$  следующее выражение:

$$E(t, z) = E_m \cos (\omega_0 t - \beta_{v0} z) + \frac{mE_m}{2} \cos [(\omega_0 + \Omega) t - \beta_{v1} z] + \frac{mE_m}{2} \cos [(\omega_0 - \Omega) t - \beta_{v2} z], \quad (18.41)$$

где  $\beta_{v0} = \beta_v(\omega_0)$ ,  $\beta_{v1} = \beta_v(\omega_0 + \Omega)$ ,  $\beta_{v2} = \beta_v(\omega_0 - \Omega)$  — значения коэффициента фазы волн одного и того же типа на различных частотах.

Рассмотрим случай, когда эти волны относятся к классу Н или Е, т. е. характеризуются дисперсией, и  $\beta_v$  определяется соотношением (18.23). Для узкополосных сигналов  $\Omega \ll \omega_0$  и функция  $\beta_v(\omega_0 \pm \Omega)$  может быть представлена тремя первыми членами ряда Тейлора:

$$\begin{aligned} \beta_v(\omega_0 \pm \Omega) &= \beta_v(\omega_0) \pm \left( \frac{d\beta_v}{d\omega} \right)_{\omega=\omega_0} \Omega + \frac{1}{2} \left( \frac{d^2\beta_v}{d\omega^2} \right)_{\omega=\omega_0} \Omega^2 = \\ &= \beta_{v0} \pm \xi \Omega + \eta \Omega^2, \end{aligned} \quad (18.42)$$

где  $\xi = \left( \frac{d\beta_v}{d\omega} \right)_{\omega=\omega_0}$ ,  $\eta = \frac{1}{2} \left( \frac{d^2\beta_v}{d\omega^2} \right)_{\omega=\omega_0}$ . При этом  $\beta_v z = \beta_{v0} z \pm \xi \Omega z + \eta \Omega^2 z$ . Если ограничиться такими значениями  $z$ , для которых величина  $\eta \Omega^2 z \ll 1$ , то ее можно отбросить в аргументе косинусов ф-лы (18.41). Это означает, что для указанных значений  $z$  в интервале частот от  $\omega_0 - \Omega$  до  $\omega_0 + \Omega$  коэффициент фазы можно аппроксимировать *линейной* функцией частоты:

$$\beta_v(\omega_0 \pm \Omega) = \beta_{v0} \pm \xi \Omega. \quad (18.43)$$

Пока остается справедливой аппроксимация (18.43) для коэффициентов фазы всех гармонических волн, составляющих сигнал, эти достаточно близкие по частоте волны образуют так называемую *группу волн* и сигнал распространяется вдоль линии *без изменения* своей формы с групповой скоростью.

Действительно, подставив (18.43) в (18.41), получим

$$\begin{aligned} E(t, z) &= E_m \cos(\omega_0 t - \beta_{v_0} z) + \frac{mE_m}{2} \{ \cos[(\omega_0 + \Omega)t - \\ & - (\beta_{v_0} + \xi\Omega)z] + \cos[(\omega_0 - \Omega)t - (\beta_{v_0} - \xi\Omega)z] \} = \\ &= E_m \{ 1 + m \cos[\Omega(t - \xi z)] \} \cos(\omega_0 t - \beta_{v_0} z). \end{aligned} \quad (18.44)$$

Выражение (18.44) можно интерпретировать как плоскую волну частоты  $\omega_0$ , которая распространяется в направлении  $+z^0$  и амплитуда которой изменяется по закону

$$E_m(t, z) = E_m \{ 1 + m \cos[\Omega(t - \xi z)] \}, \quad (18.45)$$

определяющему форму огибающей группы волн. Построенное по ф-ле (18.44) для фиксированного момента времени распределе-

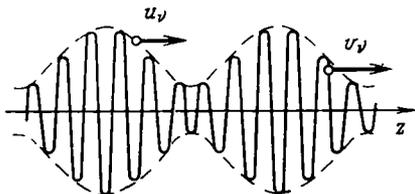


РИС. 18.3

ние поля вдоль оси  $z$  изображено на рис. 18.3. С течением времени плоскости постоянной фазы, определяемые уравнением  $\omega_0 t - \beta_{v_0} z = \text{const}$ , распространяются вдоль оси  $z$  с фазовой скоростью

$$v_v = \omega_0 / \beta_v(\omega_0) = v / \sqrt{1 - (\lambda_0 / \lambda_{крв})^2}, \quad (18.46)$$

где  $\lambda_0 = v / f_0$ . Скорость распространения постоянного значения огибающей группы волн (например, ее максимума) называют *групповой скоростью*  $u_v$ . Согласно (18.45) уравнение постоянного значения огибающей имеет вид  $t - \xi z = \text{const}$ , откуда групповая скорость

$$\begin{aligned} u_v &= \frac{1}{\xi} = \frac{1}{\left( \frac{d\beta_v}{d\omega} \right)_{\omega=\omega_0}} = \frac{1}{\left( \frac{d}{d\omega} \sqrt{\omega^2 \epsilon_a \mu_a - \kappa_v^2} \right)_{\omega=\omega_0}} = \\ &= v \sqrt{1 - \left( \frac{\lambda_0}{\lambda_{крв}} \right)^2}. \end{aligned} \quad (18.47)$$

Поскольку  $u_v < v_v$ , то происходит специфическое «проскальзывание» высокочастотного заполнения относительно огибающей (см. рис. 18.3).

Если полоса частот, занимаемая сигналом, достаточно узка, то ф-ла (18.43) остается справедливой для значительных расстояний  $z$  в линии с дисперсией и соответственно огибающая группы волн перемещается без заметного изменения своей формы (сигнал распространяется без искажения) на значительные расстояния. Поскольку понятие групповой скорости применимо только к узкополосным сигналам, то эта скорость оказывается по величине равной средней скорости распространения энергии (18.39), переносимой гармонической волной на несущей частоте  $\omega_0$ .

Фазовая (18.46) и групповая (18.47) скорости связаны между собой соотношением  $v_v u_v = v^2$ . Скорость распространения узкополосного сигнала (18.47) меньше скорости  $v = 1/\sqrt{\epsilon_a \mu_a}$ .

При распространении сигнала вдоль волновода без потерь волнами Т дисперсия отсутствует и коэффициент фазы (18.26) всегда является линейной функцией частоты:  $\beta(\omega_0 \pm \Omega) = (\omega_0 \pm \Omega) \sqrt{\epsilon_a \mu_a} = \beta_0 \pm \sqrt{\epsilon_a \mu_a} \Omega$ . Следовательно, понятие группы волн применимо в любой полосе частот и при любых значениях  $z$ , произвольный сигнал распространяется без искажения на любые расстояния с групповой скоростью  $u = 1/\sqrt{\epsilon_a \mu_a}$ . Проверить это можно, например, подставив в (18.41) соответствующие выражения для  $\beta(\omega)$ . Таким образом, при отсутствии дисперсии фазовая (18.29) и групповая скорости совпадают и равны скорости волны  $v = 1/\sqrt{\epsilon_a \mu_a}$  в безграничной среде.

### 18.6. ЗАТУХАНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН В ВОЛНОВОДЕ, ОБУСЛОВЛЕННОЕ ПОТЕРЯМИ В МЕТАЛЛИЧЕСКИХ СТЕНКАХ

В § 18.1—18.5 рассматривались волноводы без потерь, в которых бегущие волны распространяются без затухания ( $\gamma_v = i\beta_v$ ). В действительности, однако, в металлических стенках волновода наблюдается сильный поверхностный эффект, который сопровождается поглощением металлом части мощности, переносимой вдоль волновода. Кроме того, электрическая проводимость заполняющей волновод реальной диэлектрической среды все же не равна нулю, вследствие чего происходят потери мощности и в этой среде. Если, однако, волновод заполнен воздухом при нормальном давлении, то для большинства частот диэлектрические потери в нем весьма малы и практически их можно вообще не учитывать.

При определении коэффициента затухания  $\alpha_v$ , обусловленного потерями мощности в металлических стенках, приближенно полагают, что распределение поля в поперечном сечении волновода с неидеально проводящими стенками отличается от распределения

поля соответствующего типа в поперечном сечении волновода без потерь лишь в непосредственной близости от стенок, где добавляется небольшая касательная составляющая вектора  $\mathbf{E}$ , определяемая с помощью граничных условий Леонтовича — Шукина.

Пусть бегущая волна определенного типа распространяется в волноводе с неидеально проводящими стенками. При  $\alpha_v > 0$  вместо (18.37) имеем следующую формулу для средней мощности, переносимой этой волной через поперечное сечение  $z$  волновода:

$$P_{\text{всп}}(z) e^{-2\alpha_v z} \frac{Z_{cv}}{2} \int_{S_{\perp}} |\mathbf{H}_{0\perp}|^2 dS = e^{-2\alpha_v z} P_{\text{всп}}(0), \quad (18.48)$$

где  $P_{\text{всп}}(0)$  — мощность, переносимая вдоль волновода без потерь.

Очевидно, что справедливо равенство

$$P_{\text{всп}}(z) - P_{\text{всп}}(z + \Delta z) = \Delta P_{\text{вп.сп}}(z), \quad (18.49)$$

где  $\Delta P_{\text{вп.сп}}(z)$  — средняя мощность тепловых потерь, поглощаемая в стенках на отрезке волновода длиной  $\Delta z$ . Разделив (18.49) на  $\Delta z$  и взяв предел при  $\Delta z \rightarrow 0$ , получим следующее выражение для средней мощности  $P_{\text{вп.сп}}^{(1)}(z)$ , поглощаемой в стенках на единице длины волновода:

$$P_{\text{вп.сп}}^{(1)}(z) = - \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{P_{\text{всп}}(z + \Delta z) - P_{\text{всп}}(z)}{\Delta z} = - \frac{dP_{\text{всп}}(z)}{dz}. \quad (18.50)$$

Подставив (18.48) в (18.50), получим  $P_{\text{вп.сп}}^{(1)}(z) = 2\alpha_v P_{\text{всп}}(z)$ , откуда

$$\alpha_v = P_{\text{вп.сп}}^{(1)}(z) / 2P_{\text{всп}}(z). \quad (18.51)$$

При наличии в стенках линии передачи сильного поверхностного эффекта величина  $P_{\text{вп.сп}}^{(1)}(z)$  определится в соответствии с § 14.3. Производя в (14.18) согласно (17.2) замену  $|\dot{\mathbf{H}}_{\tau}|^2 = |\mathbf{H}_{0\tau}|^2 e^{-2\alpha_v z}$ , подставляя  $dS = dl dz$  и интегрируя затем по всему контуру  $L_{\perp}$  поперечного сечения, получим выражение для мощности тепловых потерь, поглощаемой на отрезке  $dz$  волновода:

$$dP_{\text{вп.сп}}(z) = \frac{1}{2} r_s e^{-2\alpha_v z} dz \oint_{L_{\perp}} |\mathbf{H}_{0\tau}|^2 dl. \quad (18.52)$$

Отсюда имеем

$$P_{\text{вп.сп}}^{(1)}(z) = \frac{dP_{\text{вп.сп}}(z)}{dz} = \frac{1}{2} r_s e^{-2\alpha_v z} \oint_{L_{\perp}} |\mathbf{H}_{0\tau}|^2 dl. \quad (18.53)$$

Подставив (18.48) и (18.53) в (18.51), получим искомую формулу

$$\alpha_v = \frac{r_s}{4P_{всп}} \oint_{L_{\perp}} |\dot{\mathbf{H}}_{0\tau}|^2 dl, \quad (18.54)$$

где  $\alpha_v$  дано в 1/м;  $|\dot{\mathbf{H}}_{0\tau}|^2$  определяется из решения задачи для линии без потерь;  $P_{всп}$  находится из соотношения (18.37); активное поверхностное сопротивление  $r_s = 1/\sigma_2 d = \sqrt{\mu_2 a \omega / 2 \sigma_2}$  ( $\mu_2 a$ ,  $\sigma_2$  — параметры металла стенок).

Из (18.54) следует, что  $\alpha_v$  зависит от формы и размеров поперечного сечения волновода, типа волны, частоты колебаний и материала стенок.

При учете равенства  $\dot{\mathbf{H}}_{0\tau} = t^0 \dot{H}_{0t} + z^0 \dot{H}_{0z}$  (см. § 18.1) получим вместо (18.54) формулу

$$\alpha_v = \frac{r_s}{4P_{всп}} \oint_{L_{\perp}} (H_{tm}^2 + H_{zm}^2) dl. \quad (18.55)$$

### 18.7. ГРАФИЧЕСКОЕ ИЗОБРАЖЕНИЕ СТРУКТУРЫ ПОЛЯ

Графическое изображение структуры поля определенного типа строится для фиксированного момента времени. При построении картины поля в линии передачи нужно учитывать, что векторные линии  $\mathbf{H}$  образуют замкнутые петли<sup>1)</sup>, а линии  $\mathbf{E}$  либо оканчиваются на поверхности идеально проводящих стенок (точнее, на поверхностных зарядах стенок), либо также образуют замкнутые петли. Если линии  $\mathbf{E}$  оканчиваются на поверхности стенок, то согласно (3.48) они ориентированы перпендикулярно к ней. В изотропной среде, примыкающей к идеальному проводнику, согласно (3.47) линии  $\mathbf{H}$  у поверхности стенок ориентированы по касательным к ней.

У поля класса  $\mathbf{H}$  линии  $\mathbf{E}$  лежат только в поперечных сечениях и представляют собой плоские кривые, а линии  $\mathbf{H}$  являются, вообще говоря, трехмерными пространственными кривыми. У поля класса  $\mathbf{E}$ , наоборот, линии  $\mathbf{H}$  (замкнутые) лежат только в поперечных сечениях, а линии  $\mathbf{E}$  являются трехмерными кривыми. Как правило, изображение структуры поля удобнее начинать с построения более простых векторных линий, лежащих только в поперечных сечениях.

В дальнейшем нас будет интересовать, главным образом, построение структуры поля бегущих волн ( $\gamma_v = i\beta_v$ ). В этом случае в каждой точке поперечного сечения волновода *взаимно перпендикулярные* поперечные компоненты  $\mathbf{E}_{\perp}$  и  $\mathbf{H}_{\perp}$  образуют с направлением распространения волны правую тройку векторов (см.

<sup>1)</sup> В однородной среде, заполняющей волновод, в силу уравнения  $\text{div } \mathbf{H} = 0$  векторные линии  $\mathbf{H}$  замкнуты.

§ 18.2, 18.3). Поскольку  $E_{\perp}$  и  $H_{\perp}$  имеют одинаковую фазу колебаний, то они принимают экстремальные значения в одних и тех же поперечных сечениях линии, где продольная составляющая  $E_z$  или  $H_z$  равна нулю (так как имеет сдвиг по фазе на  $\pi/2$  относительно поперечных составляющих).

Для удобства будем изображать структуру поля в таких сечениях волновода (поперечных и продольных), для которых трехмерные в общем случае векторные линии оказываются плоскими и лежащими в этих сечениях или перпендикулярными к ним. Лежащие в плоскости рисунка векторные линии  $E$  принято изображать сплошными, векторные линии  $H$  — штриховыми. Линии  $E$  и  $H$ , перпендикулярные плоскости рисунка, представляются точками, если направлены на наблюдателя, и крестиками, если направлены от наблюдателя. Густота векторных линий пропорциональна величине вектора.

### 18.8. ПОЛЯ ОСНОВНОГО И ВЫСШИХ ТИПОВ

Согласно (18.20) критические длины волн полей различных типов классов  $E$  и  $H$  образуют бесконечную последовательность дискретных величин, *убывающих* от некоторого *наибольшего* значения до нуля. Поле типа  $T$  характеризуется критической длиной волны  $\lambda_{кр} = \infty$ . Поле *основного* (*низшего*) типа называют поле того типа, который имеет в данной линии передачи наибольшую критическую длину волны (наименьшую критическую частоту). Например, в волноводах с многосвязным поперечным сечением полем основного типа является поле  $T$ . Поля остальных типов называют полями *высших* типов.

Для существования при заданном значении  $\lambda$  (т. е. частоты  $f = v/\lambda$ ) в волноводе бегущей волны только основного типа и местных затухающих полей всех высших типов необходимо выбрать размеры поперечного сечения таким образом, чтобы согласно (18.21) и (18.22) одновременно удовлетворялись неравенства:

$$\lambda < \lambda_{кр1}, \lambda_{кр2} < \lambda. \quad (18.56)$$

Здесь  $\lambda_{кр1}$  и  $\lambda_{кр2}$  — соответственно критические длины волн полей основного типа и первого высшего типа, который имеет наибольшее значение  $\lambda_{кр}$  после поля основного типа.

Если во всей полосе частот, занимаемой сигналом, удовлетворяются неравенства (18.56), то имеет место *одноволновый* режим. Линию передачи, в которой существует этот режим, называют *одноволновой*. Наибольший коэффициент перекрытия рабочего диапазона частот (или длин волн), в котором сохраняется одноволновый режим, определяется согласно (18.56) соотношением

$$\eta = f_{\max}/f_{\min} = \lambda_{кр1}/\lambda_{кр2}. \quad (18.57)$$

Если размеры поперечного сечения линии допускают в пропускаемой полосе частот существование бегущих волн более чем одного типа, то имеет место *многоволновый* режим и линию передачи называют *многоволновой*.

## 18.9. ТРЕБОВАНИЯ, ПРЕДЪЯВЛЯЕМЫЕ К ЛИНИИ ПЕРЕДАЧИ

1. Во всей полосе частот, занимаемой сигналом, передача мощности вдоль линии должна осуществляться бегущими волнами только одного типа (называемого рабочим). В самом деле, сигналы, передаваемые волнами различных типов, переносились бы вдоль линии с различными групповыми скоростями и вместо одновременного поступления в точку приема имели бы сдвиг во времени, что привело бы к искажению суммарного сигнала.

2. Линия передачи должна пропускать необходимую мощность без пробоя.

3. При большой длине линии передачи затухание волн в ней должно быть минимальным.

4. Размеры поперечного сечения и масса линии должны быть минимальными.

Первое требование удовлетворяется автоматически, если в линии осуществлен одноволновый режим. Именно этот режим и используют на практике в коаксиальном круглом волноводе и, как правило, в прямоугольном волноводе (см. гл. 19). Однако иногда одноволновый режим или не может быть обеспечен в заданном диапазоне частот, или вступает в противоречие с отмеченными выше другими требованиями, что заставляет переходить к многоволновому режиму.

Например, в волноводах минимальным затуханием обладает волна типа  $H_{01}$  круглого волновода (см. § 19.15), являющаяся волной высшего типа, причем это затухание минимально лишь при достаточно больших отношениях  $a/\lambda$  ( $a$  — радиус волновода). Вследствие этого для передачи сигнала на большие расстояния было бы целесообразно использовать круглый волновод с рабочей волной типа  $H_{01}$  при значениях  $a/\lambda > 3 \div 4$  (см. § 19.17).

При использовании многоволнового режима возникает опасность возникновения в линии передачи наряду с бегущими волнами рабочего типа бегущих волн других типов, являющихся нежелательными, паразитными волнами. Дело в том, что любая реальная линия передачи неизбежно имеет случайные нерегулярности (разнообразные деформации стенок, ступеньки в местах соединения соседних отрезков волновода, искривления оси), на которых происходит частичное (обычно незначительное) преобразование волн рабочего типа в бегущие волны паразитных типов, отнимающие часть мощности у волн рабочего типа. Поэтому в многоволновой линии требуется принимать специальные меры по снижению потерь мощности на преобразование волн рабочего типа в паразитные волны.

В многоволновом волноводе на нерегулярностях происходит и обратное преобразование ранее возникших паразитных волн в волны рабочего типа. В результате этого возникает так называемый попутный поток, который может привести к недопустимым искажениям передаваемого сигнала. Действительно, поскольку различные паразитные волны одной и той же частоты  $f$  распро-

страняются в волноводе с разными скоростями, то возникшие при обратных преобразованиях волны рабочего типа накладываются на главную рабочую волну частоты  $f$  со случайными сдвигами по фазе, что и приводит к искажениям сигнала. Для ослабления попутного потока в волноводе специальными способами должно быть обеспечено сильное затухание волн паразитных типов (см. § 24.5).

## Глава 19

### РЕГУЛЯРНЫЕ ВОЛНОВОДЫ

#### Прямоугольный волновод



##### 19.1. РЕШЕНИЕ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ

Поскольку контур  $L_{\perp}$  поперечного сечения прямоугольного волновода (рис. 19.1) совпадает с отрезками четырех координатных линий декартовой системы  $x, y$ , то решение краевых задач

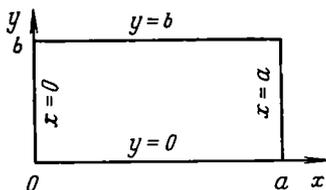


РИС. 19.1

(18.6) и (18.7) следует проводить в этой системе (ср. § 17.2). Размер стенки волновода вдоль оси  $Ox$  обозначим через  $a$ , вдоль оси  $Oy$  — через  $b$ .

1. Общее решение двумерного уравнения Гельмгольца. Согласно (П1.26) и (П1.30) ур-ния (17.15) в декартовой системе координат имеют вид

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \kappa^2 \Phi = 0, \quad (19.1)$$

где  $\Phi(x, y)$  есть  $\dot{E}_{0z}$  или  $\dot{H}_{0z}$ . Решение ур-ния (19.1) проводится методом разделения переменных, в соответствии с которым полагаем

$$\Phi(x, y) = X(x)Y(y), \quad (19.2)$$

где  $X(x)$  — функция переменной  $x$ ;  $Y(y)$  — функция переменной  $y$ . Подставив (19.2) в ур-ние (19.1) и разделив его на  $X(x)Y(y)$ , получим

$$-\frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} = \frac{1}{Y} \frac{d^2 Y}{dy^2} + \kappa^2. \quad (19.3)$$

Левая часть (19.3) может зависеть только от  $x$ , а правая — только от  $y$ . Поскольку переменные  $x$  и  $y$  независимы друг от друга, то равенство (19.3) удовлетворяется только в том случае, если обе его части равны одной и той же *постоянной* величине, которую обозначим через  $\kappa_x^2$ . При этом вместо (19.3) получим два уравнения:

$$\frac{d^2 X}{dx^2} + \kappa_x^2 X = 0, \quad \frac{d^2 Y}{dy^2} + \kappa_y^2 Y = 0, \quad (19.4)$$

причем

$$\kappa^2 = \kappa_x^2 + \kappa_y^2. \quad (19.5)$$

Как известно, общее решение ур-ний (19.4) можно представить следующим образом:

$$X(x) = A \cos \kappa_x x + B \sin \kappa_x x, \quad Y(y) = C \cos \kappa_y y + D \sin \kappa_y y, \quad (19.6)$$

где  $A, B, C, D$  — произвольные постоянные интегрирования.

2. Поле класса Е. Граничное условие (18.1) на прямоугольном контуре  $L_\perp$ , образованном координатными линиями  $x=0, a$  и  $y=0, b$  (см. рис. 19.1), принимает следующий вид:

$$\begin{aligned} \dot{E}_{0z} &= (A \cos \kappa_x x + B \sin \kappa_x x) Y(y) = 0 \\ &\text{при } x = 0, a; \end{aligned} \quad (19.7)$$

$$\begin{aligned} \dot{E}_{0z} &= X(x) (C \cos \kappa_y y + D \sin \kappa_y y) = 0 \\ &\text{при } y = 0, b. \end{aligned} \quad (19.8)$$

Из (19.7) при  $x=0$  получаем  $A=0$ , при  $x=a$  получаем  $\kappa_x = m\pi/a$ , где  $m=1, 2, 3 \dots$ . Из (19.8) при  $y=0$  имеем  $C=0$ , при  $y=b$  имеем  $\kappa_y = n\pi/b$ , где  $n=1, 2, 3 \dots$

Согласно этим результатам и ф-лам (19.2), (19.5), (19.6) имеем следующее решение краевой задачи (18.6):

$$\begin{aligned} \dot{E}_{0z}(x, y) &= \dot{E}_0 \sin(m\pi x/a) \sin(n\pi y/b), \\ m &= 1, 2, 3 \dots; \quad n = 1, 2, 3 \dots, \end{aligned} \quad (19.9)$$

где  $\dot{E}_0 = BD = E_{0zm} e^{i\varphi_0}$  ( $E_{0zm}$  — наибольшая амплитуда в поперечном сечении составляющей  $E_z$ ) и определяется условиями возбуждения поля в волноводе, которые здесь не рассматриваются;

$$\kappa_y = \kappa_{mn} = \sqrt{(m\pi/a)^2 + (n\pi/b)^2}. \quad (19.10)$$

Каждое из целых чисел  $m$  и  $n$  должно быть отличным от нуля, так как в противном случае  $\dot{E}_{0z}(x, y)$  (и, следовательно, все поле класса Е) было бы равно нулю.

3. Поле класса Н. Дифференцирование по направлению нормали к прямоугольному контуру  $L_{\perp}$  сводится на сторонах  $x=0$ , а к дифференцированию по координате  $x$ , а на сторонах  $y=0$ ,  $b$  — к дифференцированию по  $y$  (см. рис. 19.1). Следовательно, граничное условие (18.5) при учете (19.2) и (19.6) принимает вид:

$$\frac{\partial \dot{H}_{0z}}{\partial x} = \kappa_x (-A \sin \kappa_x x + B \cos \kappa_x x) Y(y) = 0$$

при  $x = 0, a$ ; (19.11)

$$\frac{\partial \dot{H}_{0z}}{\partial y} = X(x) \kappa_y (-C \sin \kappa_y y + D \cos \kappa_y y) = 0$$

при  $y = 0, b$ . (19.12)

Из (19.11) при  $x=0$  имеем  $B=0$ , при  $x=a$  имеем  $\kappa_x = m\pi/a$ , где  $m=0, 1, 2, \dots$  Из (19.12) при  $y=0$  получаем  $D=0$ , при  $y=b$  получаем  $\kappa_y = n\pi/b$ , где  $n=0, 1, 2, \dots$

Согласно этим результатам и ф-лам (19.2), (19.5), (19.6) имеем следующее решение краевой задачи (18.7):

$$\dot{H}_{0z}(x, y) = \dot{H}_0 \cos \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b},$$

$$m = 0, 1, 2 \dots; n = 0, 1, 2 \dots, \quad (19.13)$$

где  $\dot{H}_0 = AC = H_{0zme} e^{i\varphi_0}$  может быть найден, если заданы источники поля в волноводе; критическое волновое число  $\kappa$  поля класса Н определяется также соотношением (19.10).

Для поля класса Н, по крайней мере, одно из целых чисел  $m$  или  $n$  должно быть отличным от нуля, так как при  $m=0$  и  $n=0$  исчезает зависимость  $\dot{H}_{0z}$  от обеих поперечных координат и все поперечные компоненты поля согласно (18.10) и (П1.27) обращаются в нуль.

Из ф-л (19.9), (19.10) для поля класса Е и (19.13), (19.10) для поля класса Н следует, что каждой паре фиксированных целых чисел  $m$  и  $n$  можно поставить в соответствие лишь одну определенную продольную составляющую и одно определенное критическое волновое число. Согласно § 18.2 поле в волноводе однозначно определяется продольной составляющей  $\dot{E}_{0z}$  или  $\dot{H}_{0z}$  и критическим волновым числом. Следовательно, каждой паре фиксированных чисел  $m$  и  $n$  будет соответствовать поле определенного типа класса Е или Н, которое обладает только ему свойственной структурой и которое обозначают добавлением к символу класса поля двух фиксированных индексов:  $E_{mn}$  или  $H_{mn}$ .

## 19.2. ПАРАМЕТРЫ ПОЛЕЙ ТИПОВ $H_{mn}$ И $E_{mn}$

В прямоугольном волноводе поле каждого типа  $H_{mn}$  или  $E_{mn}$  характеризуется своим критическим волновым числом (19.10), которому согласно (18.19) и (18.20) соответствуют следующие

критические частота и длина волны:

$$f_{\text{кр}v} = f_{\text{кр}mn} = \frac{1}{2\sqrt{\epsilon_a \mu_a}} \sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2},$$

$$\lambda_{\text{кр}v} = \lambda_{\text{кр}mn} = \frac{2}{\sqrt{(m/a)^2 + (n/b)^2}}. \quad (19.14)$$

К параметрам бегущей волны типа  $H_{mn}$  или  $E_{mn}$ , которая может существовать при  $\lambda < \lambda_{\text{кр}mn}$ , относятся также согласно (18.23) — (18.25) и (18.16) следующие значения коэффициента распространения  $\gamma_{mn}$ , фазовой скорости  $v_{mn}$ , длины волны в волноводе  $\Lambda_{mn}$  и характеристического сопротивления  $Z_{hmn}$  или  $Z_{emn}$ :

$$\gamma_{mn} = i\beta_{mn} = ik \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_{\text{кр}mn}}\right)^2}, \quad v_{mn} = \frac{v}{\sqrt{1 - (\lambda/\lambda_{\text{кр}mn})^2}},$$

$$\Lambda_{mn} = \frac{\lambda}{\sqrt{1 - (\lambda/\lambda_{\text{кр}mn})^2}}; \quad (19.15)$$

$$\left. \begin{aligned} Z_{hmn} &= \frac{\omega\mu_a}{\beta_{mn}} = Z_c \frac{1}{\sqrt{1 - (\lambda/\lambda_{\text{кр}mn})^2}}, \\ Z_{emn} &= \frac{\beta_{mn}}{\omega\epsilon_a} = Z_c \sqrt{1 - (\lambda/\lambda_{\text{кр}mn})^2}, \end{aligned} \right\} \quad (19.16)$$

где  $Z_c = \sqrt{\mu_a/\epsilon_a}$ .

Местное затухающее поле типа  $H_{mn}$  или  $E_{mn}$ , которое может существовать при  $\lambda > \lambda_{\text{кр}mn}$ , наряду с параметрами (19.14) характеризуют в соответствии с формулами  $\gamma_v = \sqrt{\kappa_v^2 - k^2}$ , (18.20) и (18.18) следующие величины:

$$\gamma_{mn} = \alpha_{mn} \sqrt{\kappa_{mn}^2 - k^2} = k \sqrt{(\lambda/\lambda_{\text{кр}mn})^2 - 1}; \quad (19.17)$$

$$Z_{hmn} = \frac{i\omega\mu_a}{\alpha_{mn}} = iZ_c \frac{1}{\sqrt{(\lambda/\lambda_{\text{кр}mn})^2 - 1}}, \quad Z_{emn} = \frac{\alpha_{mn}}{i\omega\epsilon_a} =$$

$$= \frac{1}{i} Z_c \sqrt{\left(\frac{\lambda}{\lambda_{\text{кр}mn}}\right)^2 - 1}. \quad (19.18)$$

Критическая длина волны (19.14) зависит только от целочисленных значений индексов  $m$  и  $n$  (от типа поля) и размеров  $a$  и  $b$  поперечного сечения волновода. При этом критические длины волн образуют бесконечную убывающую последовательность значений. В табл. 19.1 приведена начальная часть этой последовательности. Из таблицы видно, что при  $a > b$  (ось  $Ox$  направлена вдоль широкой стенки волновода) полем основного типа в прямоугольном волноводе является  $H_{10}$ . При  $a < b$  (ось  $Oy$  направлена вдоль широкой стенки) полем основного типа является  $H_{01}$ .

Условие существования бегущей волны основного типа  $\lambda < 2a$  (полагаем, что  $a > b$ ) ограничивает сверху значения  $\lambda$ , на которых целесообразно использовать волновод. Уже в середине деци-

метрового диапазона волн значительные габариты и масса волновода обычно заставляют отказаться от этого типа линии передачи.

Из табл. 19.1 видно, что при  $a > 2b$  наиболее близко к  $\lambda_{кр10} = 2a$  расположено значение  $\lambda_{кр20} = a$  поля типа  $H_{20}$ , при  $a < 2b$  — значение  $\lambda_{кр01} = 2b$  поля типа  $H_{01}$ . Поэтому для существования в прямоугольном волноводе при заданном значении

$\lambda$  бегущей волны только основного типа  $H_{10}$  должны выполняться согласно (18.56) следующие условия:

$$a < \lambda < 2a \text{ при } a \geq 2b; \quad (19.19)$$

$$2b < \lambda < 2a \text{ при } a < 2b. \quad (19.20)$$

Если в линии передачи одному и тому же критическому волновому числу соответствуют поля, отличающиеся друг от друга структурой<sup>1)</sup>, то эти поля называются *вырожденными*. Вырожденные поля характеризуются также одинаковыми значениями  $f_{кр\nu}$ ,  $\lambda_{кр\nu}$ ,  $\gamma_\nu$ ,  $v_\nu$ ,  $\Lambda_\nu$ . В прямоугольном волноводе поля типов  $H_{mn}$  и  $E_{mn}$  с одинаковыми значениями индексов  $m$ ,  $n$  являются вырожденными.

### 19.3. КОМПЛЕКСНЫЕ АМПЛИТУДЫ СОСТАВЛЯЮЩИХ ВЕКТОРОВ $\mathbf{E}$ И $\mathbf{H}$

Поле типа  $H_{mn}$ . Согласно соотношениям (П1.23), (П1.27),  $[\mathbf{x}^0 \mathbf{z}^0] = -\mathbf{y}^0$  и  $[\mathbf{y}^0 \mathbf{z}^0] = \mathbf{x}^0$  имеем в декартовой системе координат вместо (18.10б) и (18.10в)

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{H}}_{0\perp} = \mp \frac{\gamma_{mn}}{\kappa_{mn}^2} \left( \mathbf{x}^0 \frac{\partial \dot{H}_{0z}}{\partial x} + \mathbf{y}^0 \frac{\partial \dot{H}_{0z}}{\partial y} \right), \quad \dot{\mathbf{E}}_{0\perp} = \frac{i \omega \mu_a}{\kappa_{mn}^2} \times \\ \times \left( -\mathbf{x}^0 \frac{\partial \dot{H}_{0z}}{\partial y} + \mathbf{y}^0 \frac{\partial \dot{H}_{0z}}{\partial x} \right) \end{aligned} \quad (19.21)$$

или

$$\left. \begin{aligned} \dot{E}_{0x} = -\frac{i \omega \mu_a}{\kappa_{mn}^2} \frac{\partial \dot{H}_{0z}}{\partial y}, \quad \dot{E}_{0y} = \frac{i \omega \mu_a}{\kappa_{mn}^2} \frac{\partial \dot{H}_{0z}}{\partial x}, \\ \dot{H}_{0x} = \mp \frac{\gamma_{mn}}{\kappa_{mn}^2} \frac{\partial \dot{H}_{0z}}{\partial x}, \quad \dot{H}_{0y} = \pm \frac{\gamma_{mn}}{\kappa_{mn}^2} \frac{\partial \dot{H}_{0z}}{\partial y}. \end{aligned} \right\} \quad (19.22)$$

<sup>1)</sup> В прямоугольном волноводе различную структуру имеют только поля различных типов; в круглом волноводе вследствие его осевой симметрии структура полей одного и того же типа может отличаться поворотом вокруг оси  $z$  (см. § 19.11).

Подставив в (19.22)  $\dot{H}_{0z}$  из (19.13) и перейдя затем согласно (17.2) к комплексным амплитудам, получим:

$$\left. \begin{aligned} \dot{E}_x &= \frac{i\omega\mu_a}{\kappa_{mn}^2} \dot{H}_0 \frac{n\pi}{b} \cos \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} e^{\mp\gamma_{mn}z}, \\ \dot{E}_y &= -\frac{i\omega\mu_a}{\kappa_{mn}^2} \dot{H}_0 \frac{m\pi}{a} \sin \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b} e^{\mp\gamma_{mn}z}, \quad \dot{E}_z = 0, \\ \dot{H}_x &= \pm \frac{\gamma_{mn}}{\kappa_{mn}^2} \dot{H}_0 \frac{m\pi}{a} \sin \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b} e^{\mp\gamma_{mn}z}, \\ \dot{H}_y &= \pm \frac{\gamma_{mn}}{\kappa_{mn}^2} \dot{H}_0 \frac{n\pi}{b} \cos \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} e^{\mp\gamma_{mn}z}, \\ \dot{H}_z &= \dot{H}_0 \cos \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b} e^{\mp\gamma_{mn}z}. \end{aligned} \right\} (19.23)$$

Поле типа  $E_{mn}$ . Исходя из ф-л (18.12) и (19.9), аналогичным образом получим следующие выражения для комплексных амплитуд:

$$\left. \begin{aligned} \dot{E}_x &= \mp \frac{\gamma_{mn}}{\kappa_{mn}^2} \dot{E}_0 \frac{m\pi}{a} \cos \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} e^{\mp\gamma_{mn}z}, \\ \dot{E}_y &= \pm \frac{\gamma_{mn}}{\kappa_{mn}^2} \dot{E}_0 \frac{n\pi}{b} \sin \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b} e^{\mp\gamma_{mn}z}, \\ \dot{E}_z &= \dot{E}_0 \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} e^{\mp\gamma_{mn}z}, \\ \dot{H}_x &= \frac{i\omega\epsilon_a}{\kappa_{mn}^2} \dot{E}_0 \frac{n\pi}{b} \sin \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b} e^{\mp\gamma_{mn}z}, \\ \dot{H}_y &= -\frac{i\omega\epsilon_a}{\kappa_{mn}^2} \dot{E}_0 \frac{m\pi}{a} \cos \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} e^{\mp\gamma_{mn}z}, \\ \dot{H}_z &= 0. \end{aligned} \right\} (19.24)$$

Параметр  $\kappa_{mn}$  в ф-лах (19.23) и (19.24) определяется соотношением (19.10),  $\gamma_{mn}$  определяется из (19.15) в случае бегущей волны ( $\lambda < \lambda_{кртн}$ ) и из (19.17) в случае местного поля ( $\lambda > \lambda_{кртн}$ ).

#### 19.4. МОЩНОСТЬ, ПЕРЕНОСИМАЯ БЕГУЩИМИ ВОЛНАМИ ТИПОВ

##### $H_{mn}$ И $E_{mn}$

1. Волна типа  $H_{mn}$ . Подставим в (18.37) из (19.23) амплитуды  $H_{xm}$  и  $H_{ym}$  бегущей волны ( $\gamma_{mn} = i\beta_{mn}$ ):

$$P_{mn\text{ ср}} = \frac{1}{2} Z_{hmn} \frac{\beta_{mn}^2}{\kappa_{mn}^4} H_{0zm}^2 \int_0^a \int_0^b \left[ \left( \frac{m\pi}{a} \right)^2 \sin^2 \frac{m\pi x}{a} \cos^2 \frac{n\pi y}{b} + \right.$$

$$+ \left( \frac{n\pi}{b} \right)^2 \cos^2 \frac{m\pi x}{a} \sin^2 \frac{n\pi y}{b} \Big] dx dy. \quad (19.25)$$

Произведя интегрирование, приняв во внимание, что  $m$  и  $n$  — целые числа, и воспользовавшись соотношениями  $\beta_{mn} = 2\pi/\Lambda_{mn}$ ,  $\gamma_{mn} = 2\pi/\lambda_{кр mn}$  и формулами § 19.2 для параметров бегущей волны, получим:

$$P_{mn \text{ ср}} = H_{0zm}^2 \frac{ab}{8} Z_c \left( \frac{\lambda_{кр mn}}{\lambda} \right)^2 \sqrt{1 - \left( \frac{\lambda}{\lambda_{кр mn}} \right)^2} \text{ при } m \neq 0, n \neq 0; \quad (19.26)$$

$$P_{mn \text{ ср}} = H_{0zm}^2 \frac{ab}{4} Z_c \left( \frac{\lambda_{кр mn}}{\lambda} \right)^2 \sqrt{1 - \left( \frac{\lambda}{\lambda_{кр mn}} \right)^2} \text{ при } m \neq 0, n = 0$$

или  $m = 0, n \neq 0$ . (19.27)

Волна типа  $E_{mn}$ . Аналогичным путем с помощью (18.36) и соотношений § 19.2, 19.3 получим

$$P_{mn \text{ ср}} = E_{0zm}^2 \frac{ab}{8} \frac{1}{Z_c} \left( \frac{\lambda_{кр mn}}{\lambda} \right)^2 \sqrt{1 - \left( \frac{\lambda}{\lambda_{кр mn}} \right)^2}$$

при  $m \neq 0, n \neq 0$ . (19.28)

Формулы (19.26) — (19.28) позволяют по известной мощности определить  $H_{0zm}$  или  $E_{0zm}$ , а затем с помощью формул § 19.3 найти значения всех составляющих векторов напряженностей поля. Из (19.26) — (19.28) следует, что мощность пропорциональна значению  $H_{0zm}$  или  $E_{0zm}$  (которое определяет поперечные компоненты поля, обуславливающие перенос мощности вдоль волновода) и площади поперечного сечения  $S = ab$ . Кроме того, мощность зависит от отношения  $\lambda/\lambda_{кр mn}$ . При приближении  $\lambda$  к  $\lambda_{кр mn}$  передаваемая мощность уменьшается при фиксированном значении  $H_{0zm}$  или  $E_{0zm}$ . Если же в рассматриваемом случае требуется сохранить переносимую мощность неизменной, то приходится увеличивать  $H_{0zm}$  или  $E_{0zm}$ , а следовательно, и поперечные составляющие вектора  $E$ . Таким образом, при  $\lambda$ , достаточно близком к  $\lambda_{кр mn}$ , перенос даже небольшой мощности по волноводу может вызвать опасность высокочастотного пробоя диэлектрика (см. § 18.4).

#### 19.5. КОЭФФИЦИЕНТ ЗАТУХАНИЯ ВОЛН ТИПОВ $H_{mn}$ И $E_{mn}$ , ОБУСЛОВЛЕННЫЙ ПОТЕРЯМИ В МЕТАЛЛИЧЕСКИХ СТЕНКАХ

Этот коэффициент затухания определим с помощью (18.55).

Волна типа  $H_{mn}$ . На широких сторонах контура поперечного сечения  $L_{\perp}$  имеем  $y=0$  или  $y=b$  и  $t^0 = \pm x^0$ . На этих сторонах согласно (19.23) получим в случае бегущей волны соотношение

$$H_{im}^2 + H_{zm}^2 = H_{xm}^2 + H_{zm}^2 = H_{0zm}^2 \left[ \frac{\beta_{mn}^2}{\kappa_{mn}^4} \left( \frac{m\pi}{a} \right)^2 \sin^2 \frac{n\pi x}{a} + \right. \\ \left. + \cos^2 \frac{m\pi x}{a} \right] \text{ при } y = 0, b. \quad (19.29)$$

На узких сторонах контура имеем  $x=0$  или  $x=a$   $t^0 = \pm y^0$  и

$$H_{im}^2 + H_{zm}^2 = H_{ym}^2 + H_{zm}^2 = H_{0zm}^2 \left[ \frac{\beta_{mn}^2}{\kappa_{mn}^4} \left( \frac{n\pi}{b} \right)^2 \sin^2 \frac{n\pi y}{b} + \cos^2 \frac{n\pi y}{b} \right]. \quad (19.30)$$

Подставив значения (19.29) и (19.30) в соотношение

$$\oint_{L_{\perp}} (H_{im}^2 + H_{zm}^2) dl = 2 \left[ \int_0^a (H_{xm}^2 + H_{zm}^2) dx + \int_0^b (H_{ym}^2 + H_{zm}^2) dy \right], \quad (19.31)$$

вычислив интеграл и воспользовавшись формулами § 19.2 для параметров бегущей волны и ф-лой (19.26) или (19.27) для мощности, получим согласно (18.55)  $\alpha_{hmn}$ , 1/м:

$$\alpha_{hmn} = \frac{2r_S}{bZ_c \sqrt{1 - \left( \frac{\lambda}{\lambda_{кр mn}} \right)^2}} \left[ \frac{m^2 \left( \frac{b}{a} \right)^2 + n^2 \frac{b}{a}}{m^2 \left( \frac{b}{a} \right)^2 + n^2} + \right. \\ \left. \left| \left( \frac{\lambda}{\lambda_{кр mn}} \right)^2 \frac{m^2 \left( \frac{b}{a} \right)^3 + n^2}{m^2 \left( \frac{b}{a} \right)^2 + n^2} \right| \text{ при } m \neq 0, n \neq 0; \quad (19.32)$$

$$\alpha_{hmn} = \frac{r_S}{bZ_c \sqrt{1 - \left( \frac{\lambda}{\lambda_{кр mn}} \right)^2}} \left[ 1 + 2 \frac{b}{a} \left( \frac{\lambda}{\lambda_{кр mn}} \right)^2 \right] \\ \text{при } m \neq 0, n = 0; \quad (19.33)$$

$$\alpha_{hmn} = \frac{r_S}{bZ_c \sqrt{1 - \left( \frac{\lambda}{\lambda_{кр mn}} \right)^2}} \left[ \frac{b}{a} + 2 \left( \frac{\lambda}{\lambda_{кр mn}} \right)^2 \right] \\ \text{при } m = 0, n \neq 0. \quad (19.34)$$

Волна типа  $E_{mn}$ . Аналогичным образом из (18.55) с учетом соотношений (19.24) и (19.28) получим  $\alpha_{emn}$ , 1/м:

$$\alpha_{emn} = \frac{2r_s}{bZ_c \sqrt{1 - (\lambda/\lambda_{кр mn})^2}} \cdot \frac{m^2 (b/a)^2 + n^2}{m^2 (b/a)^2 + n^2} \text{ при } m \neq 0, n \neq 0. \quad (19.35)$$

На рис. 19.2 построены зависимости  $\alpha_\nu(f)$ , рассчитанные по ф-лам (19.32)—(19.35) для медного волновода, который имеет

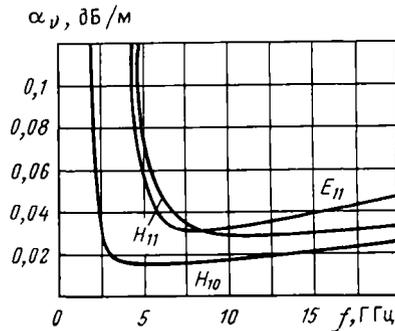


РИС. 19.2

размеры  $a=72$  мм,  $b=34$  мм и заполнен воздухом. По оси ординат отложен коэффициент затухания в дБ/м, который в 8,686 раз больше коэффициента затухания в 1/м (см. § 11.3). Из рисунка видно, что в прямоугольном волноводе волна основного типа  $H_{10}$  характеризуется меньшим коэффициентом затухания, чем волны высших типов.

### 19.6. ВОЛНА ОСНОВНОГО ТИПА

Требования, предъявляемые к линии передачи (см. § 18.9), удовлетворяются в прямоугольном волноводе наилучшим образом при использовании бегущей волны основного типа  $H_{10}$ .

Параметры волны. Бегущая волна  $H_{10}$  согласно (19.10), (19.14)—(19.16) характеризуется следующими параметрами:

$$\left. \begin{aligned} m = 1, n = 0, \kappa = \pi/a, f_{кр} = 1/2a \sqrt{\epsilon_a \mu_a}, \\ \lambda_{кр} = 2a, \gamma = i\beta, \beta = k \sqrt{1 - (\lambda/2a)^2}, \\ v_\phi = v/\sqrt{1 - (\lambda/2a)^2}, v_z = v^2/v_\phi = v \sqrt{1 - (\lambda/2a)^2}, \\ \Lambda = \lambda/\sqrt{1 - (\lambda/2a)^2}, Z_0 = Z_c/\sqrt{1 - (\lambda/2a)^2}. \end{aligned} \right\} \quad (19.36)$$

Здесь для фазовой скорости использовано обозначение  $v_\phi$ , для характеристического сопротивления волны — обозначение  $Z_0$ .

Структура поля. Пусть, например, бегущая волна  $H_{10}$  распространяется в направлении  $+z^0$ . Удержав в ф-лах (19.23) верхние знаки, приняв во внимание соотношения (19.36) для  $m$ ,  $n$ ,  $\kappa$  и  $\gamma$ , перейдя от комплексных амплитуд к мгновенным значе-

ниям и введя подстановку  $E_{0m} = \frac{\omega\mu_a}{\kappa} H_{0zm}$ , получим следующие окончательные выражения:

$$\left. \begin{aligned} E_y(t) &= E_{0m} \sin \frac{\pi x}{a} \sin(\omega t - \beta z + \varphi_0), \\ H_x(t) &= -\frac{E_{0m}}{Z_0} \sin \frac{\pi x}{a} \sin(\omega t - \beta z + \varphi_0), \\ H_z(t) &= \frac{\kappa}{\omega\mu_a} E_{0m} \cos \frac{\pi x}{a} \cos(\omega t - \beta z + \varphi_0). \end{aligned} \right\} \quad (19.37)$$

Здесь  $E_{0m}$  — наибольшее значение амплитуды напряженности электрического поля;  $\varphi_0$  — начальная фаза ( $H_0 = H_{0zm} e^{i\varphi_0}$ ).

Согласно ф-лам (19.37) поперечные составляющие поля  $E_y$  и  $H_x$  изменяются в зависимости от координаты  $x$  по синусоидальному закону, а продольная составляющая  $H_z$  — по косинусоидальному закону (рис. 19.3). Из ф-л (19.37) и рисунка видно, что при

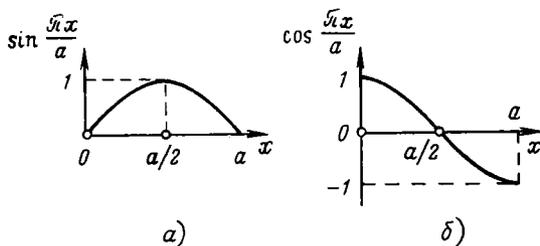


РИС. 19.3

$m=1$  вдоль стороны  $a$  укладывается одна стоячая полуволна, при  $n=0$  вдоль стороны  $b$  поле не изменяется. В прямоугольном волноводе у волн типов  $H_{mn}$  и  $E_{mn}$  индексы  $m$  и  $n$  определяют число стоячих полуволн, укладываемых соответственно вдоль сторон по осям  $Ox$  и  $Oy$ .

Наглядное представление о структуре поля (19.37) дает картина распределения в волноводе векторных линий  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$ , которая строится способом, изложенным в § 18.7. Зададимся для простоты таким моментом времени  $t_1$ , для которого выполняется равенство  $\omega t_1 + \varphi_0 = 2\pi$  и, следовательно, ф-лы (19.37) принимают вид:

$$\begin{aligned} E_y(t_1) &= -E_{0m} \sin \frac{\pi x}{a} \sin \beta z, & H_x(t_1) &= \frac{E_{0m}}{Z_0} \sin \frac{\pi x}{a} \sin \beta z, \\ H_z(t_1) &= \frac{\kappa}{\omega\mu_a} E_{0m} \cos \frac{\pi x}{a} \cos \beta z. \end{aligned} \quad (19.38)$$

Из выражений (19.38) видно, что вектор  $\mathbf{E}$  имеет только одну составляющую  $E_y$  и не зависит от координаты  $y$ . Векторные линии  $\mathbf{E}$  начинаются и оканчиваются на широких стенках волново-

да. Вектор  $\mathbf{H}$  имеет две составляющие  $H_x$  и  $H_z$  и, следовательно, его векторные линии представляют собой замкнутые петли, которые лежат в сечениях  $y = \text{const}$ , параллельных плоскости  $xOz$ .

Рассмотрим структуру поля (19.38) на отрезке волновода  $-\Lambda/4 \leq z \leq \Lambda/4$ , равном  $\Lambda/2$ . В различных поперечных ( $z = \text{const}$ ) и продольных ( $x = \text{const}$ ,  $y = \text{const}$ ) сечениях ф-лы (19.38) при-

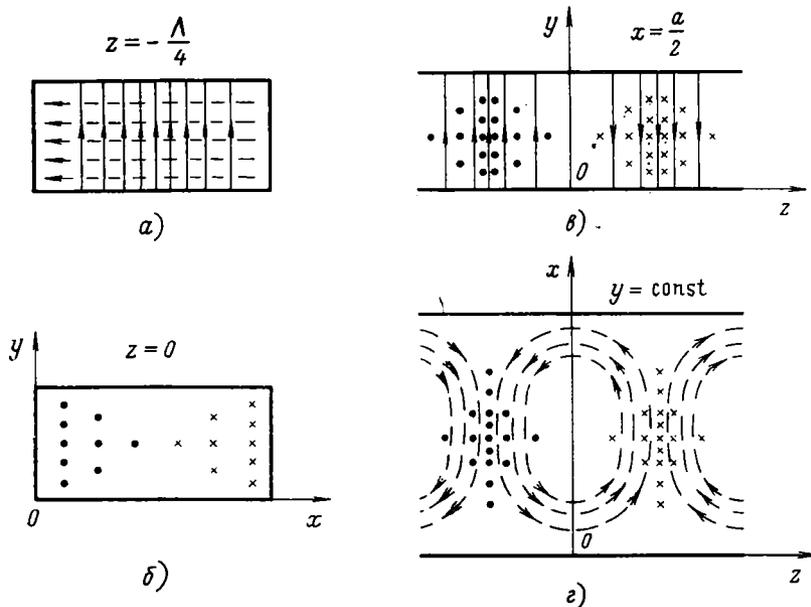


РИС. 19.4

нимают вид:

$$\text{при } z = \mp \frac{\Lambda}{4} \quad E_y = \pm E_{0m} \sin \frac{\pi x}{a}, \quad H_x = \mp \frac{E_{0m}}{Z_0} \sin \frac{\pi x}{a}, \quad H_z = 0; \quad (19.39)$$

$$\text{при } z = 0 \quad E_y = 0, \quad H_x = 0, \quad H_z = \frac{\kappa}{\omega \mu_a} E_{0m} \cos \frac{\pi x}{a}; \quad (19.40)$$

$$\text{при } x = \frac{a}{2} \quad E_y = -E_{0m} \sin \beta z, \quad H_x = \frac{E_{0m}}{Z_0} \sin \beta z, \quad H_z = 0; \quad (19.41)$$

$$\left. \begin{aligned} &\text{при } y = \text{const} \quad (0 \leq y \leq b) \\ &E_y = -E_{0m} \sin \frac{\pi x}{a} \sin \beta z, \\ &H_x = \frac{E_{0m}}{Z_0} \sin \frac{\pi x}{a} \sin \beta z, \\ &H_z = \frac{\kappa}{\omega \mu_a} E_{0m} \cos \frac{\pi x}{a} \cos \beta z. \end{aligned} \right\} \quad (19.42)$$

На рис. 19.4 для поля  $H_{10}$  по  $\Phi$ -лам (19.39) — (19.42) построены распределения векторных линий  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  в различных сечениях. С течением времени картины векторных линий (см. рис. 19.4) перемещаются со скоростью  $v_\Phi$  в направлении распространения волны  $+z^0$ .

Электрические токи на стенках волновода. Наличие касательного к поверхности стенок вектора  $\mathbf{H}$  сопровождается существованием на ней электрического поверхностного тока,

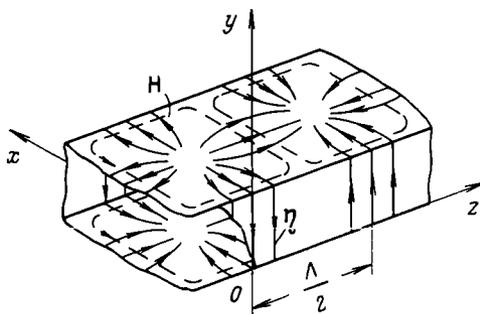


РИС. 19.5

плотность которого определяется соотношением (3.52). При этом векторные линии  $\eta$  образуют семейство кривых, ортогональных семейству векторных линий  $\mathbf{H}$  на стенках. На рис. 19.5 изображена картина линий  $\eta$  волны  $H_{10}$ , построенная для того же момента времени  $t_1$ , что и рис. 19.4.

Согласно принципу непрерывности электрического тока в тех точках, где оканчиваются векторные линии  $\eta$ , начинаются продолжающие их линии  $\delta_{cm}$ , существующие в диэлектрике внутри волновода и параллельные оси  $y$ . Замкнутые линии магнитного поля охватывают линии  $\delta_{cm}$ , причем направления линий  $\delta_{cm}$  и  $\mathbf{H}$ , как всегда, связаны между собой по правилу правого винта.

### 19.7. КОНЦЕПЦИЯ ОДНОРОДНЫХ ПЛОСКИХ ВОЛН В ВОЛНОВОДЕ

Приведенные выше параметры бегущей волны произвольного типа в волноводе получают простую физическую интерпретацию, если произвести предложенное Бриллюэном представление этой волны суммой однородных плоских волн. Проиллюстрируем это на наиболее простом примере основной волны  $H_{10}$ .

Мгновенным значениям (19.37) волны  $H_{10}$  соответствуют комплексные амплитуды:

$$\begin{aligned} \dot{E}_y &= -i \dot{E}_0 \sin \frac{\pi x}{a} e^{-i\beta z}, \quad \dot{H}_x = i \frac{\dot{E}_0}{Z_0} \sin \frac{\pi x}{a} e^{-i\beta z}, \\ \dot{H}_z &= \frac{\kappa}{\omega \mu_a} \dot{E}_0 \cos \frac{\pi x}{a} e^{-i\beta z}. \end{aligned} \quad (19.43)$$

Заменим здесь  $\sin \frac{\pi x}{a} = \sin(\kappa x)$  и  $\cos \frac{\pi x}{a} = \cos(\kappa x)$  по формулам Эйлера:

$$\begin{aligned} \dot{E}_y = \frac{1}{2} \dot{E}_0 [ e^{-i(\kappa x + \beta z)} - e^{i(\kappa x - \beta z)} ], \quad \dot{H}_x = -\frac{\dot{E}_0}{2Z_0} [ e^{-i(\kappa x + \beta z)} - \\ - e^{i(\kappa x - \beta z)} ], \quad \dot{H}_z = \frac{\kappa}{2\omega\mu_a} \dot{E}_0 [ e^{-i(\kappa x + \beta z)} + e^{i(\kappa x - \beta z)} ]. \end{aligned} \quad (19.44)$$

Введем угол  $\theta$  при помощи соотношения

$$\sin \theta = \beta/k = \sqrt{1 - (\lambda/2a)^2} = \sqrt{1 - (\lambda/\lambda_{кр})^2}. \quad (19.45)$$

При этом имеем:

$$\begin{aligned} \cos \theta = \lambda/\lambda_{кр} = \kappa/k, \quad Z_0 = Z_c / \sqrt{1 - (\lambda/\lambda_{кр})^2} = Z_c / \sin \theta, \\ \kappa/\omega\mu_a = (\cos \theta)/Z_c. \end{aligned} \quad (19.46)$$

Разобьем ф-лы (19.44) с учетом (19.45) и (19.46) на две независимые группы составляющих, соответствующих первым и вторым слагаемым в квадратных скобках:

$$\left. \begin{aligned} E_{y1} &= \frac{1}{2} \dot{E}_0 e^{-ik(x \cos \theta + z \sin \theta)}, \\ \dot{H}_{x1} &= -\frac{1}{2} \frac{\dot{E}_0}{Z_c} \sin \theta e^{-ik(x \cos \theta + z \sin \theta)}, \\ \dot{H}_{z1} &= \frac{1}{2} \frac{\dot{E}_0}{Z_c} \cos \theta e^{-ik(x \cos \theta + z \sin \theta)}; \end{aligned} \right\} \quad (19.47)$$

$$\left. \begin{aligned} \dot{E}_{y2} &= -\frac{1}{2} \dot{E}_0 e^{-ik(-x \cos \theta + z \sin \theta)}, \\ \dot{H}_{x2} &= \frac{1}{2} \frac{\dot{E}_0}{Z_c} \sin \theta e^{-ik(-x \cos \theta + z \sin \theta)}, \\ \dot{H}_{z2} &= \frac{1}{2} \frac{\dot{E}_0}{Z_c} \cos \theta e^{-ik(-x \cos \theta + z \sin \theta)}. \end{aligned} \right\} \quad (19.48)$$

Формулы (19.47) тождественны выражениям для  $\dot{E}_\Pi$  и  $\dot{H}_\Pi$  в (13.16), (13.17), а ф-лы (19.48) — выражениям для  $\dot{E}_{отр}$  и  $\dot{H}_{отр}$  в (13.16), (13.17) при коэффициенте отражения (13.52). Таким образом, в волноводе бегущую волну  $H_{10}$  можно представить (рис. 19.6) как результат суперпозиции двух однородных плоских волн (волн Бриллюэна), поляризованных нормально к плоскости падения  $xOz$  и распространяющихся в направлениях  $s_1^0$  и  $s_2^0$ , которые образуют с осью  $Ox$  соответственно углы  $\theta$  [волна (19.47)] и  $\pi - \theta$  [волна (19.48)]. Эти две однородных волны имеют одинаковые амплитуды, распространяются со скоростью  $v = \omega/k = 1/\sqrt{\epsilon_a \mu_a}$  в перекрещивающихся направлениях и физически получаются в результате многократного попеременного отражения от боковых стенок.

С помощью концепции однородных плоских волн в волноводе легко придать ясный физический смысл параметрам  $v_\phi$ ,  $v_z$ ,  $\lambda$ ,  $Z_0$  бегущей волны  $H_{10}$ , определяемым  $\phi$ -лами (19.36). Например,

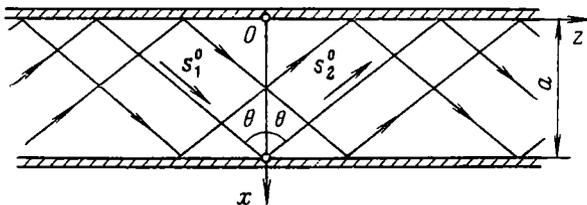


РИС. 19.6

рассудив таким же образом, как при обосновании соотношения (13.41), получим с учетом (19.45) выражение  $v_\phi = \frac{v}{\sin \theta} = \frac{v}{\sqrt{1 - (\lambda/2a)^2}}$ . Физически распространение волн (и перенос ими энергии) происходит по зигзагообразным путям (см. рис. 19.6) со скоростью  $v$ .

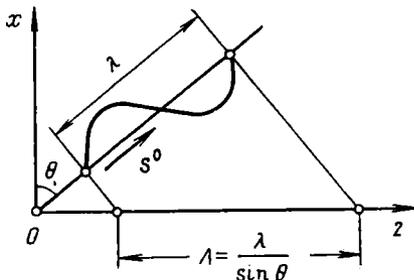


РИС. 19.7

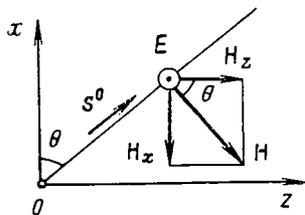


РИС. 19.8

При этом поступательное движение энергии вдоль оси  $z$  определяется соотношением  $v_z = v \sin \theta = v \sqrt{1 - (\lambda/2a)^2}$ . Различие между длиной волны  $\lambda = vT$  и длиной волны в волноводе  $\Lambda = v_\phi T$  легко понять из рис. 19.7. Связь между характеристическим сопротивлением волны  $H_{10}$ , определяемым поперечными (по отношению к оси  $z$  волновода) составляющими поля однородной плоской волны, и характеристическим сопротивлением плоской волны в безграничном диэлектрике  $Z_c$  легко установить с помощью рис. 19.8:

$$Z_0 = \frac{E_y}{|H_x|} = \frac{E_y}{H \sin \theta} = \frac{Z_c}{\sin \theta} = \frac{Z_c}{\sqrt{1 - (\lambda/2a)^2}}. \quad (19.49)$$

Аналогичным путем нетрудно показать, что волны типов  $H_{m0}$  и  $H_{0n}$  можно разложить также на две однородные плоские волны, а волны типов  $H_{mn}$  ( $m, n = 1, 2, \dots$ ) и  $E_{mn}$  — на четыре; параметры волн этих типов имеют тот же физический смысл, что и в случае волны  $H_{10}$ .

## 19.8. ВЫБОР РАЗМЕРОВ ПОПЕРЕЧНОГО СЕЧЕНИЯ ВОЛНОВОДА В ОДНОВОЛНОВОМ РЕЖИМЕ

Согласно (18.57) неравенствам (19.19) соответствует коэффициент перекрытия рабочего диапазона частот  $\eta = f_{\text{макс}}/f_{\text{мин}} = 2$ . При выполнении условий (19.20) коэффициент перекрытия уменьшается и определяется значением  $\eta = a/b$ . Поэтому обычно отдают предпочтение условиям (19.19) и принимают  $a \geq 2b$ . Однако на практике следует учитывать ряд дополнительных причин, которые приводят к уменьшению рабочего диапазона одноволнового режима.

Подставляя в (19.27)  $H_{0zm} = \frac{\kappa}{\omega \mu_a} E_{0m} = \frac{1}{Z_c \lambda_{\text{кр}}} E_{0m}$  (см. § 19.6) и учитывая, что  $\lambda_{\text{кр}10} = 2a$ , получаем мощность, переносимую волной  $H_{10}$ :

$$P_{\text{ср}} = 0,25 \frac{E_{0m}^2 ab}{Z_c} \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{2a}\right)^2}. \quad (19.50)$$

Если принять  $E_{0m} = E_{\text{предл}}$ , то ф-ла (19.50) определит предельную мощность волны  $H_{10}$  (см. § 18.4)

$$P_{\text{пред}} = 0,25 \frac{E_{\text{предл}}^2 ab}{Z_c} \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{2a}\right)^2}. \quad (19.51)$$

При значениях  $\lambda$ , близких к  $\lambda_{\text{кр}} = 2a$ , волновод может пропустить только очень малую мощность (ср. § 19.4). Кроме того, при  $\lambda \rightarrow \lambda_{\text{кр}}$  также резко возрастает коэффициент затухания волны. Поэтому на практике обычно требуют выполнения условия  $\lambda < 1,6a$  вместо  $\lambda < 2a$ , что исключает приближение рабочих длин волн к  $\lambda_{\text{кр}}$ . Чтобы иметь достаточно сильное затухание вдоль волновода местных полей, возникающих в реальном тракте около нерегулярностей (см. ч. V), вместо неравенства  $a < \lambda$  также вводят более жесткое условие (например,  $1,05a < \lambda$ ). Таким образом, условия одноволнового режима (19.19) на практике заменяют ориентировочными неравенствами

$$1,05a < \lambda < 1,6a \quad \text{при } a \geq 2b, \quad (19.52)$$

которым соответствует коэффициент перекрытия рабочего диапазона  $\eta \approx 1,5$ .

Рассмотрим теперь, чем определяется выбор размера  $b$ . Обычно можно принять, что магнитные проницаемости стенок и диэлектрического заполнения одинаковы ( $\mu_{2a} \approx \mu_{1a} \approx \mu_0$ ) и, следовательно,  $r_S = \sqrt{\mu_{2a} \omega / 2\sigma_2} \approx \sqrt{\pi Z_c / \sigma_2 \lambda}$ . Подставив в (19.33) это значение  $r_S$  и  $\lambda_{\text{кр}} = 2a$ , получим расчетную формулу для волны  $H_{10}$

$$a = \frac{1}{b} \sqrt{\frac{\pi}{\lambda \sigma Z_c}} \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{2a}\right)^2}} \left[ 1 + 2 \frac{b}{a} \left(\frac{\lambda}{2a}\right)^2 \right]. \quad (19.53)$$

Вычисления по ф-ле (19.53) показывают, что при  $a = \text{const}$  (размер  $a$  был выбран выше) коэффициент затухания уменьшается с увеличением  $b$ . Таким образом, для уменьшения  $\alpha$  и увеличения предельной мощности (19.51) выгодно увеличивать сторону  $b$  как можно больше. Поэтому согласно фигурирующему в (19.52) условию  $b \leq a/2$  обычно принимают  $b = a/2$ . Окончательный выбор размеров  $a$  и  $b$  следует производить в соответствии с существующими стандартными волноводами (см., например, [42]).

Отметим, что в некоторых практических случаях на первое место выступает требование уменьшения габаритов и массы волновода, а не увеличения предельной мощности и уменьшения коэффициента затухания. В этих случаях выбирают  $b = (0,1 \div 0,2)a$ .

### 19.9. СТРУКТУРА ПОЛЕЙ БЕГУЩИХ ВОЛН ВЫСШИХ ТИПОВ

У волны  $H_{m0}$  вдоль стороны по оси  $Ox$  укладывается  $m$  стоячих полуволн, а вдоль стороны по оси  $Oy$  нет изменения поля. Соответственно этому для построения картины поля этой волны следует мысленно разделить волновод вдоль стороны  $a$  на  $m$  одинаковых ячеек и в каждой из них изобразить волну  $H_{10}$ , причем в соседних ячейках волны  $H_{10}$  противофазны (рис. 19.9а).

Картину поля волны  $H_{0n}$  легко получить из картины поля волны  $H_{m0}$  (при  $m = n$ ), поменяв ролями стороны волновода вдоль осей  $Ox$  и  $Oy$ .

У волны  $H_{11}$  линии  $E$  лежат в поперечных сечениях, соединяют широкие и узкие стенки и ориентированы перпендикулярно к их поверхности (рис. 19.9б). При этом вдоль каждой из сторон поперечного сечения укладывается одна стоячая полуволна. На рисунке изображено распределение поля в том поперечном сечении, в котором в рассматриваемый момент времени продольная составляющая  $H_z$  равна нулю и, следовательно,  $\mathbf{H} = \mathbf{H}'$ . Лежащие в этом сечении линии  $\mathbf{H}$  образуют семейство кривых, перпендикулярных линиям  $\mathbf{E}$  и ориентированных у поверхности стенок по касательным к ней.

На рис. 19.9б показано также распределение поля в продольном сечении волновода, которое примыкает к поверхности идеально проводящей широкой стенки.

Для построения картины поля волны  $H_{mn}$  ( $m \geq 1, n \geq 1$ ) нужно мысленно разделить волновод вдоль стороны по оси  $Ox$  на  $m$  и вдоль стороны по оси  $Oy$  на  $n$  одинаковых ячеек (всего получится  $mn$  ячеек) и в каждой ячейке изобразить волну  $H_{11}$ , причем в соседних ячейках волны  $H_{11}$  противофазны (рис. 19.9в). У волны  $E_{11}$  линии  $\mathbf{H}$  являются плоскими замкнутыми кривыми, лежащими в поперечных сечениях (рис. 19.9г). На этом рисунке показано распределение поля в том поперечном сечении, в котором  $E_z = 0$ . Лежащие в этом сечении линии  $\mathbf{E}$  перпендикулярны линиям  $\mathbf{H}$  и ориентированы по нормальям к поверхности стенок. Вдоль каждой из сторон  $a$  и  $b$  укладывается одна стоячая полуволна. На рис. 19.9г приведено также распределение поля в про-

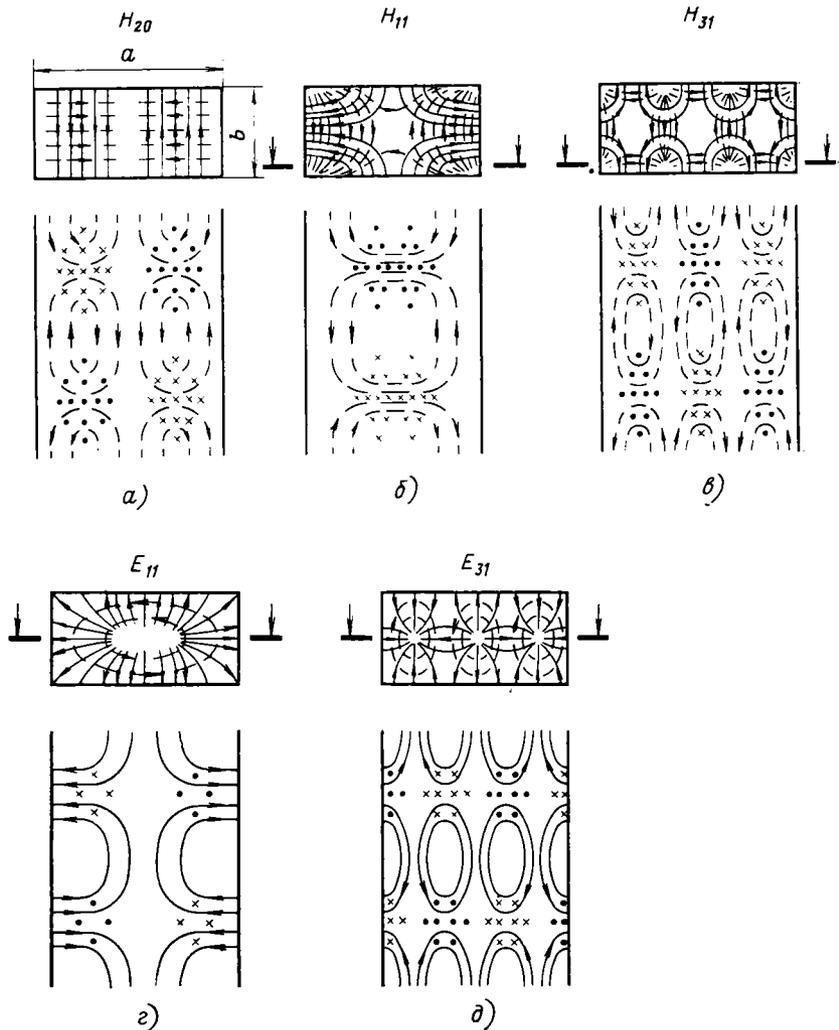


РИС. 19.9

дольном сечении, проходящем через волноводную ось, для которого линии  $E$  оказываются плоскими и лежащими в этом сечении, а линии  $H$  — перпендикулярными к нему.

Для изображения структуры поля волны  $E_{mn}$  нужно мысленно разбить волновод на  $mn$  ячеек и в каждой из них построить поле волны  $E_{11}$ , причем в соседних ячейках волны  $E_{11}$  противофазны (рис. 19.9д).

Остановимся кратко на местных затухающих полях, основные особенности которых были рассмотрены в § 18.2. Формулы, определяющие структуру местного поля типа  $H_{mn}$  или  $E_{mn}$  в прямоугольном волноводе, легко получить, подставив в (19.23) или

(19.24) соответствующие индексы  $m$  и  $n$ , воспользовавшись соотношениями (19.10), (19.14), (19.17), (19.18) и перейдя от комплексных амплитуд к мгновенным значениям составляющих векторов  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$ .

Для примера на рис. 19.10 приведена структура местного поля типа  $E_{11}$  в продольном сечении, проходящем через ось волно-

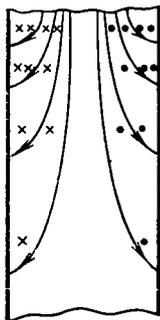


РИС. 19.10

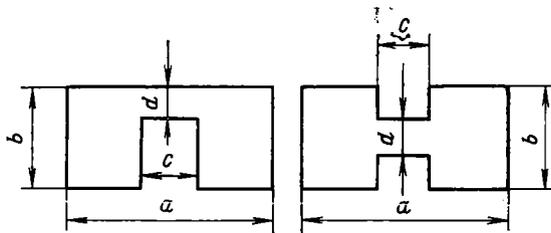


РИС. 19.11

вода. Поскольку по мере удаления вдоль оси  $z$  от нерегулярности, на которой возникает местное поле, амплитуды его векторов убывают по экспоненциальному закону и каждый из векторов имеет фазу, одинаковую во всех точках волновода (см. § 18.2), то вдоль оси  $z$  периодичность местного поля отсутствует (ср. рис. 19.9г и рис. 19.10).

### 19.10. ВОЛНОВОДЫ С ПОПЕРЕЧНЫМ СЕЧЕНИЕМ П- И Н-ОБРАЗНОЙ ФОРМЫ

Расширить рабочий диапазон в одноволновом режиме, а также уменьшить размеры поперечного сечения можно при замене прямоугольного волновода волноводами с поперечным сечением П- и Н-образной форм (см. рис. 17.1и, к). Можно считать, что они получаются из прямоугольного волновода добавлением продольных металлических выступов, расположенных на середине широкой стенки. Поскольку выступы расположены в области наибольших значений составляющих  $E_y$  и  $H_x$  основной волны  $H_{10}$  прямоугольного волновода, то они существенным образом изменяют структуру поля этой волны, образуя при этом основную волну П- и Н-волноводов. Эта волна характеризуется высокой концентрацией поперечных электрического и магнитного полей в зазоре  $d$  (рис. 19.11) и сравнительно малыми значениями продольной составляющей  $H_z$ . Таким образом, благодаря введению выступов структура основной волны волновода становится более близкой к структуре попе-

речной волны Т и соответственно критическая длина этой волны увеличивается. С помощью графиков, приведенных, например, в [14], можно по известным размерам поперечного сечения определить  $\lambda_{кр}$  волны основного типа П- и Н-волноводов.

С другой стороны, выступы расположены в области малых значений составляющих  $E_y$  и  $H_x$  волны первого высшего типа  $H_{20}$  прямоугольного волновода и, следовательно, незначительно изменяют структуру поля этой волны и ее  $\lambda_{кр}$ . Существенное увеличение  $\lambda_{кр}$  основной волны П- и Н-волноводов (по сравнению с  $\lambda_{кр}$  волны  $H_{10}$  прямоугольного волновода, имеющего ту же ширину  $a$ ) и незначительное увеличение (на 20—30%)  $\lambda_{кр}$  волны первого высшего типа приводят к расширению рабочего диапазона этих волноводов в одноволновом режиме. Коэффициент перекрытия рабочего диапазона  $\eta$  П- и Н-волноводов имеет максимум при  $c/a=0,2 \div 0,3$ , возрастает с уменьшением зазора и может быть сделан равным 5—5,5. При пропускании одной и той же полосы частот эти волноводы могут иметь значительно меньшие габариты, чем соответствующий прямоугольный волновод.

Недостатками П- и Н-волноводов являются более низкая по сравнению с прямоугольным волноводом предельная мощность и более высокий коэффициент затухания, обусловленный потерями в стенках. Усиление этих недостатков с уменьшением зазора ограничивает его минимальную величину, что приводит на практике обычно к значениям коэффициента перекрытия  $\eta=2,5 \div 3,5$ .

## Круглый волновод

### 19.11. РЕШЕНИЕ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ

Поскольку контур поперечного сечения круглого волновода (рис. 19.12) совпадает с координатной линией  $r=a$  полярной системы координат  $r, \psi$ , то решение краевой задачи (18.6) или (18.7) следует проводить в полярной системе.

1. Общее решение двумерного уравнения Гельмгольца. Согласно (П1.26) и (П1.34) ур-ния (17.15) в полярной системе имеют вид

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \psi^2} + \kappa^2 \Phi = 0. \quad (19.54)$$

При решении этого ур-ния методом разделения переменных положим

$$\Phi(r, \psi) = R(r) \Psi(\psi). \quad (19.55)$$

Подставив (19.55) в (19.54) и умножив результат на  $r^2/R\Psi$ , имеем

$$-\frac{1}{\Psi} \frac{d^2 \Psi}{d\psi^2} = \frac{r^2}{R} \frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{r}{R} \frac{dR}{dr} + \kappa^2 r^2. \quad (19.56)$$

Рассудив таким же образом, как при переходе от (19.3) к (19.4), и приравняв левую и правую части (19.56) к одной и той же постоянной величине  $m^2$ , получим вместо (19.56) два дифференцированных уравнения:

$$\frac{d^2 \Psi}{d\psi^2} + m^2 \Psi = 0; \quad (19.57)$$

$$\frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dR}{dr} + \left( \kappa^2 - \frac{m^2}{r^2} \right) R = 0. \quad (19.58)$$

Общее решение ур-ния (19.57) представим в виде

$$\Psi(\psi) = A \cos m\psi + B \sin m\psi, \quad (19.59)$$

где  $A$  и  $B$  — произвольные постоянные интегрирования.

Поскольку координатам  $r, \psi$  и  $r, \psi + 2\pi$  соответствует одна и та же точка наблюдения  $M$ , то при приращении  $\psi$  на  $2\pi$  поле

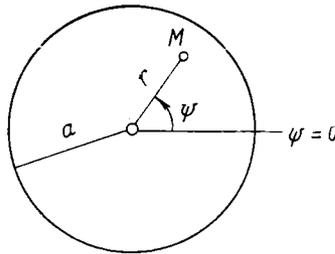


РИС. 19.12

должно оставаться без изменения. Однозначность поля в точке наблюдения требует, чтобы выполнялось условие  $\Psi(\psi) = \Psi(\psi + 2\pi)$ . Для удовлетворения функцией (19.59) этому условию необходимо, чтобы  $m$  являлась любым *целым* числом ( $m=0, 1, 2, 3 \dots$ ).

Уравнение (19.58) совпадает с (П2.1) и, следовательно, при помощи подстановки  $\rho = \kappa r$  приводится к уравнению цилиндрических функций целого порядка  $m$ . Поскольку точка  $r=0$  принадлежит поперечному сечению волновода, то согласно (П2.9) решением ур-ния (19.58) является функция Бесселя:

$$R(r) = C J_m(\kappa r), \quad (19.60)$$

порядок которой совпадает со значением  $m$  в (19.59).

Подставив (19.59) и (19.60) в (19.55), получим общее решение двумерного уравнения Гельмгольца (19.54)

$$\left. \begin{array}{l} \dot{E}_{0z}(r, \psi) \\ \dot{H}_{0z}(r, \psi) \end{array} \right\} = \Phi(r, \psi) = D J_m(\kappa r) \begin{array}{l} \cos m\psi \\ \sin m\psi \end{array}. \quad (19.61)$$

Здесь двойная запись  $\begin{array}{l} \cos m\psi \\ \sin m\psi \end{array}$  учитывает оба независимых частных решения для функции  $\Psi(\psi)$  и заменяет их линейную комбинацию (19.59).

2. Поле класса Е. Из граничного условия (18.1) на контуре  $L_{\perp}$ , имеющем вид окружности  $r=a$ , и ф-лы (19.61) получаем  $J_m(\kappa_e a) = 0$ . Таким образом, произведение  $\kappa_e a$  может быть равно любому корню  $\varepsilon_{mn}$  функции Бесселя  $m$ -го порядка (см. приложение 2, п.2.5):  $\kappa_{emn} a = \varepsilon_{mn}$ , где индекс  $m$  указывает порядок функции Бесселя ( $m=0, 1, 2, 3 \dots$ ), а индекс  $n$  — порядковый номер корня ( $n=1, 2, 3 \dots$ ).

Каждой паре фиксированных индексов  $m$  и  $n$  соответствуют определенное значение  $\varepsilon_{mn}$  (см. табл. П.2.1), критическое волновое число

$$\kappa_{emn} = \varepsilon_{mn}/a \quad (19.62)$$

и продольная составляющая поля

$$\dot{E}_{0z} = \dot{E}_0 J_m(\kappa_{emn} r) \frac{\cos m\psi}{\sin n\psi}. \quad (19.63)$$

Выражение (19.63) представляет собой сумму двух независимых собственных функций, соответствующих одному и тому же критическому волновому числу (19.62), имеющих различную зависимость от угловой координаты  $\psi$  и в общем случае различные значения множителя  $\dot{E}_0$ . Поскольку  $\sin m\psi = \cos(m\psi - \pi/2)$ , то эти собственные функции определяют две структуры электромагнитного поля, отличающиеся друг от друга лишь поворотом вокруг оси волновода на угол  $\pi/2$  и начальной фазой и амплитудой  $\dot{E}_0$  ( $\dot{E}_0 = E_{0z} e^{i\varphi_0}$ ).

Критическое волновое число (19.62) и продольная составляющая (19.63) определяют поле типа  $E_{mn}$  в круглом волноводе.

3. Поле класса Н. Дифференцирование по нормали к контуру  $L_{\perp}$ , имеющему вид окружности, сводится к дифференцированию по радиусу, и граничное условие (18.5) принимает вид  $\frac{\partial \dot{H}_{0z}}{\partial r} = 0$  при  $r=a$ . Из этого условия и ф-лы (19.61) получим  $J'_m(\kappa_h a) = 0$ , где штрих означает дифференцирование по аргументу функции Бесселя. Следовательно, произведение  $\kappa_h a$  может быть равно любому корню  $\mu_{mn}$  производной функции Бесселя  $m$ -го порядка:  $\kappa_{hmn} a = \mu_{mn}$ .

Каждой паре фиксированных индексов  $m=0, 1, 2, 3 \dots$  и  $n=1, 2, 3 \dots$  соответствуют определенное значение  $\mu_{mn}$  (см. табл. П.2.2), критическое волновое число

$$\kappa_{hmn} = \mu_{mn}/a \quad (19.64)$$

и продольная составляющая поля

$$\dot{H}_{0z} = \dot{H}_0 J_m(\kappa_{hmn} r) \frac{\cos m\psi}{\sin n\psi}. \quad (19.65)$$

Как и в предыдущем случае, критическому волновому числу (19.64) соответствует сумма двух независимых собственных функций, которые определяют две структуры поля, отличающиеся друг от друга лишь поворотом вокруг оси волновода на  $\pi/2$  и начальной фазой и амплитудой  $\dot{H}_0$ .

Критическое волновое число (19.64) и продольная составляющая (19.65) определяют поле типа  $H_{mn}$  в круглом волноводе.

### 19.12. ПАРАМЕТРЫ ПОЛЕЙ ТИПОВ $H_{mn}$ И $E_{mn}$

В круглом волноводе поле каждого типа  $H_{mn}$  или  $E_{mn}$  характеризуется своим критическим волновым числом (19.64) или (19.62), которому согласно (18.19) и (18.20) соответствуют следующие критические частота и длина волны:

$$\begin{aligned} f_{кр\ hmn} &= \mu_{mn}/2\pi a \sqrt{\epsilon_a \mu_a}, \\ f_{кр\ emn} &= \epsilon_{mn}/2\pi a \sqrt{\epsilon_a \mu_a}; \end{aligned} \quad (19.66)$$

$$\lambda_{кр\ hmn} = 2\pi a/\mu_{mn}, \quad \lambda_{кр\ emn} = 2\pi a/\epsilon_{mn}. \quad (19.67)$$

Остальные параметры бегущей волны или местного поля типа  $H_{mn}$  или  $E_{mn}$  определяются соотношениями (19.15) — (19.18), в которые следует подставить соответствующее значение  $\lambda_{кр\ v}$  из (19.67).

Критические длины волн (19.67) зависят от значений индексов  $m$  и  $n$ , которые определяют величину  $\mu_{mn}$  или  $\epsilon_{mn}$ , и радиуса  $a$  поперечного сечения и образуют бесконечную убывающую последовательность чисел. В табл. 19.2 приведена начальная часть этой последовательности. Из таблицы видно, что поле типа  $H_{11}$  является полем основного типа в круглом волноводе.

ТАБЛИЦА 19.2

Корень	$\mu_{11}$	$\epsilon_{01}$	$\mu_{21}$	$\mu_{01}, \epsilon_{11}$	$\mu_{31}$
Значение корня	1,841	2,405	3,054	3,832	4,201
Тип поля	$H_{11}$	$E_{01}$	$H_{21}$	$H_{01}, E_{11}$	$H_{31}$
$\lambda_{кр\ v}$	3,41a	2,61a	2,06a	1,64a	1,50a

Условие существования бегущей волны основного типа имеет вид  $\lambda < 3,41a$  или  $\lambda < 1,705d$ , где  $d$  — диаметр волновода, и, следовательно, ограничивает наибольшие значения  $\lambda$  в круглом волноводе примерно теми же пределами, что и в случае прямоугольного волновода (см. § 19.2).

Согласно (18.56) и табл. 19.2 условия одноволнового режима в круглом волноводе имеют вид

$$2,61a < \lambda < 3,41a. \quad (19.68)$$

Им соответствует наибольший коэффициент перекрытия рабочего диапазона  $\eta = 1,3$  (вместо  $\eta = 2$  для прямоугольного волновода).

Поскольку одному и тому же критическому волновому числу (19.62) или (19.64) соответствуют две различные структуры электромагнитного поля, отличающиеся друг от друга поворотом на

угол  $\psi = \pi/2$  (см. § 19.11), то поле каждого типа  $E_{mn}$  и  $H_{mn}$  является *двукратно* вырожденным по углу  $\psi$ . Исключение составляют лишь поля типов  $E_{0n}$  и  $H_{0n}$ , которые, как это следует из (19.63) и (19.65) при  $m=0$ , вообще не зависят от координаты  $\psi$ , т. е. обладают *цилиндрической симметрией*. Отметим, что вырождение по углу  $\psi$  *несимметричных* волн  $E_{mn}$  и  $H_{mn}$  ( $m \neq 0$ ) вызывает неустойчивость поляризации несимметричных волн, т. е. возможность самопроизвольного поворота структуры поля вокруг оси  $z$  даже из-за незначительных случайных нерегулярностей в волноводе (например, эллиптичности поперечного сечения).

Вырожденными являются также поля типов  $H_{0n}$  и  $E_{1n}$ , которые имеют одно и то же критическое волновое число (например, поля  $H_{01}$  и  $E_{11}$ ). Действительно, согласно (П1.16) имеем  $J'_0(\rho) = -J_1(\rho)$ . Следовательно, корни уравнения  $J'_0(\mu) = 0$  совпадают с корнями уравнения  $J_1(\epsilon) = 0$ , т. е.  $\mu_{0n} = \epsilon_{1n}$  и  $\kappa_{h0n} = \kappa_{e1n}$ .

### 19.13. КОМПЛЕКСНЫЕ АМПЛИТУДЫ СОСТАВЛЯЮЩИХ ВЕКТОРОВ E И H

Поле типа  $H_{mn}$ . Согласно соотношениям (П1.23), (П1.31),  $[r^0 z^0] = -\psi^0$  и  $[\psi^0 z^0] = r^0$  имеем вместо (18.10б) и (18.10в):

$$\begin{aligned} \dot{H}_{0\perp} &= \mp \frac{\gamma_{hmn}}{\kappa_{hmn}^2} \left( r^0 \frac{\partial \dot{H}_{0z}}{\partial r} + \psi^0 \frac{1}{r} \frac{\partial \dot{H}_{0z}}{\partial \psi} \right), \\ \dot{E}_{0\perp} &= \frac{i \omega \mu_a}{\kappa_{hmn}^2} \left( -r^0 \frac{1}{r} \frac{\partial \dot{H}_{0z}}{\partial \psi} + \psi^0 \frac{\partial \dot{H}_{0z}}{\partial r} \right) \end{aligned} \quad (19.69)$$

или

$$\begin{aligned} \dot{E}_{0r} &= -\frac{i \omega \mu_a}{\kappa_{hmn}^2 r} \frac{\partial \dot{H}_{0z}}{\partial \psi}, \quad \dot{E}_{0\psi} = \frac{i \omega \mu_a}{\kappa_{hmn}^2} \frac{\partial \dot{H}_{0z}}{\partial r}, \quad \dot{H}_{0r} = \mp \frac{\gamma_{hmn}}{\kappa_{hmn}^2} \frac{\partial \dot{H}_{0z}}{\partial r}, \\ \dot{H}_{0\psi} &= \mp \frac{\gamma_{hmn}}{\kappa_{hmn}^2 r} \frac{\partial \dot{H}_{0z}}{\partial \psi}. \end{aligned} \quad (19.70)$$

Подставив в (19.70)  $\dot{H}_{0z}$  из (19.65) и перейдя затем согласно (17.2) к комплексным амплитудам, получим:

$$\left. \begin{aligned} \dot{E}_r &= \frac{i \omega \mu_a m}{\kappa_{hmn}} \dot{H}_0 \frac{J_m(\kappa_{hmn} r)}{\kappa_{hmn} r} \frac{\sin m \psi}{\cos m \psi} e^{\mp \gamma_{hmn} z}; \\ \dot{E}_\psi &= \frac{i \omega \mu_a}{\kappa_{hmn}} \dot{H}_0 J'_m(\kappa_{hmn} r) \frac{\cos m \psi}{\sin m \psi} e^{\mp \gamma_{hmn} z}, \\ \dot{E}_z &= 0; \\ \dot{H}_r &= \mp \frac{\gamma_{hmn}}{\kappa_{hmn}} \dot{H}_0 J'_m(\kappa_{hmn} r) \frac{\cos m \psi}{\sin m \psi} e^{\mp \gamma_{hmn} z}, \\ \dot{H}_\psi &= \pm \frac{\gamma_{hmn} m}{\kappa_{hmn}} \dot{H}_0 \frac{J_m(\kappa_{hmn} r)}{\kappa_{hmn} r} \frac{\sin m \psi}{\cos m \psi} e^{\mp \gamma_{hmn} z}, \\ \dot{H}_z &= \dot{H}_0 J_m(\kappa_{hmn} r) \frac{\cos m \psi}{\sin m \psi} e^{\mp \gamma_{hmn} z}. \end{aligned} \right\} \quad (19.71)$$

Поле типа  $E_{mn}$ . Из (18.12б) и (18.12в) получим следующие формулы вида (19.70):

$$\left. \begin{aligned} \dot{E}_{0r} &= \mp \frac{\gamma_{emn}}{\kappa_{emn}^2} \frac{\partial \dot{E}_{0z}}{\partial r}, \quad \dot{E}_{0\psi} = \mp \frac{\gamma_{emn}}{\kappa_{emn}^2 r} \frac{\partial \dot{E}_{0z}}{\partial \psi}, \\ \dot{H}_{0r} &= \frac{i \omega \epsilon_a}{\kappa_{emn}^2 r} \frac{\partial \dot{E}_{0z}}{\partial \psi}, \quad \dot{H}_{0\psi} = - \frac{i \omega \epsilon_a}{\kappa_{emn}^2} \frac{\partial \dot{E}_{0z}}{\partial r}. \end{aligned} \right\} \quad (19.72)$$

Подставив в (19.72)  $\dot{E}_{0z}$  из (19.63) и умножив результат на  $e^{\mp \gamma_{emn} z}$ , получим следующие выражения для комплексных амплитуд:

$$\left. \begin{aligned} \dot{E}_r &= \mp \frac{\gamma_{emn}}{\kappa_{emn}} \dot{E}_0 J'_m(\kappa_{emn} r) \frac{\cos m \psi}{\sin m \psi} e^{-\gamma_{emn} z}, \\ \dot{E}_\psi &= \pm \frac{\gamma_{emn} m}{\kappa_{emn}} \dot{E}_0 \frac{J_m(\kappa_{emn} r)}{\kappa_{emn} r} \frac{\sin m \psi}{-\cos m \psi} e^{\mp \gamma_{emn} z}, \\ \dot{E}_z &= \dot{E}_0 J_m(\kappa_{emn} r) \frac{\cos m \psi}{\sin m \psi} e^{\mp \gamma_{emn} z}, \\ \dot{H}_r &= - \frac{i \omega \epsilon_a m}{\kappa_{emn}} \dot{E}_0 J_m(\kappa_{emn} r) \frac{\sin m \psi}{-\cos m \psi} e^{-\gamma_{emn} z}, \\ \dot{H}_\psi &= - \frac{i \omega \epsilon_a}{\kappa_{emn}} \dot{E}_0 J'_m(\kappa_{emn} r) \frac{\cos m \psi}{\sin m \psi} e^{\mp \gamma_{emn} z}, \quad \dot{H}_z = 0. \end{aligned} \right\} \quad (19.73)$$

Формулы (19.71) и (19.73) справедливы как для бегущих волн соответствующего типа ( $\lambda < \lambda_{крв}$ ,  $\gamma_v = i \beta_v$ ), так и для местных полей ( $\lambda > \lambda_{крв}$ ,  $\gamma_v = \alpha_v$ ).

#### 19.14. МОЩНОСТЬ, ПЕРЕНОСИМАЯ БЕГУЩИМИ ВОЛНАМИ ТИПОВ

##### $H_{mn}$ И $E_{mn}$

Волна типа  $H_{mn}$ . Подставим в (18.37) из (19.71) амплитуды  $H_{rm}$  и  $H_{\psi m}$  бегущей волны, имеющей зависимость  $H_z$  от  $\psi$  вида  $\cos m \psi$ :

$$\begin{aligned} P_{mn \text{ ср}} &= \frac{1}{2} Z_{hmn} \frac{\beta_{hmn}}{\kappa_{hmn}^2} H_{0zm}^2 \int_0^{a/2} \int_0^{2\pi} \left[ J_m'^2(\kappa_{hmn} r) \cos^2 m \psi + \right. \\ &\quad \left. + \frac{m^2}{(\kappa_{hmn} r)^2} J_m^2(\kappa_{hmn} r) \sin^2 m \psi \right] r dr d\psi. \end{aligned} \quad (19.74)$$

При интегрировании по  $\psi$  появляется множитель  $\pi$  (при  $m \neq 0$ ) или  $2\pi$  (при  $m=0$ ). При интегрировании по  $r$  учтем (П2.18) и примем во внимание, что  $J'_m(\kappa_{hmn} a) = J'_m(\mu_{mn}) = 0$ . Воспользовавшись также соотношением  $\frac{\beta_{hmn}}{\kappa_{hmn}} = \frac{\lambda_{кр} hmn}{\lambda} \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_{кр} hmn}\right)^2}$  и ф-лой (19.16) для  $Z_{hmn}$ , получим:

$$P_{mn \text{ ср}} = H_{0zm}^2 \frac{\pi a^2}{4} Z_c \left( \frac{\lambda_{кр} hmn}{\lambda} \right)^2 \sqrt{1 - \left( \frac{\lambda}{\lambda_{кр} hmn} \right)^2} \times$$

$$\times J_m^2(\mu_{mn}) \left(1 - \frac{m^2}{\mu_{mn}^2}\right) \text{ при } m \neq 0; \quad (19.75)$$

$$P_{0n \text{ ср}} = H_{0zm}^2 \frac{\pi a^2}{2} Z_c \left(\frac{\lambda_{\text{кр } h_0 n}}{\lambda}\right)^2 \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_{\text{кр } h_0 n}}\right)^2} J_0^2(\mu_{0n})$$

при  $m=0$ . (19.76)

Волна типа  $E_{mn}$ . Аналогичным путем с помощью (П2.18) и при учете соотношения  $J_m(\kappa_{emn}a) = J_m(\epsilon_{mn}) = 0$  получим:

$$P_{mn \text{ ср}} = E_{0zm}^2 \frac{\pi a^2}{4} \frac{1}{Z_c} \left(\frac{\lambda_{\text{кр } e mn}}{\lambda}\right)^2 \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_{\text{кр } e mn}}\right)^2} J_m^2(\epsilon_{mn})$$

при  $m \neq 0$ ; (19.77)

$$P_{0n \text{ ср}} = E_{0zm}^2 \frac{\pi a^2}{2} \frac{1}{Z_c} \left(\frac{\lambda_{\text{кр } e_0 n}}{\lambda}\right)^2 \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_{\text{кр } e_0 n}}\right)^2} J_1^2(\epsilon_{0n})$$

при  $m=0$ . (19.78)

При выводе (19.78) было использовано также равенство (П2.16). Фигурирующее в ф-лах (19.75)–(19.78) произведение  $S = \pi a^2$  есть площадь поперечного сечения круглого волновода.

Формулы (19.75) и (19.77) справедливы также и для бегущих волн, которые имеют зависимость  $H_z$  или  $E_z$  от  $\psi$  вида  $\sin m\psi$ .

Формулы (19.75)–(19.78) по своей структуре близки к (19.26)–(19.28). Поэтому следствия из этих формул совпадают с выводами, сделанными в конце § 19.4.

### 19.15. КОЭФФИЦИЕНТ ЗАТУХАНИЯ ВОЛН ТИПОВ $H_{mn}$ И $E_{mn}$ , ОБУСЛОВЛЕННЫЙ ПОТЕРЯМИ В МЕТАЛЛИЧЕСКИХ СТЕНКАХ

Коэффициент затухания определим по ф-ле (18.55). Для круглого волновода

$$\oint_{L_{\perp}} (H_{tm}^2 + H_{zm}^2) dl = a \int_0^{2\pi} [H_{\psi m}^2(a, \psi) + H_{zm}^2(a, \psi)] d\psi. \quad (19.79)$$

Волна типа  $H_{mn}$ . Подставив в (19.79) амплитуды  $H_{\psi m}(a, \psi)$  и  $H_{zm}(a, \psi)$  бегущей волны из (19.71), вычислив интеграл и воспользовавшись соотношением  $(\beta_{hmn}/\kappa_{hmn})^2 = (\lambda_{\text{кр } hmn}/\lambda)^2 - 1$  и ф-лой (19.75) или (19.76) для мощности, получим согласно (18.55) следующие выражения:

$$\alpha_{hmn} = \frac{r_s}{a Z_c \sqrt{1 - (\lambda/\lambda_{\text{кр } hmn})^2}} \left[ \frac{m^2}{\mu_{mn}^2 - m^2} + (\lambda/\lambda_{\text{кр } hmn})^2 \right] \text{ при } m \neq 0; \quad (19.80)$$

$$\alpha_{h_0 n} = \frac{r_s}{a Z_c \sqrt{1 - (\lambda/\lambda_{\text{кр } h_0 n})^2}} (\lambda/\lambda_{\text{кр } h_0 n})^2 \text{ при } m = 0. \quad (19.81)$$

Волна типа  $E_{mn}$ . Аналогичным путем из (18.55) с учетом соотношений (19.73), (19.77) и (19.78) получим

$$\alpha_{emn} = \frac{r_s}{a Z_c \sqrt{1 - (\lambda/\lambda_{кр\,emn})^2}}. \quad (19.82)$$

Коэффициент затухания (19.81) симметричных волн  $H_{0n}$  монотонно и неограниченно убывает с увеличением  $f$  (уменьшением  $\lambda$ ). Нетрудно показать, что причиной такого изменения  $\alpha_{h0n}$  является убывание с уменьшением  $\lambda$  амплитуды единственной в данном случае касательной к стенкам составляющей  $H_z$ , которое происходит более быстро, чем возрастание  $r_s$ , и, следовательно, приводит к уменьшению поглощаемой в стенках мощности.

На рис. 19.13 приведены зависимости  $\alpha_\nu(f)$  в дБ/м от частоты  $f$ , рассчитанные для медного волновода радиуса  $a=30$  мм с воздушным заполнением. Из рисунка видно, что во всей области одноволнового режима коэффициент затухания основной волны  $H_{11}$ ,

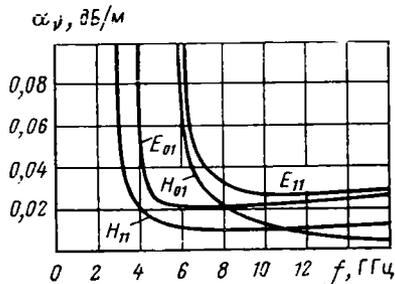


РИС. 19.13

оказывается относительно большим; коэффициент затухания симметричной волны  $H_{01}$  становится меньше коэффициента затухания волны  $H_{11}$  лишь при  $a/\lambda > 1$ . Существенное уменьшение затухания волны  $H_{01}$  в круглом волноводе при значениях  $a/\lambda > 3 \div 4$  стремятся использовать для создания длинных линий передачи с малыми потерями.

### 19.16 СТРУКТУРА ПОЛЕЙ БЕГУЩИХ ВОЛН

Наибольший практический интерес представляют волна основного типа  $H_{11}$ , волна первого высшего типа  $E_{01}$  (см. табл. 19.2), обладающая осевой симметрией, и волна  $H_{01}$ , имеющая при определенных условиях наименьший коэффициент затухания. Рассмотрим эти волны, полагая для определенности, что они распространяются в направлении  $+z^0$ .

Волна основного типа  $H_{11}$ . Удержав в (19.71) верхние знаки, подставив  $m=1$ ,  $n=1$  и  $\nu=i\beta$ , сохранив верхний набор тригонометрических функций и перейдя от комплексных амплитуд к

мгновенным значениям, получим выражения, определяющие структуру поля:

$$\left. \begin{aligned} E_r(t) &= -\frac{\omega \mu_a}{\kappa} H_{0zm} \frac{J_1(\kappa r)}{\kappa r} \sin \psi \sin(\omega t - \beta z + \varphi_0), \\ E_\psi(t) &= -\frac{\omega \mu_a}{\kappa} H_{0zm} J'_m(\kappa r) \cos \psi \sin(\omega t - \beta z + \varphi_0), \\ E_z(t) &= 0, \\ H_r(t) &= \frac{\beta}{\kappa} H_{0zm} J'_1(\kappa r) \cos \psi \sin(\omega t - \beta z + \varphi_0), \\ H_\psi(t) &= -\frac{\beta}{\kappa} H_{0zm} \frac{J_1(\kappa r)}{\kappa r} \sin \psi \sin(\omega t - \beta z + \varphi_0), \\ H_z(t) &= H_{0zm} J_1(\kappa r) \cos \psi \cos(\omega t - \beta z + \varphi_0). \end{aligned} \right\} (19.83)$$

Векторные линии  $\mathbf{E}$  поля (19.83) лежат в поперечном сечении и ориентированы нормально к окружности его контура (рис. 19.14а). На этом рисунке изображено распределение поля в том

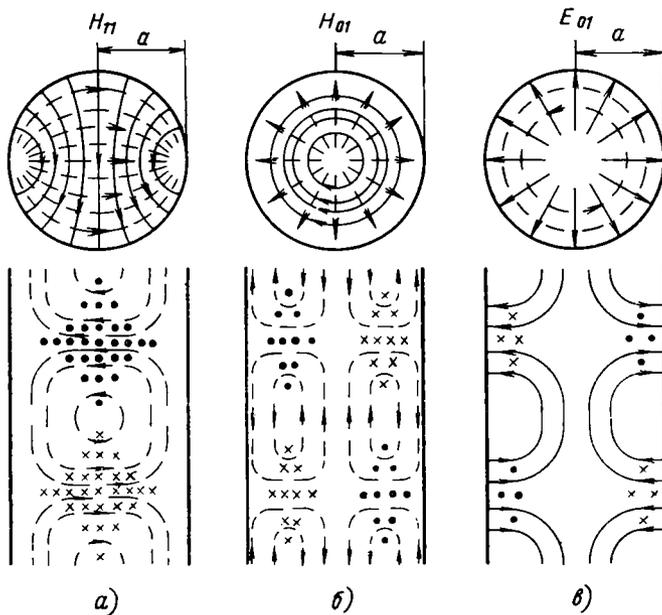


РИС. 19.14

поперечном сечении, в котором в рассматриваемый момент времени продольная составляющая  $H_z$  равна нулю и, следовательно,  $\mathbf{H} = \mathbf{H}_\perp$ . Лежащие в этом сечении линии  $\mathbf{H}$  образуют семейство кривых, перпендикулярных линиям  $\mathbf{E}$  и ориентированных у поверхности стенок по касательным к ней. На рисунке приведено

также распределение поля  $H_{11}$  в продольном сечении, проходящем через горизонтальный диаметр волновода ( $\psi=0$  и  $\psi=\pi$ ). В этом сечении отличны от нуля только две составляющие  $H_r$  и  $H_z$ , вследствие чего линии  $\mathbf{H}$  оказываются плоскими замкнутыми петлями, лежащими в сечении; линии  $\mathbf{E}$  соответственно перпендикулярны к сечению.

Плотность поверхностного тока на стенках при распространении волны  $H_{11}$  определяется ф-лой (3.52), в которой  $n_{z1}^0=r^0$ , и характеризуется картиной векторных линий  $\boldsymbol{\eta}$ , изображенной на рис. 19.15.

Волна  $H_{01}$ . Удержав в (19.71) верхние знаки, подставив  $m=0$ ,  $n=1$  и  $\gamma=i\beta$ , воспользовавшись соотношением (П2.16) и перейдя от комплексных амплитуд к мгновенным значениям, получим:

$$\left. \begin{aligned} E_{\psi}(t) &= \frac{\omega \mu_a}{\kappa} H_{0zm} J_1(\kappa r) \sin(\omega t - \beta z + \varphi_0), \\ H_r(t) &= -\frac{\beta}{\kappa} H_{0zm} J_1(\kappa r) \sin(\omega t - \beta z + \varphi_0), \\ H_z(t) &= H_{0zm} J_0(\kappa r) \cos(\omega t - \beta z + \varphi_0). \end{aligned} \right\} \quad (19.84)$$

Поле (19.84) не зависит от угла  $\psi$ , т. е. обладает осевой (цилиндрической) симметрией. Вектор  $\mathbf{E}$  имеет лишь одну составляющую  $E_{\psi}$ , и его линии представляют собой концентрические окружности, лежащие в поперечных сечениях (рис. 19.14б). Ли-

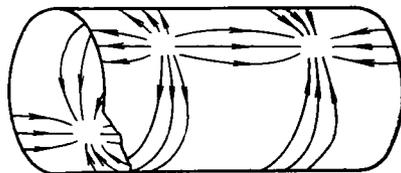


РИС. 19.15

нии  $\mathbf{H}$  волны (19.84) представляют собой замкнутые петли, которые лежат в продольных плоскостях, проходящих через ось волновода.

Характерной особенностью поля типа  $H_{01}$  (и поля любого типа  $H_{0n}$ ) является существование единственной касательной к стенкам продольной составляющей вектора  $\mathbf{H}$ , которой соответствует только азимутальная компонента  $\eta_{\psi}$  плотности поверхностного тока:

$$\boldsymbol{\eta} = [\mathbf{H}_z \mathbf{n}^0] = [z^0 \mathbf{r}^0] H_z = \psi^0 H_z = \psi^0 \eta_{\psi}. \quad (19.85)$$

Волна  $E_{01}$ . Поступив таким же образом, как при выводе соотношений (19.84), получим из (19.73) следующие выражения:

$$\left. \begin{aligned} E_r(t) &= -\frac{\beta}{\kappa} E_{0zm} J_1(\kappa r) \sin(\omega t - \beta z + \varphi_0), \\ E_z(t) &= E_{0zm} J_0(\kappa r) \cos(\omega t - \beta z + \varphi_0), \\ H_\psi(t) &= -\frac{\omega \varepsilon_a}{\kappa} E_{0zm} J_1(\kappa r) \sin(\omega t - \beta z + \varphi_0). \end{aligned} \right\} \quad (19.86)$$

Поле (19.86) обладает осевой симметрией. Вектор  $\mathbf{H}$  имеет лишь одну составляющую  $H_\psi$ , и его линии представляют собой концентрические окружности, лежащие в поперечных сечениях (рис. 19.14в). Линии  $\mathbf{E}$  волны (19.86) лежат в продольных плоскостях, проходящих через ось волновода.

Рассмотрим теперь, какой смысл можно придать индексам  $m$  и  $n$  в круглом волноводе. Из ф-л (19.71) или (19.73) следует, что составляющие  $E_r$ ,  $H_\psi$  и  $E_z$  имеют одинаковую зависимость от угла  $\psi$ . При этом в поперечном сечении волновода существуют диаметры, на которых эти составляющие равны нулю. Будем называть эти диаметры узловыми. К продольным сечениям, проходящим через узловые диаметры, линии  $\mathbf{E}$  ориентированы нормально, линии  $\mathbf{H}$  — по касательным. Следовательно, на этих сечениях выполняются граничные условия для идеально проводящей поверхности. Индекс  $m$ , характеризующий изменение поля типа  $H_{mn}$  или  $E_{mn}$  вдоль концентрической окружности  $r = \text{const}$ , показывает число узловых диаметров. Например, у поля  $H_{11}$   $m=1$  и, следовательно, существует один узловой диаметр [который для волны (19.83) определяется значениями  $\psi=0$  и  $\psi=\pi$ ].

Из ф-л (19.71) или (19.73) следует, что в поперечном сечении волновода существуют узловые окружности  $r = \text{const}$ , на которых составляющие  $E_\psi$ ,  $H_r$  и  $E_z$  равны нулю. Одной из этих окружностей является контур поперечного сечения волновода  $r=a$ . На цилиндрических поверхностях, проходящих через узловые окружности, выполняются граничные условия для идеально проводящей границы. Индекс  $n$ , характеризующий изменение поля типа  $H_{mn}$  или  $E_{mn}$  вдоль радиуса  $r$ , показывает число узловых окружностей. Например, у полей типов  $H_{11}$ ,  $H_{01}$  и  $E_{01}$  существует одна узловая окружность, совпадающая с контуром поперечного сечения.

Такая интерпретация индексов  $m$  и  $n$  облегчает построение картины полей высших типов  $H_{mn}$  и  $E_{mn}$ .

### 19.17. ОСОБЕННОСТИ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ КРУГЛОГО ВОЛНОВОДА

Изготовление круглого волновода проще и дешевле, чем прямоугольного. Однако одноволновый режим в круглом волноводе обладает рядом недостатков, которые затрудняют его использование. Во-первых, поскольку основная волна круглого волново-

да  $H_{11}$  несимметрична, то ей свойственна неустойчивость поляризации (см. § 19.12), которая затрудняет создание элементов связи с этой волной (см. § 19.23). Во-вторых, наибольший коэффициент перекрытия рабочего диапазона одноволнового круглого волновода  $\eta=1,3$  (см. § 19.12) существенно меньше соответствующего коэффициента прямоугольного волновода. В-третьих, в круглом волноводе можно изменять лишь один размер (радиус), а в прямоугольном волноводе — два размера (ширину и высоту), что позволяет в последнем случае более гибко решать различные практические задачи.

Круглый волновод с волной  $E_{01}$  используют в тех устройствах, в которых необходимо иметь поле с осевой симметрией. Волна  $E_{01}$  является волной первого высшего типа (см. табл. 19.2). Поэтому для существования в волноводе рабочей волны  $E_{01}$  нужно выбрать его радиус  $a$  согласно условиям  $2,06a < \lambda < 2,61a$  и принять меры к тому, чтобы в волноводе не могла возбуждаться единственная паразитная волна типа  $H_{11}$ .

Важной особенностью волны  $H_{01}$  является монотонное и неограниченное убывание по мере уменьшения  $\lambda$  ее коэффициента затухания  $\alpha$  (см. § 19.15). Существенное уменьшение  $\alpha$  достигается в волноводе при значениях  $a/\lambda > 3 \div 4$ , что делает перспективным применение такого волновода с волной  $H_{01}$  в длинных линиях передачи.

Использование миллиметрового диапазона волн в волноводе с рабочей волной  $H_{01}$  при  $a/\lambda > 3 \div 4$  предоставляет возможность создать чрезвычайно широкополосную (многоканальную) линию связи. Действительно, в миллиметровом диапазоне по одному волноводу радиуса  $a=30$  мм можно, например, одновременно пропустить на волне  $H_{01}$  с малыми потерями полосу частот от 35 ГГц ( $\lambda \approx 8,6$  мм) до 80 ГГц ( $\lambda=3,75$  мм), в которой возможна одновременная передача около 200 000 телефонных каналов или многих десятков телевизионных каналов.

Однако волновод с волной высшего типа  $H_{01}$  является принципиально многоволновым, а при  $a/\lambda > 3 \div 4$  в нем могут одновременно распространяться десятки или даже сотни волн различных типов. В этих условиях в реальном волноводе со случайными нерегулярностями происходит преобразование волны  $H_{01}$  в паразитные волны и образуется попутный поток (см. § 18.9). Для снижения потерь на преобразование волны  $H_{01}$  в паразитные волны необходимо выдерживать высокую точность изготовления и прокладки волноводов, что, в свою очередь, не позволяет при существующей технологии применять волноводы с радиусами, превышающими 30—35 мм. Преобразование одной волны в другую происходит особенно легко, если эти волны взаимно вырождены. Для ослабления преобразования волны  $H_{01}$  в волну  $E_{11}$  необходимо устранить их вырождение путем нанесения на внутреннюю поверхность волновода диэлектрической пленки. Пленка мало влияет на параметры волны  $H_{01}$ , у которой напряженность элект-

трического поля вблизи стенок очень мала, и существенно изменяет параметры волны  $E_{11}$ .

Для ослабления попутного потока необходимо применять специальные фильтры для подавления паразитных типов волн, которые, не увеличивая затухания рабочей волны  $H_{01}$ , создают весьма сильное затухание паразитных волн (см. § 24.5).

### 19.18. ЭЛЛИПТИЧЕСКИЙ ВОЛНОВОД

Структура поля основной волны эллиптического волновода (см. рис. 17.1*л*) близка к структуре основной волны  $H_{11}$  круглого волновода. При деформации круглого волновода в эллиптический две волны  $H_{11}$  с взаимно ортогональными поляризациями перехо-

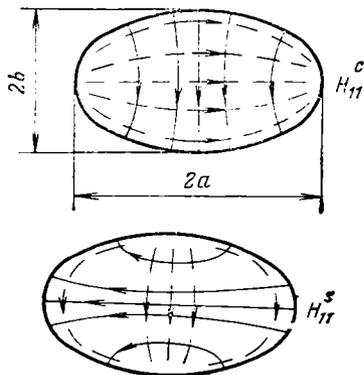


РИС. 19.16

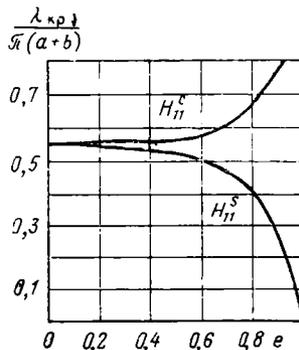


РИС. 19.17

дят в волны  $H_{11}^c$  и  $H_{11}^s$  эллиптического волновода (рис. 19.16). Критические длины этих волн с увеличением эксцентриситета эллипса  $e = \sqrt{1 - (b/a)^2}$  ( $a$  и  $b$  — большая и малая полуоси) все сильнее отличаются друг от друга (рис. 19.17), причем основной является волна  $H_{11}^c$ . Для получения достаточно широкой полосы пропускания в одноволновом режиме используют эллиптические волноводы с отношением полуосей  $b/a \approx 0,5 \div 0,6$ . Например, при  $b/a \approx 0,5$  поле первого высшего типа  $H_{21}^c$  имеет  $\lambda_{кр}$ , которая в 1,82 раза меньше, чем у поля  $H_{11}^c$ .

Основная волна  $H_{11}^c$  эллиптического волновода обладает устойчивостью поляризации подобно волне  $H_{10}$  прямоугольного волновода. Эллиптический волновод характеризуется меньшими потерями на СВЧ и большей допустимой мощностью, чем коаксиальный (см. § 19.19—19.21). В передвижных установках для быстрого соединения антенны с передатчиком удобно использовать гибкий одноволновый эллиптический гофрированный волновод в резиновой оплетке, который при транспортировке можно наматывать на барабан.

# Коаксиальный круглый волновод

## 19.19. ПОЛЯ В КОАКСИАЛЬНОМ КРУГЛОМ ВОЛНОВОДЕ

Поскольку поперечное сечение коаксиального круглого волновода (рис. 19.18) имеет вид кольца и, следовательно, представляет собой двухсвязную область, то в этом волноводе могут существовать независимые поля классов Т, Е и Н. При этом основным типом является поле Т, критическая длина волны которого  $\lambda_{кр} = \infty$ .

Контур поперечного сечения коаксиального круглого волновода состоит из двух окружностей, которые совпадают с координатными линиями  $r=a$  и  $r=b$  полярной системы координат  $r, \psi$ . Поэтому решение краевых задач (17.21), (17.22), (18.6) и (18.7) следует проводить в полярной системе.

Поле класса Т. Краевая задача (17.21), (17.22) характеризуется в рассматриваемом случае круговой симметрией, потенциал  $\phi$  не зависит от угловой координаты  $\psi$  и двумерное уравнение Лапласа (17.21) согласно (П1.26) и (П1.34) принимает вид

$$\frac{d^2 \dot{\phi}}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\dot{\phi}}{dr} = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{d\dot{\phi}}{dr} \right) = 0. \quad (19.87)$$

Проинтегрировав это уравнение, получим

$$\dot{\phi}(r) = \dot{A} \ln r + \dot{B}. \quad (19.88)$$

Подставив в (19.88) краевые условия  $\phi(a) = \phi_1$  и  $\phi(b) = \phi_2$ , находим постоянные интегрирования  $\dot{A}$  и  $\dot{B}$ :

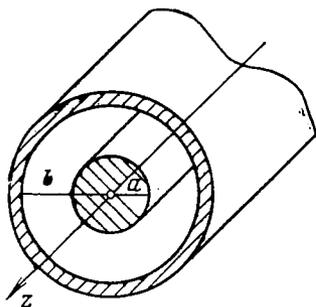


РИС. 19.18

$$\dot{A} = - \frac{\dot{\psi}_1 - \dot{\psi}_2}{\ln(b/a)} = - \frac{\dot{U}_0}{\ln(b/a)},$$

$$\dot{B} = \dot{\psi}_2 - \dot{A} \ln b = \dot{\psi}_2 + \frac{\dot{U}_0}{\ln(b/a)} \ln b. \quad (19.89)$$

Здесь  $\dot{U}_0 = \dot{\psi}_1 - \dot{\psi}_2$  — напряжение между проводом и экраном при  $z=0$  [см. (18.31)], которое определяется условиями возбуждения линии передачи. Из (19.88) и (19.89) следует

$$\dot{\phi}(r) = - \frac{\dot{U}_0}{\ln(b/a)} \ln r + \dot{B}. \quad (19.90)$$

Подставив (19.90) в (17.20) и приняв во внимание (П1.31) и (18.27), имеем:

$$\begin{aligned}\dot{E}_{0\perp} &= -\operatorname{grad}_{\perp} \dot{\varphi} = \mathbf{r}^0 \frac{\dot{U}_0}{\ln(b/a)} \frac{1}{r}, \\ \dot{H}_{0\perp} &= \frac{1}{Z_{\lambda}} [\pm z^0, \dot{E}_{0\perp}] = \pm \psi^0 \frac{1}{Z_{\lambda}} \frac{\dot{U}_0}{\ln(b/a)} \frac{1}{r}.\end{aligned}\quad (19.91)$$

Чтобы получить выражения для векторов  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  волны Т, бегущей, например, в направлении  $+z^0$ , удержим во второй ф-ле (19.91) верхний знак, введем согласно (17.2) и (18.26) зависимость от  $z$  вида  $e^{-ikz}$  и перейдем от комплексных амплитуд к мгновенным значениям:

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(t) &= \mathbf{r}^0 \frac{E_0 m a}{r} \cos(\omega t - kz + \varphi_0), \\ \mathbf{H}(t) &= \psi^0 \frac{1}{Z_{\lambda}} \frac{E_0 m a}{r} \cos(\omega t - kz + \varphi_0).\end{aligned}\quad (19.92)$$

Здесь

$$E_{0m} = \frac{U_m}{a \ln(b/a)} \quad (19.93)$$

— наибольшее значение амплитуды напряженности электрического поля, которое существует у поверхности провода (при  $r=a$ ).

Вектор  $\mathbf{E}$  волны Т (19.92) имеет только радиальную составляющую, вектор  $\mathbf{H}$  — только азимутальную. Картина векторных линий этой волны приведена на рис. 19.19а. Поскольку  $k=2\pi/\lambda$ , то периодичность поля вдоль оси  $z$  определяется длиной волны  $\lambda$ . При  $f \rightarrow 0$  и  $\lambda \rightarrow \infty$  эта периодичность исчезает и волновое поле Т в коаксиальном волноводе переходит в стационарное поле постоянного тока.

Напряжение  $U_{\pm}(z)$  между проводниками коаксиального волновода выражается ф-лой (18.31). Ток во внутреннем проводе согласно (18.32) и (19.91) определяется соотношением

$$\begin{aligned}i_{\pm}(z) &= \oint_L \mathbf{H}_{\psi} d l_{\psi} = \pm e^{\mp i k z} \int_0^{2\pi} |\dot{H}_{0\perp}| r d\psi = \\ &= \pm \frac{2\pi}{Z_{\lambda}} \frac{\dot{U}_0}{\ln(b/a)} e^{\mp i k z}.\end{aligned}\quad (19.94)$$

Волновое сопротивление (18.33) коаксиального волновода

$$Z_{\text{в}} = \frac{U_{+}(z)}{i_{+}(z)} = \frac{1}{2\pi} Z_{\lambda} \ln \frac{b}{a} = 60 \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \ln \frac{b}{a} = 138 \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \lg \frac{b}{a}.\quad (19.95)$$

Поля классов  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$ . Продольные составляющие  $\dot{E}_{0z}$  и  $i_{0z}$  определяются из решения краевых задач (18.6) и (18.7). При

этом общее решение двумерного волнового уравнения (19.54) ищут методом разделения переменных в виде (19.55). Функция  $\Psi(\psi)$  вновь определяется соотношением (19.59) при  $m=0, 1, 2, \dots$ . По-

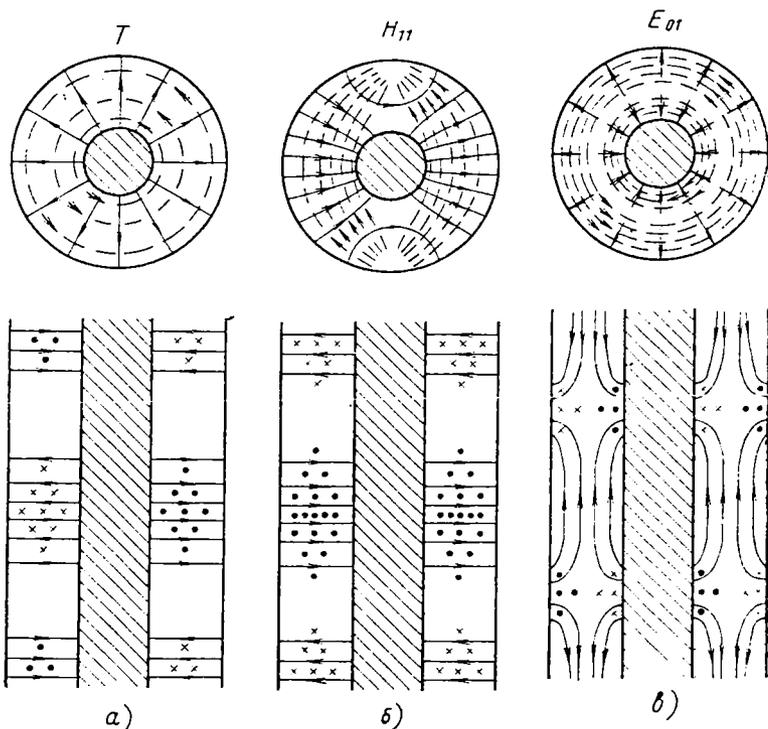


РИС. 19.19

скольку к поперечному сечению коаксиального волновода принадлежат значения  $a \leq r \leq b$ , то решение уравнения (19.58) имеет вид (П2.15) при  $\rho = \kappa r$ . Таким образом, в рассматриваемом случае имеем [ср. с ф-лой (19.61)]

$$\left. \begin{aligned} \dot{E}_{0z}(r, \psi) \\ \dot{H}_{0z}(r, \psi) \end{aligned} \right\} = R(r) \Psi(\psi) = [C J_m(\kappa r) + D N(\kappa r)]_{\sin m \psi}^{\cos m \psi}. \quad (19.96)$$

Граничные условия при  $r=a$  и  $r=b$  приводят к системе двух уравнений, из которой можно определить два неизвестных — критическое волновое число  $\kappa_v$  и отношение постоянных амплитудных множителей  $D/C$  (значение одного из этих множителей определяется условиями возбуждения).

Каждое критическое волновое число ( $\kappa_{hmn}$  или  $\kappa_{emn}$ ) и соответствующая ему продольная составляющая ( $\dot{H}_{0z}$  или  $\dot{E}_{0z}$ ) определяют согласно (19.70) или (19.72) компоненты поля определен-

ного типа ( $H_{mn}$  или  $E_{mn}$ ). Анализ показывает, что полем первого высшего типа является  $H_{11}$ , у которого

$$\lambda_{кр\ H_{11}} = 2\pi/\alpha_{H_{11}} \approx \pi(a+b). \quad (19.97)$$

Графическое изображение структуры поля бегущей волны  $H_{11}$ , которая может существовать при  $\lambda < \lambda_{кр\ H_{11}}$ , дано на рис. 19.19б.

Поскольку у волны основного типа  $T$   $\lambda_{кр} = \infty$ , то согласно (18.56) одноволновый режим в коаксиальном волноводе обеспечивается при выполнении условия

$$\lambda > \pi(a+b). \quad (19.98)$$

Из полей класса  $E$  наибольшую  $\lambda_{кр\ v}$  имеет поле типа  $E_{01}$ , причем при  $1 < b/a < 7$  (на практике отношение  $b/a$  не выходит из этих пределов — см. § 19.22)  $\lambda_{кр\ E_{01}} \approx 2(b-a)$ . Картина векторных линий бегущей волны  $E_{01}$  приведена на рис. 19.19в.

### 19.20. МОЩНОСТЬ, ПЕРЕНОСИМАЯ БЕГУЩЕЙ Т-ВОЛНОЙ

Согласно (19.91) амплитуда напряженности электрического поля  $E_{rm} = \frac{U_m}{r \ln(b/a)}$ . Подставив это выражение в (18.36) и приняв во внимание (19.95), получим мощность, переносимую бегущей Т-волной в направлении ее распространения:

$$P_{ср} = \frac{i}{2Z_\lambda} \int_a^b \int_0^{2\pi} E_{rm}^2 r dr d\psi = \frac{\pi}{Z_\lambda} \frac{U_m^2}{\ln(b/a)} = \frac{1}{2} \frac{U_m^2}{Z_b} = \frac{1}{2} Z_b I_m^2. \quad (19.99)$$

Амплитуды  $U_m$  и  $I_m$  связаны согласно (19.95) соотношением  $U_m = Z_b I_m$ . С помощью (19.93) выразим мощность (19.99) через наибольшее значение амплитуды напряженности электрического поля:

$$P_{ср} = \frac{\pi E_{0m}^2}{Z_\lambda} a^2 \ln b/a. \quad (19.100)$$

Если принять  $E_{0m} = E_{пред\ m}$ , то (19.100) определит предельную мощность

$$P_{пред} = \frac{\pi E_{пред\ m}^2}{Z_\lambda} a^2 \ln b/a. \quad (19.101)$$

Предельная мощность (19.101) оказывается тем больше, чем больше размеры поперечного сечения коаксиального волновода (чем больше радиус  $a$  и отношение радиусов  $\xi = b/a$ ). Эти размеры, в свою очередь, зависят от условия (19.98), которое можно представить соотношением  $\pi a(1+\xi) < \lambda$ . При фиксированном значении  $\xi$  (см. § 19.22) с уменьшением  $\lambda$  для обеспечения одноволнового режима необходимо пропорционально уменьшать радиусы  $a$  и  $b$ , вследствие чего предельная мощность (19.101) умень-

шается как  $\lambda^2$ . В сантиметровом диапазоне длин волн  $P_{\text{пред}}$  становится значительно меньше мощности, которую можно передать по прямоугольному и круглому волноводам.

### 19.21. КОЭФФИЦИЕНТ ЗАТУХАНИЯ Т-ВОЛНЫ, ОБУСЛОВЛЕННЫЙ ПОТЕРЯМИ В МЕТАЛЛИЧЕСКИХ СТЕНКАХ

В коаксиальном круглом волноводе контур  $L_{\perp}$  поперечного сечения состоит из двух окружностей  $r=a$  и  $r=b$ . Согласно (19.92) имеем  $H_{tm}(a) = E_{0m}/Z$  и  $H_{tm}(b) = E_{0m}a/Z \cdot b$ . Отсюда находим

$$\oint_L H_{tm}^2 dl = \int_0^{2\pi} H_{tm}^2(a) a d\psi + \int_0^{2\pi} H_{tm}^2(b) b d\psi = \frac{2\pi E_{0m}^2 a^2}{Z^2} \left( \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right). \quad (19.102)$$

С помощью (19.102) и (19.100) получаем согласно (18.55) выражение

$$\alpha = \frac{r_s}{2Z_{\lambda} \ln(b/a)} \left( \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right). \quad (19.103)$$

При укорочении длины волны  $\lambda$  (увеличении частоты) приходится уменьшать радиусы  $a$  и  $b$  согласно (19.98) и возрастает поверхностное сопротивление  $r_s$  (14.11). Эти два фактора приводят в сантиметровом диапазоне волн к весьма сильному увеличению коэффициента затухания (19.103), значительно превышающего коэффициент затухания в прямоугольном и круглом волноводах. В сантиметровом диапазоне применяют лишь короткие отрезки коаксиального круглого волновода. Зато на дециметровых, метровых и более длинных волнах коаксиальный круглый волновод имеет сравнительно небольшие поперечные размеры и достаточно хорошие параметры  $P_{\text{пред}}$  и  $\alpha$ , чем и объясняется его широкое практическое применение.

### 19.22. ВЫБОР РАЗМЕРОВ КОАКСИАЛЬНОГО КРУГЛОГО ВОЛНОВОДА

Выбор размеров коаксиального круглого волновода определяется требованиями, изложенными в § 18.9.

Значение  $b/a$ , соответствующее максимальной мощности  $P_{\text{пред}}$  (при заданном радиусе  $b$ ), получим в результате исследования функции (19.101) на максимум в зависимости от  $a$ . Это значение определяется из условия  $dP_{\text{пред}}/da = 0$ , которое удовлетворяется при  $\ln(b/a) = 1/2$  и  $b/a = \sqrt{e} \approx 1,65$ . При этом волновое сопротивление (19.95) принимает вид (полагаем для диэлектрика  $\mu=1$ )  $Z_{\text{в}} = 30/\sqrt{\epsilon}$ . Таким образом, при наиболее часто используемых в коаксиальном волноводе диэлектриках ( $\epsilon = 1 \div 2,25$ ) для передачи большой мощности оптимальное волновое сопротивление должно быть равно  $Z_{\text{в}} = 20 \div 30$  Ом.

Значение  $b/a$ , соответствующее минимальному коэффициенту затухания  $\alpha$  при фиксированном радиусе  $b$ , найдем путем исследования функции (19.103) на минимум в зависимости от  $a$ :  $b/a = 3,6$ . Этому значению соответствует волновое сопротивление коаксиального круглого волновода  $Z_B = 77/\sqrt{\epsilon}$ , которое при  $\epsilon = 1 \div 2,25$  равно  $Z_B = 50 \div 75$  Ом.

Задавшись в зависимости от конкретных условий значением  $\xi = b/a$ , нетрудно удовлетворить и требованию одноволнового режима. Для этого достаточно выбрать радиус  $a$  так, чтобы вытекающее из (19.98) условие  $\lambda a(1 + \xi) < \lambda$  выполнялось на  $\lambda_{\min}$  рабочего диапазона длин волн.

### 19.23. СПОСОБЫ ВОЗБУЖДЕНИЯ ВОЛН В ВОЛНОВОДАХ

При практическом использовании волноводов важную роль играют методы ввода в них энергии, т. е. методы возбуждения волн требуемых типов, а также методы вывода энергии этих волн.

Возбуждение волны определенного типа или извлечение переносимой ею энергии осуществляют при помощи элемента связи. В качестве элементов связи используют погруженные в волновод зонд (прямолинейный проводник) или петлю (плоская рамка из проводника), а также прорезанные в металлической стенке отверстия (например, узкая щель).

Если в волноводе имеется элемент связи, то согласно теореме взаимности (см. § 10.4) условия проникновения через него поля снаружи внутрь волновода (ввод энергии) и изнутри наружу (вывод энергии) будут одинаковыми. Следовательно, тот элемент связи, который эффективно выводит энергию волны определенного типа, обладает одновременно способностью столь же эффективно возбуждать эту волну. Поэтому достаточно рассмотреть взаимодействие элементов связи с уже существующей в волноводе волной и сформулировать принципы такого их расположения, при котором происходит эффективный вывод энергии этой волны.

Элемент связи нарушает регулярность волновода (см. § 21.1) и в общем случае изменяет структуру поля. Для простоты предположим в первом приближении, что размеры элемента связи малы, вносимые им изменения структуры поля имеют местный характер и ими можно пренебречь.

Возникающая в зонде электродвижущая сила определяется известной формулой  $\mathcal{E} = \int_l \mathbf{E} d\mathbf{l}$ , где  $l$  — длина зонда;  $\mathbf{E}$  — напря-

женность электрического поля волны рассматриваемого типа возле зонда;  $d\mathbf{l}$  — элемент длины зонда. Из формулы следует, что максимально возможная связь зонда с волной получается при его расположении в пучности электрического поля параллельно вектору  $\mathbf{E}$ . Связь зонда с волной отсутствует, если он расположен в узле электрического поля ( $\mathbf{E} = 0$ ) или перпендикулярно вектору  $\mathbf{E}$  этой волны ( $\mathbf{E} d\mathbf{l} = 0$ ).

Возникающая в петле электродвижущая сила согласно закону электромагнитной индукции определяется выражением  $\mathcal{E} = -\frac{d}{dt} \int_S \mu_a \mathbf{H} d\mathbf{S}$ , где  $S$  — площадь петли;  $\mathbf{H}$  — напряженность магнитного поля волны рассматриваемого типа в точках поверхности  $S$ ;  $d\mathbf{S}$  — элемент площади петли. Из этого выражения следует, что максимальная связь петли с волной получается при ее рас-

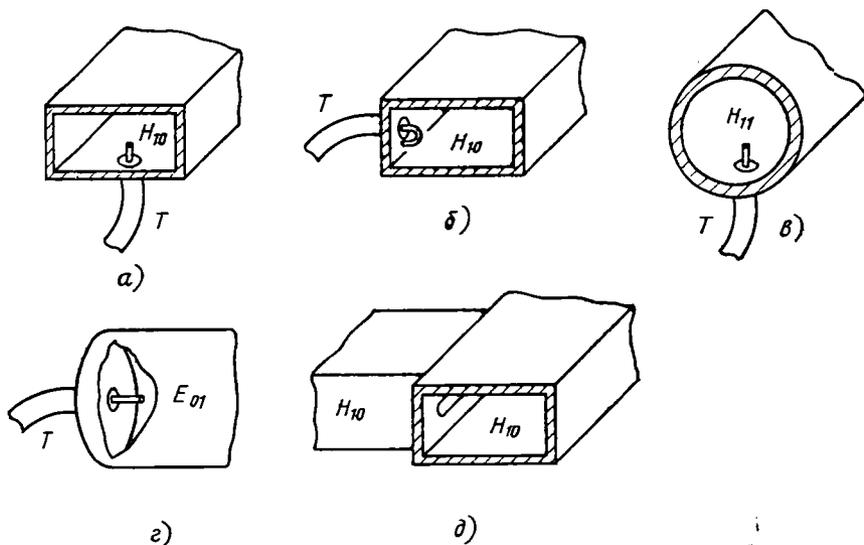


РИС. 19.20

положении в пучности магнитного поля таким образом, чтобы плоскость петли была перпендикулярна вектору  $\mathbf{H}$ .

Чтобы прорезанная в стенке волновода щель излучала во внешнюю область энергию волны рассматриваемого типа, она должна перерезать линии плотности поверхностного тока  $\eta$ , соответствующего этой волне. При этом на краях щели возникают переменные во времени заряды, а в плоскости самой щели — поле, векторы которого  $\mathbf{E}$  (поперек щели) и  $\mathbf{H}$  (вдоль щели) определяют вектор Пойнтинга, направленный наружу. Максимальная связь щели с волной получается при ее прорезании в пучности плотности поверхностного тока перпендикулярно его векторным линиям. Если же щель прорезана параллельно векторным линиям  $\eta$  (перпендикулярно линиям  $\mathbf{H}$  на стенках), то связь с волной отсутствует и щель не излучает энергию.

С помощью этих правил, зная структуру поля волны требуемого типа, можно определить положение элементов связи, обеспечивающее возбуждение этой волны или извлечение переноси-

мой ею мощности (рис. 19.20). Очень часто зонд и петля представляют собой продолжение внутреннего провода коаксиального волновода, экран которого присоединен к наружной поверхности стенки возбуждаемого волновода. На рис. 19.20а—г изображены коаксиально-волноводные переходы, в которых осуществляется трансформация Т-волны коаксиального волновода в волну нужного типа прямоугольного и круглого волноводов (или наоборот).

## Глава 20

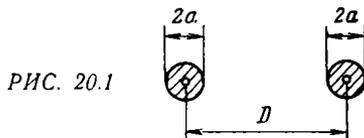
### РЕГУЛЯРНЫЕ ОТКРЫТЫЕ ЛИНИИ ПЕРЕДАЧИ



#### 20.1. СИММЕТРИЧНАЯ ДВУХПРОВОДНАЯ ЛИНИЯ ПЕРЕДАЧИ

Канализация энергии вдоль симметричной двухпроводной линии (см. рис. 17.1а) возможна только Т-волнами (считаем провода идеально проводящими). Основные свойства и параметры этих волн одинаковы в волноводах и в открытых линиях и рассмотрены в § 18.3.

Любое электростатическое поле, создаваемое бесконечно длинными параллельными цилиндрическими проводниками с равномерным распределением зарядов по их длине, изменяется только в зависимости от поперечных координат, вследствие чего опреде-



ляющие его уравнения (7.10) и (7.12) становятся двумерными:  $\mathbf{E} = -\text{grad}_{\perp} \varphi$ ,  $\nabla_{\perp}^2 \varphi = 0$ . Таким образом, уравнения (17.20) и (17.21) волны Т совпадают с уравнениями подобного электростатического поля, а граничные условия (17.22) соответствуют постоянным значениям электростатического потенциала  $\varphi$  на проводящих цилиндрических телах. Поэтому если геометрия контура поперечного сечения двухпроводной симметричной линии (рис. 20.1) и значения на нем потенциалов совпадают с геометрией и потенциалами симметричной двухпроводной системы (см. рис. 7.8), то на основании теоремы единственности решения краевых задач электростатики можно утверждать, что картина векторных линий  $\mathbf{E}$  волны Т в поперечном сечении линии передачи совпадает с картиной электростатического поля, рассмотренного в п. 5 § 7.5.

Структура поля волны  $T$ , бегущей в направлении  $+z^0$ , изображена на рис. 20.2. Согласно § 18.3 векторные линии  $H$  образуют семейство замкнутых кривых, ортогональных линиям  $E$  и, следовательно, совпадающих с окружностями равного потенциала. В каждой точке напряженности  $E$  и  $H$  колеблются в фазе и образуют с направлением распространения волны  $z^0$  правую тройку векторов. В отличие от электростатического поля, которое не зависит от времени и продольной координаты  $z$ , векторы бегущей волны  $T$  характеризуются множителем  $\cos(\omega t \mp kz)$ , вследствие чего в каждом поперечном сечении они изменяются во времени по закону  $\cos \omega t$ , а в фиксированный момент времени изменяются от сечения к сечению по закону  $\cos kz$ .

Канализация электромагнитной энергии вдоль симметричной двухпроводной линии возможна лишь при условии

$$\lambda \gg D. \quad (20.1)$$

Действительно, соответствующие друг другу небольшие участки двух проводов линии, по которым протекают равные по величине и противоположные по фазе токи частоты  $\omega$ , можно рассматривать как противофазные электрические излучатели (см. гл. 9). Если расстояние  $D$  между этими излучателями удовлетворяет условию (20.1), то создаваемые ими сферические электромагнитные волны окажутся почти в противофазе во всех точках пространства и поэтому почти полностью погасят друг друга. Результирующее поле излучения линии при этом практически отсутствует. Если же условие (20.1) не выполняется, то возникают очень большие потери энергии на излучение линией в окружающее пространство.

Достоинствами симметричной линии передачи являются простота конструкции и низкая стоимость. Недостатком является отсутствие экранировки направляемой линией электромагнитной волны, вследствие чего симметричная линия подвержена влиянию внешних помех и метеорологических условий и имеет сравнительно большие потери энергии в расположенных вблизи нее металлических предметах.

Симметричные двухпроводные линии обычно используют на длинах волн, не меньших нескольких метров. Применение этих линий на более коротких волнах требует в соответствии с (20.1) настолько малых расстояний  $D$  между проводами, что по линии без опасности пробоя можно пропустить лишь весьма незначительную мощность.

## 20.2. ПОЛОСКОВЫЕ ЛИНИИ ПЕРЕДАЧИ

На плоскости симметрии  $yOz$  симметричной двухпроводной линии (см. рис. 20.2) тангенциальная составляющая  $E$  (и нормальная составляющая  $H$ ) равна нулю, т. е. выполняются условия, совпадающие по своему виду с граничными условиями на идеальной проводящей поверхности. Поэтому если с этой плоскостью сов-

местить идеально проводящую поверхность, то в полупространстве, ограниченном этой поверхностью и содержащем одиночный провод, структура поля не изменится. Здесь по-прежнему будет распространяться волна Т со всеми присущими ей свойствами.

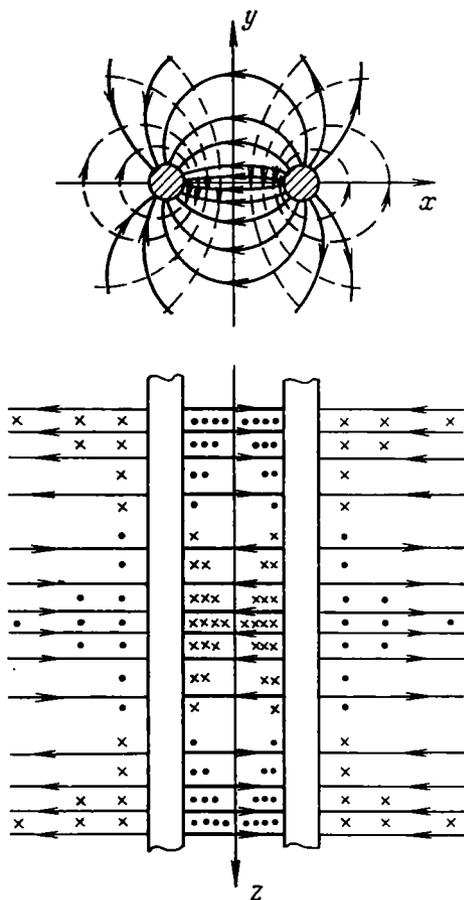


РИС. 20.2

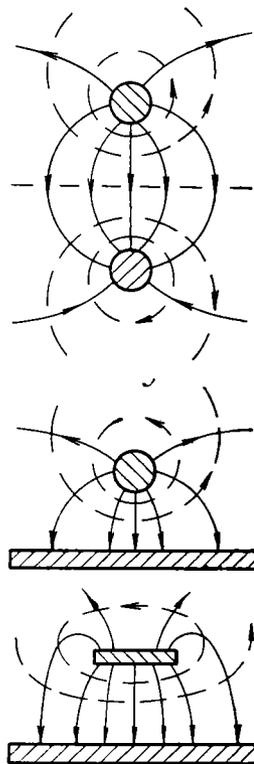


РИС. 20.3

На рис. 20.3 последовательно изображен переход от симметричной двухпроводной линии с волной Т к несимметричной плосковой (или ленточной) линии, у которой круглый проводник заменен конструктивно более удобной металлической полоской. Точно так же модификация коаксиального круглого волновода с волной Т в коаксиальный прямоугольный волновод, а затем в систему, состоящую из двух параллельных металлических оснований и расположенной между ними тонкой полоски, приводит к симметричной плосковой (ленточной) линии (рис. 20.4).

Практически наиболее часто для получения симметричной полосковой линии полосу заключают между двумя диэлектрическими пластинами, на внешние поверхности которых наносят металлические заземленные основания (рис. 20.5а). Несимметрич-

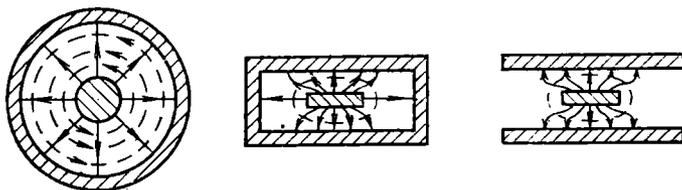


РИС. 20.4

ную полосковую линию изготавливают нанесением на диэлектрическую плату (подложку) металлических заземленного основания и полосы (рис. 20.5б). Для получения достаточно малого коэффициента затухания в этих линиях необходимо, чтобы заполняющий их диэлектрик обладал малыми тепловыми потерями ( $\operatorname{tg} \delta \approx 10^{-3} \div 10^{-4}$ ) и толщина  $t$  проводников была, по крайней мере,

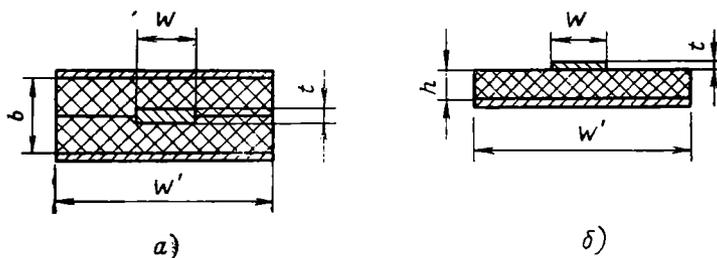


РИС. 20.5

в 3—5 раз больше глубины проникновения в них поля (что обеспечивает наличие сильного поверхностного эффекта в полосках и основаниях).

В симметричной полосковой линии (рис. 20.5а) при достаточно протяженных основаниях ( $W' \geq W + 2b$ ) поле практически полностью локализовано в заполняющем линию диэлектрике; поэтому несмотря на существование границы раздела диэлектрик — воздух в линии распространяется поперечная волна Т. Чтобы предотвратить возможность распространения волн высших типов и устранить излучение электромагнитной энергии в окружающее пространство, при проектировании симметричной линии обычно принимают

$$W < \Lambda/2, \quad b < \Lambda/2, \quad W' \geq W + 2b, \quad t \ll b, \quad (20.2)$$

где  $\Lambda = \lambda = \lambda_0 / \sqrt{\epsilon}$  — длина волны в линии ( $\lambda_0$  — длина волны в вакууме;  $\epsilon$  — диэлектрическая проницаемость диэлектрика). На

рис. 20.6 изображена зависимость волнового сопротивления симметричной линии от ее размеров и значения  $\epsilon$ .

В несимметричной полосковой линии (рис. 20.5б), подложка которой имеет небольшую диэлектрическую проницаемость ( $\epsilon \approx 1-2$ ), значительное поле существует не только в подложке, но и в воздухе. Такая линия имеет большие потери энергии на излучение. При использовании в качестве подложки диэлектрика со сравнительно большим  $\epsilon \geq 10$  поле концентрируется, главным образом, в области между полоской и заземленным основанием, что существенно ослабляет излучение. Поэтому на практике в линиях применяют подложки с большими  $\epsilon$ . Такие несимметричные

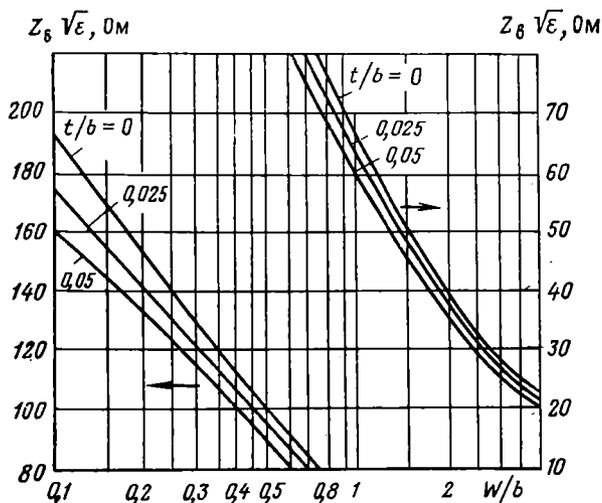


РИС. 20.6

полосковые линии имеют значительно меньшие поперечные размеры, чем в случае их воздушного заполнения ( $\epsilon = 1$ ), и называются *микроросковыми линиями*.

В микроросковой линии поле существует не только в подложке, но и в воздухе. Граничные условия на поверхности раздела двух диэлектриков (подложка — воздух) не могут быть удовлетворены волной Т, вследствие чего основная волна микроросковой линии не может быть чисто поперечной. Строгая теория микроросковой линии очень сложна, и точное определение ее характеристик требует применения машинных методов расчета. Поскольку, однако, выбором размеров поперечного сечения можно обеспечить достаточно малые значения поля на поверхности подложка—воздух, то удовлетворительные результаты обычно дает приближенная теория, которая пренебрегает существованием этой поверхности и соответственно предполагает, что в микроросковой линии распространяется волна Т.

Для обеспечения одноволнового режима и существенного ослабления излучения обычно при проектировании микрополосковой линии принимают

$$h < \Lambda/4, \quad W' \geq 3W, \quad t \ll h, \quad (20.3)$$

где  $\Lambda = \frac{\lambda_0}{\sqrt{\epsilon_{\text{ЭК}}}}$  — длина волны в линии;  $\epsilon_{\text{ЭК}}$  — эквивалентная ди-

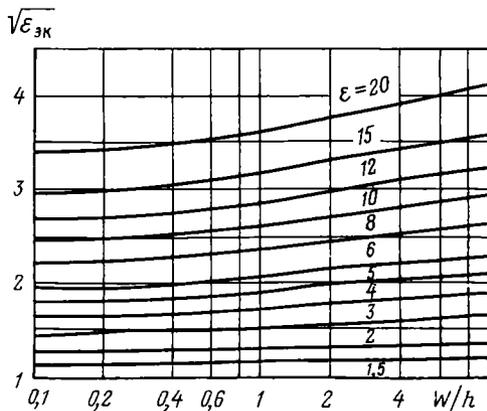


РИС. 20.7

электрическая проницаемость подложки, значение которой возрастает с увеличением  $\epsilon$  и отношения  $W/h$  (рис. 20.7). Волновое сопротивление микрополосковой линии убывает с увеличением  $\epsilon$  и отношения  $W/h$  (рис. 20.8).

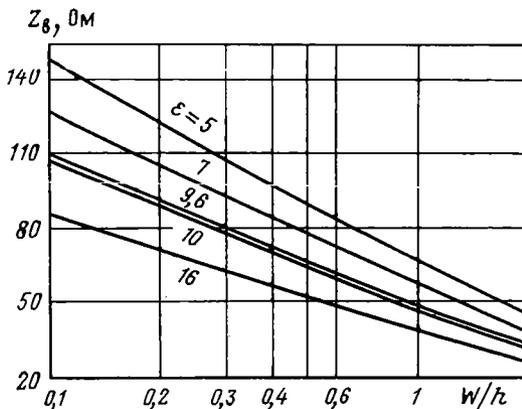


РИС. 20.8

Формулы для расчета коэффициента затухания и предельной мощности полосковых линий довольно громоздки; они приведены, например, в [21] и [24].

Полосковые линии применяют в диапазонах дециметровых и сантиметровых волн. Их основными достоинствами являются широкополосность, малые габариты, простота конструкции и изготовления, которое может осуществляться по технологии печатных (пленочных) схем. Благодаря этим достоинствам полосковые линии в последнее время широко используют на СВЧ при конструировании компактных узлов (см. гл. 22—25). Микрополосковые линии широко применяют в интегральных схемах СВЧ при создании микроминиатюрных устройств (см. например [21]).

К недостаткам полосковых линий относятся сравнительно большое затухание и малые значения пропускаемой мощности. Эти линии применяют, главным образом, в тех устройствах, в которых не требуется передача значительной мощности и основное значение придается миниатюризации, надежности и точности изготовления.

### 20.3. ОСНОВНЫЕ ЭТАПЫ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПОЛЯ В ЛИНИИ ПЕРЕДАЧИ ПОВЕРХНОСТНОЙ ВОЛНЫ

В § 20.3—20.5 рассмотрены линии передачи поверхностной волны, обладающие осевой симметрией: диэлектрическая круглая линия (см. рис. 17.1*б*) и однопроводные линии (см. рис. 17.1*в*, *г*).

Пусть, например, диэлектрическая круглая линия радиуса  $a$  или однопроводная линия в виде металлического провода с конечной проводимостью расположена в безграничной диэлектрической среде (рис. 20.9). Первая пространственная область

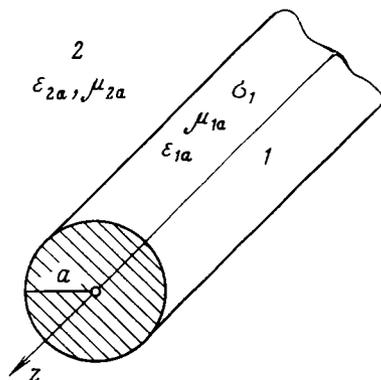


РИС. 20.9

$0 \leq r \leq a$ , занятая диэлектрическим стержнем или проводом, характеризуется в общем случае параметрами  $\epsilon_{1a}$ ,  $\mu_{1a}$ ,  $\sigma_1$ ; вторая область  $a \leq r \leq \infty$ , занятая безграничной диэлектрической средой (обычно воздух), характеризуется параметрами  $\epsilon_{2a}$ ,  $\mu_{2a}$ .

Для определения поля в линии передачи поверхностной волны нужно в каждой области найти общее решение ур-ний (17.15) для составляющих  $E_{0z}$  и  $H_{0z}$  и выразить через них согласно (17.12) и (17.14) поперечные составляющие поля. Удовлетворив затем на

поверхности линии граничным условиям (3.70), получим систему уравнений, которая позволяет определить коэффициент распространения  $\gamma$ , а затем и отношения всех произвольных постоянных интегрирования к одной из них (зависящей от условий возбуждения).

В случае круглого поперечного сечения линии передачи условия (3.70) имеют вид:

$$\dot{E}_{1\psi} = \dot{E}_{2\psi}, \quad \dot{E}_{1z} = \dot{E}_{2z}, \quad \dot{H}_{1\psi} = \dot{H}_{2\psi}, \quad \dot{H}_{1z} = \dot{H}_{2z} \quad \text{при } r = a. \quad (20.4)$$

Чтобы удовлетворить граничным условиям (20.4), общее решение ур-ний (17.15) следует искать в полярной системе координат  $r, \psi$  (см. § 19.11). В первой области, содержащей точку  $r=0$ , это решение имеет вид (19.61):

$$\left. \begin{array}{l} \dot{E}_{10z} \\ \dot{H}_{10z} \end{array} \right\} = R(r) \Psi(\psi) = A J_{m_1}(\kappa_1 r) \frac{\cos m_1 \psi}{\sin m_1 \psi}, \quad r \leq a, \quad (20.5)$$

где постоянная интегрирования  $A = \dot{E}_{10}$  для составляющей  $\dot{E}_{10z}$  и  $A = \dot{H}_{10}$  для составляющей  $\dot{H}_{10z}$ ;  $m = 0, 1, 2, 3, \dots$ ;

$$\kappa_1^2 = \omega^2 \tilde{\epsilon}_{1a} \mu_{1a} + \gamma_1^2, \quad (20.6)$$

$$\tilde{\epsilon}_{1a} = \epsilon_{1a} - i(\sigma_1/\omega).$$

Поскольку вторая область содержит значение  $r \rightarrow \infty$ , то в ней решение ур-ния (19.58) имеет вид (П2.14) и соответственно

$$\left. \begin{array}{l} \dot{E}_{20z} \\ \dot{H}_{20z} \end{array} \right\} = R(r) \Psi(\psi) = B H_{m_2}^{(2)}(\kappa_2 r) \frac{\cos m_2 \psi}{\sin m_2 \psi}, \quad r \geq a, \quad (20.7)$$

где  $B = \dot{E}_{20}$  для  $\dot{E}_{20z}$ ; и  $B = \dot{H}_{20}$  для  $\dot{H}_{20z}$ ,  $m_2 = 0, 1, 2, 3, \dots$ ;

$$\kappa_2^2 = \omega^2 \epsilon_{2a} \mu_{2a} + \gamma_2^2. \quad (20.8)$$

Для существования направляемой волны, распространяющейся вдоль линии передачи, необходимо, чтобы поле во внешней диэлектрической среде не имело бы характера волны, расходящейся от линии в радиальных направлениях и уносящей с собой энергию, и соответственно с возрастанием  $r$  убывало бы по амплитуде быстрее, чем  $1/\sqrt{r}$ . Необходимым условием этого согласно (П2.13) является наличие у параметра  $\kappa_2$  отрицательной мнимой части.

Из граничных условий (20.4) для составляющих  $\dot{E}_z$  и  $\dot{H}_z$  и выражений (20.5), (20.7) и (17.2) имеем

$$A J_{m_1}(\kappa_1 a) \frac{\cos m_1 \psi}{\sin m_1 \psi} e^{\mp \gamma_1 z} = B H_{m_2}^{(2)}(\kappa_2 a) \frac{\cos m_2 \psi}{\sin m_2 \psi} e^{\mp \gamma_2 z}. \quad (20.9)$$

Необходимость выполнения соотношения (20.9) при любых значениях  $\psi$  и  $z$  (в любой точке поверхности раздела  $r=a$ ) приводит к равенствам:

$$m_1 = m_2 = m, \quad \gamma_1 = \gamma_2 = \gamma. \quad (20.10)$$

Таким образом, граничные условия предопределяют в обеих средах одну и ту же зависимость поля от координаты  $\psi$  и одно и то же значение коэффициента распространения вдоль оси  $z$ .

В линиях передачи поверхностной волны невозможно раздельное существование несимметричных волн ( $m \neq 0$ )  $E$  и  $H$ , так как эти волны не могут порознь удовлетворить граничным условиям (20.4). Чтобы убедиться в этом, предположим, например, что в линии существует несимметричная волна класса  $E$ . Ее касательные компоненты нетрудно определить с помощью (19.72), (20.5), (20.7) и (20.10) (примем для определенности зависимость от  $z$  вида  $e^{-\gamma z}$  и зависимость составляющей  $\dot{E}_z$  от  $\psi$  вида  $\cos m\psi$ ):

$$\begin{aligned}\dot{E}_{1z} &= \dot{E}_{10} J_m(\kappa_1 r) \cos m\psi e^{-\gamma z}, \\ \dot{E}_{1\psi} &= \frac{\gamma m}{\kappa_1^2 r} \dot{E}_{10} J_m(\kappa_1 r) \sin m\psi e^{-\gamma z}, \\ \dot{H}_{1\psi} &= -\frac{i\omega \tilde{\epsilon}_{1a}}{\kappa_1} \dot{E}_{10} J'_m(\kappa_1 r) \cos m\psi e^{-\gamma z},\end{aligned}\quad (20.11)$$

$$\begin{aligned}\dot{E}_{2z} &= \dot{E}_{20} H_m^{(2)}(\kappa_2 r) \cos m\psi e^{-\gamma z}, \\ \dot{E}_{2\psi} &= \frac{\gamma m}{\kappa_2^2 r} \dot{E}_{20} H_m^{(2)}(\kappa_2 r) \sin m\psi e^{-\gamma z}, \\ \dot{H}_{2\psi} &= -\frac{i\omega \tilde{\epsilon}_{2a}}{\kappa_2} \dot{E}_{20} H_m^{(2)'}(\kappa_2 r) \cos m\psi e^{-\gamma z}.\end{aligned}\quad (20.12)$$

Граничные условия (20.4) и соотношения (20.11), (20.12) приводят к системе трех уравнений:

$$\begin{aligned}J_m(\kappa_1 a) \dot{E}_{10} - H_m^{(2)}(\kappa_2 a) \dot{E}_{20} &= 0, \\ \frac{1}{\kappa_1^2} J_m(\kappa_1 a) \dot{E}_{10} - \frac{1}{\kappa_2^2} H_m^{(2)}(\kappa_2 a) \dot{E}_{20} &= 0, \\ \frac{\tilde{\epsilon}_{1a}}{\kappa_1} J'_m(\kappa_1 a) \dot{E}_{10} - \frac{\tilde{\epsilon}_{2a}}{\kappa_2} H_m^{(2)'}(\kappa_2 a) \dot{E}_{20} &= 0.\end{aligned}\quad (20.13)$$

Поскольку  $\kappa_1^2 \neq \kappa_2^2$ , то первое и второе уравнения, соответствующие условиям  $\dot{E}_{1z} = \dot{E}_{2z}$  и  $\dot{E}_{1\psi} = \dot{E}_{2\psi}$ , оказываются несовместимыми, а система (20.13) — неразрешимой.

Несимметричные волны удовлетворяют граничным условиям (20.4) и, следовательно, могут существовать в линиях передачи поверхностной волны только в том случае, если они представляют собой *гибридные* волны, которые имеют одновременно обе продольные составляющие  $\dot{E}_z$  и  $\dot{H}_z$ . Компоненты несимметричной волны, соответствующие составляющей  $\dot{H}_z$ , определяются с помощью ф-л (19.70) таким же образом, как выше были определены компоненты, соответствующие  $\dot{E}_z$ . Каждая поперечная компонента ( $\dot{E}_r$ ,  $\dot{E}_\psi$ ,  $\dot{H}_r$ ,  $\dot{H}_\psi$ ) гибридной волны в соответствии с (17.12) и (17.14) представляет собой сумму двух слагаемых, одно из которых содержит постоянный множитель  $\dot{E}_{10}$  (в первой среде) или

$\dot{E}_{20}$  (во второй среде), другое — множитель  $\dot{H}_{10}$  или  $\dot{H}_{20}$ . Для удовлетворения граничных условий (20.4) оба этих слагаемых у компонент  $\dot{E}_\psi$  и  $\dot{H}_\psi$  должны иметь одинаковую зависимость от угла  $\psi$ , что в соответствии с (19.70) и (19.72) возможно при различной зависимости  $\dot{E}_z$  и  $\dot{H}_z$  от этого угла. В рассматриваемом случае четыре граничных условия (20.4) приводят к системе четырех уравнений, из которых можно определить четыре неизвестных — коэффициент распространения  $\gamma$ , а затем и отношение постоянных множителей к одному из них. Чтобы получить *характеристическое (дисперсионное) уравнение*, решение которого определяет  $\gamma$ , нужно исключить из системы уравнений постоянные множители  $\dot{E}_{10}$ ,  $\dot{E}_{20}$ ,  $\dot{H}_{10}$ ,  $\dot{H}_{20}$ . Для этого можно воспользоваться тем, что рассматриваемая система является системой четырех линейных однородных уравнений относительно этих четырех величин. Условием существования ненулевого решения этой системы является равенство нулю ее детерминанта, составленного из коэффициентов при  $\dot{E}_{10}$ ,  $\dot{E}_{20}$ ,  $\dot{H}_{10}$  и  $\dot{H}_{20}$ . Приравнивание нулю этого детерминанта и дает характеристическое уравнение для определения  $\gamma$ .

Симметричные ( $m=0$ ) волны классов E и H удовлетворяют граничным условиям (20.4) независимо друг от друга и, следовательно, могут существовать раздельно в линиях передачи поверхностной волны. Действительно, например, для симметричных волн E составляющая  $\dot{E}_\psi$  тождественно равна нулю и одно из несовместимых уравнений системы (20.13) выпадает. В этом случае вместо (20.13) при учете (П2.16) имеем:

$$\begin{aligned} J_0(\kappa_1 a) \dot{E}_{10} - H_2^{(2)}(\kappa_2 a) \dot{E}_{20} &= 0, \\ \frac{\tilde{\epsilon}_{1a}}{\kappa_1} J_1(\kappa_1 a) \dot{E}_{10} - \frac{\epsilon_{2a}}{\kappa_2} H_1^{(2)}(\kappa_2 a) \dot{E}_{20} &= 0. \end{aligned} \quad (20.14)$$

Исключив из системы (20.14)  $\dot{E}_{10}$  и  $\dot{E}_{20}$ , получим характеристическое уравнение

$$\frac{\kappa_1 a J_0(\kappa_1 a)}{\tilde{\epsilon}_{1a} J_1(\kappa_1 a)} = \frac{\kappa_2 a H_0^{(2)}(\kappa_2 a)}{\epsilon_{2a} H_1^{(2)}(\kappa_2 a)}, \quad (20.15)$$

которое содержит одну неизвестную величину — коэффициент распространения  $\gamma$ , входящий в (20.15) через параметры  $\kappa_1$  и  $\kappa_2$ . После определения из (20.15)  $\gamma$  неизвестное отношение  $\dot{E}_{20}/\dot{E}_{10}$  находится подстановкой  $\gamma$  в одно из уравнений (20.14).

#### 20.4. ДИЭЛЕКТРИЧЕСКАЯ КРУГЛАЯ ЛИНИЯ ПЕРЕДАЧИ. ВОЛОКОННЫЙ СВЕТОВОД

/ При определении полей будем полагать, что диэлектрический стержень состоит из идеального диэлектрика ( $\sigma_1 = 0$ ,  $\epsilon_{1a} = \epsilon_{1a}$ ). Рассмотрим вначале симметричные E-волны. Представим уравнение (20.15) в виде

$$\frac{\xi J_0(\xi)}{\varepsilon_{1a} J_1(\xi)} = \frac{-i\eta H_0^{(2)}(-i\eta)}{\varepsilon_{2a} H_1^{(2)}(-i\eta)}, \quad (20.16)$$

где  $\xi = \kappa_1 a$  и  $\eta = i\kappa_2 a$ . Математическое исследование показывает, что трансцендентное уравнение (20.16) удовлетворяется при вещественных и положительных значениях переменных  $\eta$  и  $\xi$ . Действительно, при изменении переменной  $\eta$  от 0 до  $\infty$  правая часть (20.16) соответственно монотонно изменяется от 0 до  $-\infty$ , оставаясь вещественной отрицательной величиной<sup>1)</sup>. Чтобы левая часть (20.16) принимала эти же значения, переменная  $\xi$  должна лежать в любом из интервалов

$$\varepsilon_{0n} < \xi < \varepsilon_{1n}, \quad n = 1, 2, 3 \dots, \quad (20.17)$$

где согласно (П2.19) через  $\varepsilon_{0n}$  обозначен  $n$ -й корень уравнения  $J_0(\varepsilon) = 0$ , через  $\varepsilon_{1n}$  —  $n$ -й корень уравнения  $J_1(\varepsilon) = 0$ . При  $\xi = \varepsilon_{0n}$  левая часть (20.16) равна нулю, при  $\xi = \varepsilon_{1n}$  она равна  $-\infty$ , при промежуточных значениях  $\xi$  она изменяется от 0 до  $-\infty$  [см. на рис. П2.2 ход кривых  $J_0(\xi)$  и  $J_1(\xi)$  в интервале (20.17)]. Существует бесконечное число интервалов (20.17), причем согласно табл. П2.1 первый такой интервал есть  $2,405 < \xi < 3,832$ , второй интервал есть  $5,520 < \xi < 7,016$  и т. д. Если в координатах  $\xi, \eta$  построить согласно (20.16) кривую  $\eta = f(\xi)$ , то каждому интервалу (20.17) будет соответствовать своя ветвь этой кривой (рис. 20.10), ход которой зависит от значений  $\varepsilon_{1a}$  и  $\varepsilon_{2a}$ .

Таким образом, при вещественных  $\varepsilon_{1a} = \varepsilon_{1a}$  характеристическое уравнение (20.15) имеет решения при вещественных положительных значениях  $\kappa_1$  и чисто мнимых отрицательных значениях  $\kappa_2$ . Второе из этих условий как раз и обеспечивает существование направляемой волны (см. § 20.3). Из второго условия и (20.8) следует, что коэффициент распространения  $\gamma$  должен быть чисто мнимым:  $\gamma = i\beta$ . Действительно, в случае стержня из идеального диэлектрика в нем отсутствуют тепловые потери мощности и, следовательно, *направляемые* волны не должны затухать вдоль его оси.

Итак, согласно (20.6) и (20.8) для диэлектрической линии ( $\sigma_1 = 0, \varepsilon_{1a} = \varepsilon_{1a}$ ) имеем соотношения:

$$\begin{aligned} \kappa_1 &= + \sqrt{\omega^2 \varepsilon_{1a} \mu_{1a} - \beta^2} = |\kappa_1^I|, \\ \kappa_2 &= - \sqrt{\omega^2 \varepsilon_{2a} \mu_{2a} - \beta^2} = -i |\kappa_2|, \\ |\kappa_2| &= \sqrt{\beta^2 - \omega^2 \varepsilon_{2a} \mu_{2a}}, \end{aligned} \quad (20.18)$$

в соответствии с которыми  $\beta$  должно лежать в интервале

$$\omega \sqrt{\varepsilon_{2a} \mu_{2a}} < \beta < \omega \sqrt{\varepsilon_{1a} \mu_{1a}}. \quad (20.19)$$

<sup>1)</sup> В частности, правая часть при  $\eta = 0$  согласно (П2.8) стремится к нулю как  $\eta^2 \ln(0,89\eta)$ , а при  $\eta \rightarrow \infty$  согласно (П2.11) стремится к  $-\infty$  как  $-\eta$ .

Неравенства (20.19) возможны, если  $\epsilon_2 \mu_2 < \epsilon_1 \mu_1$ , т. е. диэлектрический стержень должен быть расположен в оптически менее плотном диэлектрике.

Из (20.18) следуют выражения:

$$\begin{aligned}\xi^2 &= \omega^2 a^2 \epsilon_{1a} \mu_{1a} - (\beta a)^2, \\ \eta^2 &= (\beta a)^2 - \omega^2 a^2 \epsilon_{2a} \mu_{2a},\end{aligned}\quad (20.20)$$

которые дают соотношение

$$\xi^2 + \eta^2 = \omega^2 a^2 (\epsilon_{1a} \mu_{1a} - \epsilon_{2a} \mu_{2a}), \quad (20.21)$$

устанавливающее наряду с (20.16) связь между переменными  $\xi$  и  $\eta$ . В координатах  $\xi, \eta$  соотношение (20.21) является уравнением окружности с центром в начале координат и радиусом

$$\rho = 2\pi f a \sqrt{\epsilon_{1a} \mu_{1a} - \epsilon_{2a} \mu_{2a}}. \quad (20.22)$$

Точки пересечения кривой  $\eta = f(\xi)$ , построенной согласно (20.16), с окружностью (20.21) дают пары значений  $\xi$  и  $\eta$ , удовлетворяющие всем условиям рассматриваемой задачи. В свою очередь, знание пары этих значений позволяет с помощью формулы

$$\beta^2 = \frac{\xi^2 \epsilon_2 \mu_2 + \eta^2 \epsilon_1 \mu_1}{a^2 (\epsilon_1 \mu_1 - \epsilon_2 \mu_2)}, \quad (20.23)$$

вытекающей из (20.20), определить коэффициент фазы.

Из рис. 20.10 следует, что при  $\rho < \epsilon_{01} = 2,405$ , т. е. на частотах  $f < \epsilon_{01}/2\pi a \sqrt{\epsilon_{1a} \mu_{1a} - \epsilon_{2a} \mu_{2a}}$ , вообще не существует точек пересечения кривой  $\eta = f(\xi)$  и окружности. Следовательно, на этих частотах в диэлектрической линии вообще невозможно существование направляемых симметричных E-волн. При  $\epsilon_{01} < \rho < \epsilon_{02}$  (на частотах  $\frac{\epsilon_{01}}{2\pi a \sqrt{\epsilon_{1a} \mu_{1a} - \epsilon_{2a} \mu_{2a}}} < f < \frac{\epsilon_{02}}{2\pi a \sqrt{\epsilon_{1a} \mu_{1a} - \epsilon_{2a} \mu_{2a}}}$ ) существует одна точка пересечения и в линии возможно распространение одной симметричной волны типа  $E_{01}$ . При значениях  $\epsilon_{02} < \rho < \epsilon_{03}$  существуют две точки пересечения, которым отвечают направляемые волны типов  $E_{01}$  и  $E_{02}$ .

Предыдущие рассуждения показывают, что каждая ( $n$ -я) ветвь кривой  $\eta = f(\xi)$  соответствует волне типа  $E_{0n}$ , и позволяют ввести понятие критической частоты волны  $E_{0n}$  в круглой диэлектрической линии передачи

$$f_{кр0n} = \frac{\epsilon_{0n}}{2\pi a \sqrt{\epsilon_{1a} \mu_{1a} - \epsilon_{2a} \mu_{2a}}}. \quad (20.24)$$

Если  $f > f_{кр0n}$ , то волна  $E_{0n}$  может распространяться, если  $f < f_{кр0n}$ , то поле типа  $E_{0n}$  в диэлектрической линии не существует.

Зависимости коэффициента фазы  $\beta_v$  и фазовой скорости  $v_v = \omega/\beta_v$  от частоты для направляемой волны каждого типа  $E_{0n}$  можно пояснить с помощью рис. 20.10. При  $f = f_{кр0n}$  имеем  $\rho = \epsilon_{0n}$  и  $\eta = 0$ . В этом случае из второго выражения (20.20) следует  $\beta_v = \omega \sqrt{\epsilon_{2a} \mu_{2a}}$ ,  $v_v = 1/\sqrt{\epsilon_{2a} \mu_{2a}} = v_2$ , где  $v_2$  — скорость волны, сво-

бодно распространяющейся во внешней среде. С увеличением частоты точка пересечения рассматриваемой ветви кривой  $\eta=f(\xi)$  с окружностью смещается кверху, причем при  $f \rightarrow \infty$  имеем  $\eta \rightarrow \infty$  и  $\xi \rightarrow \varepsilon_{1n}$ . В этом случае из первого выражения (20.20) следует

$$(\varepsilon_{1a} \mu_{1a} - \beta_v^2 / \omega^2) a^2 = \varepsilon_{1n}^2 / \omega^2 = 0, \quad (20.25)$$

откуда  $\beta_v = \omega \sqrt{\varepsilon_{1a} \mu_{1a}}$ ,  $v_v = 1 / \sqrt{\varepsilon_{1a} \mu_{1a}} = v_1$ , где  $v_1$  — скорость волны, свободно распространяющейся в безграничной среде с параметрами диэлектрического стержня. При промежуточных значе-

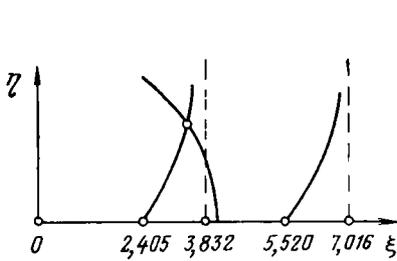


РИС. 20.10

111111

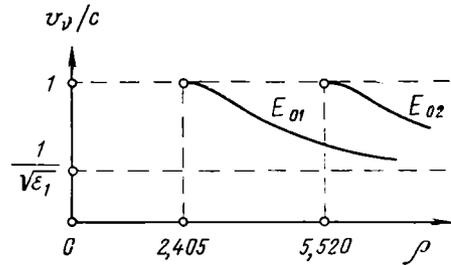


РИС. 20.11

111111

ниях  $f$  коэффициент фазы лежит в интервале (20.19) и соответственно фазовая скорость — в интервале  $v_1 < v_v < v_2$ . На рис. 20.11 для практически важного случая воздушной окружающей среды ( $\varepsilon_{2a} = \varepsilon_0$ ,  $\mu_{2a} = \mu_0$ ,  $v_2 = c$ ) и с учетом существующих обычно соотношений  $\mu_{1a} \approx \mu_0$ ,  $v_1 \approx \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_1}}$  изображена зависимость фазовой скорости волн  $E_{01}$  и  $E_{02}$  от радиуса [см. (20.22)]  $\rho = 2\pi f a \sqrt{\varepsilon_0 \mu_0} \sqrt{\varepsilon_1 - 1}$ , пропорционального частоте  $f$ .

С изменением частоты  $f$  изменяется также распределение поля направляемой волны (и соответственно переносимой им мощности) между стержнем и внешним пространством. На частотах  $f$ , близких к  $f_{кр\ v}$ ,  $\beta_v$  близко к  $\omega \sqrt{\varepsilon_{2a} \mu_{2a}}$ , величина  $|\kappa_2|$  очень мала и аргумент  $\kappa_2 r$  функций  $H_0^{(2)}(\kappa_2 r)$  и  $H_1^{(2)}(\kappa_2 r)$ , описывающих согласно (20.12) и (П2.16) при  $m=0$  поле вне стержня, медленно изменяется с  $r$ . В этом случае вне стержня поле слабо убывает с увеличением  $r$ , волна (и переносимая ею мощность) почти полностью локализована во внешнем пространстве и имеет  $v_v$ , близкую к  $v_2$ .

Чем больше частота  $f$ , тем больше значение  $|\kappa_2|$ , сильнее убывание поля во внешней среде [которое при значениях  $|\kappa_2| r \gg 1$  происходит с точностью до множителя  $\frac{1}{\sqrt{|\kappa_2| r}}$  по экспоненциальному закону  $e^{-|\kappa_2| r}$ , как это следует из (П2.11)], выше концентрация поля (и переносимая им мощность) внутри стержня и ближе  $v_v$  к  $v_1$ .

Волна, направляемая диэлектрической линией, во внешней среде является замедленной по отношению к волне, свободно распространяющейся в этой среде ( $v_v < v_2$ ), и при значениях  $|k_2|r \gg 1$  характеризуется приблизительно экспоненциальным затуханием компонент векторов поля в радиальном направлении. Эти два свойства не независимы, а сопутствуют друг другу и являются отличительными признаками *поверхностной волны* (ср. § 13.5). Чем больше замедление, тем больше величина  $|k_2|$  и сильнее затухание. Внутри диэлектрического стержня направляемая волна является ускоренной по отношению к волне, свободно распространяющейся в таком же безграничном диэлектрике ( $v_v > v_1$ ), и характеризуется изменением компонент векторов поля вдоль радиуса  $r$  по закону стоячей волны. Чем больше замедление, тем сильнее концентрация поля внутри стержня. Отмеченные для обеих областей характерные особенности направляемой волны обусловлены полным внутренним отражением от поверхности раздела стержня с оптически менее плотной внешней средой (ср. § 13.5). В частности, внутри стержня ускоренные волны образуются в результате суперпозиции множества однородных плоских волн, распространяющихся со скоростью  $v_1$  и многократно отраженных от поверхности стержня (ср. § 19.7).

Полученные выше результаты остаются качественно верны также для симметричных Н-волн ( $m=0, E_z=0, H_z \neq 0$ ) и гибридных волн ( $m \neq 0, E_z \neq 0, H_z \neq 0$ ). Исследование характеристического уравнения для гибридных волн показывает, что оно имеет два вида решений, один из которых определяет волны, обозначаемые символом HE, другой — волны EH. Для гибридных волн HE или EH и для симметричных Н-волн на основе характеристического уравнения (при фиксированном  $m$ ) строится кривая  $\eta = f(\xi)$ , которая имеет бесконечное число ветвей (ср. рис. 20.10). Каждая ( $n$ -я) ветвь характеризует определенный тип волны ( $HE_{mn}$ ,  $EH_{mn}$  или  $H_{0n}$ ) со своими критической частотой и структурой. Хотя гибридные волны и имеют обе продольные составляющие поля, можно сказать, что в поперечном сечении диэлектрического стержня структура поля  $HE_{mn}$  более близка к структуре Н-волн, а структура поля  $EH_{mn}$  более близка к структуре Е-волн. Волна типа  $HE_{11}$  имеет наименьшую критическую частоту, равную нулю, и является основной волной диэлектрической круглой линии передачи. Картина векторных линий этой волны (рис. 20.12) в поперечном сечении диэлектрического стержня напоминает структуру волны  $H_{11}$  круглого волновода.

Коэффициент затухания  $\alpha_v$  волны каждого типа в диэлектрической линии передачи, обусловленный тепловыми потерями мощности в реальных диэлектриках, определяют по ф-ле (18.51), в которой теперь  $P_{\text{вп.ср}}^{(1)}(z)$  есть приходящаяся на единицу длины средняя мощность тепловых потерь в стержне и окружающей среде;  $P_{\text{вср}}(z)$  — средняя мощность, переносимая через попереч-

ное сечение линии как внутри стержня, так и в окружающей среде. Значение  $P_{\text{вп.ср}}^{(1)}(z)$  находят путем интегрирования по объему первого соотношения (4.26), определяющего среднюю мощность тепловых потерь в единице объема. Чтобы найти точное значение

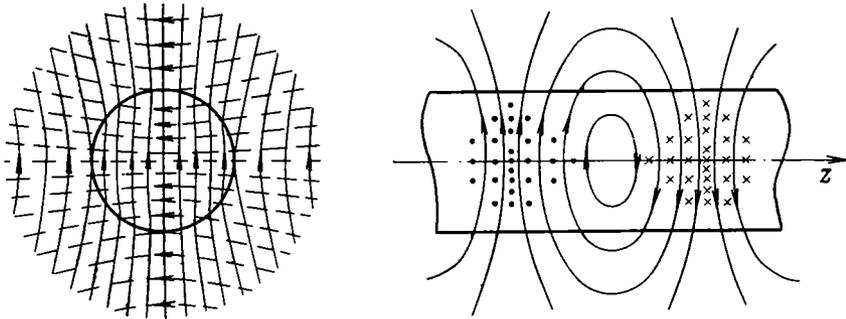


РИС. 20.12

$\alpha_v$ , следует знать точные выражения для поля в реальной диэлектрической линии передачи, которые неизвестны. Поскольку, однако, потери в высококачественном диэлектрике невелики, то приближенно полагают, что структура поля в реальной линии остается такой же, как и в рассмотренном выше идеализированном случае ( $\sigma_1=0, \sigma_2=0$ ), и при вычислении  $\alpha$  используют формулы для составляющих поля, полученные для идеализированного случая.

При практическом использовании диэлектрической линии передачи в ней обычно обеспечивают одноволновый режим. Поскольку из волн высших типов наименьшей  $f_{\text{кр}}$  обладают волны  $E_{01}$  и  $H_{01}$  (имеющие одинаковые  $f_{\text{кр}}$ ), то условие одноволнового режима принимает вид  $f_{\text{макс}} < f_{\text{кр}01}$ , где  $f_{\text{макс}}$  — наибольшая частота передаваемого сигнала. Если для стержня и окружающей его среды можно принять  $\mu_{1a} \approx \mu_{2a} = \mu_0$ , то это условие согласно (20.24) и  $\epsilon_{01} = 2,405$  приводит к выражению

$$2a/\lambda_{0 \text{ мин}} < 2,405/\pi \sqrt{\epsilon_1 - \epsilon_2}, \quad (20.26)$$

где  $\lambda_{0 \text{ мин}} = c/f_{\text{макс}}$ .

Один из способов возбуждения волны  $HE_{11}$  изображен на рис. 20.13. Конец диэлектрической линии вставлен в круглый волновод с волной  $H_{11}$ . Граничные условия (20.4) на поверхности линии обуславливают трансформацию волны  $H_{11}$  волновода в поверхностную волну  $HE_{11}$  линии.

В диапазоне сантиметровых волн электрические параметры диэлектрических линий передачи хуже, чем прямоугольного и круглого волноводов. Диэлектрические линии целесообразно применять, начиная с диапазона миллиметровых волн и кончая диапазоном световых волн ( $\lambda_0 = 0,75 \div 0,4$  мкм).

В последнее время происходит интенсивное развитие техники оптических волн (короче миллиметровых), толчок которому дало изобретение оптических квантовых генераторов (лазеров). Основными преимуществами оптических систем связи являются возможность передачи с высокой надежностью весьма широкополосных

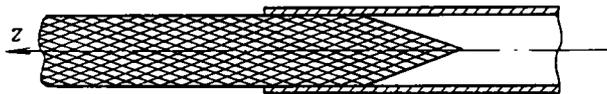


РИС. 20.13

сигналов (т. е. очень больших объемов информации) и обеспечение очень высокой направленности излучения при небольших абсолютных размерах антенн. В диапазонах оптических волн перспективной является диэлектрическая волоконная линия передачи (волоконный световод), состоящая из жгута диэлектрических нитей (волокон) круглого поперечного сечения. Каждое волокно в наиболее простом случае является двухслойным — состоит из однородных диэлектрических сердцевины и оболочки (рис. 20.14). Сердцевина изготавливается из оптически более плотного диэлектрика, чем оболочка, т. е.  $\epsilon_1 > \epsilon_2$  (обычно  $\mu_{1a} \approx \mu_{2a} = \mu_0$ ). Направляемые волоконным поверхностные волны обусловлены полным внутренним отражением на границе сердцевины и оболочки и подобны волнам в диэлектрической линии передачи (роль диэлектрического стержня играет сердцевина, роль окружающей среды — оболочка). В зависимости от свойств генератора оптических волн используют одноволновый или многоволновый режим в волокне. Из (20.26) следует, что для получения на световых волнах не слишком малого радиуса сердцевины  $a$  одноволнового волокна значения  $\epsilon_1$  и  $\epsilon_2$  должны очень мало отличаться друг от друга. Параметры волокна выбирают такими, чтобы поле направляемых волн было сконцентрировано в основном внутри сердцевины, приблизительно экспоненциально затухало в оболочке с увеличением радиуса  $r$  и оказывалось пренебрежимо малым на поверхности волокна ( $r=b$ ). Это обеспечивается в существующих световых одноволновых волокнах, например, при  $2a=5$  мкм и  $2b=75$  мкм, в многоволновых волокнах при  $2a=60$  мкм и  $2b=100$  мкм.

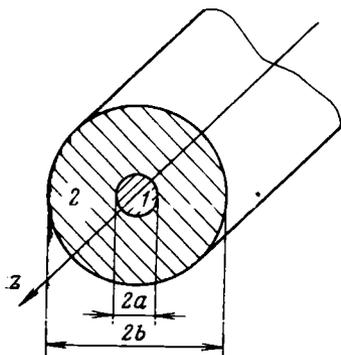


РИС. 20.14

Основными причинами затухания волн в световом волокне являются поглощение в материале и излучение из сердцевины, выз-

важное незначительным случайным изменением радиуса  $a$  вдоль оси волокна, непрямолинейностью этой оси и рядом других факторов. Волокно изготавливают из специальных сортов стекла и плавленного кварца, обладающих малым поглощением на световых волнах. Часто каждое волокно покрывают тонкой пленкой из материала с большими световыми потерями. Эта пленка поглощает волны, излучаемые из сердцевины в оболочку, что уменьшает вероятность перекрестных помех между соседними волокнами в жгуте. В настоящее время уже достигнут низкий уровень суммарных потерь в волокне, который составляет около 5 дБ/км и не является предельным. >

## 20.5. ОДНОПРОВОДНАЯ КРУГЛАЯ ЛИНИЯ ПЕРЕДАЧИ

Практическое применение находит однопроводная линия в виде металлического провода с диэлектрическим покрытием (см. рис. 17.1з). При определении направляемых такой линией поверхностных волн обычно полагают, что диэлектрик покрытия и проводимость провода идеальные, т. е. пренебрегают тепловыми потерями (ср. § 20.4). Существование и характерные особенности этих направляемых волн обусловлены многократным полным отражением множества однородных плоских волн от поверхности провода  $r=a$  и от поверхности раздела  $r=b$  диэлектрического слоя с оптически менее плотной внешней средой. Очевидно, что

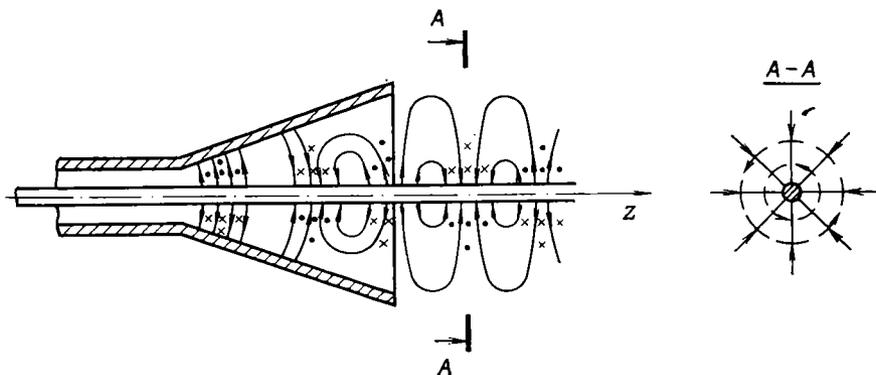


РИС. 20.15

если пренебречь потерями, то распространение направляемых волн не будет сопровождаться затуханием ( $\gamma = i\beta$ ,  $\alpha = 0$ ). Коэффициент затухания  $\alpha$ , учитывающий тепловые потери, определяется тем же способом, что и в случае диэлектрической линии.

Анализ показывает, что в рассматриваемой линии могут существовать две основные волны, имеющие равную нулю критическую частоту, — электрическая симметричная волна  $HE_{01}$  и гибридная волна  $HE_{11}$  (в диэлектрической линии такую  $f_{кр}$  имела лишь вол-

на  $HE_{11}$ ). Для передачи электромагнитной энергии наибольший практический интерес представляет волна  $E_{01}$ , позволяющая получить довольно высокую концентрацию поля внутри линии при сравнительно малых значениях коэффициента затухания  $\alpha$ .

Способ возбуждения волны типа  $E_{01}$  и ее структура изображены на рис. 20.15. Внутренний провод коаксиального волновода с волной  $T$  переходит в однопроводную линию с диэлектрическим покрытием, а экран — в конический рупор. Граничные условия на поверхностях  $r=a$ ,  $r=b$  и наличие рупора обуславливают трансформацию волны  $T$  коаксиального волновода в поверхностную волну  $E_{01}$ , имеющую отличные от нуля компоненты  $E_r$ ,  $E_z$  и  $H_\phi$ . На приемном конце используется такой же рупорный переход от однопроводной линии к коаксиальному волноводу.

Однопроводная линия нашла применение в диапазоне длин волн от нескольких метров до нескольких сантиметров. Наиболее целесообразно ее использовать на дециметровых волнах. Важным достоинством этой линии передачи являются конструктивная простота (например, медный провод, покрытый слоем полиэтилена) и возможность быстрой прокладки, что особенно существенно для различных передвижных установок. Основные недостатки однопроводной линии связаны с тем, что она является открытой (подверженность внешним помехам и влиянию метеорологических условий, опасность возникновения потерь из-за рассеяния волн на окружающих предметах и вследствие излучения из линии, вызванного непрямолинейностью ее оси и другими нерегулярностями).

В заключение отметим, что вдоль однопроводной линии в виде круглого металлического провода с большой (но *конечной*) проводимостью металла ( $\sigma_1 \neq \infty$ , см. рис. 20.9) также могут распространяться направляемые поверхностные волны. Однако такая линия неудобна для практического использования, так как малые значения  $\alpha$  получаются лишь при слабой концентрации поля внутри провода (сопровождается малым замедлением волны) и соответственно при локализации большей части мощности волны в окружающей провод среде.

# Линейные устройства СВЧ

## Глава 21

### ВВЕДЕНИЕ В ТЕОРИЮ ВОЛНОВОДОВ С НЕРЕГУЛЯРНЫМИ ЭЛЕМЕНТАМИ



#### 21.1 НЕРЕГУЛЯРНОСТЬ РЕАЛЬНЫХ ВОЛНОВОДОВ. МЕТОД ЭКВИВАЛЕНТНЫХ СХЕМ

В реальных условиях волновод всегда входит в состав тракта СВЧ и является нерегулярным. *Трактом сверхвысоких частот* называют совокупность устройств СВЧ, сочлененных определенным образом. Эти устройства выполняют различные функции (например, ввод энергии в тракт, вывод энергии из тракта, изменение направления движения энергии, распределение энергии между несколькими волноводами и др.) и носят название *узлов СВЧ*. Как правило, узел связан с трактом при помощи отрезков волновода, которые называются *плечами узла*. Различают одноплечные, двухплечные, многоплечные узлы. *Нерегулярными элементами* называют всевозможные диафрагмы, штыри, зонды, петли, отверстия в стенках волновода, скачкообразные изменения его поперечного сечения и другие нерегулярности, которые являются составными частями узлов.

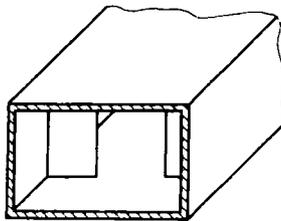


РИС. 21.1

Пусть, например, внутри прямоугольного волновода имеется диафрагма, представляющая собой тонкую поперечную металлическую перегородку с отверстием (рис. 21.1). На диафрагму падает бегущая по волноводу волна основного типа  $H_{10}$ , которая возбуждена источником. В плоскости диафрагмы (которую для простоты будем считать идеально проводящей и бесконечно тон-

кой) должны выполняться следующие граничные условия: на перегородке касательная к ней составляющая вектора  $\mathbf{E}$  равна нулю, на отверстиях поперечные (касательные) составляющие  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  непрерывны (физически в плоскости отверстия имеется некоторое поле, в которое должны обращаться поля, существующие по обе стороны отверстия). Этим граничным условиям может удовлетворить лишь сложное поле (которое и возникает вблизи диафрагмы), состоящее из трех волн типа  $H_{10}$  (падающей, отраженной диафрагмой, прошедшей через диафрагму) и множества полей высших типов.

Подобное сложное поле возникает вблизи любой нерегулярности внутри тракта. Как правило, тракт (или часть его, выполненная на волноводе определенного вида) проектируют таким образом, чтобы вдоль него распространялась бегущая волна только одного типа, называемого *рабочим*. Очевидно, что легче всего это осуществить на волне основного типа, используя одноволновый режим. Именно так и поступают в трактах на прямоугольном и коаксиальном волноводах. Если же, например, в круглом волноводе необходимо сделать рабочей волну типа  $E_{01}$ , то, во-первых, следует применять только такие нерегулярности, на которых не возбуждается волна  $H_{11}$ , и, во-вторых, выбрать радиус волновода таким, чтобы возникающие на нерегулярностях поля более высоких типов, чем  $E_{01}$ , представляли собой местные поля. Будем далее считать, что условия для возбуждения только одной бегущей волны обеспечены. При этом вблизи нерегулярных элементов существуют сложные поля, состоящие из бегущих волн рабочего типа и множества местных затухающих полей более высоких типов; вдали от нерегулярных элементов местные поля отсутствуют и по волноводу распространяются только волны рабочего типа.

С практической точки зрения основной интерес представляет учет влияния нерегулярных элементов на распространение волны рабочего типа. В такой постановке задачи можно заменить волновод эквивалентной ему длинной линией (см. § 21.3), а нерегулярности — их эквивалентными схемами (схемами замещения), состоящими из сосредоточенных элементов и включенными в эту линию (см. § 21.6, 21.7). Представление реального волноводного тракта эквивалентной схемой в виде длинной линии с включенными в нее схемами замещения отдельных нерегулярностей очень полезно, так как позволяет с помощью сравнительно простых методов теории линейных электрических цепей рассчитать прохождение волны рабочего типа по всему тракту.

Параметры эквивалентной схемы нерегулярного элемента, определяющие прохождение волны рабочего типа, могут быть определены либо на основании решения соответствующей электродинамической задачи, либо на основании эксперимента. Таким образом, эквивалентная схема является только одним из способов представления готового решения волноводной задачи, полученного другим методом (теоретическим или экспериментальным).

## 21.2. ОПИСАНИЕ НАПРАВЛЯЕМЫХ Т-ВОЛН ТЕОРИЕЙ ДЛИННЫХ ЛИНИЙ

Пусть на входе одноволнового коаксиального волновода или симметричной двухпроводной линии имеется источник (например, генератор), который возбуждает Т-волну, распространяющуюся в направлении возрастающих значений  $z$ . На другом конце линии имеется приемник мощности (нагрузка), который поглощает в общем случае часть мощности падающей на него волны, а остальную часть отражает, возбуждая Т-волну, распространяющуюся в направлении убывающих значений  $z$ . В точке с поперечными координатами  $u, v$  произвольного поперечного сечения  $z$  результирующее поле Т определяется суммой падающей ( $\dot{\mathbf{E}}_{\perp+}, \dot{\mathbf{H}}_{\perp+}$ ) и отраженной ( $\dot{\mathbf{E}}_{\perp-}, \dot{\mathbf{H}}_{\perp-}$ ) волн:

$$\left. \begin{aligned} \dot{\mathbf{E}}_{\perp}(u, v, z) &= \dot{\mathbf{E}}_{\perp+}(u, v, z) + \dot{\mathbf{E}}_{\perp-}(u, v, z) = \\ &= \dot{\mathbf{E}}_{0\perp+}(u, v) e^{-ikz} + \dot{\mathbf{E}}_{0\perp-}(u, v) e^{ikz}, \\ \dot{\mathbf{H}}_{\perp}(u, v, z) &= \dot{\mathbf{H}}_{\perp+}(u, v, z) + \dot{\mathbf{H}}_{\perp-}(u, v, z) = \\ &= \dot{\mathbf{H}}_{0\perp+}(u, v) e^{-ikz} + \dot{\mathbf{H}}_{0\perp-}(u, v) e^{ikz}. \end{aligned} \right\} \quad (21.1)$$

Введя согласно (18.31), (18.32) понятия напряжения и тока, получим вместо (21.1):

$$\begin{aligned} \dot{U}(z) &= \dot{U}_+(z) + \dot{U}_-(z) = \dot{U}_{0+} e^{-ikz} + \dot{U}_{0-} e^{ikz}, \\ \dot{I}(z) &= \dot{I}_+(z) + \dot{I}_-(z) = \dot{I}_{0+} e^{-ikz} - \dot{I}_{0-} e^{ikz}. \end{aligned} \quad (21.2a)$$

Напряжение и ток являются функциями только продольной координаты  $z$ .

Выразив с помощью (18.33) токи падающей и отраженной волн через соответствующие напряжения, получим:

$$\begin{aligned} \dot{U}(z) &= \dot{U}_{0+} e^{-ikz} + \dot{U}_{0-} e^{ikz}, \\ \dot{I}(z) &= \frac{1}{Z_B} (\dot{U}_{0+} e^{-ikz} - \dot{U}_{0-} e^{ikz}). \end{aligned} \quad (21.2b)$$

Соотношения (21.2b) представляют собой хорошо известные формулы теории длинных линий без потерь, характеризующие распределение напряжения и тока вдоль координаты  $z$ . Таким образом, если не интересоваться структурой поля направляемых Т-волн и перейти к напряжению и току, то эти волны можно описывать теорией длинных линий, которая значительно проще, чем электродинамическая теория.

Комплексная амплитуда падающей волны напряжения  $\dot{U}_+(z)$  определяется мощностью генератора. Отношение в данном сечении линии  $z$  комплексной амплитуды напряжения отраженной волны  $\dot{U}_-(z)$  к комплексной амплитуде напряжения падающей волны  $\dot{U}_+(z)$  зависит от нагрузки и носит название *коэффициента отражения по напряжению*  $p(z)$ . Если совместить для определенности значение  $z=0$  с сечением, где подключена нагрузка, и

по-прежнему считать, что координата  $z$  возрастает в направлении от генератора к нагрузке (рис. 21.2), то для линии без потерь справедливо равенство

$$p(z) = \frac{\dot{U}_-(z)}{\dot{U}_+(z)} = \frac{\dot{U}_{0-}}{\dot{U}_{0+}} e^{12kz} = p(0) e^{12kz}, \quad (21.3)$$

в котором

$$p(0) = |\rho| e^{i\varphi_0} \quad (21.4)$$

есть коэффициент отражения в сечении линии  $z=0$ , т. е. у нагрузки.

При учете (21.3) вместо (21.2б) получим:

$$\begin{aligned} \dot{U}(z) &= \dot{U}_+(z) + \dot{U}_-(z) = \dot{U}_+(z) [1 + p(z)], \\ \dot{i}(z) &= \frac{1}{Z_B} [\dot{U}_+(z) - \dot{U}_-(z)] = \frac{\dot{U}_+(z)}{Z_B} [1 - p(z)]. \end{aligned} \quad (21.5)$$

Важным параметром, характеризующим режим в длинной линии, являются сопротивление  $Z(z)$  в данном сечении  $z$ , равное отношению комплексных амплитуд напряжения и тока в этом сечении, или обратная сопротивлению величина проводимости  $Y(z)$ :

$$\begin{aligned} Z(z) &= \frac{\dot{U}(z)}{\dot{i}(z)} = Z_B \frac{1 + p(z)}{1 - p(z)} = r(z) + ix(z), \\ Y(z) &= \frac{\dot{i}(z)}{\dot{U}(z)} = \frac{1}{Z(z)} = Y_B \frac{1 - p(z)}{1 + p(z)} = g(z) + ib(z), \end{aligned} \quad (21.6)$$

где  $Y_B = 1/Z_B$  — волновая проводимость линии передачи. Находящийся вправо от данного сечения  $z$  участок линии с оконечной нагрузкой представляет по отношению к остальной линии нагрузку, определяемую соотношениями (21.6), и может быть заменен соответствующими сосредоточенными сопротивлением или проводимостью. Переходя к нормированным сопротивлению  $\hat{Z}(z)$  и проводимости  $\hat{Y}(z)$ , получим согласно (21.6) соотношения:

$$\begin{aligned} \hat{Z}(z) &= \frac{Z(z)}{Z_B} = \frac{1 + p(z)}{1 - p(z)} = \hat{r}(z) + i\hat{x}(z), \\ \hat{Y}(z) &= \frac{Y(z)}{Y_B} = \frac{1}{\hat{Z}(z)} = \frac{1 - p(z)}{1 + p(z)} = \hat{g}(z) + i\hat{b}(z). \end{aligned} \quad (21.7)$$

Из (21.7) можно выразить коэффициент отражения в сечении  $z$  через  $\hat{Z}(z)$  или  $\hat{Y}(z)$  в этом же сечении:

$$p(z) = \frac{\hat{Z}(z) - 1}{\hat{Z}(z) + 1}, \quad p(z) = \frac{1 - \hat{Y}(z)}{1 + \hat{Y}(z)}. \quad (21.8)$$

Таким образом, в каждом сечении  $z$  существует простая связь (21.7) и (21.8) между параметрами  $p(z)$  и  $Z(z)$  или  $Y(z)$ , характеризующими существующий в длинной линии режим.

Широко распространено определение коэффициента отражения по экспериментально снятому распределению амплитуды результирующего напряжения (или тока) вдоль линии. Амплитуда результирующего напряжения в сечении  $z$ , удаленном от нагрузки к генератору на расстояние  $|z|$ <sup>1)</sup>, равна модулю напряжения (21.5), который в линии без потерь при учете (21.2) и (21.3) определяется выражением

$$U_m(z) = |\dot{U}_+(z)| |1 + p(0) e^{i2kz}| = U_{m+} |1 + |p| e^{-i(2k|z| - \varphi_0)}| = U_{m+} \sqrt{1 + |p|^2 + 2|p| \cos(2k|z| - \varphi_0)}. \quad (21.9)$$

Отсюда следует, что распределение амплитуды напряжения в зависимости от координаты  $z$  имеет вид волнообразной кривой с минимумами

$$U_{\text{мин } m}(z') = U_{m+} (1 - |p|) \quad (21.10)$$

в сечениях  $z'$ , определяемых равенством

$$2k|z'| - \varphi_0 = (2n + 1)\pi, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (21.11)$$

и максимумами

$$U_{\text{макс } m}(z'') = U_{m+} (1 + |p|) \quad (21.12)$$

в сечениях  $z''$ , определяемых равенством

$$2k|z''| - \varphi_0 = 2n\pi, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (21.13)$$

Таким образом, максимумы и минимумы чередуются, причем расстояние между соседними максимумом и минимумом определяется из соотношения  $2k(|z''| - |z'|) = \pi$  и равно

$$|z''| - |z'| = \pi/2k = \lambda/4. \quad (21.14)$$

Кривая распределения  $U_m(z)$  оказывается периодической с периодом, равным  $\lambda/2$  (рис. 21.3).

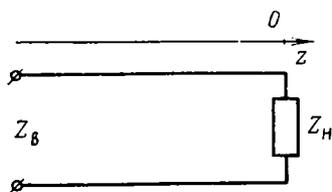


РИС. 21.2

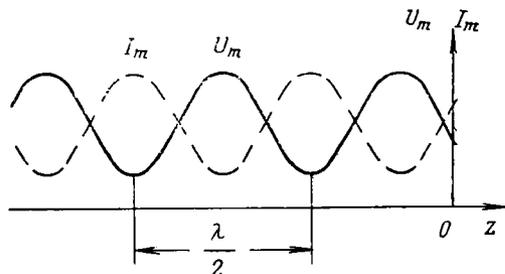


РИС. 21.3

<sup>1)</sup> Напомним, что при выбранном выше расположении начала отсчета координаты  $z$  (см. рис. 21.2) для всех сечений линии  $z$  принимает отрицательные значения ( $z = -|z|$ ).

Из ф-л (21.3), (21.11) и (21.13) видно, что в сечениях  $z'$  и  $z''$  коэффициент отражения по напряжению оказывается вещественным, причем

$$p(z') = -|p|, \quad p(z'') = |p|. \quad (21.15)$$

Коэффициентом бегущей волны (КБВ) называют отношение

$$K_{б.в} = U_{\min} m / U_{\max} m = (1 - |p|) / (1 + |p|), \quad 0 \leq K_{б.в} \leq 1. \quad (21.16)$$

Иногда вместо  $K_{б.в}$  используют обратную величину, называемую коэффициентом стоячей волны (КСВ):

$$K_{с.в} = 1/K_{б.в} = U_{\max} m / U_{\min} m = (1 + |p|) / (1 - |p|), \quad \infty \geq K_{с.в} \geq 1. \quad (21.17)$$

Из (21.16) и (21.17) следуют соотношения:

$$|p| = \frac{1 - K_{б.в}}{1 + K_{б.в}}, \quad |p| = \frac{K_{с.в} - 1}{K_{с.в} + 1}, \quad (21.18)$$

которые позволяют определить модуль коэффициента отражения по предварительно измеренному  $K_{б.в}$  или  $K_{с.в}$ . Аргумент коэффициента отражения при  $z=0$  можно найти из выражения (21.11) или (21.13), опустив в нем слагаемое  $2\pi n$  (так как  $e^{i2\pi n} = 1$ ) и подставив измеренную координату любого минимума или максимума на линии:

$$\varphi_0 = \arg p(0) = 2k|z'| - \pi = 2k|z''|. \quad (21.19)$$

Введем важную формулу трансформации сопротивлений, которая выражает сопротивление  $\hat{Z}(z)$  в сечении  $z$ , удаленном от нагрузки к генератору на расстояние  $|z|$ , через сопротивление нагрузки  $\hat{Z}(0) = \hat{Z}_H$ . Заменяя в первом выражении (21.7) величину  $p(z)$  правой частью (21.3), воспользовавшись согласно (21.8) соотношением

$$p(0) = \frac{\hat{Z}(0) - 1}{\hat{Z}(0) + 1} = \frac{\hat{Z}_H - 1}{\hat{Z}_H + 1} \quad (21.20)$$

и приняв во внимание равенства

$$\frac{1 - e^{i2kz}}{1 + e^{i2kz}} = -i \operatorname{tg} kz \quad (21.21)$$

и  $z = -|z|$ , получим нужную формулу:

$$\hat{Z}(z) = \frac{\hat{Z}_H + i \operatorname{tg} k|z|}{1 + i \hat{Z}_H \operatorname{tg} k|z|} = \frac{\hat{Z}_H \cos k|z| + i \sin k|z|}{\cos k|z| + i \hat{Z}_H \sin k|z|}. \quad (21.22)$$

С помощью соотношений  $\hat{Z}(z) = 1/\hat{Y}(z)$  и  $\hat{Z}_H = 1/\hat{Y}_H$  выражение (21.22) легко преобразовать в формулу трансформации проводимостей

$$\hat{Y}(z) = \frac{\hat{Y}_H + i \operatorname{tg} k' |z|}{1 + i \hat{Y}_H \operatorname{tg} k |z|} = \frac{\hat{Y}_H \cos k |z| + i \sin k' |z|}{\cos k |z| + i \hat{Y}_H \sin k |z|}. \quad (21.23)$$

В сечениях линии  $z$ , удаленных от нагрузки на целое число полуволн ( $|z| = n\lambda/2$ ), согласно (21.22) имеем  $Z(z) = Z_H$ , т. е. сопротивление нагрузки трансформируется в свое первоначальное значение.

В сечениях линии, удаленных от нагрузки на целое нечетное число  $\lambda/4$  [ $|z| = (2n+1)\lambda/4$ ], согласно (21.22) имеем

$$\hat{Z}(z) = 1/\hat{Z}_H \quad \text{или} \quad Z(z) = Z^2/Z_H. \quad (21.24)$$

Формула (21.24) определяет трансформацию сопротивления нагрузки четвертьволновым отрезком длинной линии.

Если  $Z_H = 1$ , то согласно (21.20)  $|p| = 0$ . Таким образом, согласованная с линией нагрузка, сопротивление которой равно волновому сопротивлению линии, не создает отраженной волны и поглощает всю мощность падающей волны. Линия с согласованной нагрузкой ведет себя подобно бесконечной регулярной линии — в ней существует *режим бегущей волны*, характеризуемый параметрами  $Z(z) = 1$ ,  $|p| = 0$ ,  $K_{б.в} = 1$ ,  $K_{с.в} = 1$ .

Если  $Z_H = i\hat{x}_H$  (сопротивление нагрузки реактивно),  $Z_H = 0$  («короткое замыкание») или  $Z_H = \infty$  («холостой ход»), то в соответствии с (21.20) величина  $|p| = 1$ , т. е. нагрузки полностью отражают падающую волну. В линии с такими нагрузками существует *режим стоячей волны*, характеризуемый параметрами  $Z(z) = i\hat{x}(z)$ ,  $|p| = 1$ ,  $K_{б.в} = 0$ ,  $K_{с.в} = \infty$ .

Режимы бегущей и стоячей волн являются предельными. В общем случае в линии существует так называемый *смешанный режим*, характеризуемый параметрами  $Z_H = \hat{r}_H + i\hat{x}_H$ ,  $Z(z) = \hat{r}(z) + i\hat{x}(z)$ ,  $0 < |p| < 1$ ,  $1 > K_{б.в} > 0$ ,  $1 < K_{с.в} < \infty$ . В сечениях  $z'$  и  $z''$ , где согласно (21.15) коэффициент отражения принимает вещественные значения, сопротивление  $Z(z)$  в соответствии с (21.7) оказывается активным, причем

$$\left. \begin{aligned} \hat{Z}(z') &= \frac{Z(z')}{Z_B} = \frac{1 - |p|}{1 + |p|} = K_{б.в} = \hat{r}_{\min}, \\ \hat{Z}(z'') &= \frac{Z(z'')}{Z_B} = \frac{1 + |p|}{1 - |p|} = \frac{1}{K_{б.в}} = K_{с.в} = \hat{r}_{\max}. \end{aligned} \right\} \quad (21.25)$$

Теория длинных линий имеет хорошо разработанный расчетный аппарат. В частности, она широко использует круговые диаграммы коэффициентов отражения, полных сопротивлений и проводимостей, которые позволяют заменить довольно трудоемкий

метод решения разнообразных задач с помощью приведенных выше формул очень простыми и быстро действующими графическими методами решения.

### 21.3. ЭКВИВАЛЕНТНОСТЬ МЕЖДУ ВОЛНОВОДОМ И ДЛИННОЙ ЛИНИЕЙ

Поскольку волны типов  $H_{mn}$  и  $E_{mn}$  не имеют потенциального характера в поперечных сечениях волновода, то для них, в отличие от Т-волн, нельзя однозначно ввести напряжение и ток в обычном смысле этих слов (как линейные интегралы от векторов поля). Однако, как будет показано ниже, для волн типов  $H_{mn}$  и  $E_{mn}$  можно ввести понятия, которые позволяют использовать методы теории длинных линий и в этих случаях.

Заменяя, как и прежде, индексом  $\nu$  полное наименование поля определенной типа  $H_{mn}$  или  $E_{mn}$  в волноводе без потерь, имеем при существовании падающей и отраженной волн следующие соотношения:

$$\left. \begin{aligned} \dot{E}_\nu(u, v, z) &= \dot{E}_{\nu+}(u, v, z) + \dot{E}_{\nu-}(u, v, z) = \\ &= \dot{E}_{0\nu+}(u, v) e^{-i\beta_\nu z} + \dot{E}_{0\nu-}(u, v) e^{i\beta_\nu z}, \\ \dot{H}_\nu(u, v, z) &= \dot{H}_{\nu+}(u, v, z) + \dot{H}_{\nu-}(u, v, z) = \\ &= \dot{H}_{0\nu+}(u, v) e^{-i\beta_\nu z} + \dot{H}_{0\nu-}(u, v) e^{i\beta_\nu z} \end{aligned} \right\} \quad (21.26)$$

Сопоставление этих соотношений с (21.2а) показывает, что напряженности  $\dot{E}$  и  $\dot{H}$  волны рассматриваемого типа в регулярном волноводе и напряжение и ток в длинной линии изменяются вдоль продольной координаты  $z$  по одному и тому же закону. Это наводит на мысль о возможности формального введения некоторых скалярных величин, пропорциональных слагаемым в (21.26), которые не зависели бы от координат  $u$  и  $v$  поперечного сечения волновода, изменялись бы от  $z$  по законам  $e^{\mp i\beta_\nu z}$  и играли бы роль напряжений и токов падающей  $[\dot{U}_{\nu+}(z), \dot{I}_{\nu+}(z)]$  и отраженной  $[\dot{U}_{\nu-}(z), \dot{I}_{\nu-}(z)]$  волн. Эти скалярные величины назовем *условными* напряжениями и токами. Они должны быть введены таким образом, чтобы переносимая через поперечное сечение волновода комплексная мощность выражалась через них формулой теории длинных линий

$$\tilde{S}_\nu(z) = P_{cp}(z) + iP_q(z) = \frac{1}{2} \dot{U}_\nu(z) \dot{I}_\nu^*(z), \quad (21.27)$$

где  $\dot{U}_\nu = \dot{U}_{\nu+} + \dot{U}_{\nu-}$ ;  $\dot{I}_\nu = \dot{I}_{\nu+} + \dot{I}_{\nu-}$ . Поскольку эта мощность зависит только от поперечных составляющих поля  $\dot{E}_{\perp\nu}$  и  $\dot{H}_{\perp\nu}$ , то ус-

ловные напряжения и токи должны быть пропорциональны именно поперечным составляющим. При этом условное напряжение  $\dot{U}_v$  пропорционально величине вектора  $\dot{E}_{\perp v}$ , а условный ток  $I_v$  — величине вектора  $\dot{H}_{\perp}$ , так как при коротком замыкании напряжение  $\dot{U}_-$  и  $\dot{E}_{\perp v-}$  отражаются с изменением фазы на  $\pi$ , а ток  $I_-$  и  $\dot{H}_{\perp}$  — без изменения фазы (в сечении короткого замыкания  $\dot{U} = \dot{U}_+ + \dot{U}_- = 0$  и  $\dot{E}_{\perp v} = \dot{E}_{\perp v+} + \dot{E}_{\perp v-} = 0$ , а  $I = I_+ + I_- = 2I_+$  и  $\dot{H}_{\perp v} = \dot{H}_{\perp v+} + \dot{H}_{\perp v-} = 2\dot{H}_{\perp v+}$ ).

Чтобы ввести условные напряжения и токи, представим комплексные амплитуды  $\dot{E}_{\perp v\pm}$  и  $\dot{H}_{\perp v\pm}$  бегущей падающей или отраженной волны типа  $H_{mn}$  или  $E_{mn}$  в волноводе без потерь следующим образом:

$$\begin{aligned}\dot{E}_{\perp v\pm}(u, v, z) &= \dot{U}_{v\pm}(z) \mathbf{e}_v(u, v), \\ \dot{H}_{\perp v\pm}(u, v, z) &= \dot{I}_{v\pm}(z) \mathbf{h}_v(u, v).\end{aligned}\quad (21.28)$$

Здесь  $\mathbf{e}_v(u, v)$  и  $\mathbf{h}_v(u, v)$  — векторные собственные поперечные электрическая и магнитная функции, которые могут быть выбраны вещественными и характеризуют зависимость поперечных векторов от координат  $u$  и  $v$  поперечного сечения;  $\dot{U}_{v\pm}(z)$  и  $\dot{I}_{v\pm}(z)$  — скалярные комплексные амплитудные функции поперечных векторов, которые включают в себя зависимость от продольной координаты  $z$  вида  $e^{-i\beta_v z}$  (для падающей волны) или  $e^{i\beta_v z}$  (для отраженной волны).

Из (18.10в) и (18.12в) вытекает формула

$$\dot{E}_{\perp v\pm} = \pm Z_{c v} [\dot{H}_{\perp v\pm} z^0], \quad (21.29)$$

где  $Z_{c v}$  — характеристическое сопротивление поля рассматриваемого типа. При подстановке в (21.29) выражений (21.28) получим

$$\dot{U}_{v\pm} \mathbf{e}_v = \pm Z_{c v} \dot{I}_{v\pm} [\mathbf{h}_v z^0]. \quad (21.30)$$

Соотношение (21.30) удовлетворим путем введения равенств:

$$\mathbf{e}_v = \frac{1}{C^2} [\mathbf{h}_v z^0]; \quad (21.31)$$

$$\dot{U}_{v\pm}(z) = \pm C^2 Z_{c v} \dot{I}_{v\pm}(z), \quad (21.32)$$

где  $C$  — произвольный безразмерный положительный множитель, выбор которого называют *нормированием* векторных и скалярных функций. Из (21.31) следует, что лежащие в поперечном сечении векторы  $\mathbf{e}_v$ ,  $\mathbf{h}_v$  и продольный орт  $z^0$  образуют правую ортогональную тройку векторов.

В качестве примера приведем функции  $\mathbf{e}_v$  и  $\dot{U}_{\pm}$  прямоугольного волновода, которые легко получить с помощью ф-л (21.28),

(19.23), (19.24) и  $\gamma_{\nu} = i\beta_{\nu}$ . При этом для волны типа  $H_{mn}$  (который обозначим индексом  $\nu = h$ ) имеем:

$$\mathbf{e}_h(x, y) = A_h \left( x^0 \frac{n\pi}{b} \cos \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} - y^0 \frac{m\pi}{a} \sin \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b} \right),$$

$$\dot{U}_{h\pm}(z) = \frac{i\omega\mu_a}{\kappa_h^2} \frac{\dot{H}_0}{A_h} e^{\mp i\beta_h z}, \quad (21.33)$$

для волны типа  $E_{mn}$  (который обозначим индексом  $\nu = e$ ) имеем:

$$\mathbf{e}_e(x, y) = A_e \left( x^0 \frac{m\pi}{a} \cos \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} + y^0 \frac{n\pi}{b} \sin \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b} \right),$$

$$\dot{U}_{e\pm}(z) = \mp \frac{i\beta_e}{\kappa_e^2} \frac{\dot{E}_0}{A_e} e^{\mp i\beta_e z} \quad (21.34)$$

Здесь  $A_{\nu}$  — постоянный множитель, который будет определен ниже.

При существовании в волноводе падающей и отраженной волн получим согласно (21.28) и (21.32) соотношения:

$$\dot{\mathbf{E}}_{\perp\nu}(u, v, z) = \dot{\mathbf{E}}_{\perp\nu+} + \dot{\mathbf{E}}_{\perp\nu-} = \dot{U}_{\nu}(z) \mathbf{e}_{\nu}(u, v),$$

$$\dot{\mathbf{H}}_{\perp\nu}(u, v, z) = \dot{\mathbf{H}}_{\perp\nu+} + \dot{\mathbf{H}}_{\perp\nu-} = \dot{I}_{\nu}(z) \mathbf{h}_{\nu}(u, v), \quad (21.35)$$

где

$$\dot{U}_{\nu}(z) = \dot{U}_{\nu+}(z) + \dot{U}_{\nu-}(z) = \dot{U}_{0\nu+} e^{-i\beta_{\nu} z} + \dot{U}_{0\nu-} e^{i\beta_{\nu} z},$$

$$\dot{I}_{\nu}(z) = \dot{I}_{\nu+}(z) + \dot{I}_{\nu-}(z) = \frac{1}{c^2 Z_{c\nu}} \left( \dot{U}_{0\nu+} e^{-i\beta_{\nu} z} - \dot{U}_{0\nu-} e^{i\beta_{\nu} z} \right). \quad (21.36)$$

С учетом (21.35) найдем комплексную мощность, которая переносится через поперечное сечение  $S_{\perp}$  волновода в направлении  $z^0$ :

$$\mathfrak{P}_{\nu} = \frac{1}{2} \int_{S_{\perp}} \left[ \dot{\mathbf{E}}_{\perp\nu} \dot{\mathbf{H}}_{\perp\nu}^* \right] z^0 dS = \frac{1}{2} \dot{U}_{\nu}(z) \dot{I}_{\nu}^*(z) \int_{S_{\perp}} [\mathbf{e}_{\nu} \mathbf{h}_{\nu}] z^0 dS. \quad (21.37)$$

Для выполнения соотношения (21.27) потребуем, чтобы удовлетворялось равенство

$$\int_{S_{\perp}} [\mathbf{e}_{\nu} \mathbf{h}_{\nu}] z^0 dS = 1. \quad (21.38)$$

Формулы (21.31) и (21.38) с помощью (П1.3), (П1.4) приводят к следующим условиям нормирования:

$$\int_{S_{\perp}} (\mathbf{e}_{\nu})^2 dS = \frac{1}{c^2}, \quad \int_{S_{\perp}} (\mathbf{h}_{\nu})^2 dS = c^2, \quad (21.39)$$

из которых определяют постоянный множитель  $A_{\nu}$ . В соответствии с (21.39) единицей измерения  $\mathbf{e}$  и  $\mathbf{h}_{\nu}$  является  $1/\text{м}$ . При этом согласно (21.35)  $\dot{U}_{\nu}(z)$  измеряется в вольтах,  $\dot{I}_{\nu}$  — в амперах.

Сравнение выражений (21.36) с (21.26) показывает, что функции  $\dot{U}_v(z)$  и  $\dot{I}_v(z)$  играют роль напряжения и тока в эквивалентной длинной линии, которая имеет коэффициент распространения  $\gamma_v = i\beta_v$  и волновое сопротивление  $Z_{bv} = C^2 Z_{cv}$ , где  $Z_{cv}$  — характеристическое сопротивление волны рассматриваемого типа, определяемое соотношениями (18.16). Введение условных напряжения  $\dot{U}(z)$  и тока  $\dot{I}_v(z)$  и переход к эквивалентной длинной линии позволяют распространить на волновод с волной типа  $H_{mn}$  или  $E_{mn}$  методы теории длинных линий (см. § 21.2). В частности, в волноводе с волной  $v$ -го типа коэффициент отражения по напряженности электрического поля согласно (21.28) и (21.3) равен коэффициенту отражения по условному напряжению:

$$\rho_v(z) = \frac{\dot{E}_{\perp v-}(u, v, z)}{\dot{E}_{\perp v+}(u, v, z)} = \frac{\dot{U}_{v-}(z)}{\dot{U}_{v+}(z)} = \frac{\dot{U}_{0v-}}{\dot{U}_{0v+}} e^{i2\beta_v z} = \rho_v(0) e^{i2\beta_v z}, \quad (21.40)$$

эквивалентные нормированные сопротивление и проводимость в сечении  $z$  согласно (21.36) и (21.40) определяются соотношениями вида (21.7):

$$\hat{Z}_v(z) = \frac{1}{Z_{bv}} \frac{\dot{U}_v(z)}{\dot{I}_v(z)} = \frac{1 + \rho_v(z)}{1 - \rho_v(z)},$$

$$\hat{Y}_v(z) = Z_{bv} \frac{\dot{I}_v(z)}{\dot{U}_v(z)} = \frac{1 - \rho_v(z)}{1 + \rho_v(z)}. \quad (21.41)$$

Если в результате решения электродинамической задачи о нерегулярности в волноводе или экспериментальным путем определен коэффициент отражения  $\rho_v(z)$ , то соотношения (21.41) используют при построении эквивалентной схемы этой нерегулярности.

Важно подчеркнуть, что в волноводной технике непосредственным объектом измерений является именно коэффициент отражения (21.40), а не величины  $\dot{U}_v(z)$ ,  $\dot{I}_v(z)$  и  $Z_{bv}$ , которые вводятся условно, являются неоднозначными и не могут быть определены экспериментально. Если, например, соответствующие значению  $C=1$  величины обозначить через  $e_v$ ,  $h_v$ ,  $\dot{U}'_v$ ,  $\dot{I}'_v$  и  $Z'_{bv}$ , то согласно (21.28), (21.31) и (21.32) величины, соответствующие значению  $C \neq 1$ , окажутся равными:  $e'_v = e_v/C$ ,  $h'_v = Ch_v$ ,  $\dot{U}'_v = C\dot{U}_v$ ,  $\dot{I}'_v = \dot{I}_v/C$ ,  $Z'_{bv} = C^2 Z_{bv}$ . Однако эта неоднозначность является несущественной, так как волновой процесс в эквивалентной длинной линии полностью характеризуется относительными величинами (коэффициент отражения, нормированное сопротивление и др.) и мощностью  $\tilde{S} = \frac{1}{2} \dot{U}_v \dot{I}_v$ , которые не зависят от выбора значения  $C$ .

В дальнейшем примем множитель  $C=1$ , при котором условия нормирования (21.39) имеют вид

$$\int_{S_{\perp}} (\mathbf{e}_v)^2 dS = 1, \quad \int_{S_{\perp}} (\mathbf{h}_v)^2 dS = 1. \quad (21.39a)$$

Подставив, например,  $\mathbf{e}_v$  из (21.33) и (21.34) в первую ф-лу (21.39a), получим для полей типов  $H_{mn}$  и  $E_{mn}$  в прямоугольном волноводе:

$$A_v = \sqrt{\frac{2}{ab}} \frac{1}{\kappa_v} \text{ при } m=0 \text{ или } n=0; \quad (21.42)$$

$$A_v = \frac{2}{\sqrt{ab}} \frac{1}{\kappa_v} \text{ при } m \neq 0 \text{ и } n \neq 0,$$

где, как обычно,

$$\kappa_v = \sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2}.$$

Приведенные выше рассуждения относились к бегущим волнам  $v$ -го (рабочего) типа. Однако их можно распространить и на местное поле  $v$ -го типа, которое образуется вблизи нерегулярности. При этом эквивалентная длинная линия имеет коэффициент распространения  $\gamma_v = \alpha_v$  и волновое сопротивление  $Z_{bv} = Z_{cv}$  при  $C=1$ , определяемое из (18.18) и являющееся мнимой величиной: условные напряжение  $\dot{U}_{v+}(z)$  и ток  $I_{v+}(z)$  соответствуют местному полю, экспоненциально затухающему в направлении положительных значений  $z$  ( $e^{-\gamma_v z} = e^{-\alpha_v z}$ ), напряжение  $\dot{U}_-(z)$  и ток  $I_-(z)$  — местному полю, затухающему в направлении отрицательных значений  $z$  ( $e^{\gamma_v z} = e^{\alpha_v z}$ ).

#### 21.4. ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ПОЛНОГО ПОЛЯ В ВОЛНОВОДЕ ВЕКТОРНЫМИ РЯДАМИ. МОЩНОСТЬ, ПЕРЕНОСИМАЯ ПОЛНЫМ ПОЛЕМ ВДОЛЬ ВОЛНОВОДА

Существующее в волноводе без потерь полное поле в самом общем случае представляет собой суперпозицию бесконечного числа полей всех типов, которые свойственны соответствующему регулярному волноводу. При этом для поперечных векторов полного поля имеем с учетом (21.35) следующие векторные ряды:

$$\dot{\mathbf{E}}_{\perp}(u, v, z) = \sum_{v=1}^{\infty} \dot{\mathbf{E}}_{\perp v}(u, v, z) = \sum_{v=1}^{\infty} \dot{U}_v(z) \mathbf{e}_v(u, v),$$

$$\mathbf{H}_\perp(u, v, z) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \mathbf{H}_{\perp\nu}(u, v, z) = \sum_{\nu=1}^{\infty} I_\nu(z) \mathbf{h}_\nu(u, v). \quad (21.43)$$

Здесь полю каждого типа присвоен определенный порядковый номер. Эта нумерация может быть проведена, например, в порядке возрастания критических частот.

Как можно показать в общем виде (см., например, [16]), векторные собственные функции  $\mathbf{e}$  и  $\mathbf{h}$  регулярного волновода без потерь обладают важным *свойством ортогональности*, которое заключается в том, что для двух полей различной структуры ( $\nu' \neq \nu$ ) выполняются равенства:

$$\int_{S_\perp} \mathbf{e}_\nu \mathbf{e}_{\nu'} dS = 0, \quad \int_{S_\perp} \mathbf{h}_\nu \mathbf{h}_{\nu'} dS = 0, \quad (21.44)$$

где  $S_\perp$  — поперечное сечение волновода.

Условия ортогональности (21.44) и нормирования (21.39a) объединяются следующими *условиями ортонормирования* векторных собственных функций:

$$\int_{S_\perp} \mathbf{e}_\nu \mathbf{e}_{\nu'} dS = \int_{S_\perp} \mathbf{h}_\nu \mathbf{h}_{\nu'} dS = \begin{cases} 1 & \text{при } \nu' = \nu, \\ 0 & \text{при } \nu' \neq \nu. \end{cases} \quad (21.45)$$

Полная мощность, переносимая через поперечное сечение волновода в направлении  $\mathbf{z}^0$ , определяется известной формулой

$$\tilde{S} = \frac{1}{2} \int_{S_\perp} [\mathbf{E}_\perp \mathbf{H}_\perp^*] \mathbf{z}^0 dS = \frac{1}{2} \int_{S_\perp} \mathbf{E}_\perp [\mathbf{H}_\perp^* \mathbf{z}^0] dS. \quad (21.46)$$

Представив поля векторными рядами (21.43), имеем при учете (21.31) и  $C=1$ :

$$\begin{aligned} [\mathbf{H}_\perp^* \mathbf{z}^0] &= \sum_{\nu'=1}^{\infty} I_{\nu'}^* [\mathbf{h}_{\nu'} \mathbf{z}^0] = \sum_{\nu'=1}^{\infty} I_{\nu'}^* \mathbf{e}_{\nu'}, \\ \mathbf{E}_\perp [\mathbf{H}_\perp^* \mathbf{z}^0] &= \left( \sum_{\nu=1}^{\infty} U_\nu \mathbf{e}_\nu \right) \left( \sum_{\nu'=1}^{\infty} I_{\nu'}^* \mathbf{e}_{\nu'} \right) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{\nu'=1}^{\infty} U_\nu I_{\nu'}^* \mathbf{e}_\nu \mathbf{e}_{\nu'}. \end{aligned} \quad (21.47)$$

Введение различных индексов  $\nu$  и  $\nu'$  в рядах для  $\mathbf{E}_\perp$  и  $\mathbf{H}_\perp$  показывает, что в выражении (21.47) суммирование проводится по всем возможным значениям  $\nu$  и  $\nu'$ , которые изменяются независимо друг от друга.

Подставив (21.47) в (21.46), изменив очередность интегрирования и суммирования и используя условия ортонормирования (21.45), получим

$$\tilde{S}(z) = \frac{1}{2} \sum_{\nu=1}^{\infty} U_\nu(z) I_\nu^*(z) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \tilde{S}_\nu(z). \quad (21.48)$$

Таким образом, передача мощности вдоль регулярного волновода без потерь осуществляется полями различных типов независимо друг от друга. Свойство ортогональности векторных собственных функций (21.44) физически означает отсутствие связи в регулярном волноводе без потерь между полями различных типов, которые не влияют друг на друга.

### 21.5. ЭКВИВАЛЕНТНАЯ СХЕМА НЕРЕГУЛЯРНОСТИ В ВОЛНОВОДЕ

Рассмотрим здесь в общем виде взаимосвязь между обусловленным нерегулярностью множеством полей различных типов и ее эквивалентной схемой. Пусть область нерегулярности  $V$  ограничена поперечными сечениями  $S'_\perp$  и  $S''_\perp$  двух в общем случае различных волноводов 1 и 2, в каждом из которых распространяется бегущая волна только одного рабочего типа (рис. 21.4).

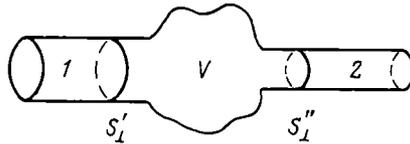


РИС. 21.4

В волноводе 1, кроме падающей волны рабочего типа, существуют обусловленные нерегулярностью отраженная волна рабочего типа и местные поля высших типов. В согласованном с нагрузкой волноводе 2 существуют падающая волна рабочего типа (прошедшая сквозь нерегулярность) и местные поля высших типов. При этом согласно (21.43) имеем:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{E}}'_\perp &= \dot{\mathbf{E}}'_{\perp 1+} + \sum_{v=1}^{\infty} \dot{\mathbf{E}}'_{\perp v-} = \dot{U}'_1 \mathbf{e}'_1 + \sum_{v=2}^{\infty} \dot{U}'_{v-} \mathbf{e}'_v, \\ \dot{\mathbf{H}}'_\perp &= \dot{\mathbf{H}}'_{\perp 1+} + \sum_{v=1}^{\infty} \dot{\mathbf{H}}'_{\perp v-} = \dot{I}'_1 \mathbf{h}'_1 + \sum_{v=2}^{\infty} \dot{I}'_{v-} \mathbf{h}'_v, \end{aligned} \quad (21.49)$$

где  $\dot{U}'_1 = \dot{U}'_{1+} + \dot{U}'_{1-}$ ,  $\dot{I}'_1 = \dot{I}'_{1+} + \dot{I}'_{1-}$ ,

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{E}}''_\perp &= \sum_{v=1}^{\infty} \dot{\mathbf{E}}''_{\perp v+} = \dot{U}''_1 \mathbf{e}''_1 + \sum_{v=2}^{\infty} \dot{U}''_{v+} \mathbf{e}''_v, \\ \dot{\mathbf{H}}''_\perp &= \sum_{v=1}^{\infty} \dot{\mathbf{H}}''_{\perp v+} = \dot{I}''_1 \mathbf{h}''_1 + \sum_{v=2}^{\infty} \dot{I}''_{v+} \mathbf{h}''_v. \end{aligned} \quad (21.50)$$

Здесь и далее одним штрихом обозначены величины, относящиеся к сечению  $S'_\perp$  первого волновода, двумя штрихами — к сечению  $S''_\perp$  второго волновода; волны рабочего типа обозначены индексом  $v=1$ .

Представим соотношение (21.32) (при  $C=1$ ) в виде

$$\dot{I}_{v\pm}(z) = \pm Y_{cv} \dot{U}_{v\pm}(z), \quad (21.51)$$

где вместо характеристического сопротивления поля  $Z_{cv}$  введена его характеристическая проводимость  $Y_{cv} = 1/Z_{cv}$ . Для бегущих волн рабочего типа характеристическая проводимость согласно (18.16) является вещественной:

$$Y_{c1} = g_1; \quad (21.52)$$

для местных полей высших типов ( $v \geq 2$ ) характеристические проводимости согласно (18.18) оказываются мнимыми:

$$Y_{cv} = i b_v, \quad v = 2, 3 \dots, \quad (21.53)$$

причем для полей класса Н они имеют индуктивный характер ( $b_h = -a_h/\omega\mu_a < 0$ ), для полей класса Е — емкостный ( $b_e = \omega\epsilon_a/\alpha_e > 0$ ).

Рассмотрим случай нерегулярности, при котором в боковых стенках волноводов нет щелей или отверстий. Применим теорему Умова—Пойнтинга (4.32) к объему  $V$ , ограниченному идеально проводящими боковыми стенками и сечениями  $S'_\perp$  и  $S''_\perp$ , приняв во внимание, что внутри объема  $\dot{\delta}_{ct} = 0$ :

$$P_{п.ср} + i 2 \omega (W_{м.ср} - W_{э.ср}) + \frac{1}{2} \int_{S'_\perp} [\dot{\mathbf{E}}' \dot{\mathbf{H}}'] dS' + \frac{1}{2} \int_{S''_\perp} [\dot{\mathbf{E}}'' \dot{\mathbf{H}}''] dS'' = 0. \quad (21.54)$$

Используя (21.49), (21.50), (21.31), (21.45),  $dS' = -z^0 dS'$  и  $dS'' = z^0 dS''$ , получим таким же путем, как при выводе (21.48), выражения:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_{S'_\perp} [\dot{\mathbf{E}}' \dot{\mathbf{H}}'] dS' &= -\frac{1}{2} \dot{U}'_1 \dot{I}'_1 - \frac{1}{2} \sum_{v=2}^{\infty} \dot{U}'_{v-} \dot{I}'_{v-}, \\ \frac{1}{2} \int_{S''_\perp} [\dot{\mathbf{E}}'' \dot{\mathbf{H}}''] dS'' &= \frac{1}{2} \dot{U}''_{1+} \dot{I}''_{1+} + \frac{1}{2} \sum_{v=2}^{\infty} \dot{U}''_{v+} \dot{I}''_{v+}. \end{aligned} \quad (21.55)$$

Подставив (21.55) в (21.54), найдем

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \dot{U}'_1 \dot{I}'_1 &= \frac{1}{2} \dot{U}''_{1+} \dot{I}''_{1+} + P_{п.ср} - \frac{1}{2} \sum_{v=2}^{\infty} \dot{U}'_{v-} \dot{I}'_{v-} + \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{v=2}^{\infty} \dot{U}''_{v+} \dot{I}''_{v+} + i 2 \omega (W_{м.ср} - W_{э.ср}). \end{aligned} \quad (21.56)$$

Напишем соотношение, комплексно сопряженное с (21.56):

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \dot{U}'_1 \dot{I}'_1 = \frac{1}{2} \dot{U}''_{1+} \dot{I}''_{1+} + P_{\text{п.ср}} - \frac{1}{2} \sum_{\nu=2}^{\infty} \dot{U}''_{\nu-} \dot{I}'_{\nu-} + \\ + \frac{1}{2} \sum_{\nu=2}^{\infty} \dot{U}''_{\nu+} \dot{I}''_{\nu+} + i 2 \omega (W_{\text{э.ср}} - W_{\text{м.ср}}). \end{aligned} \quad (21.57)$$

Поскольку эквивалентная входная проводимость в сечении  $S'_\perp$  для волны рабочего типа определяется выражением  $Y = \dot{I}'_1 / \dot{U}'_1$ , то в (21.57) слева стоит  $\frac{1}{2} |\dot{U}'_1|^2 Y$ . Заменяя справа  $\dot{I}_{\nu\pm}$  согласно ф-лам (21.51)—(21.53) и поделив (21.57) на  $\frac{1}{2} |\dot{U}'_1|^2$ , получим

$$Y = \dot{I}'_1 / \dot{U}'_1 = g_{\text{н}} + g_{\text{п}} + i(b' + b'' + b_{\text{w}}) = g + i b, \quad (21.58)$$

где

$$\begin{aligned} g_{\text{н}} &= \frac{|\dot{U}''_{1+}|^2}{|\dot{U}'_1|^2} g''_1, & g_{\text{п}} &= \frac{2 P_{\text{п.ср}}}{|\dot{U}'_1|^2}, \\ b' &= \sum_{\nu=2}^{\infty} \frac{|\dot{U}''_{\nu-}|^2}{|\dot{U}'_1|^2} b''_{\nu}, & b'' &= \sum_{\nu=2}^{\infty} \frac{|\dot{U}''_{\nu+}|^2}{|\dot{U}'_1|^2} b''_{\nu}, \\ b_{\text{w}} &= \frac{4 \omega (W_{\text{э.ср}} - W_{\text{м.ср}})}{|\dot{U}'_1|^2}. \end{aligned}$$

Из (21.58) следует, что активная часть эквивалентной проводимости обусловлена существованием в сечении  $S'_\perp$  второго волновода бегущей волны рабочего типа ( $g_{\text{н}}$ ) и потерями в объеме  $V(g_{\text{п}})$ . Реактивная часть эквивалентной проводимости обусловлена существованием местных полей высших типов в сечениях  $S'_\perp$  первого волновода ( $b'$ ) и  $S''_\perp$  второго волновода ( $b''$ ) и разностью средних значений электрической и магнитной энергий в объеме  $V(b_{\text{w}})$ . Если, например, определять  $Y$  в сечении  $S'_\perp$ , которое настолько удалено от нерегулярности, что местными полями можно

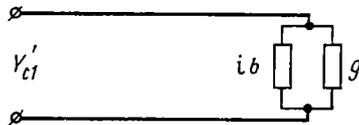


РИС. 21.5

пренебречь, то составляющая  $b' = 0$ . В этом случае влияние местных полей первого волновода на реактивную часть проводимости будет учтено соответствующим значением составляющей  $b_{\text{w}}$ . Точ-

но так же расположение сечения  $S_{\perp}^*$  в области, в которой можно пренебречь местными полями, приводит к значению  $b''=0$ , но в то же время изменяет значение  $b_{1V}$  из-за существования во втором волноводе местных полей.

Отобразив относительно сечения  $S_{\perp}^*$  нерегулярность схемой замещения согласно (21.58) и представив расположенный перед сечением  $S_{\perp}^*$  волновод  $I$  с бегущими волнами рабочего типа эквивалентной длинной линией с волновой проводимостью  $Y'_{\text{н}} = Y'_{c1} = g'_{1}$ , получим эквивалентную схему рис. 21.5.

## 21.6. ПЛОСКИЕ НЕРЕГУЛЯРНОСТИ В ВОЛНОВОДЕ

Наиболее просто решаются электродинамические задачи о плоских нерегулярностях, имеющих нулевую протяженность вдоль оси волновода (например, бесконечно тонкие диафрагмы, скачкообразные изменения поперечного сечения волновода).

Для построения эквивалентных схем таких нерегулярностей можно воспользоваться ф-лой (21.58). Поместим поперечные сечения  $S_{\perp}^*$  и  $S_{\perp}^*$  вплотную к плоской нерегулярности с обеих ее сторон. При этом объем  $V$  оказывается равным нулю, вследствие чего  $W_{\text{м.ср}} = W_{\text{в.ср}} = 0$ ,  $P_{\text{п.ср}} = 0$  и соответственно  $b_w = 0$ ,  $g_{\text{п}} = 0$ . При этом с учетом  $Y_{c1} = g_1$  и согласно (21.58) получаем

$$Y = n_1^{\prime 2} Y_{c1} + i \left( \sum_{v=2}^{\infty} n_v^{\prime 2} b_v' + \sum_{v=2}^{\infty} n_v^{\prime 2} b_v'' \right) = g + i b, \quad (21.59)$$

где введены обозначения  $n_1'' = |\dot{U}''_{1+}|/|\dot{U}'_1|$ ,  $n_v' = |\dot{U}'_{v-}|/|\dot{U}'_1|$ ,  $n_v'' = |\dot{U}''_{v+}|/|\dot{U}'_1|$ .

Для определения фигурирующих в (21.59) отношений модулей условных напряжений нужно знать распределение в плоскости нерегулярности касательной к ней составляющей  $\dot{E}_{\tau}$  полного поля. Эта составляющая, как правило, остается синфазной на отверстии  $S_0$  плоской нерегулярности и обращается в нуль на идеально проводящих поперечных стенках, вследствие чего может быть представлена следующим образом:

$$\dot{E}_{\tau} = \begin{cases} \dot{U}_0 \dot{E}_{\tau}^0(u, v) & \text{на } S_0, \\ 0 & \text{на } S_{\perp} \neq S_0, \end{cases} \quad (21.60)$$

где  $\dot{U}_0$  — амплитудный множитель, характеризующий величину и фазу касательного вектора  $\dot{E}_{\tau}$ ;  $\dot{E}_{\tau}^0(u, v)$  — векторная вещественная функция поперечных координат.

Поля  $\dot{E}'_{\perp}$  (21.49) и  $\dot{E}''_{\perp}$  (21.50) в плоскости нерегулярности должны обращаться в поле (21.60):

$$\dot{U}'_1 \mathbf{e}'_1 + \sum_{v=2}^{\infty} \dot{U}'_{v-} \mathbf{e}'_v = \dot{U}_0 \mathbf{E}_{\tau}^0,$$

$$\sum_{v=1}^{\infty} \dot{U}_{v+} \mathbf{e}_v'' = \dot{U}_0 \mathbf{E}_\tau^0. \quad (21.61)$$

Для нахождения условного напряжения  $\dot{U}_{v+}'$ , поля любого типа  $v'$  в сечении  $S_{\perp}''$  второго волновода умножим скалярно второе выражение (21.61) на  $\mathbf{e}_v''$ , проинтегрируем по площади  $S_{\perp}''$  и используем условия ортонормирования (21.45). При этом в левой части равенства обратятся в нуль все слагаемые, за исключением одного, у которого  $v=v'$ :

$$\dot{U}_{v+}' = \dot{U}_0 \int_{S_{\perp}''} \mathbf{E}_\tau^0 \mathbf{e}_v'' \cdot d\mathbf{S} = \dot{U}_0 \int_{S_0} \mathbf{E}_\tau^0 \mathbf{e}_v'' \cdot d\mathbf{S}. \quad (21.62)$$

В этом интеграле площадь сечения  $S_{\perp}''$  заменена площадью отверстия  $S_0$ , так как только на нем  $\mathbf{E}_\tau^0 \neq 0$ .

Аналогичным путем из первого выражения (21.61) выводятся соотношения:

$$\dot{U}_1' = \dot{U}_0 \int_{S_0} \mathbf{E}_\tau^0 \mathbf{e}_1' \cdot d\mathbf{S}, \quad \dot{U}_{v-}' = \dot{U}_0 \int_{S_0} \mathbf{E}_\tau^0 \mathbf{e}_v' \cdot d\mathbf{S} \quad \text{при } v' \neq 1, \quad (21.63)$$

определяющие условные напряжения в сечении  $S_{\perp}'$ .

При учете (21.62) и (21.63) имеем:

$$\begin{aligned} n_1'' &= \frac{|\dot{U}_{1+}''|}{|\dot{U}_1'|} = \frac{\int_{S_0} \mathbf{E}_\tau^0 \mathbf{e}_1'' \cdot d\mathbf{S}}{\int_{S_0} \mathbf{E}_\tau^0 \mathbf{e}_1' \cdot d\mathbf{S}}; \\ n_v' &= \frac{|\dot{U}_{v-}'|}{|\dot{U}_1'|} = \frac{\int_{S_0} \mathbf{E}_\tau^0 \mathbf{e}_v' \cdot d\mathbf{S}}{\int_{S_0} \mathbf{E}_\tau^0 \mathbf{e}_1' \cdot d\mathbf{S}}; \\ n_v'' &= \frac{|\dot{U}_{v+}''|}{|\dot{U}_1'|} = \frac{\int_{S_0} \mathbf{E}_\tau^0 \mathbf{e}_v'' \cdot d\mathbf{S}}{\int_{S_0} \mathbf{E}_\tau^0 \mathbf{e}_1' \cdot d\mathbf{S}}. \end{aligned} \quad (21.64)$$

Если бы были известны точные функции  $\mathbf{E}_\tau^0(u, v)$ , то ф-лы (21.59) и (21.64) определяли бы точные значения эквивалентных проводимостей  $Y$  плоских нерегулярностей. Однако нахождение функций  $\mathbf{E}_\tau^0$  представляет собой сложную математическую задачу, которую решают с различной степенью приближения к точным значениям методами теории интегральных уравнений и вариационного исчисления. Представив плоскую нерегулярность схемой замещения в соответствии с (21.59), получим эквивалентную схему рис. 21.5, в которой  $g = n_1'' Y_{c1}''$ .

Диафрагмы. Поскольку диафрагма разделяет на две части один и тот же волновод, то  $Y'_{cv} = Y''_{cv} = Y_{cv}$ ,  $\mathbf{e}'_v = \mathbf{e}''_v = \mathbf{e}_v$ , согласно (21.62) и (21.63)

$$\begin{aligned} \dot{U}'_1 = \dot{U}''_{1+} = \dot{U}_1 = \dot{U}_0 \int_{S_0} \mathbf{E}_\tau^0 \mathbf{e}_1 dS, \\ \dot{U}'_{v-} = \dot{U}''_{v+} = \dot{U}_v = \dot{U}_0 \int_{S_0} \mathbf{E}_\tau^0 \mathbf{e}_v dS \quad \text{при } v \neq 1 \end{aligned} \quad (21.65)$$

и, следовательно, согласно (21.64)

$$n''_1 = 1, \quad n'_v = n''_v = n_v = \frac{\int_{S_0} \mathbf{E}_\tau^0 \mathbf{e}_v dS}{\int_{S_0} \mathbf{E}_\tau^0 \mathbf{e}_1 dS} \quad \text{при } v \neq 1. \quad (21.66)$$

При этом соотношение (21.59) принимает вид

$$Y = Y_{c1} + i2 \sum_{v=2}^{\infty} n_v^2 b_v = Y_{c1} + i b, \quad (21.67)$$

а эквивалентная схема рис. 21.5 переходит в схему, изображенную на рис. 21.6. Таким образом, эквивалентной схемой диафрагмы

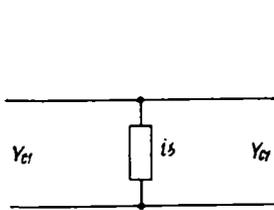


РИС. 21.6

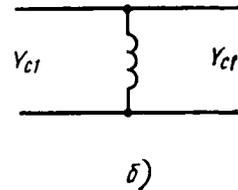
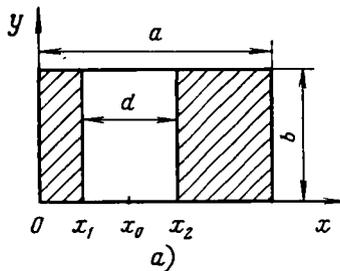


РИС. 21.7

является реактивная проводимость  $i b$ , включенная параллельно в длинную линию, эквивалентную волноводу с волной рабочего типа.

Если в (21.67) ввести отдельную нумерацию для местных полей класса Н ( $v=h$ ) и класса Е ( $v=e$ ) и учесть, что  $b_h = -\alpha_h/\omega\mu_a$  и  $b_e = \omega\epsilon_a/\alpha_e$ , то для реактивной проводимости  $b$  получим выражение

$$b = 2\omega\epsilon_a \sum_e n_e^2 \frac{1}{\alpha_e} - \frac{2}{\omega\mu_a} \sum_h n_h^2 \alpha_h = b_C - b_L. \quad (21.68)$$

Индуктивная диафрагма в прямоугольном волноводe. На рис. 21.7а указаны геометрические параметры диафрагмы, края которой параллельны узким стенкам волновода

( $x_0$  — координата середины отверстия). Поскольку геометрические размеры диафрагмы и вектор  $\mathbf{E} = y^0 \mathbf{E}$  падающей рабочей волны основного типа  $H_{10}$  не изменяются вдоль координаты  $y$ , то и вектор  $\mathbf{E}_\tau$  полного поля в плоскости диафрагмы не изменяется вдоль координаты  $y$ , параллелен орту  $y^0$  и в соответствии с (21.60) может быть представлен в виде

$$\mathbf{E}_\tau = \begin{cases} \dot{U}_0 \mathbf{E}_\tau^0(x) = \dot{U}_0 E_\tau^0(x) y^0 & \text{при } x_1 \leq x \leq x_2, \\ 0 & \text{при } 0 \leq x \leq x_1, \quad x_2 \leq x \leq a. \end{cases} \quad (21.69)$$

При этом вместо (21.65) имеем

$$\dot{U}_v = \dot{U}_0 \int_{S_0} \mathbf{E}_\tau^0 \mathbf{e}_v dS = \dot{U}_0 \int_{x_1}^{x_2} E_\tau^0(x) dx \int_0^b \mathbf{e}_v y^0 dy, \quad v = 1, 2, 3... \quad (21.70)$$

При подстановке в (21.70) векторных функций (21.33) и (21.34) интеграл  $\int_0^b \mathbf{e}_v y^0 dy$  не обращается в нуль только при  $n=0$ , т. е. в случае полей типов  $H_{m0}$ . Это означает, что на рассматриваемой диафрагме возникают поля только типов  $H_{m0}$ , все  $n_e=0$  и эквивалентная реактивность (21.68) имеет индуктивный характер (рис. 21.76). Для местных полей типов  $H_{m0}$  ( $m \geq 2$ ) в соответствии с (21.66), (21.70), (21.33) и (21.42) получим

$$n_h = n_m = \frac{\int_{x_1}^{x_2} E_\tau^0(x) \sin \frac{m \pi x}{a} dx}{\int_{x_1}^{x_2} E_\tau^0(x) \sin \frac{\pi x}{a} dx}, \quad m = 2, 3, 4... \quad (21.71)$$

Для этих же полей согласно (19.10) имеем  $a_{hm0} = \sqrt{x_{m0}^2 - k^2} = \frac{\pi}{a} \sqrt{m^2 - \left(\frac{2a}{\lambda}\right)^2}$  и для рабочей волны  $H_{10}$  согласно

(19.16) и (19.36) имеем  $Z_{c1} = \omega \mu_a / \beta_1 = \omega \mu_a \Lambda / 2\pi$ , где  $\Lambda = \frac{\lambda}{\sqrt{1 - (\lambda/2a)^2}}$ .

С учетом этих соотношений получим в соответствии с (21.68) следующее выражение для эквивалентной нормированной индуктивной проводимости:

$$\hat{b} = Z_{c1} b = -\frac{\Lambda}{a} \sum_{m=2}^{\infty} n_m^2 \sqrt{m^2 - \left(\frac{2a}{\lambda}\right)^2}. \quad (21.72)$$

В квазистатическом приближении определение функции  $E_\tau(x)$  и суммирование ряда (21.72) приводят к выражению [13]

$$\hat{b} = -\frac{\Lambda}{a} \left[ \left( \operatorname{cosec} \frac{\pi d}{2a} \operatorname{cosec} \frac{\pi x_0}{a} \right)^2 - 1 \right]. \quad (21.73)$$

Более точные формулы и графики  $\hat{b}$  приведены в [33].

Емкостная диафрагма в прямоугольном волноводе. На рис. 21.8а указаны геометрические параметры диафрагмы, края которой параллельны широким стенкам волновода ( $y_0$  — координата середины отверстия). Поскольку геометрические

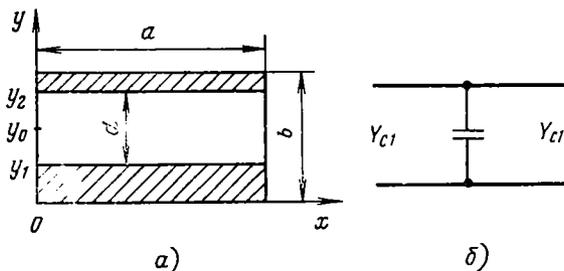


РИС. 21.8

кие размеры диафрагмы не изменяются вдоль координаты  $x$ , то при падении волны типа  $H_{10}$  вектор  $\vec{E}_\tau$  полного поля изменяется вдоль координаты  $x$  по тому же закону, что и вектор  $\vec{E}$  волны  $H_{10}$ :

$$\vec{E}_\tau = \begin{cases} \dot{U}_0 \vec{E}_\tau^0(x, y) = \dot{U}_0 f(y) \sin \frac{\pi x}{a} y^0 & \text{при } y_1 \leq y < y_2, \\ 0 & \text{при } 0 \leq y < y_1, \quad y_2 \leq y \leq b. \end{cases} \quad (21.74)$$

При этом (21.65) принимает вид

$$\dot{U}_v = \dot{U}_0 \int_{S_v} \vec{E}_\tau^0 \cdot \vec{e}_v dS = \dot{U}_0 \int_{y_1}^{y_2} f(y) dy \int_0^a \vec{e}_v y^0 \sin \frac{\pi x}{a} dx, \quad v = 1, 2, 3... \quad (21.75)$$

Подставим в (21.75) соотношения (21.33) и (21.34). Вследствие ортогональности функций  $\sin(\pi x/a)$  и  $\sin(m\pi x/a)$  в промежутке

$(0, a)$  интеграл  $\int_0^a \vec{e}_v y^0 \sin \frac{\pi x}{a} dx$  не обращается в нуль только при

$m=1$ , т. е. на диафрагме возникают поля только типов  $H_{10}$ ,  $H_{1n}$  и  $E_{1n}$ . Поступая таким же образом, как в предыдущем случае, нетрудно показать, что эквивалентная реактивная проводимость (21.68) диафрагмы получается положительной, т. е. имеет емкостный характер (рис. 21.8б). В квазистатическом приближении определение функции  $f(y)$  в (21.74) и суммирование ряда вида (21.72) приводят к формуле

$$\hat{b} = \frac{4b}{\Lambda} \ln \left( \operatorname{cosec} \frac{\pi d}{2b} \operatorname{cosec} \frac{\pi y_0}{b} \right), \quad (21.76)$$

где  $b$  — размер узкой стенки волновода. Более точные формулы и графики  $\hat{b}$  приведены в [33].

Резонансная диафрагма в прямоугольном волноводе. На рис. 21.9а изображена диафрагма, размеры  $a_1$  и  $b_1$  прямоугольного отверстия которой меньше сторон  $a$  и  $b$  волновода. Для рабочей волны  $H_{10}$  такая диафрагма имеет эквивалентную схему в виде параллельного колебательного контура (рис. 21.9б). Если  $a_1$  и  $b_1$  удовлетворяют соотношению

$$\frac{a_1}{b_1} \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{2a_1}\right)^2} \approx \frac{a}{b} \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{2a}\right)^2}, \quad (21.77)$$

то рассматриваемая диафрагма становится резонансной, т. е. ее эквивалентная проводимость оказывается равной нулю. Волна  $H_{10}$  проходит через резонансную диафрагму без отражения, так

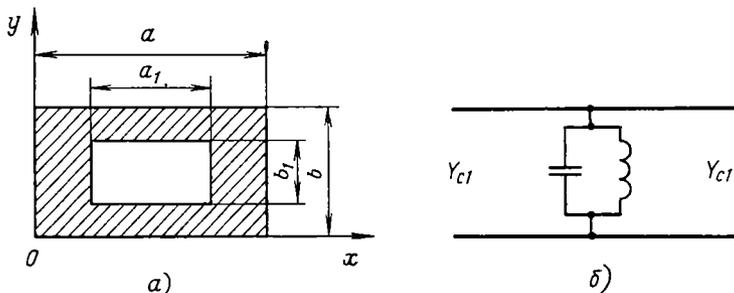


РИС. 21.9

как в этом случае волны, отраженные от эквивалентных индуктивности и емкости (рис. 21.9б), имеют одинаковые амплитуды и противоположные фазы и компенсируют друг друга. Очевидно, что при заданных  $a$ ,  $b$  и  $\lambda$  одно уравнение (21.77) не может определить однозначно два размера  $a_1$  и  $b_1$  диафрагмы. Согласно (21.77) предельные случаи резонансной диафрагмы таковы:  $a_1 = a$ ,  $b_1 = b$  (диафрагма отсутствует) и  $a_1 \rightarrow \lambda/2$ ,  $b_1 \rightarrow 0$  (узкая поперечная щель).

### 21.7. ШТЫРИ В ПРЯМОУГОЛЬНОМ ВОЛНОВОДЕ

Будем полагать, что прямоугольный волновод работает в одноволновом режиме.

На рис. 21.10 изображена нерегулярность в виде металлической тонкой полоски, соединяющей широкие стенки волновода. Рассуждая таким же образом, как при исследовании индуктивной диафрагмы (см. § 21.6), легко прийти к выводу, что полоска на рис. 21.10 имеет эквивалентную индуктивную проводимость. От полоски нетрудно качественно перейти к нерегулярности в виде металлического штыря радиуса  $r$ , соединяющего широкие стенки волновода и ориентированного вдоль линий  $E$  рабочей волны  $H_{10}$  (рис. 21.11). Этот штырь характеризуется эквивалентной индуктивной проводимостью, нормированное значение которой при ма-

лом радиусе определено в [20] из решения соответствующей электродинамической задачи:

$$\hat{b} = - \frac{2 \frac{\Lambda}{a} \sin^2 \frac{\pi d}{a}}{\ln \left( \frac{2a}{\pi r} \sin \frac{\pi d}{a} \right) - \sin^2 \frac{\pi d}{a} \left( 2 + \frac{k^2 a^2}{\pi^2} \right) + \rightarrow} \rightarrow + k^2 d^2 \left( - \ln \frac{2 \pi d}{a} + \frac{3}{2} + \frac{\pi^2 d^2}{36 a^2} \right), \quad (21.78)$$

и называется индуктивным.

В волноводной технике в качестве реактивного элемента очень часто используется штырь (или настроечный винт), ориентиро-

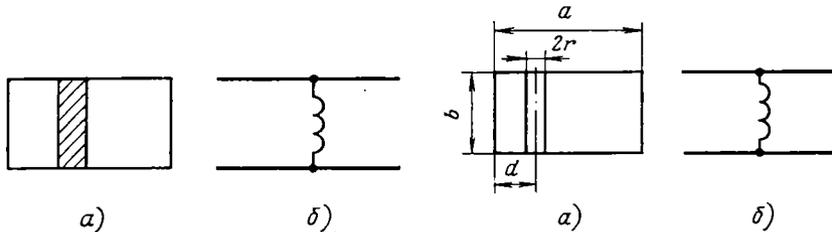


РИС. 21.10

РИС. 21.11

ванный вдоль линий  $\mathbf{E}$ , но не соединяющий широкие стенки (рис. 21.12). Схемой замещения такого штыря также является реактивная проводимость, включенная в соответствующее сечение длинной линии, эквивалентной волноводу с волной  $H_{10}$ . Нормированное значение  $\hat{b}$  этой проводимости определено в [20] и зависит от длины штыря  $l$ , его радиуса  $r$  и места расположения на широкой стенке  $d$ :

$$\hat{b} = \frac{2 \pi d^2 \lambda \Lambda}{a^3 b} \frac{(1 - \cos kl)^2}{\ln(2d/r) \sin 2kl - k(2d-r)(2 + \cos 2kl)}. \quad (21.79)$$

Эта формула выведена в предположении, что расстояние от торца штыря до стенки  $b-l$  значительно больше диаметра штыря  $2r$ . При

$$l = l_p \approx \frac{\lambda}{4} - \frac{2d-r}{2 \ln(2d/r)} \quad (21.80)$$

знаменатель в (21.79) обращается в нуль и проводимость  $\hat{b}$  принимает бесконечно большое значение, что равносильно включению в эквивалентную длинную линию последовательного резонансного контура. Поэтому штырь длиной  $l_p$ , которая близка к  $\lambda/4$ , называют *резонансным*. Волновод оказывается замкнутым накоротко резонансным штырем — между генератором и штырем устанавливается режим стоячей волны. Согласно (21.79) при дли-

не  $l < l_p$  проводимость  $\hat{b} > 0$ , т. е. штырь характеризуется емкостной проводимостью и называется емкостным; при длине  $l > l_p$  проводимость  $\hat{b} < 0$  и штырь является индуктивным.

Расположив в одном сечении волновода индуктивную диафрагму и емкостный штырь, можно получить так называемый ре-

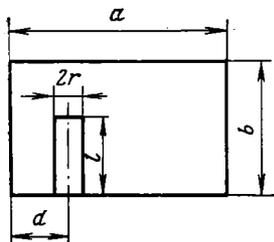
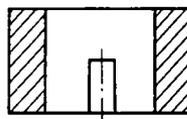
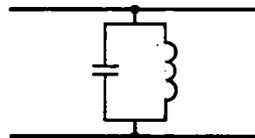


РИС. 21.12



а)



б)

РИС. 21.13

зонанный зазор (рис. 21.13), эквивалентная схема которого представляет собой параллельный резонансный контур. Резонансный зазор легко перестраивать с одной резонансной частоты на другую путем изменения длины штыря, что выгодно отличает его от резонансной диафрагмы и определяет широкое применение в различных устройствах.

## 21.8. ВОЛНОВАЯ МАТРИЦА РАССЕЯНИЯ

Для исследования прохождения рабочего типа волны по сложному волноводному тракту наряду с методом эквивалентных схем, позволяющим использовать теорию линейных электрических цепей, широко применяют метод волновых матриц *рассеяния* и *передачи*. В волноводной технике объектами измерений являются не параметры эквивалентных схем, а коэффициенты отражения и передачи, которые характеризуют волновой процесс и устанавливают связь между падающими, отраженными и прошедшими через пассивный узел волнами рабочего типа. По этой причине для анализа электродинамических устройств удобно использовать волновую матрицу рассеяния, элементами которой как раз и являются коэффициенты отражения и передачи. При известном решении электродинамической задачи для какого-либо узла легко определить теоретическим путем элементы его матрицы рассеяния и сравнить затем теорию с экспериментом. С другой стороны, элементы матрицы рассеяния узла, для которого отсутствует решение электродинамической задачи или внутреннее устройство которого неизвестно, могут быть легко определены из эксперимента.

Отметим здесь, что для правильного экспериментального определения этих коэффициентов измерения должны производиться на таких расстояниях от нерегулярности, при которых можно прене-

бречь местными затухающими полями высших типов и в волноводе существует поле простой структуры, образованное волнами рабочего типа.

Волновые матрицы передачи целесообразно применять при исследовании каскадного соединения двухплечных узлов (см. § 21.9).

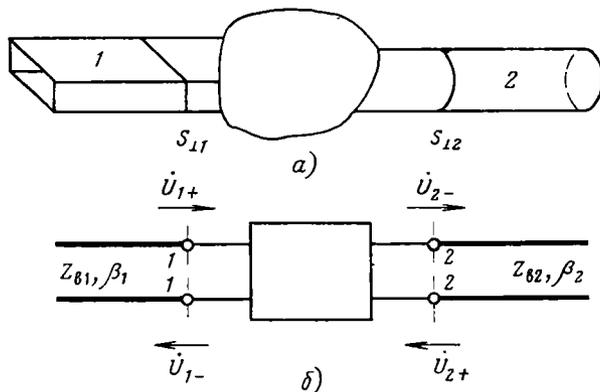


РИС. 21.14

Матрица рассеяния четырехполюсника. Введем матрицу рассеяния на наиболее простом примере двухплечного узла (рис. 21.14а). Как и ранее, будем полагать, что в каждом плече распространяется лишь один (рабочий) тип волны. При этом условии каждое плечо можно заменить эквивалентной длиной линией, а двухплечный узел — эквивалентным четырехполюсником (рис. 21.14б).

При введении волновых матриц волны условного напряжения (и тока), которые бегут к *четыреполюснику*, обычно называют *падающими*; обозначим комплексные амплитуды этих волн в выбранных граничных поперечных сечениях линий (на зажимах четырехполюсника) через  $U_{1+}$  и  $U_{2+}$  (см. рис. 21.14б). Соответственно волны, бегущие от *четыреполюсника*, называют *отраженными*. Несмотря на то, что они обусловлены не только отражением от четырехполюсника, но и прохождением волн с одной пары зажимов (полюсов) на другую; обозначим комплексные амплитуды отраженных волн на зажимах через  $U_{1-}$  и  $U_{2-}$  (см. рис. 21.14б).

Как правило, пассивные волноводные узлы являются линейными устройствами, к которым применим принцип суперпозиции. При этом амплитуды отраженных волн  $U_{1-}$  и  $U_{2-}$  линейно зависят как от  $U_{1+}$ , так и от  $U_{2+}$ :

$$U_{1-} = s_{11}U_{1+} + s_{12}U_{2+}, \quad U_{2-} = s_{21}U_{1+} + s_{22}U_{2+}. \quad (21.81)$$

Здесь  $s_{11}$ ,  $s_{12}$ ,  $s_{21}$  и  $s_{22}$  — комплексные постоянные коэффициенты пропорциональности.

Согласно соотношениям  $P_{\text{ср}\pm} = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \dot{U}_{\pm} \dot{I}_{\pm}^*$  и (21.32) мощности, переносимые падающими и отраженными бегущими волнами через граничные поперечные сечения в плечах, определяются формулой  $P_{\text{ср}+} = |\dot{U}_{\pm}|^2 / 2Z_{\text{в}}$ , где  $Z_{\text{в}}$  — волновое сопротивление длинной линии, эквивалентной волноводу с волной рабочего типа (см. § 21.3). В общем случае в системе ур-ний (21.81) одновременно фигурируют условные напряжения различных типов рабочих волн в различных по устройству плечах узла, которым соответствуют различные волновые сопротивления  $Z_{\text{в}1}$  и  $Z_{\text{в}2}$ . В этих условиях в ур-ниях (21.81) следует перейти от комплексных амплитуд  $\dot{U}_{i\pm}$  к так называемым *нормированным* комплексным амплитудам падающих ( $\dot{a}_i$ ) и отраженных ( $\dot{b}_i$ ) волн условного напряжения, которые определяются выражениями:

$$\begin{aligned} \dot{a}_1 &= \dot{U}_{1+} / \sqrt{Z_{\text{в}1}}, & \dot{a}_2 &= \dot{U}_{2+} / \sqrt{Z_{\text{в}2}}, \\ \dot{b}_1 &= \dot{U}_{1-} / \sqrt{Z_{\text{в}1}}, & \dot{b}_2 &= \dot{U}_{2-} / \sqrt{Z_{\text{в}2}}. \end{aligned} \quad (21.82)$$

Нормированные амплитуды (21.82) связаны с мощностями бегущих волн соотношениями

$$\begin{aligned} P_{\text{ср}+} &= \frac{1}{2} \dot{a} \dot{a}^* = \frac{1}{2} |\dot{a}|^2, \\ P_{\text{ср}-} &= \frac{1}{2} \dot{b} \dot{b}^* = \frac{1}{2} |\dot{b}|^2 \end{aligned} \quad (21.83)$$

и имеют размерность корня квадратного из мощности. Чтобы ввести нормированные амплитуды в систему (21.81), представим ее в виде:

$$\begin{aligned} \frac{\dot{U}_{1-}}{\sqrt{Z_{\text{в}1}}} &= s_{11} \frac{\dot{U}_{1+}}{\sqrt{Z_{\text{в}1}}} + \left( s_{12} \sqrt{\frac{Z_{\text{в}2}}{Z_{\text{в}1}}} \right) \frac{\dot{U}_{2+}}{\sqrt{Z_{\text{в}2}}}, \\ \frac{\dot{U}_{2-}}{\sqrt{Z_{\text{в}2}}} &= \left( s_{21} \sqrt{\frac{Z_{\text{в}1}}{Z_{\text{в}2}}} \right) \frac{\dot{U}_{1+}}{\sqrt{Z_{\text{в}1}}} + s_{22} \frac{\dot{U}_{2+}}{\sqrt{Z_{\text{в}2}}}. \end{aligned} \quad (21.84)$$

Из (21.82) и (21.84) получим систему уравнений:

$$\dot{b}_1 = S_{11} \dot{a}_1 + S_{12} \dot{a}_2, \quad \dot{b}_2 = S_{21} \dot{a}_1 + S_{22} \dot{a}_2, \quad (21.85)$$

которую можно записать в матричной (табличной) форме

$$\begin{bmatrix} \dot{b}_1 \\ \dot{b}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{a}_1 \\ \dot{a}_2 \end{bmatrix} = [S] \begin{bmatrix} \dot{a}_1 \\ \dot{a}_2 \end{bmatrix}, \quad (21.86)$$

где  $[S]$  — *волновая матрица рассеяния* четырехполюсника. Из (21.86) следует, что матрица рассеяния связывает нормированные комплексные амплитуды условных напряжений отраженных и падающих волн.

Из системы (21.85) вытекают формулы:

$$\begin{aligned} S_{11} &= \frac{\dot{b}_1}{\dot{a}_1} \Big|_{\dot{a}_2=0}, & S_{21} &= \frac{\dot{b}_2}{\dot{a}_1} \Big|_{\dot{a}_2=0}, \\ S_{22} &= \frac{\dot{b}_2}{\dot{a}_2} \Big|_{\dot{a}_1=0}, & S_{12} &= \frac{\dot{b}_1}{\dot{a}_2} \Big|_{\dot{a}_1=0}, \end{aligned} \quad (21.87)$$

которые определяют простой физический смысл элементов матрицы рассеяния. При учете (21.82) из (21.87) следует, что элемент  $S_{ii}$  есть комплексный коэффициент отражения по напряжению на  $i$ -х зажимах при отсутствии падающей волны на других зажимах. Элемент  $S_{ki}$  определяет отношение нормированных комплексных амплитуд отраженной волны на  $k$ -х зажимах и падающей волны на  $i$ -х зажимах при отсутствии падающей волны на  $k$ -х зажимах, т. е.  $S_{ki}$  является комплексным коэффициентом передачи с  $i$ -х зажимов на  $k$ -е. Отсутствие падающей волны на  $k$ -х зажимах означает не только отсутствие генератора в  $k$ -й линии, но и наличие в ней согласованной нагрузки.

Значения элементов матрицы рассеяния  $[S]$  определяются только конструкцией волноводного узла и положением граничных сечений. Если плечи узла можно рассматривать как линии без потерь, то при изменении положения граничных сечений элементы матрицы рассеяния изменяются только по аргументу и остаются неизменными по модулю.

Свойства матрицы рассеяния. В большинстве случаев пассивные волноводные узлы являются не только линейными, но и взаимными и реактивными устройствами.

Во взаимном четырехполюснике (т. е. удовлетворяющем теореме взаимности) коэффициенты передачи (21.87) в противоположных направлениях одинаковы:

$$S_{12} = S_{21}. \quad (21.88)$$

Отметим, что если волновые сопротивления плеч узла различны, то равенство (21.88) не выполняется для коэффициентов передачи  $s_{12}$  и  $s_{21}$ , фигурирующих в ур-ниях (21.81). Это обстоятельство и является причиной перехода от амплитуд  $U_{i\pm}$  к нормированным амплитудам  $\dot{a}_i$  и  $\dot{b}_i$ .

В реактивном четырехполюснике (в котором можно пренебречь потерями) сумма мощностей падающих волн равна на основании закона сохранения энергии сумме мощностей отраженных волн. Если, например,  $\dot{a}_2=0$ , то при учете (21.87) имеем

$$|\dot{a}_1|^2 = |\dot{b}_1|^2 + |\dot{b}_2|^2 = (|S_{11}|^2 + |S_{21}|^2) |\dot{a}_1|^2, \quad (21.89)$$

откуда

$$|S_{11}|^2 + |S_{21}|^2 = 1. \quad (21.90)$$

При  $\dot{a}_1=0$  аналогичным путем получаем

$$|S_{12}|^2 + |S_{22}|^2 = 1. \quad (21.91)$$

Если падающие волны отличны от нуля в обоих плечах, то

$$|\dot{a}_1|^2 + |\dot{a}_2|^2 = |\dot{b}_1|^2 + |\dot{b}_2|^2 = \dot{b}_1^* \dot{b}_1 + \dot{b}_2^* \dot{b}_2. \quad (21.92)$$

Подставив в правую часть (21.92)  $\dot{b}_1$  и  $\dot{b}_2$  из (21.85) и приняв во внимание (21.90) и (21.91), получим

$$\begin{aligned} |\dot{a}_1|^2 + |\dot{a}_2|^2 = & |\dot{a}_1|^2 + |\dot{a}_2|^2 + (S_{11}^* \dot{S}_{12} + S_{21}^* \dot{S}_{22}) \dot{a}_1^* \dot{a}_2 + \\ & + (\dot{S}_{11}^* S_{12} + \dot{S}_{21}^* S_{22}) \dot{a}_1 \dot{a}_2^*. \end{aligned} \quad (21.93)$$

Из (21.93) следуют соотношения:

$$\begin{aligned} S_{11}^* \dot{S}_{12} + S_{21}^* \dot{S}_{22} &= 0, \\ \dot{S}_{11}^* S_{12} + \dot{S}_{21}^* S_{22} &= 0. \end{aligned} \quad (21.94)$$

Равенства (21.90), (21.91) и (21.94) означают, что матрица рассеяния реактивного четырехполюсника является унитарной, т. е. для нее выполняется соотношение

$$\begin{bmatrix} \dot{S}_{11}^* & \dot{S}_{21}^* \\ \dot{S}_{12}^* & \dot{S}_{22}^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (21.95)$$

которое сокращенно можно представить в виде

$$[S]_t^* [S] = [1]. \quad (21.96)$$

Здесь  $[S]_t^*$  — транспонированная матрица  $[S]$  с комплексно-сопряженными элементами (транспонировать матрицу, значит заменить у нее строки столбцами, а столбцы — строками);  $[1]$  — единичная матрица (квадратная матрица, у которой все элементы главной диагонали равны единице, а остальные элементы равны нулю).

Если четырехполюсник одновременно взаимный и реактивный, то согласно (21.88), (21.90), (21.91) и (21.94) имеем:

$$\begin{aligned} |S_{11}|^2 + |S_{21}|^2 &= 1, \quad |S_{21}|^2 + |S_{22}|^2 = 1, \\ S_{11}^* \dot{S}_{21} + S_{21}^* \dot{S}_{22} &= 0. \end{aligned} \quad (21.97)$$

Из этих равенств последовательно получаем:  $|S_{21}| = \sqrt{1 - |S_{11}|^2}$ ,  $|S_{22}| = |S_{11}|$  и

$$|S_{11}| |S_{21}| [e^{i(\varphi_{11} - \varphi_{21})} + e^{i(2\varphi_{21} - \varphi_{22})}] = 0. \quad (21.98)$$

В последнем выражении квадратная скобка должна равняться нулю, откуда следует  $e^{i\varphi_{22}} = -e^{i(2\varphi_{21} - \varphi_{11})}$ . При учете этих соотношений имеем

$$[S] = \begin{bmatrix} |S_{11}| e^{i\varphi_{11}} & \sqrt{1 - |S_{11}|^2} e^{i\varphi_{21}} \\ \sqrt{1 - |S_{11}|^2} e^{i\varphi_{21}} & -|S_{11}| e^{i(2\varphi_{21} - \varphi_{11})} \end{bmatrix}. \quad (21.99)$$

Таким образом, у взаимного реактивного четырехполюсника независимыми являются только три вещественных параметра

$|S_{11}|$ ,  $\varphi_{11}$  и  $\varphi_{21}$ , которые и следует найти теоретическим путем или измерить при экспериментальном исследовании узла.

Матрица рассеяния многополюсника. Полученные выше результаты легко распространить на пассивный линейный  $2n$ -полюсник ( $n$ -плечный волноводный узел), изображен-

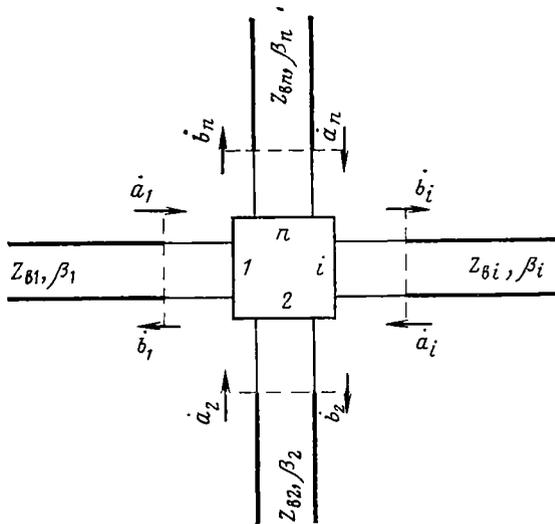


РИС. 21.15

ный на рис. 21.15. Выбрав граничные сечения и введя нормированные комплексные амплитуды падающих на многополюсник ( $\dot{a}_i$ ) и отраженных от него ( $\dot{b}_i$ ) волн условного напряжения, получим следующий аналог (21.86):

$$\begin{bmatrix} \dot{b}_1 \\ \dot{b}_2 \\ \vdots \\ \dot{b}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & \dots & S_{1n} \\ S_{21} & S_{22} & \dots & S_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ S_{n1} & S_{n2} & \dots & S_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{a}_1 \\ \dot{a}_2 \\ \vdots \\ \dot{a}_n \end{bmatrix}, \quad (21.100)$$

который сокращенно можно представить в виде

$$[\dot{b}] = [S][\dot{a}], \quad (21.101)$$

где  $[\dot{b}]$  и  $[\dot{a}]$  — матрицы-столбцы;  $[S]$  — квадратная матрица рассеяния порядка  $n$  ( $n$  равно числу плеч в узле). Как и ранее, элемент волновой матрицы рассеяния  $S_{ii}$  есть коэффициент отражения на  $i$ -х зажимах при наличии во всех остальных плеча согласованных нагрузок ( $S_{ii} = b_i/a_i$  при всех  $\dot{a}_{m \neq i} = 0$ ). Элемент  $S_{hi}$  является коэффициентом передачи с  $i$ -х зажимов на  $k$ -е ( $S_{hi} = \dot{b}_h/\dot{a}_i$  при всех  $\dot{a}_{m \neq i} = 0$ ).

Во взаимном многополюснике аналог равенства (21.88) имеет вид

$$S_{ik} = S_{ki}. \quad (21.102)$$

Из условия унитарности (21.96) матрицы рассеяния реактивного  $2n$ -полюсника вытекают соотношения вида (21.90), (21.91) и (21.94)

$$\sum_{k=1}^n S_{ki} S_{kj}^* = \begin{cases} 1 & \text{при } i = j \quad (i, j = 1, 2, \dots, n), \\ 0 & \text{при } i \neq j \quad (i, j = 1, 2, \dots, n). \end{cases} \quad (21.103)$$

Первое равенство (21.103) означает, что сумма квадратов модулей всех элементов любого столбца матрицы рассеяния равна единице. Второе равенство (21.103) означает, что для любой пары столбцов матрицы рассеяния сумма произведений элементов одного столбца на комплексно-сопряженные значения соответствующих элементов другого столбца равна нулю.

### 21.9. ВОЛНОВАЯ МАТРИЦА ПЕРЕДАЧИ ЧЕТЫРЕХПОЛЮСНИКА. ОСЛАБЛЕНИЕ ЧЕТЫРЕХПОЛЮСНИКА

Определив из второго ур-ния (21.85) величину  $\dot{a}_1$  и подставив ее затем в первое, получим систему уравнений:

$$\dot{a}_1 = T_{11} \dot{b}_2 + T_{12} \dot{a}_2, \quad \dot{b}_1 = T_{21} \dot{b}_2 + T_{22} \dot{a}_2, \quad (21.104)$$

которая в матричной форме имеет вид

$$\begin{bmatrix} \dot{a}_1 \\ \dot{b}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{b}_2 \\ \dot{a}_2 \end{bmatrix} = [T] \begin{bmatrix} \dot{b}_2 \\ \dot{a}_2 \end{bmatrix}, \quad (21.105)$$

причем элементы матрицы  $[T]$  выражаются через элементы матрицы рассеяния  $[S]$  следующим образом:

$$[T] = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{S_{21}} & -\frac{S_{22}}{S_{21}} \\ \frac{S_{11}}{S_{21}} & -\frac{S_{11}S_{22} - S_{12}S_{21}}{S_{21}} \end{bmatrix}. \quad (21.106)$$

Квадратную матрицу второго порядка  $[T]$  называют *волновой матрицей передачи* четырехполюсника. Согласно (21.105) волновая матрица передачи связывает нормированные комплексные амплитуды условных напряжений падающей и отраженной волн на входе и отраженной и падающей волн на выходе.

Волновые матрицы передачи удобно применять при исследовании каскадного соединения четырехполюсников (рис. 21.16). Для каждого четырехполюсника согласно (21.105) имеем:

$$\begin{bmatrix} \dot{a}_1 \\ \dot{b}_1 \end{bmatrix} = [T_1] \begin{bmatrix} \dot{b}_2 \\ \dot{a}_2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \dot{a}_2 \\ \dot{b}_2 \end{bmatrix} = [T_2] \begin{bmatrix} \dot{b}_3 \\ \dot{a}_3 \end{bmatrix}. \quad (21.107)$$

Поскольку отраженная ( $\dot{b}_2$ ) и падающая ( $\dot{a}_2$ ) волны на выходе первого четырехполюсника являются соответственно падающей ( $\dot{a}_2'$ ) и отраженной ( $\dot{b}_2'$ ) волнами на входе второго четырехполюсника, то

$$\begin{bmatrix} \dot{b}_2 \\ \dot{a}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{a}_2' \\ \dot{b}_2' \end{bmatrix} \quad \text{и}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{a}_1 \\ \dot{b}_1 \end{bmatrix} = [T_1] [T_2] \begin{bmatrix} \dot{b}_3 \\ \dot{a}_3 \end{bmatrix} = [T] \begin{bmatrix} \dot{b}_3 \\ \dot{a}_3 \end{bmatrix}. \quad (21.108)$$

Соответственно волновая матрица передачи каскадного соединения  $m$  четырехполюсников определится произведением матриц передачи всех четырехполюсников:

$$[T] = [T_1] [T_2] \dots [T_m]. \quad (21.109)$$

Таким образом, при каскадном соединении нужно известные матрицы рассеяния всех четырехполюсников с помощью (21.105) преобразовать в волновые матрицы передачи. Затем согласно

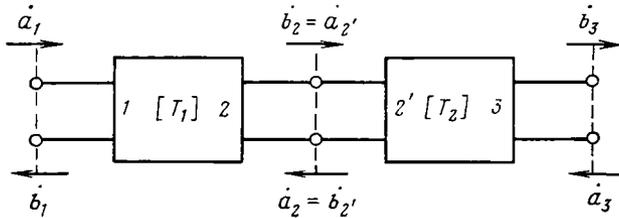


РИС. 21.16

(21.109) найти волновую матрицу передачи всего соединения. Для определения матрицы рассеяния каскадного соединения, элементы которой имеют простой физический смысл, нужно воспользоваться преобразованием матрицы  $[T]$  в матрицу  $[S]$ . Чтобы найти это преобразование, определим из первого уравнения (21.104) величину  $\dot{b}_2$ , подставим ее затем во второе уравнение (21.104) и получим систему (21.85) — (21.86), в которой

$$[S] = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{T_{21}}{T_{11}} & \frac{T_{11}T_{22} - T_{12}T_{21}}{T_{11}} \\ \frac{1}{T_{11}} & -\frac{T_{12}}{T_{11}} \end{bmatrix}. \quad (21.110)$$

Функцией ослабления четырехполюсника  $A$  называют отношение мощностей падающей волны на входе и прошедшей через четырехполюсник волны на согласованном выходе:

$$A = \frac{P_{1\text{ ср}+}}{P_{2\text{ ср}-}} \Big|_{P_{2\text{ ср}+}=0} = \left| \frac{\dot{a}_1}{\dot{b}_2} \right|_{\dot{a}_3=0} = |T_{11}|^2 = \frac{1}{|S_{21}|^2}. \quad (21.111)$$

Если четырехполюсник реактивный, то для функции ослабления при учете (21.90) и (21.106) имеем

$$A = |T_{11}|^2 = \frac{|S_{21}|^2 + |S_{11}|^2}{|S_{21}|^2} = 1 + |T_{21}|^2. \quad (21.112)$$

Величину  $A$ , выраженную в децибелах, называют *ослаблением четырехполюсника* и обычно обозначают буквой  $b$ :

$$b = 10 \lg A = 10 \lg \frac{P_{1 \text{ ср}+}}{P_{2 \text{ ср}-}} \Big|_{P_{2 \text{ ср}+}=0} = 20 \lg |T_{11}|. \quad (21.113)$$

## Глава 22

### ОБЪЕМНЫЕ РЕЗОНАТОРЫ



#### 22.1. ОСНОВНЫЕ КЛАССЫ ОБЪЕМНЫХ РЕЗОНАТОРОВ

Колебательный контур, состоящий из сосредоточенных индуктивности  $L$  и емкости  $C$  (рис. 22.1а), имеет резонансную частоту  $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ . Для увеличения  $\omega_0$  нужно уменьшать  $L$  и  $C$  контура. В результате приходят к системе, в которой роль конденсатора играют две пластины и роль индуктивности — одиночный виток (рис. 22.1б). Энергия электромагнитного поля, запасенная в

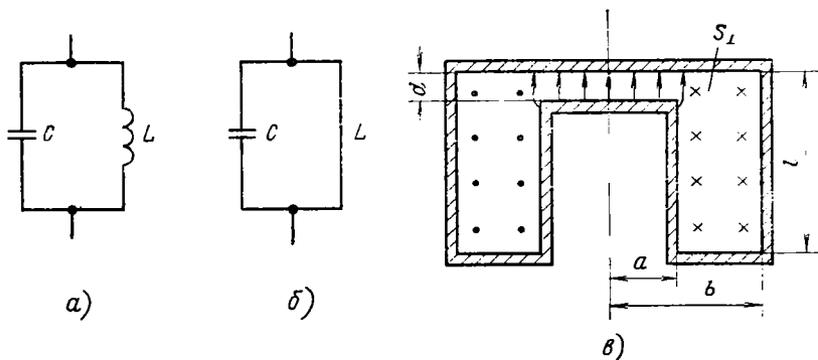


РИС. 22.1

такой системе, мала. Вместе с увеличением частоты  $\omega_0$  возрастает относительная доля потерь энергии за период в контуре, которые обусловлены как сильным поверхностным эффектом в его элементах, так и излучением. Уменьшение запасенной энергии и увеличение потерь вызывают существенное уменьшение добротности контура с сосредоточенными элементами уже на волнах метрового диапазона.

В диапазонах дециметровых и сантиметровых волн колебательной системой высокой добротности является закрытый *объемный резонатор*, представляющий собой окруженную замкнутой металлической оболочкой полость, в которую с помощью элементов связи (штырь, петля, отверстие) вводится (а также и выводится) электромагнитная энергия. Общими свойствами всех закрытых объемных резонаторов являются их способность запасать электромагнитную энергию и относительно малое значение собственных потерь энергии за период, обусловленное почти полным отсутствием паразитного излучения из полости, малой плотностью тока в имеющих большую поверхность металлических стенках и их хорошей проводимостью, а также ничтожными потерями в заполняющем полость воздухе. Вследствие этого добротность хорошо выполненных объемных резонаторов оказывается очень высокой.

В теории объемных резонаторов различают режимы их собственных (свободных) и вынужденных колебаний. *Собственные колебания* — это *возможные* поля в объемном резонаторе при отсутствии сторонних источников. Собственные колебания резонатора включают в себя бесконечное множество различных *типов колебаний* (типов полей), каждый из которых характеризуется своей картиной векторных линий и определенной собственной длиной волны (собственной частотой). В резонаторе без потерь (стенки идеально проводящие и без отверстий, внутренняя полость — идеальный диэлектрик) собственные колебания любого типа были бы незатухающими, как в контуре без потерь. В реальном объемном резонаторе существуют некоторые потери энергии (например, в металлических стенках и вследствие излучения через отверстия), что приводит к затухающим собственным колебаниям.

Незатухающие колебания в реальном резонаторе существуют в режиме *вынужденных колебаний*, при котором в резонатор через элемент связи вводят энергию от стороннего источника (генератора). Для возбуждения резонатора нужно, чтобы частота колебаний генератора была равна одной из резонансных частот объемного резонатора. В этом случае в резонаторе наступает резонанс и амплитуды поля вынужденных колебаний достигают наибольшего значения. В объемном резонаторе с малыми потерями (с большой добротностью) резонансные частоты приблизительно равны собственным частотам этого резонатора без потерь. Объемный резонатор является многорезонансной системой, в отличие от колебательного контура с сосредоточенными элементами, резонирующего на одной частоте.

На рис. 22.1в изображено осевое сечение так называемого тороидального объемного резонатора, который получаем, заменив одиночный виток контура сплошной тороидальной поверхностью. Эту поверхность можно рассматривать как предельный случай параллельного подключения к конденсатору множества отдельных витков. Тороидальный резонатор относится к классу *квазистационарных* резонаторов, которые имеют малые линейные раз-

меры по сравнению с собственной длиной волны рабочего типа колебаний и представляют собой своеобразные  $LC$ -контуры. По сравнению с контуром на рис. 22.1б тороидальный резонатор имеет меньшую индуктивность, что позволяет получить более высокие собственные частоты, и значительно большую добротность.

С увеличением собственной частоты рабочего типа колебаний линейные размеры и объем квазистационарного резонатора неизбежно уменьшаются, вследствие чего уменьшается запасенная в нем энергия и снижается его добротность. От этого недостатка свободны *цилиндрические* закрытые объемные резонаторы, в которых в качестве рабочего может быть использован не один, а несколько различных типов полей, причем наибольшая собственная длина волны соизмерима с линейными размерами резонатора. Цилиндрические резонаторы представляют собой отрезки регулярных волноводов, замкнутые с двух сторон поперечными ме-

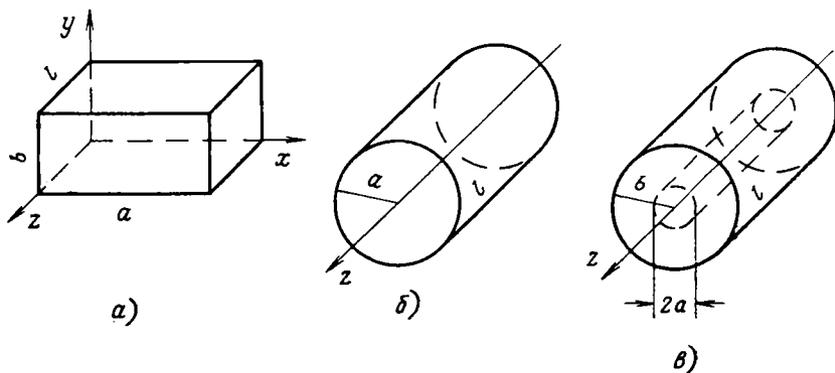


РИС. 22.2

таллическими стенками. К этому классу относятся прямоугольный (рис. 22.2а), цилиндрический круглый (б) и цилиндрический коаксиальный (в) закрытые резонаторы. Соизмеримость наибольшей собственной длины волны с линейными размерами цилиндрического резонатора делает удобным его применение на дециметровых и сантиметровых волнах и препятствует его применению на более длинных волнах, где размеры резонатора становятся очень большими.

В технике СВЧ широко применяются также различные типы коаксиальных и полосковых резонаторов, в которых используют поля типа  $T$  и которые просто анализировать при помощи теории длинных линий.

Различные типы объемных резонаторов используют на дециметровых, сантиметровых и миллиметровых волнах в качестве селективно резонирующих колебательных систем (в генераторах

и усилителях, частотных фильтрах, волномерах и других устройствах). В объемных резонаторах электронных приборов осуществляется энергетическое взаимодействие электромагнитного поля резонатора с потоком электронов.

## 22.2. СОБСТВЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ ЦИЛИНДРИЧЕСКОГО РЕЗОНАТОРА БЕЗ ПОТЕРЬ

Различные типы колебаний, которые могут существовать в объемном резонаторе, рассматривает задача о его собственных колебаниях. Эту задачу для облегчения решают в предположении отсутствия потерь в резонаторе.

Если читателю известна теория волн в регулярных волноводах (см. гл. 18, 19), то исследование собственных колебаний ци-

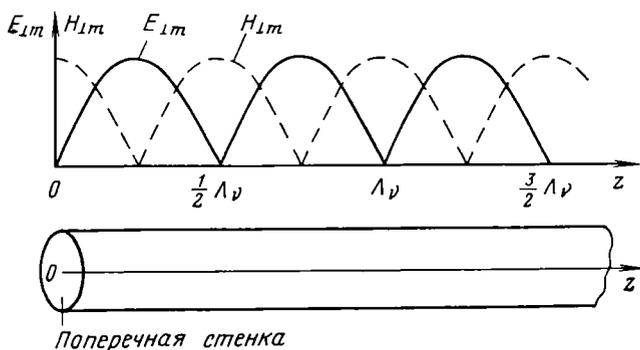


РИС. 22.3

линдрических объемных резонаторов легко осуществить на основе этой теории, рассматривая объемные резонаторы как замкнутые поперечными стенками отрезки соответствующих волноводов.

Пусть произвольный регулярный волновод без потерь перегороден в сечении  $z=0$  идеально проводящей поперечной стенкой (рис. 22.3). Рассмотрим бегущую волну произвольного  $\nu$ -го типа, падающую на эту стенку (индекс  $\nu$  заменяет символ  $H_{mn}$ ,  $E_{mn}$  или  $T$ ). На идеально проводящей поперечной стенке вытекающее из (3.71) граничное условие  $\dot{E}_{\perp}=0$  может быть удовлетворено полем только одного рассматриваемого типа. Поэтому при отражении от стенки не возникают поля других типов и результирующее поле в волноводе представляет собой сумму двух бегущих в противоположные стороны волн  $\nu$ -го типа:

$$\begin{aligned} \dot{E}_{\perp}(u, v, z) &= \dot{E}_{\perp+}(u, v, z) + \dot{E}_{\perp-}(u, v, z) = \\ &= \dot{E}_{0\perp+}(u, v) e^{-i\beta_{\nu} z} + \dot{E}_{0\perp-}(u, v) e^{i\beta_{\nu} z}; \end{aligned} \quad (22.1)$$

аналогичные выражения получаются также для составляющих результирующего поля  $\dot{H}_\perp$  и  $\dot{E}_z$  или  $\dot{H}_z$ .

Из граничного условия  $\dot{E}_\perp = 0$  при  $z=0$  и (22.1) получаем соотношение  $\dot{E}_{0\perp-} = -\dot{E}_{0\perp+}$ , подстановка которого в (22.1) дает при любом  $z$

$$\dot{E}_\perp = -i 2 \dot{E}_{0\perp+}(u, v) \sin \beta_\nu z. \quad (22.2)$$

Равным по величине и противоположным по направлению составляющим  $\dot{E}_{0\perp}$  падающей и отраженной волн соответствуют на идеально проводящей поперечной стенке согласно (18.10), (18.12) или (18.27) равные по величине и одинаково направленные составляющие  $\dot{H}_{0\perp}$  и  $\dot{E}_{0z}$  и равные по величине, но противоположно направленные составляющие  $\dot{H}_{0z}$ :  $\dot{H}_{0\perp-} = \dot{H}_{0\perp+}$ ,  $\dot{E}_{0z-} = \dot{E}_{0z+}$ ,  $\dot{H}_{0z-} = -\dot{H}_{0z+}$ . Отсюда с помощью ф-л вида (22.1) получим:

$$\begin{aligned} \dot{H}_\perp &= 2 \dot{H}_{0\perp+}(u, v) \cos \beta_\nu z, \\ \dot{E}_z &= 2 \dot{E}_{0z+}(u, v) \cos \beta_\nu z, \\ \dot{H}_z &= -i 2 \dot{H}_{0z+}(u, v) \sin \beta_\nu z. \end{aligned} \quad (22.3)$$

Результирующее поле (22.2), (22.3) представляет собой *стоячую волну*, особенности которой будут рассмотрены немного ниже. Зависимость амплитуд  $E_{\perp m}$  и  $H_{\perp m}$  стоячей волны от координаты  $z$ , построенная согласно (22.2), (22.3) и  $\beta_\nu = 2\pi/\Lambda_\nu$  ( $\Lambda_\nu$  — длина волны  $\nu$ -го типа в волноводе), приведена на рис. 22.3.

Из (22.2) следует, что в любом поперечном сечении  $z=l$ , удовлетворяющем соотношению  $\beta_\nu l = p\pi$  или

$$l = p \Lambda_\nu / 2, \quad p = 0, 1, 2, 3 \dots, \quad (22.4)$$

выполняются условия, которые совпадают с граничными условиями на идеально проводящей поверхности. Следовательно, если с одним из этих сечений совместить другую идеально проводящую поперечную стенку, то она не нарушит режима стоячей волны. В образовавшемся объемном резонаторе без потерь будут существовать собственные (свободные) электромагнитные колебания, на поддержание которых поступления энергии больше не требуется. При этом стоячую волну в цилиндрическом резонаторе можно рассматривать как результат многократных упорядоченных отражений исходной бегущей волны регулярного волновода от обеих поперечных стенок.

В цилиндрическом резонаторе длиной  $l$  согласно (22.2), (22.3) и условию резонанса  $\beta = p\pi/l$  комплексные амплитуды поля произвольного типа колебаний классов Н, Е и Т выражаются соответственно соотношениями:

$$\begin{aligned} \dot{E}_\perp &= -i 2 \dot{E}_{0\perp+}(u, v) \sin \frac{p\pi z}{l}, \quad \dot{H}_\perp = 2 \dot{H}_{0\perp+}(u, v) \cos \frac{p\pi z}{l}, \\ \dot{H}_z &= -i 2 \dot{H}_{0z+}(u, v) \sin \frac{p\pi z}{l}; \end{aligned} \quad (22.5)$$

$$\begin{aligned} \dot{E}_{\perp} &= -i2\dot{E}_{0\perp+}(u, v) \sin \frac{p\pi z}{l}, \quad \dot{H}_{\perp} = 2\dot{H}_{0\perp+}(u, v) \cos \frac{p\pi z}{l}, \\ \dot{E}_z &= 2\dot{E}_{0z+}(u, v) \cos \frac{p\pi z}{l}; \end{aligned} \quad (22.6)$$

$$\dot{E}_{\perp} = -i2\dot{E}_{0\perp+}(u, v) \sin \frac{p\pi z}{l}, \quad \dot{H}_{\perp} = 2\dot{H}_{0\perp+}(u, v) \cos \frac{p\pi z}{l}. \quad (22.7)$$

Подставив в (22.5)—(22.7) полученные в гл. 19 функции  $E_{0\perp+}$ ,  $H_{0\perp+}$ ,  $H_{0z+}$  и  $E_{0z+}$ , которые определяют распределение по поперечным координатам  $u$  и  $v$  составляющих поля бегущей волны исходного  $\nu$ -го типа в регулярном волноводе, и перейдя затем от комплексных амплитуд к мгновенным значениям, нетрудно получить математическое описание электромагнитного поля любого типа колебаний в цилиндрическом резонаторе без потерь. При этом согласно (22.5)—(22.7) индекс  $p$  определяет число стоячих полуволн, укладываемых вдоль длины  $l$  резонатора (по оси  $Oz$ ). Таким образом, для обозначения некоторого типа колебаний в цилиндрическом резонаторе нужно к обозначению исходного  $\nu$ -го типа волны в соответствующем волноводе добавить индекс  $p$ :  $H_{mnp}$ ,  $E_{mnp}$ ,  $T_p$ .

Собственные колебания  $s$ -го типа (индекс  $s$  заменяет символ  $H_{mnp}$ ,  $E_{mnp}$  или  $T_p$ ) в цилиндрическом резонаторе без потерь происходят на длине волны  $\lambda_s$ , которую можно определить путем подстановки  $\Lambda_{\nu}$  из (18.25) в условие резонанса (22.4):

$$\lambda_s = 1/\sqrt{1/\lambda_{\text{кр}\nu}^2 + (p/2l)^2}. \quad (22.8)$$

Таким образом,  $s$ -му типу колебаний в резонаторе с заданными геометрическими размерами соответствуют вполне определенная собственная длина волны (22.8) и собственная частота  $\omega_s = 2\pi\nu/\lambda_s = 2\pi/\lambda_s \sqrt{\epsilon_a \mu_a}$  ( $\epsilon_a$ ,  $\mu_a$  — параметры среды в полости резонатора). Поскольку в резонаторе может быть возбуждено бесконечное множество различных типов колебаний, то каждый резонатор обладает бесконечным дискретным набором собственных длин волн (частот).

Из (22.5)—(22.7) следует, что при  $p=0$  в цилиндрическом резонаторе могут существовать электромагнитные поля только типов колебаний  $E_{mnp}$ , которые имеют отличные от нуля составляющие  $H_{\perp}$  и  $E_z$  и не изменяются вдоль продольной координаты  $z$ . В соответствии с (22.8) собственная длина волны типов  $E_{mnp}$  не зависит от длины резонатора  $l$  и определяется выражением  $\lambda_s = \lambda_{\text{кр}\nu}$ , которое согласно (18.25) выполняется при  $\Lambda_{\nu} = \infty$  и  $\beta_{\nu} = 2\pi/\Lambda_{\nu} = 0$ .

Отметим особенности поля  $s$ -го типа колебаний в цилиндрическом резонаторе, которое представляет собой стоячую волну. Согласно (18.10), (18.12) или (18.27) в волноводе поперечные составляющие  $E_{0\perp+}$  и  $H_{0\perp+}$  бегущей волны ( $\gamma_{\nu} = i\beta_{\nu}$ ) имеют одинаковые аргументы, которые отличаются на  $\pi/2$  от аргумента про-

дольной составляющей  $\dot{E}_{0z+}$  или  $\dot{H}_{0z+}$  полей классов Н и Е. При учете этого из (22.5)—(22.7) следует, что в цилиндрическом резонаторе, во-первых, обе магнитные составляющие  $\mathbf{H}_\perp$  и  $\mathbf{H}_z$  типа  $\mathbf{H}_{mnp}$  и обе электрические составляющие  $\mathbf{E}_\perp$  и  $\mathbf{E}_z$  типа  $\mathbf{E}_{mnp}$  колеблются в одинаковой фазе и, во-вторых, колебания векторов  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  сдвинуты друг относительно друга по фазе на  $\pi/2$  [сдвинуты во времени на  $T_s/4$ : один из векторов поля изменяется по закону  $\sin(\omega_s t + \varphi)$ , а другой — по закону  $\cos(\omega_s t + \varphi)$ ]. В стоячей волне каждая составляющая полей (22.5)—(22.7) имеет в любой фиксированный момент времени фазу, одинаковую во всех точках, и амплитуду, меняющуюся периодически от точки к точке вдоль длины  $l$ . Как это предопределено граничными условиями, на идеально проводящих поперечных стенках ( $z=0$ ,  $z=l$ ) касательная к ним составляющая  $\mathbf{E}_\perp$  и нормальная составляющая  $\mathbf{H}_z$  обращаются в нуль (имеют узлы), а касательная составляющая  $\mathbf{H}_\perp$  и нормальная составляющая  $\mathbf{E}_z$  принимают наибольшие значения (имеют пучности). Согласно (22.4)—(22.7) пучности поперечных составляющих  $\mathbf{E}_\perp$  и  $\mathbf{H}_\perp$  сдвинуты в пространстве друг относительно друга вдоль координаты  $z$  на  $\lambda_v/4$ .

Тип колебаний в резонаторе, имеющий наибольшую собственную длину волны, называют *основным*. Типы колебаний, имеющие различные структуры, но одинаковые собственные длины волн, называют *вырожденными*. В качестве рабочих в резонаторе широко используют как основной тип, так и высшие типы колебаний: вследствие высокой частотной селективности резонатора вблизи собственной частоты рабочего типа колебаний поля других типов практически отсутствуют. Вырождение рабочего типа колебаний приводит к усложнению структуры поля в резонаторе, увеличению потери в нем и искажению его частотных характеристик. Подавление вырожденного паразитного типа осуществляется обеспечением его сильного затухания в резонаторе (ср. § 24.5).

Прямоугольный резонатор. Подставив  $\lambda_{крв}$  из (19.14) в (22.8), получим следующее выражение для собственных длин волн прямоугольного резонатора (см. рис. 22.2а):

$$\lambda_s = 2\sqrt{(m/a)^2 + (n/b)^2 + (p/l)^2}. \quad (22.9)$$

Поскольку все три оси координат прямоугольного резонатора декартовы и совершенно равноправны, то разделение на типы колебаний  $\mathbf{H}_{mnp}$  и  $\mathbf{E}_{mnp}$  оказывается условным (продольной может быть выбрана любая ось) и в ф-лу (22.9) все три индекса  $m$ ,  $n$  и  $p$  входят симметрично.

Согласно (22.9) наибольшее значение  $\lambda_s$ , соответствующее основному типу колебаний, получается в том случае, если индекс при наименьшем ребре резонатора равен нулю и оба остальных индекса равны единице. Например, если направить вдоль наименьшего ребра ось  $Oy$  ( $a > b$ ,  $l > b$ ), то основным типом колебаний является  $\mathbf{H}_{101}$  и  $\lambda_{s\max} = 2al/\sqrt{a^2 + l^2}$ ; если же направить

вдоль наименьшего ребра этого резонатора ось  $Oz$  ( $a > l$ ,  $b > l$ ), то тот же самый основной тип колебаний станет типом  $E_{110}$ .

Из формулы для  $\lambda_{s\text{макс}}$  следует, что наибольшая собственная длина волны сравнима с линейными размерами резонатора.

Поскольку в прямоугольном волноводе поля типов  $H_{mn}$  и  $E_{mn}$  с одинаковыми индексами имеют одинаковые  $\lambda_{кр\ v}$ , то согласно (22.8) в прямоугольном резонаторе типы колебаний с тремя отличными от нуля индексами, по крайней мере, двукратно вырождены. Поэтому целесообразно работать на типах полей с нулевым

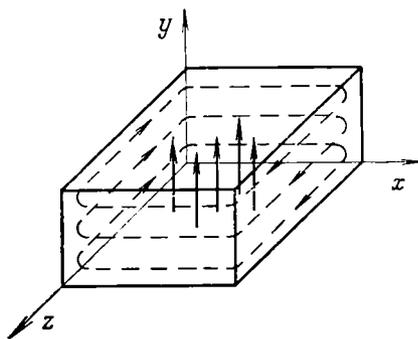


РИС. 22.4

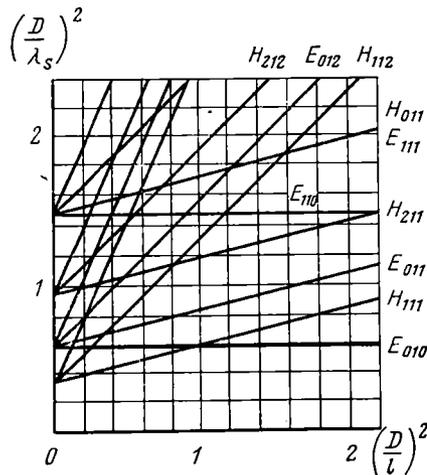


РИС. 22.5

индексом ( $H_{101}$ ,  $H_{011}$ ,  $E_{110}$ ) и не применять кубических резонаторов, в которых эти типы трехкратно вырождены. Для примера на рис. 22.4 изображена структура поля типа  $H_{101}$ .

Цилиндрический круглый резонатор. Подставив  $\lambda_{кр\ v}$  из (19.67) в (22.8), получим для собственных длин волн цилиндрического круглого резонатора (см. рис. 22.2б) выражение

$$\lambda_s = 2 / \sqrt{(\delta_{mn}/\pi a)^2 + (p/l)^2}, \quad (22.10)$$

в котором при  $s = H_{mnp}$  имеем  $\delta_{mn} = \mu_{mn}$ , при  $s = E_{mnp}$  имеем  $\delta_{mn} = \epsilon_{mn}$ . Формулу (22.10) можно представить в виде

$$\left(\frac{D}{\lambda_s}\right)^2 = \frac{p^2}{4} \left(\frac{D}{l}\right)^2 + \left(\frac{\delta_{mn}}{\pi}\right)^2, \quad (22.11)$$

где  $D = 2a$  — диаметр резонатора. В прямоугольной системе координат  $(D/l)^2$ ,  $(D/\lambda_s)^2$  уравнение (22.11) для каждого  $s$ -го типа колебаний представляет собой прямую линию, которая имеет угловой коэффициент, равный  $p^2/4$ , и пересекает ось ординат  $(D/\lambda_s)^2$  в точке  $(\delta_{mn}/\pi)^2$ . Семейство этих прямых линий образует номограмму (рис. 22.5), с помощью которой для рабочего типа коле-

баний в резонаторе легко решать разнообразные задачи о соотношениях между размерами резонатора  $D$  и  $l$  и длиной волны генератора  $\lambda = \lambda_g$ .

Поскольку  $\mu_{0n} = \varepsilon_{1n}$  (см. §19.12), то в круглом резонаторе пары типов колебаний  $H_{0np}$  и  $E_{0np}$  всегда вырождены и на рис. 22.5 каждой такой паре соответствует одна прямая линия. Вследствие того что в круглом волноводе каждый несимметричный тип поля  $H_{mn}$  и  $E_{mn}$  ( $m \neq 0$ ) двукратно вырожден по углу  $\psi$  (см.

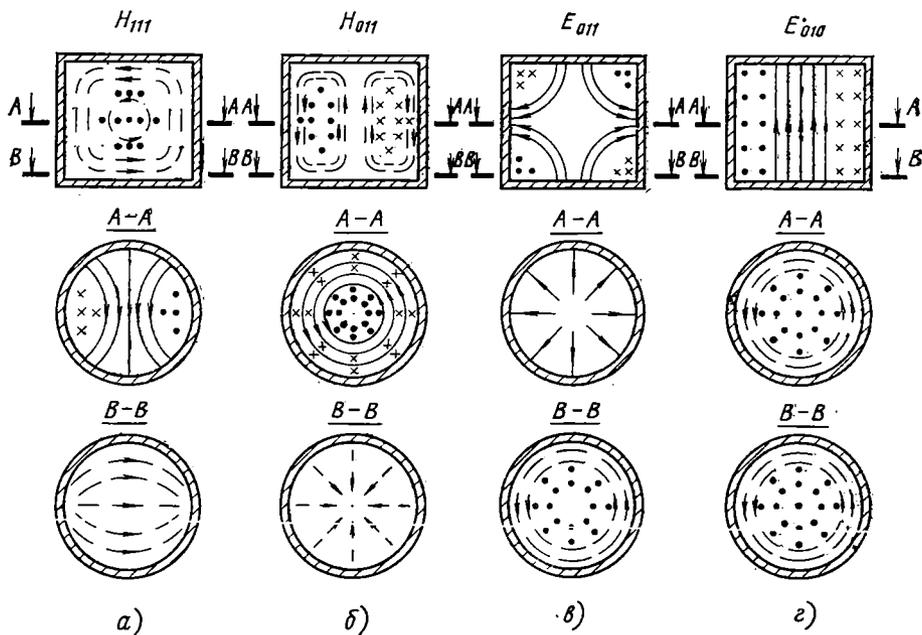


РИС. 22.6

§ 19.12), в круглом резонаторе каждый соответствующий тип колебаний  $H_{mnp}$  и  $E_{mnp}$  также обладает этим свойством. В некоторых случаях вырождение собственных типов колебаний в резонаторе возникает лишь при определенных условиях, которые характеризуются точкой пересечения на рис. 22.5 прямых линий, соответствующих этим типам. В частности, из номограммы видно, что при  $(D/l)^2 < 0,97$  или  $l > 2,03a$  основным является тип  $H_{111}$ , а при обратных неравенствах — тип  $E_{010}$ .

Важное практическое значение имеют типы колебаний  $H_{01p}$ . Подобно полю  $H_{01}$  в круглом волноводе типы колебаний  $H_{01p}$  в реальном круглом резонаторе имеют очень малые потери в стенках, что позволяет получать весьма большие значения собственной добротности (см. § 22.5). Поэтому колебания типов  $H_{01p}$  используют в волномерах высокой точности и для стабилизации ча-

стоты в передатчиках и гетеродинах. Высокую добротность резонатора для типа  $H_{01p}$  можно получить только в том случае, если будет подавлен паразитный вырожденный тип  $E_{11p}$  и размеры  $D$  и  $l$  будут выбраны таким образом, чтобы в рабочем диапазоне длин волн отсутствовали паразитные резонансы на других типах колебаний.

На рис. 22.6 изображены структуры полей типов  $H_{111}$ ,  $H_{011}$ ,  $E_{011}$  и  $E_{010}$ , которые построены с учетом картин векторных линий

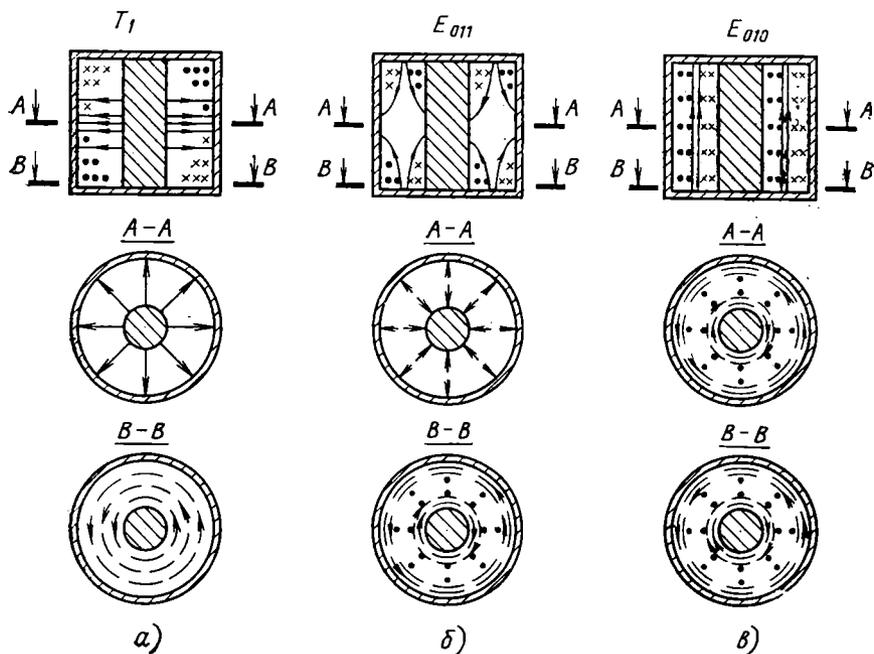


РИС. 22.7

волн  $H_{11}$ ,  $H_{01}$  и  $E_{01}$  в круглом волноводе (см. рис. 19.14) и особенностей полей в цилиндрическом резонаторе.

Цилиндрический коаксиальный резонатор. В этом резонаторе (см. рис. 22.2в) наиболее часто используют колебания типов  $T_p$  при малых значениях индекса  $p$ . Поскольку у волн  $T$  в коаксиальном волноводе  $\lambda_{крв} = \infty$ , то согласно (22.8) собственная длина волны типа  $T_p$  определится соотношением  $\lambda_s = 2l/p$ . Для поля типа  $T_1$  имеем  $\lambda_s = 2l$ . При работе коаксиального резонатора на колебаниях типа  $E_{010}$  ( $p=0$ ) в соответствии с (22.8) получим  $\lambda_s = \lambda_{крe01} = 2(b-a)$ . Из сравнения  $\lambda_s$  для типов  $T_1$  и  $E_{010}$  следует, что основным при  $l > b-a$  является тип  $T_1$ , при  $l < b-a$  — тип  $E_{010}$ . Изображенные на рис. 22.7 структуры полей типов колебаний  $T_1$ ,  $E_{011}$  и  $E_{010}$  в коаксиальном резона-

торе построены с учетом картин векторных линий волн  $T$  и  $E_{01}$  в коаксиальном волноводе (см. рис. 19.19) и особенностей полей в цилиндрическом резонаторе.

### 22.3. КОАКСИАЛЬНЫЕ И ПОЛОСКОВЫЕ РЕЗОНАТОРЫ С УКРАЧИВАЮЩЕЙ ЕМКОСТЬЮ

Эти резонаторы получают из соответствующих одноволновых линий передачи, в которых может распространяться только волна  $T$ . Следовательно, поперечные размеры коаксиальных резонаторов должны удовлетворять условию (19.98), полосковых резонаторов — условию (20.2) или (20.3).

Согласно (21.23) короткозамкнутый ( $Y_{\Sigma} = \infty$ ) отрезок длиной  $l$  одноволновых без потерь коаксиального волновода или полосковой линии имеет входную проводимость

$$Y(l) = -i(1/Z_B) \operatorname{ctg} \beta l. \quad (22.12)$$

В случае  $l = \Lambda_0/4$  эта проводимость вблизи значения  $\beta_0 l = \frac{2\pi}{\Lambda_0} \frac{\Lambda_0}{4} = \frac{\pi}{2}$  изменяется с частотой подобно проводимости параллельного резонансного  $LC$ -контура и четвертьволновый короткозамкнутый на одном конце отрезок линии передачи играет роль резонатора.

Для уменьшения длины резонатора  $l$  часто используют укорачивающую емкость. Схема такого резонатора в виде короткозамкнутого отрезка  $l$  длиной линии с волновым сопротивлением  $Z_B$  и подключенной параллельно его входу емкости  $C$  приведена на рис. 22.8. Собственные частоты резонатора находят из условия, что при резонансе должна быть равна нулю на клеммах  $l$ —1 сумма емкостной проводимости  $b_C = \omega C$  и индуктивной проводимости  $b_L = -\frac{1}{Z_B} \operatorname{ctg} \beta l = -\frac{1}{Z_B} \operatorname{ctg}(\omega \sqrt{\epsilon'_a \mu_a} l)$ , которую создает короткозамкнутый отрезок линии, т. е.

$$\omega C Z_B = \operatorname{ctg}(\omega \sqrt{\epsilon'_a \mu_a} l). \quad (22.13)$$

Для коаксиального резонатора и резонатора на полосковой симметричной линии  $\epsilon'_a = \epsilon_a$ , для резонатора на несимметричной полосковой линии  $\epsilon'_a = \epsilon_{a, \text{эк}}$  (см. § 20.2).

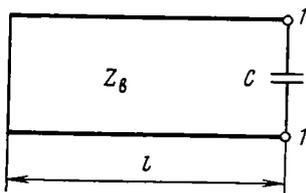


РИС. 22.8

Точки пересечения кривых для левой и правой частей ур-ния (22.13), построенные в функции от  $\omega$ , определяют собственные частоты резонатора (рис. 22.9). Обычно используют резонатор на наименьшей собственной частоте  $\omega_{01}$ , при которой его длина  $l$  оказывается меньше четверти резонансной длины волны. Резонансная частота подобных резонаторов перестраивается изменением емкости,

что приводит к изменению угла наклона прямой  $\omega CZ_B$  на рис. 22.9.

Широко распространена конструкция коаксиального резонатора, в которой укорачивающая емкость образована зазором между торцом внутреннего проводника и крышкой резонатора (рис. 22.10). Резонансная частота коаксиального резонатора с за-

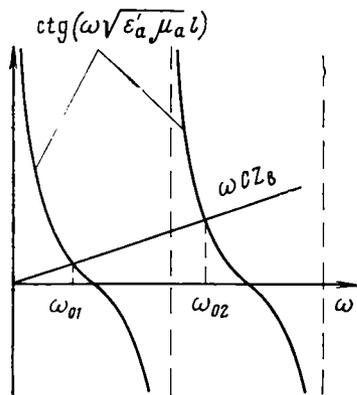


РИС. 22.9

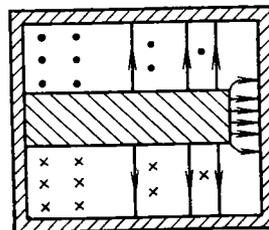


РИС. 22.10

зором перестраивается изменением ширины зазора. В полосковых резонаторах в качестве укорачивающей может быть применена, например, сосредоточенная емкость.

Согласно (21.22) входное сопротивление короткозамкнутого ( $Z_H=0$ ) отрезка линии передачи длиной  $l=\Lambda_0/2$  вблизи значения  $\beta_0 l = \frac{2\pi}{\Lambda_0} \frac{\Lambda_0}{2} = \pi$  изменяется с частотой подобно сопротивлению последовательного резонансного  $LC$ -контура. Такие полуволновые короткозамкнутые на одном конце коаксиальные и полосковые резонаторы также находят применение в технике СВЧ.

В фильтрах СВЧ получили широкое применение полосковые резонаторы с распределенной электромагнитной связью (см. § 23.5).

## 22.4. КВАЗИСТАЦИОНАРНЫЕ РЕЗОНАТОРЫ

Основной тип колебаний квазистационарного резонатора (являющийся всегда рабочим) имеет собственную длину волны, которая велика по сравнению с линейными размерами резонатора, и характеризуется почти полным пространственным разделением электрического и магнитного полей. Последнее обстоятельство позволяет рассматривать квазистационарный резонатор без потерь как колебательный контур с сосредоточенными емкостью  $C$  и индуктивностью  $L$  и определять собственную частоту основного типа колебаний по формуле  $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ .

Тороидальный резонатор. Электрическое поле основного типа колебаний тороидального резонатора почти полностью сконцентрировано в узком зазоре между его параллельными основаниями, а магнитное поле — в тороидальной области (см. рис. 22.1б). Поэтому зазор характеризуется емкостью, величина которой определяется известной формулой емкости плоского конденсатора

$$C = \epsilon_a S/d = \epsilon_a \pi a^2/d, \quad (22.14)$$

где  $S = \pi a^2$  — площадь пластин конденсатора;  $d$  — ширина зазора. Формула (22.14) не учитывает краевых эффектов и применима при выполнении условия  $d \ll a$ .

Рассматриваемый резонатор обладает осевой симметрией, и векторные линии  $\mathbf{H}$  в тороидальной области представляют собой концентрические окружности с центрами на оси резонатора. Индуктивность тороидальной области определяется по формуле

$$L = \Phi/i, \quad (22.15)$$

где  $i$  — ток, обтекающий внутреннюю поверхность тороида (и замыкающийся в зазоре током смещения);

$$\Phi = \int_{S_{\perp}} \mathbf{B} d\mathbf{S} = \mu_a \int_{S_{\perp}} H dS \quad (22.16)$$

— магнитный поток сквозь поверхность  $S_{\perp}$  осевого сечения тороида (см. рис. 22.1б), обусловленный током  $i$ . Применив закон полного тока в квазистационарном приближении  $\oint_L \mathbf{H} d\mathbf{l} = i$  к контуру

$L$ , имеющему вид окружности радиуса  $r$  и совпадающему с линией  $\mathbf{H}$ , получим  $H = i/2\pi r$ . При этом согласно (22.15) и (22.16)

$$L = \frac{\mu_a}{2\pi} \int_{S_{\perp}} \frac{dS}{r} = \frac{\mu_a}{2\pi} \int_0^l dz \int_a^b \frac{dr}{r} = \frac{\mu_a}{2\pi} l \ln \frac{b}{a}. \quad (22.17)$$

В соответствии с (22.14) и (22.17) для основного типа колебаний тороидального резонатора имеем:

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{a} \sqrt{\frac{2d}{\epsilon_a \mu_a l \ln(b/a)}},$$

$$\lambda_0 = v T_0 = v \frac{2\pi}{\omega_0} = \pi a \sqrt{\frac{2l}{d} \ln \frac{b}{a}}. \quad (22.18)$$

Тороидальный резонатор широко используют в электронных приборах (клизотронах). При этом в зазоре осуществляется эффективное взаимодействие колебаний резонатора с потоком электронов.

Магнетронный резонатор является важной частью резонаторного магнетрона (прибор для генерирования мощных колебаний СВЧ). На рис. 22.11а изображен квазистационарный магнетронный резонатор, а на рис. 22.11б — отдельная его ячей-

ка. В каждой ячейке электрическое поле основного типа колебаний сконцентрировано в узком зазоре шириной  $d$ , магнитное поле — в цилиндрической полости радиуса  $r$ . Емкость зазора

$$C = \epsilon_a S/d = \epsilon_a hl/d. \quad (22.19)$$

Предполагается, что длина ячейки  $l$  достаточно велика, вследствие чего магнитное поле приближенно совпадает с магнитным полем участка  $l$  бесконечно длинной цилиндрической полости,

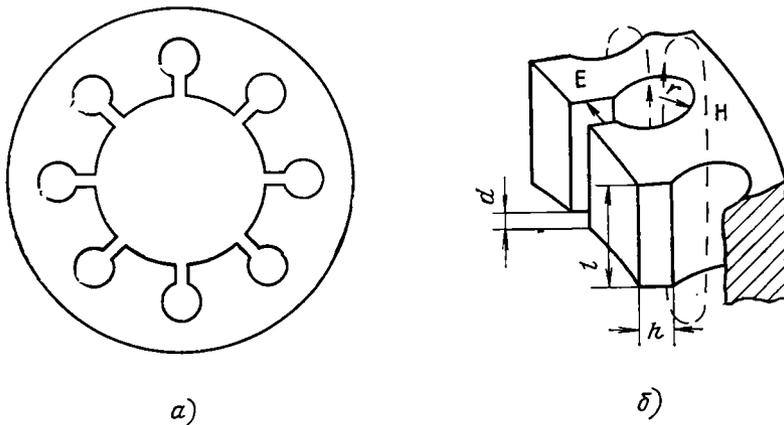


РИС. 22.11

стенки которого обтекает в поперечном направлении ток  $i$  (замыкающийся в зазоре током смещения). Поскольку при этом вектор  $\mathbf{H}$  направлен вдоль длины цилиндрической полости, то с помощью закона полного тока в квазистационарном приближении нетрудно получить значение  $H=i/l$ . В рассматриваемом случае индуктивность ячейки

$$L = \frac{\Phi}{i} = \frac{1}{i} \int_S \mathbf{B} d\mathbf{S} = \frac{\mu_a}{i} \int_{S_1} H dS = \frac{\mu_a}{l} \pi r^2 \quad (22.20)$$

и в соответствии с (22.19) и (22.20)

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{r} \sqrt{\frac{d}{\epsilon_a \mu_a \pi h}},$$

$$\lambda_0 = 2\pi r \sqrt{\pi h/d}. \quad (22.21)$$

Отметим, что резонатор магнетрона состоит из нескольких ячеек и, следовательно, является многоконтурной системой, частота которой несколько отличается от резонансной частоты (22.21) отдельной ячейки.

## 22.5. ДОБРОТНОСТЬ ОБЪЕМНЫХ ЗАКРЫТЫХ РЕЗОНАТОРОВ

Одним из основных параметров любой реальной колебательной системы является ее *добротность*, которая определяет полосу пропускания системы и скорость затухания собственных колебаний. Добротностью объемного резонатора (как и любой другой колебательной системы) для  $s$ -го типа колебаний называют отношение

$$Q_s = 2\pi \frac{\omega}{\omega_{\Pi}} = \omega_s \frac{\omega}{P_{\text{п.ср}}}, \quad (22.22)$$

где  $\omega$  — запасенная при резонансе внутри полости электромагнитная энергия  $s$ -го типа колебаний;  $\omega_{\Pi}$  — энергия полных потерь за время одного периода  $T_s$ ;  $P_{\text{п.ср}}$  — средняя за период мощность полных потерь ( $\omega_{\Pi} = P_{\text{п.ср}} T_s$ );  $\omega_s = 2\pi/T_s$  — собственная частота колебаний. Различным типам колебаний резонатора соответствуют различные структуры поля, различные значения  $\omega$  и  $\omega_{\Pi}$  и, следовательно, различные добротности  $Q_s$ .

Добротность (22.22), зависящую от мощности полных потерь, часто называют *нагруженной добротностью* резонатора. Мощность полных потерь

$$P_{\text{п.ср}} = P_{\text{с.ср}} + P_{\text{вн.ср}}, \quad (22.23)$$

где  $P_{\text{с.ср}}$  — мощность *собственных потерь* (непосредственно в резонаторе);  $P_{\text{вн.ср}}$  — мощность *внешних потерь*, уходящая из резонатора через элементы связи во внешние цепи. Из (22.22) и (22.23) следует, что

$$1/Q_s = 1/Q_{\text{ср}} + 1/Q_{\text{свн}}, \quad Q_{\text{ср}} = \omega_s \omega / P_{\text{с.ср}}, \quad Q_{\text{свн}} = \omega_s \omega / P_{\text{вн.ср}}, \quad (22.24)$$

причем  $Q_{\text{ср}}$  называют *собственной добротностью* резонатора;  $Q_{\text{свн}}$  — *внешней добротностью*. Приняв во внимание, что  $P_{\text{с.ср}} = P_{\text{м.ср}} + P_{\text{д.ср}}$ , где  $P_{\text{м.ср}}$  — мощность потерь в металлических стенках резонатора;  $P_{\text{д.ср}}$  — мощность потерь в диэлектрике, заполняющем внутреннюю полость, и  $P_{\text{вн.ср}} = P_{\text{вх.ср}} + P_{\text{вых.ср}}$ , где  $P_{\text{вх.ср}}$  и  $P_{\text{вых.ср}}$  — соответственно мощности, отдаваемые через элементы связи во входную и выходную цепи резонатора, в соответствии с (22.24) получим:

$$1/Q_{\text{ср}} = 1/Q_{\text{см}} + 1/Q_{\text{сд}}, \quad Q_{\text{см}} = \omega_s \omega / P_{\text{м.ср}}, \quad Q_{\text{сд}} = \omega_s \omega / P_{\text{д.ср}}; \quad (22.25)$$

$$1/Q_{\text{свн}} = 1/Q_{\text{свх}} + 1/Q_{\text{свых}}, \quad Q_{\text{свх}} = \omega_s \omega / P_{\text{вх.ср}}, \quad Q_{\text{свых}} = \omega_s \omega / P_{\text{вых.ср}}. \quad (22.26)$$

Здесь  $Q_{\text{см}}$ ,  $Q_{\text{сд}}$ ,  $Q_{\text{свх}}$  и  $Q_{\text{свых}}$  — добротности, соответствующие потерям в стенках, диэлектрике, входной и выходной цепях.

Введенные в (22.24) — (22.26) частичные добротности позволяют при определении нагруженной добротности учесть порознь влияние каждого источника потерь. Из-за отсутствия строгого решения задачи об электромагнитном поле в реальном резонаторе с неидеально проводящими стенками и элементами связи определение частичных добротностей проводят приближенным мето-

дом. Этот метод справедлив для невырожденных типов колебаний при небольших полных потерях, когда возможно основываться на электромагнитном поле, полученном для резонатора без потерь. При использовании приближенного метода мощности потери  $P_{д.ср}$ ,  $P_{м.ср}$ ,  $P_{вх.ср}$  и  $P_{вых.ср}$  рассматривают как независимые друг от друга величины и вычисляют отдельно. Например,  $P_{м.ср}$  находят в предположении отсутствия потерь в заполняющей полости среде и потерь через элементы связи.

Из первой ф-лы (22.24) следует, что нагруженная добротность резонатора  $Q_s$  меньше собственной добротности  $Q_{sc}$  и внешней добротности  $Q_{свн}$ . Внешняя добротность зависит от устройства элементов связи резонатора со входной и выходной цепями, и в различных конкретных случаях могут применяться различные методы ее нахождения. Чем сильнее связь резонатора с внешними цепями, тем больше мощность внешних потерь  $P_{вн.ср}$ , меньше  $Q_{свн}$  и, следовательно, меньше нагруженная добротность резонатора  $Q_s$ . Пример расчета внешней добротности приводится в § 22.6. Здесь рассмотрим метод определения собственной добротности резонатора.

Поскольку в резонаторе все составляющие каждого из векторов  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  имеют одинаковую начальную фазу, то согласно (3.54) получим  $\mathbf{E}(t) = \mathbf{E}_m \cos(\omega t + \varphi_E)$ , где  $\mathbf{E}_m = \mathbf{u}^0 E_{um} + \mathbf{v}^0 E_{vm} + \mathbf{w}^0 E_{wm}$ , и аналогичное выражение для  $\mathbf{H}(t)$ . В этом частном случае в соответствии с (4.25) справедливы равенства:

$$\begin{aligned} |\dot{\mathbf{E}}|^2 &= E_{um}^2 + E_{vm}^2 + E_{wm}^2 = E_m^2, \\ |\dot{\mathbf{H}}|^2 &= H_{um}^2 + H_{vm}^2 + H_{wm}^2 = H_m^2, \end{aligned} \quad (22.27)$$

где  $E_m^2$ ,  $H_m^2$  — квадраты амплитуд соответствующих векторов.

Поскольку существуют моменты времени, когда вся запасенная в резонаторе энергия связана с электрическим или магнитным полем, то, следовательно, ее можно выразить через максимальную энергию одного из этих полей. При этом в случае однородной среды, заполняющей внутреннюю полость  $V$ , согласно (4.13) имеем

$$\omega = \omega_{э.макс} = \frac{\epsilon_{1a}}{2} \int_V E_m^2 dV \quad \text{или} \quad \omega = \omega_{м.макс} = \frac{\mu_{1a}}{2} \int_V H_m^2 dV, \quad (22.28)$$

где  $\epsilon_{1a}$ ,  $\mu_{1a}$  — параметры этой среды.

При заполнении внутренней полости средой с потерями ( $\sigma_1 \neq 0$ ) согласно § 4.3 и (22.27) имеем  $P_{д.ср} = \frac{\sigma_1}{2} \int_V E_m^2 dV$ . Отсюда

и из (22.28) получаем

$$Q_{sd} = \omega_s \omega / P_{д.ср} = \omega_s \epsilon_{1a} / \sigma_1 = 1 / \text{tg} \delta_1, \quad (22.29)$$

где  $\text{tg} \delta_1$  — тангенс угла диэлектрических потерь среды [см. (3.69)] на частоте  $\omega_s$ . Обычно полость заполнена воздухом,  $Q_{sd}$

оказывается значительно больше других частичных добротностей и может вообще не учитываться.

Мощность потерь в металлических стенках  $P_{м.ср}$  определяется по ф-ле (14.19), где  $S$  — площадь внутренней поверхности стенок. С помощью (14.19), (22.27) и второго выражения (22.28) получим

$$Q_{s м} = \omega_s \frac{w}{P_{м.ср}} = \omega_s \frac{\mu_{1a}}{r_s} \frac{\int_V H_m^2 dV}{\oint_S H_{\tau m}^2 dS}, \quad (22.30)$$

где  $r_s = \sqrt{\mu_{2a} \omega_s / 2\sigma_2}$  — активное поверхностное сопротивление металлических стенок;  $H_{\tau m}$  — амплитуда касательной к стенке компоненты вектора  $\mathbf{H}$ . При определении  $Q_{см}$  приближенно принимают в (22.30) магнитное поле таким же, как в резонаторе без потерь (ср. § 14.3).

Можно показать (например, [48]), что в цилиндрическом резонаторе частичная добротность (22.30) для колебаний типа  $H_{mnp}$ ,  $E_{mnp}$  или  $T_p$  выражается через коэффициент затухания  $\alpha_v$  соответствующей бегущей волны  $H_{mn}$ ,  $E_{mn}$  или  $T$  в волноводе, обусловленный потерями в металлических стенках:

$$\frac{1}{Q_{s м}} = \frac{1}{\pi} \frac{\lambda_s^2}{\Lambda_v} \left[ \alpha_v + \frac{r_s \delta_p}{Z_{cv} l} \right], \quad (22.31)$$

где  $\delta_p = 1$  при  $p=0$ ;  $\delta_p = 2$  при  $p=1, 2, 3 \dots$ ;  $Z_{cv}$  — характеристическое сопротивление бегущей волны. При вычислении согласно (22.31)  $Q_{см}$  в формулах теории регулярных волноводов следует положить  $\lambda = \lambda_s$ .

Например, по ф-ле (22.31) для колебаний типа  $H_{101}$  в прямоугольном резонаторе с помощью (19.14) — (19.16), (19.33) и (22.8) находим

$$Q_{м} = \frac{\pi Z_c}{\lambda_s r_s} \frac{abl(a^2 + l^2)}{al(a^2 + l^2) + 2b(a^3 + l^3)}; \quad (22.32)$$

для колебаний типа  $H_{011}$  в цилиндрическом круглом резонаторе с помощью (19.15), (19.16), (19.81) и (22.8) получаем

$$Q_{м} = \frac{\pi Z_c}{\lambda_s r_s} \frac{al}{(2a-l)(\lambda_s/2l)^2 + l}; \quad (22.33)$$

для колебаний типа  $T_1$  в цилиндрическом коаксиальном резонаторе с помощью соотношений  $\lambda_s = \Lambda_v = 2l$ ,  $Z_{cv} = Z_\lambda = Z_c$  и (19.103) получаем

$$Q_{м} = \frac{\pi Z_c}{r_s} \frac{ab \ln(b/a)}{l(a+b) + 4ab \ln(b/a)}. \quad (22.34)$$

Расчеты показывают, что в сантиметровом диапазоне волн собственная добротность прямоугольного резонатора достигает

десятков тысяч, круглого резонатора для колебаний типа  $H_{011}$  — сотен тысяч и коаксиального резонатора для колебаний типа  $T_1$  — нескольких тысяч.

## 22.6. ПРОХОДНОЙ ВОЛНОВОДНЫЙ РЕЗОНАТОР

Количественное исследование связи резонатора с его входной и выходной цепями проведем на примере проходного резонатора в волноводе, часто используемого на практике. Такой объемный резонатор образован отрезком волновода, ограниченным с торцов одинаковыми поперечными реактивными нерегулярностями, кото-

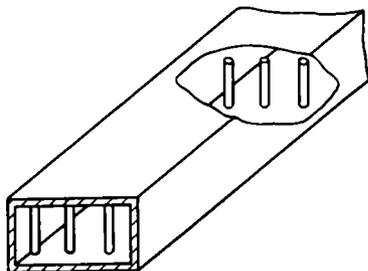


РИС. 22.12

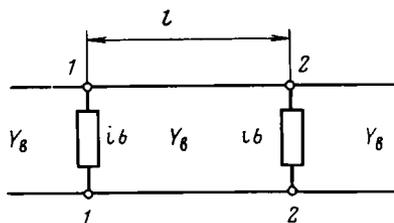


РИС. 22.13

рые не обладают резонансными свойствами (например, индуктивная диафрагма или решетка из индуктивных штырей) — рис. 22.12. Вид и размеры торцевых нерегулярностей определяют величину связи резонатора с внешними цепями. Исследование проходного резонатора обычно проводят без учета собственных потерь в нем. Следовательно, найденная ниже нагруженная добротность этого резонатора является, по существу, его внешней добротностью.

Схема замещения проходного резонатора представляет собой длинную линию, эквивалентную волноводу с волной рабочего типа, которая шунтирована двумя реактивными проводимостями  $i b$ , являющимися схемами замещения нерегулярностей (рис. 22.13). Проводимости расположены друг от друга на электрическом расстоянии  $\theta = \beta_v l$ , которое достаточно велико, чтобы пренебречь их взаимодействием через местные поля.

Прежде всего, определим функцию ослабления (21.111) четырехполюсника рис. 22.13. Поскольку при согласованном выходе нормированная проводимость в точках 2—2 равна  $\hat{Y}_{22} = 1 + i b$ , то согласно (21.23) входная проводимость на зажимах 1—1 определится соотношением

$$\hat{Y}_{11} = i b + \frac{(1 + i b) + i \operatorname{tg} \theta}{1 + i(1 + i b) \operatorname{tg} \theta}. \quad (22.35)$$

Для коэффициента отражения  $S_{11}$  от зажимов  $I-I$  в соответствии с (21.8) и (22.35) получим

$$S_{11} = \frac{1 - \hat{Y}_{11}}{1 + \hat{Y}_{11}} = \frac{-i \hat{b} (2 - \hat{b} \operatorname{tg} \theta)}{2(1 - \hat{b} \operatorname{tg} \theta) + i[\hat{b}(2 - \hat{b} \operatorname{tg} \theta) + 2 \operatorname{tg} \theta]}. \quad (22.36)$$

Поскольку собственные потери в резонаторе не учитываются, то согласно (21.90) имеем  $|S_{21}|^2 = 1 - |S_{11}|^2$ . С помощью (21.111) и (22.36) находим

$$A = \frac{1}{1 - |S_{11}|^2} = 1 + \left[ \hat{b} \left( \cos \theta - \frac{\hat{b}}{2} \sin \theta \right) \right]^2. \quad (22.37)$$

Так как нерегулярности являются нерезонансными, то  $\hat{b} \neq 0$ . При этом из (22.37) следует, что если на некоторой длине волны  $\lambda_0$  (частоте  $f_0$ ), которой соответствуют электрическое расстояние  $\theta_0 = 2\pi l / \Lambda_0$  и реактивная проводимость  $\hat{b} = \hat{b}_0$ , выполняется условие  $\operatorname{tg} \theta_0 = 2 / \hat{b}_0$ , то вся поступающая на вход резонатора мощность пройдет на его выход ( $A = 1$ ). Резонансное электрическое расстояние

$$\theta_0 = \varphi_0 + p\pi, \quad p = 0, 1, 2, \dots, \quad (22.38)$$

где

$$\varphi_0 = \operatorname{arc} \operatorname{tg} (2 / \hat{b}_0), \quad -\pi/2 < \varphi_0 < \pi/2 \quad (22.39)$$

— главное значение обратной тригонометрической функции. Подставив в (22.38)  $\theta_0 = 2\pi l / \Lambda_0$ , найдем резонансную длину резонатора

$$l = (\Lambda_0 / 2) (p + \varphi_0 / \pi). \quad (22.40)$$

При отсутствии связи ( $\hat{b}_0 = \infty$ , нерегулярность — сплошная поперечная металлическая стенка)  $\varphi_0 = 0$  и условие резонанса (22.40) переходит в (22.4). Если  $\hat{b}_0 > 0$  (емкостная нерегулярность), то  $\varphi_0 > 0$  и длина резонатора (22.40) больше значения (22.4); если  $\hat{b}_0 < 0$  (индуктивная нерегулярность), то  $l$  меньше значения (22.4).

На частотах  $f \neq f_0$  условие резонанса  $\operatorname{tg} \theta = 2 / \hat{b}$  не выполняется и функция ослабления (22.37) больше единицы. Поскольку нерегулярности нерезонансные, то частотная характеристика  $A(f)$  вблизи резонансной частоты  $f_0$  определяется, главным образом, изменением электрического расстояния  $\theta$  с частотой, а реактивную проводимость  $\hat{b}$  можно приближенно считать постоянной и равной  $\hat{b}_0$ . Полагая в узкой полосе частот вблизи резонанса  $\theta = \theta_0 + \Delta\theta$ ,  $|\Delta\theta| \ll 1$ ,  $\sin \Delta\theta \approx \Delta\theta$  и  $\cos \Delta\theta \approx 1$ , найдем с помощью формул косинуса и синуса суммы углов:

$$\begin{aligned} \cos \theta &= \cos (\theta_0 + \Delta \theta) \approx \cos \theta_0 - \Delta \theta_0 \sin \theta_0, \\ \sin \theta &= \sin (\theta_0 + \Delta \theta) \approx \sin \theta_0 + \Delta \theta \cos \theta_0. \end{aligned} \quad (22.41)$$

Подставляя (22.41) в (22.37) и учитывая равенство  $\cos\theta_0 - \frac{\hat{b}_0}{2} \sin\theta_0 = 0$ , получаем

$$A = 1 + \left[ \hat{b}_0 \left( \sin\theta_0 + \frac{\hat{b}_0}{2} \cos\theta_0 \right) \Delta\theta \right]^2. \quad (22.42)$$

Представив приближенно вблизи резонанса функцию  $\theta(\lambda)$  двумя первыми членами ряда Тейлора  $\theta(\lambda_0 + \Delta\lambda) = \theta_0 + \left( \frac{d\theta}{d\lambda} \right)_{\lambda=\lambda_0} \Delta\lambda$ , получим при учете (18.25)

$$\Delta\theta = \left( \frac{d\theta}{d\lambda} \right)_{\lambda=\lambda_0} \Delta\lambda = \left( \frac{d\theta}{d\Lambda} \frac{d\Lambda}{d\lambda} \right)_{\lambda=\lambda_0} \Delta\lambda = -\theta_0 \left( \frac{\Lambda_0}{\lambda_0} \right)^2 \frac{\Delta\lambda}{\lambda_0}, \quad (22.43)$$

где  $\Delta\lambda = \lambda - \lambda_0$ . Производя в (22.42) замену  $\hat{b}_0/2 = \cos\theta_0/\sin\theta_0$ , используя затем равенство  $1/\sin\theta_0 = \sqrt{1 + \text{ctg}^2\theta_0} = \sqrt{1 + (\hat{b}_0/2)^2}$  и соотношение (22.43), находим

$$A = 1 + \left[ \theta_0 \left( \frac{\Lambda_0}{\lambda_0} \right)^2 \frac{\hat{b}_0}{2} \sqrt{1 + \left( \frac{\hat{b}_0}{2} \right)^2} \right]^2 \left( -\frac{2\Delta\lambda}{\lambda_0} \right)^2. \quad (22.44)$$

Из теории электрических цепей известно, что вблизи резонансной частоты  $f_0$  функция ослабления параллельного  $LC$ -контура, шунтирующего длинную линию, определяется выражением

$$A = 1 + Q^2 v^2, \quad (22.45)$$

где  $Q$  — нагруженная добротность контура, учитывающая параллельное подсоединение к нему двух линий с волновыми проводимостями  $Y_B$  ( $Q = \omega_0 C / 2Y_B$ );

$$v = \frac{f}{f_0} - \frac{f_0}{f} = \frac{\lambda_0}{\lambda} - \frac{\lambda}{\lambda_0} \approx \frac{2\Delta f}{f_0} \approx -\frac{2\Delta\lambda}{\lambda_0}; \quad (22.46)$$

$\Delta f = f - f_0$ ;  $\Delta\lambda = \lambda - \lambda_0$ . Величина  $\Delta f$  есть абсолютная расстройка контура;  $\Delta f/f_0$  — его относительная расстройка;  $v$  при малых расстройках равно удвоенной относительной расстройке. Из (22.45), (22.46) следует, что ширина полосы пропускания  $2\Delta f_{0,5}$  на уровне половинной мощности [которому согласно (21.111) соответствует значение  $A=2$ ], резонансная частота  $f_0$  и нагруженная добротность  $Q$  связаны соотношением

$$Q = f_0 / 2\Delta f_{0,5}. \quad (22.47)$$

Чем больше значение  $Q$ , тем меньше относительная ширина полосы пропускания  $2\Delta f_{0,5}/f_0$ .

Сопоставление (22.44) и (22.45) показывает, что вблизи резонансной частоты  $f_0$  частотные характеристики проходного волноводного резонатора и параллельного  $LC$ -контура, шунтирующего линию, подобны. Следовательно, вблизи  $f_0$  схемой замещения всего волноводного резонатора служит параллельный  $LC$ -контур, который шунтирует длинную линию, эквивалентную волноводу с волной рабочего типа (рис. 22.14).

Из тех же формул следует, что нагруженная добротность проходного волноводного резонатора

$$Q = \theta_0 \left( \frac{\Lambda_0}{\lambda_0} \right)^2 \frac{|\hat{b}_0|}{2} \sqrt{1 + \left( \frac{\hat{b}_0}{2} \right)^2}. \quad (22.48)$$

Она возрастает с увеличением  $\theta_0$  и  $|\hat{b}_0|$ . Увеличение  $\theta_0$  означает увеличение числа полуволн, укладываемых на длине резонатора ( $p=1, 2, 3 \dots$ ), что приводит к увеличению запасенной в резо-

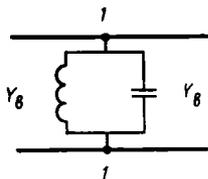


Рис. 22.14

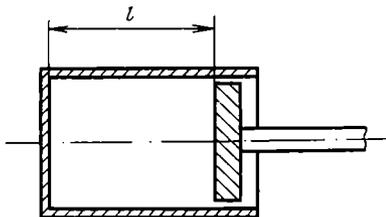


Рис. 22.15

наторе энергии и, следовательно,  $Q$ . Увеличение  $|\hat{b}_0|$  сопровождается уменьшением связи резонатора с внешними цепями, что приводит к уменьшению мощности внешних потерь и увеличению  $Q$ .

Далее нам потребуется формула, определяющая вблизи резонансной частоты  $\omega_0$  нормированную проводимость параллельного контура, который шунтирует линию с волновой проводимостью  $Y_b$ . Очевидно, что схема, изображенная на рис. 22.14, имеет в сечении  $1-1$  входную проводимость

$$Y = Y_b + i(\omega C - 1/\omega L) = Y_b + i\omega_0 C\nu, \quad (22.49)$$

где использованы соотношения  $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$  и  $\nu = \omega/\omega_0 - \omega_0/\omega$ . Эта проводимость, нормированная на  $Y_b$ , равна  $\hat{Y} = 1 + i2Q\nu$ , где  $Q = \omega_0 C/2Y_b$ , и, следовательно, нормированная проводимость собственно параллельного контура

$$\hat{Y}_k = i2Q\nu. \quad (22.50)$$

## 22.7. ПЕРЕСТРОЙКА ЧАСТОТЫ ОБЪЕМНЫХ РЕЗОНАТОРОВ

Согласно (22.8) изменение собственной частоты рабочего типа колебаний  $H_{mnp}$  или  $E_{mnp}$  ( $p \neq 0$ ) цилиндрического резонатора наиболее просто осуществить изменением его длины  $l$ , для чего одну из торцевых стенок можно выполнить в виде подвижного поршня. При возбуждении в круглом резонаторе типов колебаний  $H_{0np}$  в стенках резонатора существуют только поперечные кольцевые токи (ср. рис. 22.6б), которые допускают применение даже бесконтактного поршня для изменения длины  $l$  (рис. 22.15). Для остальных типов круглого резонатора и типов колебаний дру-

гих цилиндрических резонаторов существуют продольные составляющие тока в стенках, что приводит к появлению нежелательных потерь в подвижном контакте; собственные частоты типов  $E_{mn0}$  вообще не зависят от длины  $l$ , и их нельзя изменять перемещением торцевой стенки. Поэтому часто применяют резонаторы постоянной длины, а перестройку собственной частоты в небольших пределах и компенсацию ее изменения, вызванного неточностью изготовления, производят либо незначительным изменением объема резонатора (путем прогиба стенки или введения внутрь полости металлического тела), либо изменением параметров среды в нем (путем введения, например, небольшого диэлектрического тела).

Пусть резонатор с внутренней полостью  $V_1$  заполнен средой с параметрами  $\epsilon_{1a}$ ,  $\mu_{1a}$  и имеет собственную частоту  $\omega_s$ . Если внутрь полости ввести малое тело объема  $V_2$ , которое характеризуется либо значением  $\epsilon_2 = \infty$  (металл), либо параметрами  $\epsilon_{2a}$ ,  $\mu_{2a}$  (диэлектрик), то собственная частота возмущенного типа колебаний изменится и станет равной  $\omega'_s$ . Эту частоту можно определить приближенным методом малых возмущений (см., например, [29]):

$$\frac{\omega'_s - \omega_s}{\omega_s} = \frac{\Delta \omega_m - \Delta \omega_\epsilon}{2 \omega(V_1)}. \quad (22.51)$$

Здесь  $\omega(V_1) = \frac{\epsilon_{1a}}{2} \int_{V_1} E_m^2 dV = \frac{\mu_{1a}}{2} \int_{V_1} H_m^2 dV$  — полная энергия электромагнитного поля, запасенная в объеме  $V_1$  невозмущенного резонатора [ср. ф-лы (22.28)]. При введении металлического тела (или деформации стенок)

$$\Delta \omega_m = \omega_{m, \max}(V_2) = \frac{\mu_{1a}}{2} \int_{V_2} H_m^2 dV \quad \text{и} \quad \Delta \omega_\epsilon = \omega_{\epsilon, \max}(V_2) = \frac{\epsilon_{1a}}{2} \int_{V_2} E_m^2 dV$$

— максимальные энергии магнитного и электрического полей в объеме  $V_2$  невозмущенного резонатора. При введении диэлектрического тела с параметрами  $\epsilon_{2a}$ ,  $\mu_{2a}$ :

$$\Delta \omega_m = - \frac{\mu_{2a} - \mu_{1a}}{2} \int_{V_2} H_m^2 dV = - \frac{\mu_{2a} - \mu_{1a}}{\mu_{1a}} \omega_{m, \max}(V_2),$$

$$\Delta \omega_\epsilon = \frac{\epsilon_{2a} - \epsilon_{1a}}{2} \int_{V_2} E_m^2 dV = \frac{\epsilon_{2a} - \epsilon_{1a}}{\epsilon_{1a}} \omega_{\epsilon, \max}(V_2).$$

Проиллюстрируем приведенные результаты несколькими примерами. Если через середину торцевой стенки цилиндрического круглого резонатора с типом колебаний  $E_{010}$  вводить металлический стержень (винт)  $1$  вдоль оси (рис. 22.16), то  $\Delta \omega_m \approx 0$ ,  $\Delta \omega_\epsilon > 0$  (ср. рис. 22.6г) и согласно (22.51) собственная частота уменьшается ( $\omega'_s < \omega_s$ ). Если же через боковую стенку этого резонатора вводить вдоль радиуса стержень  $2$ , то частота увеличивается, так как в объеме  $V_2$  у стенки  $\Delta \omega_m > 0$ ,  $\Delta \omega_\epsilon \approx 0$ .

Таким образом, если введением металлического тела или деформацией стенок вытесняется электрическое поле невозмущенного типа колебаний, то собственная частота уменьшается, если же вытесняется магнитное поле, то — увеличивается. Это позволяет иногда разводить собственные частоты вырожденных типов колебаний в разные стороны и тем самым уничтожить вырождение.

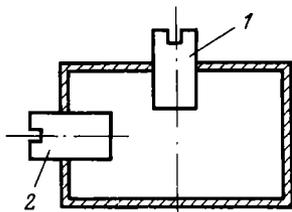


РИС. 22.16

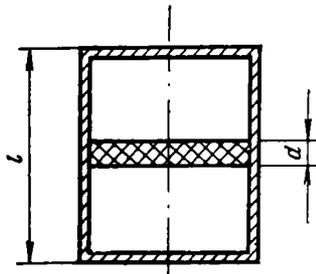


РИС. 22.17

Например, если в цилиндрическом круглом резонаторе через середину боковой стенки ввести вдоль радиуса стержень, то собственная частота типа колебаний  $H_{011}$  увеличится (ср. рис. 22.6б), а типа  $E_{111}$  — уменьшится, что приведет к снятию вырождения.

Пусть в цилиндрическом круглом резонаторе с произвольным типом колебаний класса  $H$  в пучности электрического поля расположен тонкий диэлектрический диск толщиной  $d \ll \lambda$  (рис. 22.17). При этом согласно (22.5) имеем

$$\omega(V_1) = \frac{\epsilon_{1a}}{2} \int_{S_{\perp}} \int_0^l E_{0\perp m}^2 \sin^2 \frac{\pi z}{l} dS dz = \frac{\epsilon_{1a} l}{4} \int_{S_{\perp}} E_{0\perp m}^2 dS. \quad (22.52)$$

Поскольку  $\mu_{2a} \approx \mu_{1a} \approx \mu_0$ , то  $\Delta\omega_M = 0$ ; поскольку тонкий диск расположен в пучности электрического поля, то в пределах диска  $\sin(\pi z/l) \approx 1$  и  $\Delta\omega_s = \frac{\epsilon_{2a} - \epsilon_{1a}}{2} d \int_{S_{\perp}} E_{0\perp m}^2 dS$ . Подставив эти резуль-

таты в (22.51), находим  $\frac{\omega'_s - \omega_s}{\omega_s} = -\frac{d}{l} \left( \frac{\epsilon_{2a}}{\epsilon_{1a}} - 1 \right)$ . Как правило,  $\epsilon_{1a} = \epsilon_0$  (полость заполнена воздухом),  $\epsilon_{2a} > \epsilon_{1a}$  и введение диэлектрического диска уменьшает собственную частоту.

## 22.8. ВЫНУЖДЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ ЗАКРЫТЫХ ОБЪЕМНЫХ РЕЗОНАТОРОВ

Методы возбуждения колебаний в объемных резонаторах и вывода энергии из них аналогичны соответствующим методам в волноводах. В качестве элемента связи резонатора с входной или выходной цепью можно использовать зонд, ориентированный

вдоль линий Е рабочего типа колебаний, петлю, плоскость которой перпендикулярна линиям Н рабочего типа колебаний, или щель (отверстие) в стенке резонатора, которая перерезает линии  $\eta$ , соответствующие рабочему типу колебаний (ср. § 19.23).

В волноводной технике часто используют проходную схему включения резонатора, при которой через элемент связи на входе

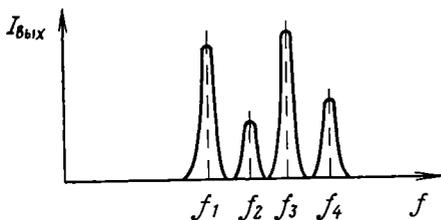


РИС. 22.18

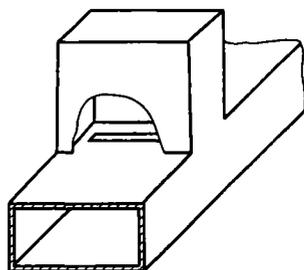


РИС. 22.19

резонатор возбуждается, а через элемент связи на выходе из резонатора выводится энергия. В узкой полосе частот, примыкающей к резонансной частоте  $f_s$  произвольного невырожденного  $s$ -го типа колебаний, эквивалентную схему такого резонатора можно представить параллельным  $LC$ -контуром, шунтирующим входную и выходную цепи (ср. § 22.6). При изменении в широких пределах частоты монохроматических колебаний, подводимых к эле-

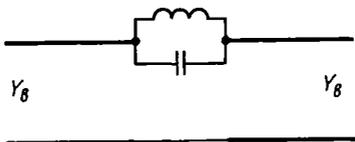


РИС. 22.20

менту связи на входе резонатора, получим целый ряд резонансных кривых, каждая из которых соответствует определенному типу колебаний, характеризуется экстремумом на резонансной частоте  $f_s$  этого типа и имеет вид резонансной кривой обычного колебательного контура. Подобные резонансные кривые можно построить, например, по показаниям микроамперметра, подключенного через кристаллический детектор к зонду или петле, осуществляющим связь с выходной цепью резонатора (рис. 22.18).

На рис. 22.19 изображен объемный резонатор, связанный с прямоугольным волноводом с волной  $H_{10}$  при помощи поперечной щели в широкой стенке волновода. Такая щель перерезает линии плотности поверхностного тока (см. рис. 19.5) и поэтому является элементом связи между волноводом и резонатором. Поскольку

поперечная щель перерезает линии плотности *продольного* поверхностного тока на широких стенках волновода, то схема замещения резонатора, представляющая собой вблизи резонансной частоты параллельный  $LC$ -контур, оказывается включенной *последовательно* в эквивалентную волноводу с волной  $H_{10}$  длинную линию (рис. 22.20). На резонансной частоте проводимость контура обращается в нуль (при пренебрежении потерями), что означает разрыв цепи и полное отражение волны  $H_{10}$  к генератору. При удалении от резонанса проводимость контура возрастает и прохождение волны  $H_{10}$  со входа волновода на его выход увеличивается.

## Глава 23

### СОГЛАСОВАНИЕ НАГРУЗКИ С ЛИНИЕЙ ПЕРЕДАЧИ. ЧАСТОТНЫЕ ФИЛЬТРЫ СВЧ

#### Согласование нагрузки с линией передачи



#### 23.1. ПРИНЦИП СОГЛАСОВАНИЯ НАГРУЗКИ С ЛИНИЕЙ ПЕРЕДАЧИ

Прохождение волны рабочего типа по произвольному волноводному тракту можно рассматривать с помощью эквивалентных схем, пользуясь методами теории электрических цепей (гл. 21).

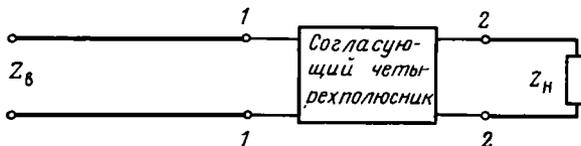


РИС. 23.1

При этом, в частности, остаются справедливыми все соотношения § 21.2, в которых в случае волн классов  $H$  и  $E$  фигурируют *условные* напряжения и токи и эквивалентные сопротивления и проводимости, а параметры  $k=2\pi/\lambda$  и  $Z_0$  длинной линии с волной  $T$  заменены соответствующими параметрами  $\beta_v=2\pi/\Lambda_v$  и  $Z_{0v}$  эквивалентной длинной линии с волной рабочего типа (см. § 21.3).

Полным согласованием нагрузки с линией передачи называют обеспечение в линии передачи режима бегущей волны, который характеризуется параметрами  $\hat{Z}(z)=1$ ,  $|p|=0$ ,  $K_{б.в.}=1$ ,  $K_{с.в.}=1$  и поглощением нагрузкой всей мощности падающей волны (см. § 21.2).

Согласование произвольной нагрузки  $Z_{\text{н}}$  с линией передачи осуществляется путем включения вблизи от нагрузки согласующего реактивного (не вносящего потерь) четырехполюсника, от которого отражается компенсирующая волна (рис. 23.1). Если волны, отраженные от нагрузки и от согласующего четырехполюсника, имеют одинаковые амплитуды и противоположные фазы, то они полностью компенсируют друг друга, в линии устанавливается режим бегущей волны и вся отдаваемая генератором мощность поступает в нагрузку. Согласование невозможно, если  $Z_{\text{н}}=iX_{\text{н}}$  (сопротивление нагрузки реактивно),  $Z_{\text{н}}=0$  («короткое замыкание») или  $Z_{\text{н}}=\infty$  («холостой ход»). Поскольку эти нагрузки полностью отражают падающую на них волну (см. § 21.2) и четырехполюсник не вносит потерь, то вся мощность падающей волны возвращается в генератор.

Согласующий четырехполюсник без потерь является трансформатором полных сопротивлений, который преобразует эквивалентное сопротивление  $Z_{22}$  (см. рис. 23.1) в сопротивление  $Z_{11}=Z_{\text{в}}$ , что и обеспечивает режим бегущей волны (ср. § 21.2). Строгий анализ показывает, что с помощью такого четырехполюсника можно полностью согласовать комплексную нагрузку  $Z_{\text{н}}$  с линией передачи только на нескольких фиксированных частотах внутри заданного диапазона и невозможно получить бегущую волну на всех его частотах. Поэтому при осуществлении согласования в полосе частот приходится задаваться некоторым максимальным допустимым значением  $|p|_{\text{макс}} > 0$  и считать, что согласование обеспечено, если на всех частотах внутри полосы  $|p| \leq |p|_{\text{макс}}$ .

### 23.2. УЗКОПОЛОСНОЕ СОГЛАСОВАНИЕ

Целью узкополосного согласования нагрузки с линией передачи является обеспечение режима бегущей волны только на *одной фиксированной* частоте  $f_0$ . При этом полосой пропускания (согласования) называют некоторый интервал частот, включающий  $f_0$ , в котором выполняется условие  $|p| \leq |p|_{\text{макс}}$ .

Пусть координата  $z$  вдоль линии отсчитывается от нагрузки и возрастает в направлении к генератору. При этом условии для всех сечений линии координата  $z$  принимает положительные значения и отличается только знаком от соответствующих значений в § 21.2.

**Метод параллельной реактивности.** Согласно (21.25) в сечениях  $z'$  и  $z''$ , соответствующих минимуму и максимуму условного напряжения, нормированные проводимости активны, причем одна из них больше, а другая меньше единицы:  $Y(z') = 1/K_{\text{б.в}} > 1$  и  $Y(z'') = K_{\text{б.в}} < 1$ . Следовательно, между двумя любыми такими сечениями имеется сечение  $z=l$ , в котором активная часть нормированной проводимости равна единице:  $Y(l) =$

$= 1 + i\hat{b}(l)$ . При замене в (21.23)  $k$  на  $\beta$  получим для сечения  $l$  равенство

$$\frac{\hat{Y}_H + i \operatorname{tg} \beta l}{1 + i \hat{Y}_H \operatorname{tg} \beta l} = 1 + i \hat{b}(l), \quad (23.1)$$

где  $\hat{Y}_H = \hat{g}_H + i\hat{b}_H$ . Приравнивание в (23.1) вещественных частей дает уравнение, решение которого позволяет определить величину  $l$ :

$$\operatorname{tg} \beta l = \frac{\hat{b}_H \pm \sqrt{\hat{g}_H(\hat{g}_H^2 - 2\hat{g}_H + \hat{b}_H^2 + 1)}}{\hat{g}_H^2 + \hat{b}_H^2 - \hat{g}_H}. \quad (23.2)$$

Приравнивание в (23.1) мнимых частей приводит к выражению

$$\hat{b}(l) = \frac{\hat{b}_H + (1 - \hat{b}_H^2 - \hat{g}_H^2) \operatorname{tg} \beta l - \hat{b}_H \operatorname{tg}^2 \beta l}{1 - 2\hat{b}_H \operatorname{tg} \beta l + (\hat{b}_H + \hat{g}_H^2) \operatorname{tg}^2 \beta l}, \quad (23.3)$$

подстановка в которое  $\operatorname{tg} \beta l$  из (23.2) определяет  $\hat{b}(l)$ .

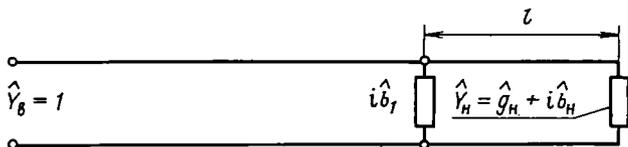


РИС. 23.2

Реактивную часть проводимости  $\hat{b}(l)$  легко компенсировать путем параллельного включения в сечение линии  $z=l$  реактивной проводимости  $\hat{b}_l = -\hat{b}(l)$ , что приведет к результирующей проводимости  $\hat{Y}_p(l) = 1$  и, следовательно, согласованию нагрузки с линией (рис. 23.2).

Из (23.2) следует, что существует много сечений, в которых можно осуществить согласование. При этом в соседних сечениях знаки компенсирующих реактивностей оказываются противоположными. Включать компенсирующую реактивность целесообразно как можно ближе к нагрузке, чтобы образующийся при этом проходной резонатор был наименьшей длины [т. е. обладал наименьшей добротностью (ср. § 22.6)] и, следовательно, пропускалась бы наибольшая полоса частот, в которой  $|p| \ll |p|_{\max}$ .

Практически для осуществления согласования часто измеряют  $K_{б.в}$  и находят ближайшее к нагрузке сечение  $z'$  минимума условного напряжения. Согласно (21.25) отрезок линии с оконечной нагрузкой можно заменить в сечении  $z'$  проводимостью  $\hat{Y}(z') = 1/K_{б.в}$ . Подставив в (23.2), (23.3)  $\hat{g}_H = 1/K_{б.в}$  и  $\hat{b}_H = 0$ , определяют расстояние  $l$  от сечения  $z'$  до места включения согла-

сующей реактивности  $b_1$  и ее величину:

$$\operatorname{tg} \beta l = \pm \sqrt{K_{б.в.}}, \quad \hat{b}_1 = -\hat{b}(l) = \operatorname{tg} \beta l \frac{1 - K_{б.в.}}{K_{б.в.}} = \pm \frac{1 - K_{б.в.}}{\sqrt{K_{б.в.}}}. \quad (23.4)$$

В качестве согласующей параллельной реактивности широко используют реактивные штыри и диафрагмы, рассмотренные в гл. 21, и короткозамкнутые отрезки линий передачи, имеющие согласно (22.12) чисто реактивную входную проводимость, величина которой зависит от длины такого отрезка.

Четвертьволновый трансформатор. Отрезок длиной  $\Lambda/4$  эквивалентной длиной линии с волновым сопротивлением  $Z_{в1}$ , нагруженный на активное сопротивление  $r_{н}$ , трансформирует его согласно (21.24) в активное входное сопротивление

$$r_{вх} = Z_{в1}^2 / r_{н}. \quad (23.5)$$

Для согласования комплексной нагрузки  $Z_{н}$  с линией передачи, имеющей волновое сопротивление  $Z_{в}$ , включим в линию в том сечении  $z$ , где она имеет активное входное сопротивление (21.25)

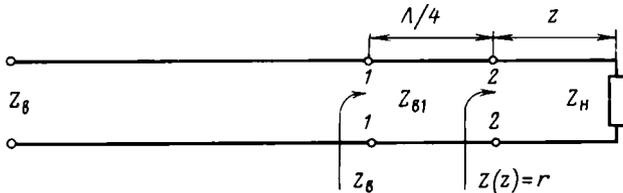


РИС. 23.3

(т. е. в ближайшем к нагрузке минимуме или максимуме условного напряжения), четвертьволновый трансформатор сопротивления (рис. 23.3). Если волновое сопротивление этого трансформатора  $Z_{в1}$  выбрать такой величины, чтобы активное сопротивление в сечении 2—2 трансформировалось в сопротивление  $Z_{в}$  в сечении 1—1, то согласование будет достигнуто. Приняв в (23.5)  $r_{вх} = Z_{в}$  и  $Z_{н}$  из (21.25), получим при совмещении сечения 2—2 с минимумом напряжения ( $z=z'$ ) значение  $Z_{в1} = Z_{в} \sqrt{K_{б.в.}} < Z_{в}$  и при его совмещении с максимумом напряжения ( $z=z''$ ) значение  $Z_{в1} = Z_{в} / \sqrt{K_{б.в.}} > Z_{в}$ .

### 23.3. ШИРОКОПОЛОСНОЕ СОГЛАСОВАНИЕ АКТИВНЫХ СОПРОТИВЛЕНИЙ

Задача согласования активных сопротивлений часто возникает при соединении двух линий передачи с различными волновыми сопротивлениями  $Z_{в0}$  и  $Z_{в}$ . В этом случае обычно требуется обеспечить широкополосное согласование, при котором задаются рабочая полоса частот и допуск на рассогласование  $|p|_{\max}$ . Целью

широкополосного согласования активных сопротивлений является обеспечение заданной зависимости от частоты модуля  $|p|$  (или функции ослабления  $A$ ), которую предварительно выбирают с учетом специфики работы всего устройства в целом.

Для широкополосного согласования двух линий передачи применяют ступенчатые и плавные переходы. *Ступенчатым переходом* называют четырехполюсник, образованный каскадным соединением  $n$  отрезков линий передачи (ступенек), имеющих одинаковые длины  $l$  и различные волновые сопротивления  $Z_{в1}, Z_{в2}, \dots, Z_{вn}$  (рис. 23.4).

Ограничимся рассмотрением случая, когда коэффициент фазы  $\beta = 2\pi/\lambda$  согласуемых линий передачи (и всех ступенек перехода) одинаков. Например, это условие выполняется, если в качестве рабочей используют волну Т.

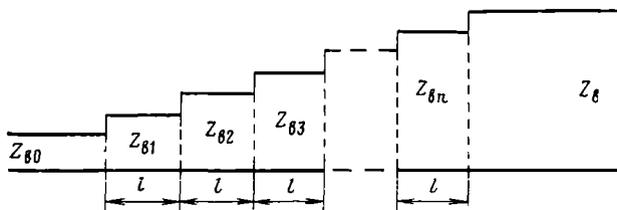


РИС. 23.4

Исходными данными для расчета перехода являются перепад согласуемых сопротивлений  $R = Z_{в}/Z_{в0}$  ( $R > 1$ ), рабочая полоса частот, которой соответствует полоса длин волн в линиях передачи  $\Lambda_1 - \Lambda_2$ , и допуск на рассогласование  $|p|_{\text{макс}}$ . Расчет определяет параметры перехода, необходимые для его конструирования (число  $n$ , длину  $l$  и волновые сопротивления  $Z_{вi}$  ступенек).

Теория ступенчатых переходов строится при пренебрежении активными потерями в них. Согласование, осуществляемое реактивным переходом, можно охарактеризовать зависимостью от  $\Lambda$  (от частоты) его функции ослабления, которая согласно (21.111) и (21.90) определится выражением

$$A(\Lambda) = 1/|S_{21}(\Lambda)|^2 = 1/(1 - |p(\Lambda)|^2). \quad (23.6)$$

Здесь  $|p| = |S_{11}|$  — модуль коэффициента отражения от входа перехода при согласованном выходе.

Остановимся на переходах с монотонным возрастанием волновых сопротивлений ступенек от  $Z_{в0}$  к  $Z_{в}$ . Среди различных типов таких переходов наибольшее распространение получили переходы с чебышевской и максимально плоской частотными характеристиками.

Ступенчатые переходы с чебышевской частотной характеристикой имеют функцию ослабления

следующего вида:

$$A = 1 + h^2 T_n^2(\cos \theta/S) = 1 + h^2 T_n^2(x), \quad (23.7)$$

где  $n$  — число ступенек;  $T_n(x)$  — полином Чебышева первого рода порядка  $n$  от аргумента  $x$ ;  $\theta = \frac{2\pi}{\Lambda} l$  — электрическая длина ступеньки;  $h$  и  $S$  — параметры, которые будут определены ниже по исходным данным для расчета перехода.

Согласно определению полиномов Чебышева

$$T_n(x) = \begin{cases} \cos(n \arccos x) & \text{при } |x| \leq 1, \\ \operatorname{ch}(n \operatorname{Ar} \operatorname{ch} x) & \text{при } |x| \geq 1. \end{cases} \quad (23.8)$$

Согласно (23.8) каждому значению  $n$  соответствует определенный полином  $n$ -й степени:

$$\begin{aligned} T_1(x) &= x, & T_2(x) &= 2x^2 - 1, & T_3(x) &= 4x^3 - 3x, \\ T_4(x) &= 8x^4 - 8x^2 + 1 \text{ и т. д.} \end{aligned} \quad (23.9)$$

Перечислим основные свойства полиномов Чебышева. Все нули и экстремумы полинома  $T_n(x)$  расположены в промежутке  $-1 < x < 1$ ; нули определяются равенством

$$x_k = \cos \frac{(2k-1)\pi}{2n}, \quad k = 1, 2, 3, \dots, n \quad (23.10)$$

и их число равно степени полинома  $n$ ; число экстремумов равно  $n-1$ ; абсолютная величина всех экстремумов одинакова и равна единице. Таким образом, в промежутке  $(-1, 1)$   $T_n(x)$  представля-

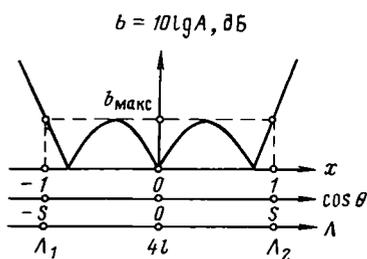


РИС. 23.5

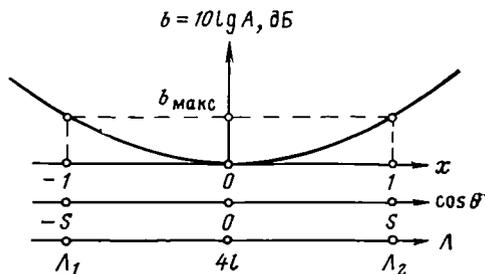


РИС. 23.6

ет собой знакопеременную изокстремальную функцию. На границах этого промежутка  $T_n(1) = 1$ ,  $T_n(-1) = (-1)^n$ . Вне указанного промежутка полином неограниченно и монотонно возрастает по абсолютной величине с увеличением  $|x|$ .

Из этих свойств следует, что функция ослабления (23.7) имеет в промежутке  $-1 \geq x \geq 1$  (где  $x = \cos \theta/S$ ) максимальные значения  $A_{\max} = 1 + h^2$ , которые принимает и на границах  $x = \pm 1$ , а вне этого промежутка неограниченно возрастает. Таким образом, по-

лосой пропускания чебышевского перехода является интервал  $-1 \leq \cos \theta/S \leq 1$ .

На рис. 23.5 изображен график ослабления, построенный для трехступенчатого перехода ( $n=3$ ) с помощью (23.7), (23.9), (23.10) и (21.113). На графике значения  $b_{\max}(x) = 10 \lg(1+h^2)$  соответствуют  $|T_n(x)|=1$ , значения  $b(x)=0$  соответствуют  $T_n(x)=0$ .

Фундаментальное свойство полинома Чебышева  $T_n(x)$  состоит в том, что в промежутке  $(-1, 1)$  он имеет наименьшие экстремальные значения по сравнению с любым другим полиномом той же степени  $n$  и с тем же коэффициентом при старшем члене. Из этого свойства следует, что при заданных  $R$ ,  $|p|_{\max}$  и  $\Lambda_1 - \Lambda_2$  чебышевский ступенчатый переход имеет наименьшее число ступенек  $n$  по сравнению с переходами других типов.

На границах полосы пропускания перехода имеем  $x = \cos \theta/S = \pm 1$ , т. е.  $\cos \theta_1 = -S$ ,  $\cos \theta_2 = S$  и  $\theta_1 + \theta_2 = \pi$ . Подставив в последнее равенство  $\theta_1 = \frac{2\pi}{\Lambda_1} l$  и  $\theta_2 = \frac{2\pi}{\Lambda_2} l$ , находим длину ступеньки

$$l = \Lambda_1 \Lambda_2 / 2 (\Lambda_1 + \Lambda_2). \quad (23.11)$$

Длине волны в линии  $\Lambda_0$ , для которой выполняется условие  $l = \Lambda_0/4$ , соответствует середина полосы пропускания перехода ( $\cos \theta_0 = 0$ ,  $x = \cos \theta_0/S = 0$ ).

Из соотношения  $\cos \theta_2 = S$  при известном  $l$  можно определить  $S$ :

$$S = \cos(2\pi l/\Lambda_2). \quad (23.12)$$

Из (23.6) видно, что в полосе пропускания перехода  $A_{\max} = 1/(1 - |p|_{\max}^2)$ . С другой стороны, в случае чебышевского перехода согласно (23.7)  $A_{\max} = 1 + h^2$ . Приравняв эти значения, выразим параметр  $h$  через  $|p|_{\max}$ :

$$h = |p|_{\max} / \sqrt{1 - |p|_{\max}^2}. \quad (23.13)$$

Чтобы найти число ступенек  $n$  (при известном  $S$ ) или  $S$  (при известном  $n$ ), подставим в (23.7) значение  $\cos \theta = 1$ , имеющее место, например, при  $\Lambda = l$ :

$$A = 1 + h^2 T_n^2(1/S). \quad (23.14)$$

С другой стороны, входное сопротивление отрезка линии передачи длиной  $l = \Lambda$  равно сопротивлению его нагрузки (см. § 21.2). Поэтому в рассматриваемом случае входное сопротивление перехода равно  $Z_{\text{в}}$ , согласно (21.8) коэффициент отражения равен  $p = (R-1)/(R+1)$  и согласно (23.6)  $A = (R+1)^2/4R$ . Приравняв (23.14) и последнее выражение, получим

$$T_n\left(\frac{1}{S}\right) = C, \quad \text{где} \quad C = \frac{R-1}{2h\sqrt{R}} = \frac{R-1}{2\sqrt{R}} \frac{\sqrt{1 - |p|_{\max}^2}}{|p|_{\max}}. \quad (23.15)$$

Из второго соотношения (23.8) и (23.15) находим:

$$n = \operatorname{Ar ch} C / \operatorname{Ar ch} (1/S); \quad (23.16)$$

$$S = 1 / \operatorname{ch} \left( \frac{1}{n} \operatorname{Ar ch} C \right). \quad (23.17)$$

Итак, зная  $R$ ,  $\Lambda_1 - \Lambda_2$  и  $|p|_{\max}$ , определяют с помощью (23.11)—(23.13) и (23.16) соответственно параметры  $l$ ,  $S$ ,  $h$  и  $n$ . После округления числа ступенек  $n$  до ближайшего большего целого числа уточняют согласно (23.17) значение  $S$ , для которого из (23.12) находят окончательную длину ступеньки  $l$ :

$$l = (\Lambda_2/2\pi) \operatorname{arccos} S. \quad (23.18)$$

Определение волновых сопротивлений ступенек  $Z_{vi}$  точным методом основано на теории четырехполюсников и волновых матриц, довольно громоздко и производится при помощи ЭВМ. Окончательные результаты расчета представлены в виде таблиц (см., например, [42]), которые позволяют по известным значениям  $n$ ,  $|p|_{\max}$  и  $R$  легко найти нормированные по  $Z_{в0}$  волновые сопротивления всех  $n$  ступенек перехода с чебышевской характеристикой.

Ступенчатые переходы с максимально плоской частотной характеристикой описываются функцией ослабления следующего вида:

$$A = 1 + h^2 (\cos \theta/S)^{2n} = 1 + h^2 x^{2n}, \quad (23.19)$$

где параметры  $n$ ,  $\theta$ ,  $h$  и  $S$  имеют тот же смысл, что и в предыдущем случае.

На рис. 23.6 приведен график ослабления, построенный в соответствии с (23.19) и (21.113). Особенностью перехода с максимально плоской частотной характеристикой является монотонное возрастание функции  $A$  с приближением к границам полосы пропускания, которое происходит тем медленнее, чем больше  $n$ . Допуск на рассогласование  $|p|_{\max}$  и соответствующее ему согласно (23.6) значение  $A_{\max} = 1/(1 - |p|_{\max}^2)$  достигаются лишь на границах полосы. Отсутствие выбросов ослабления в полосе пропускания и более линейная (чем у чебышевского перехода) фазо-частотная характеристика обеспечиваются за счет увеличения числа ступенек  $n$  и длины  $l_0 = nl$  рассматриваемого перехода по сравнению с чебышевским.

Поскольку границам полосы пропускания соответствуют значения  $x = \cos \theta/S = \pm 1$  и  $A = A_{\max} = 1 + h^2$ , то вновь справедливы соотношения (23.11)—(23.13) и (23.18). Подставляя в (23.19) значения  $\cos \theta = 1$  и учитывая, что при этом  $A = (R + 1)^2/4R$ , получаем

$$S^n = B, \quad \text{где} \quad B = \frac{2h\sqrt{R}}{R-1} = \frac{2\sqrt{R}}{R-1} \frac{|p|_{\max}}{\sqrt{1 - |p|_{\max}^2}}. \quad (23.20)$$

Отсюда можно определить  $n$  (при известном  $S$ ) или  $S$  (при известном  $n$ ):

$$n = \lg B / \lg S; \quad (23.21)$$

$$S = \sqrt[n]{B}. \quad (23.22)$$

При расчете перехода по заданным значениям  $R$ ,  $\Lambda_1$ — $\Lambda_2$  и  $|p|_{\max}$  находят в соответствии с (23.11)—(23.13) и (23.21) параметры  $l$ ,  $S$ ,  $h$  и  $n$ . После округления  $n$  до ближайшего большего целого числа уточняют согласно (23.22) значение  $S$ , которое затем подставляют в (23.18) для уточнения длины ступеньки  $l$ . Как и в предыдущем случае, окончательные результаты расчетов точным методом нормированных по  $Z_{в0}$  волновых сопротивлений ступенек перехода с максимально плоской характеристикой сведены в таблицы (например, [42]), с помощью которых легко по известным значениям  $n$  и  $R$  определить волновые сопротивления всех ступенек.

*Плавным переходом* называют нерегулярную линию передачи, размеры поперечного сечения и волновое сопротивление которой изменяются непрерывно (плавно) вдоль ее длины и которая применяется для согласования волновых сопротивлений  $Z_{в0}$  и  $Z_{в}$  двух регулярных линий передачи.

Теорию плавного перехода можно построить путем рассмотрения предельного случая ступенчатого перехода, у которого неограниченно увеличивается число ступенек и стремится к нулю длина каждой ступеньки. В частности, от ступенчатых переходов с чебышевской и максимально плоской частотными характеристиками можно перейти к соответствующим плавным переходам с монотонным изменением волнового сопротивления от  $Z_{в0}$  до  $Z_{в}$ . Как и в случае ступенчатых переходов, чебышевский плавный переход имеет наименьшую длину из всех плавных монотонных переходов, удовлетворяющих одному и тому же исходному заданию на согласование.

При заданных значениях  $R$ ,  $|p|_{\max}$  и  $\Lambda_1$ — $\Lambda_2$  длина ступенчатого перехода всегда меньше длины соответствующего плавного перехода. Однако скачкообразное изменение поперечного сечения линии передачи у ступенчатого перехода снижает его электрическую прочность. Поэтому при передаче вдоль линии большой мощности применяют плавные переходы.

## Частотные фильтры СВЧ

### 23.4 МЕТОД РАСЧЕТА ЧАСТОТНЫХ ОТРАЖАЮЩИХ ФИЛЬТРОВ СВЧ

Электрическим частотным отражающим фильтром называют четырехполюсник, селективно пропускающий и отражающий электромагнитные волны различных частот. В полосе пропускания

функция ослабления (21.111) фильтра не должна превышать некоторого максимально допустимого значения  $A_{\Pi}$  (т. е. в полосе пропускания  $|p| \leq |p|_{\text{макс}}$ ), в полосе заграждения функция ослабления за счет отражения не должна быть меньше минимально допустимого значения  $A_{\Sigma}$  ( $A_{\Sigma} > A_{\Pi}$ ). В зависимости от взаимного расположения полос пропускания и заграждения различают частотные фильтры нижних частот (полоса пропускания занимает интервал частот  $0 - f_{\Pi}$ ), верхних частот (полоса заграждения занимает интервал  $0 - f_{\Sigma}$ ), полосовые или полоснопропускающие (полоса

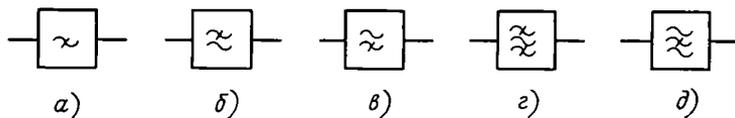


РИС. 23.7

пропускания ограничена частотами  $f_{-П} - f_{П}$ ) и режекторные или полоснозаграждающие (полоса заграждения ограничена частотами  $f_{-З} - f_{З}$ ). На рис. 23.7 приведены условные графические обозначения частотных фильтров в схемах (а — общее обозначение фильтра; б — фильтр нижних частот; в — фильтр верхних частот; г — полосовой фильтр; д — режекторный фильтр).

С помощью частотных отражающих фильтров сверхвысоких частот создаются узлы, которые выполняют разнообразные важные функции частотной селекции в дециметровом, сантиметровом и миллиметровом диапазонах волн: выделение на входе приемника полезного сигнала из спектра шумов и помех, разделение частотных каналов в многоканальных системах, обеспечение одновременной работы передатчика и приемника на одну антенну и др. Ряд подобных узлов будет рассмотрен в гл. 24, 25.

Все фильтры строятся из отдельных звеньев, конструкции которых на СВЧ могут быть весьма разнообразными. Основными конструктивными элементами отражающих фильтров СВЧ являются объемные резонаторы и отрезки линий передачи волноводного или полоскового типа. При соответствующем подборе параметров отдельных элементов фильтр обеспечивает требуемую частотную характеристику  $A(f)$ . Проектирование фильтра СВЧ обычно проводится при упрощающих предположениях, что в его элементах отсутствуют активные потери (т. е. фильтр реактивный) и что сопротивления на его входе и выходе  $r$  активны и равны по величине (равны волновому сопротивлению подводящих линий передачи). Инженерный расчет фильтров СВЧ базируется на общности в линейных системах различных типов и частотных диапазонов основных физических явлений, которые обуславливают частотную селекцию (прохождение и отражение электромагнитных волн). Из этой общности вытекает возможность выбора прототипа фильтра СВЧ в виде применяемого на более низких частотах реактивного фильтра по лестничной схеме с сосредоточенными  $L$ - и  $C$ -эlemen-

тами, который имеет требуемую частотную характеристику и методы расчета параметров которого хорошо разработаны в теории линейных цепей. Рассчитав по заданным техническим требованиям параметры звеньев прототипа и выбрав конструкцию звеньев фильтра СВЧ, переходят к реализации фильтра СВЧ по его прототипу. Разработан ряд специальных приемов, которые устанавливают эквивалентность между звеньями фильтра и прототипа (например, путем отождествления в достаточно узкой полосе частот LC-фильтра и схемы замещения фильтра СВЧ). Эквивалентность каждого звена фильтра СВЧ звену прототипа приводит к тому, что обе системы в целом имеют подобные частотные характеристики  $A(f)$ .

Отметим, что при проектировании так называемых фильтров СВЧ с непосредственными связями в качестве прототипа более удобно выбрать ступенчатый переход, чем низкочастотный лестничный фильтр (см. [41]).

### 23.5. ПОЛОСОВЫЕ И РЕЖЕКТОРНЫЕ ФИЛЬТРЫ

В технике СВЧ наибольшее распространение получили полосовые и режекторные фильтры с максимально плоской и чебышевской частотными характеристиками.

Полосовые фильтры. Для полосовых фильтров любого диапазона частот в качестве аргумента частотной характеристики

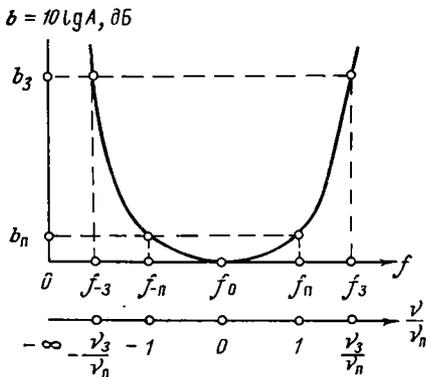


РИС. 23.8

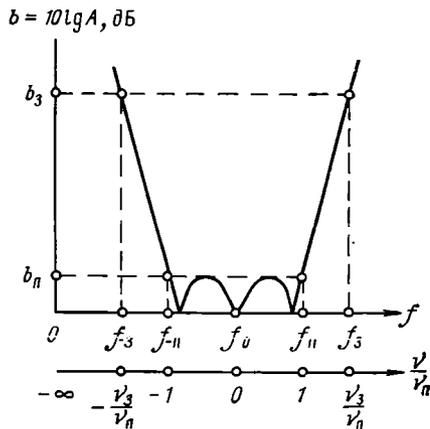


РИС. 23.9

удобно принять частотную переменную (22.46)  $v = f/f_0 - f_0/f$ . Чтобы на граничных частотах полосы пропускания  $f_{-n}$  и  $f_n$  выполнялось условие  $v_{-n} = -v_n$ , резонансная частота  $f_0$  должна выбираться из условия  $f_0 = \sqrt{f_{-n} f_n}$ .

Функция ослабления полосового фильтра с максимально плоской частотной характеристикой удовлетворяет соотношению

$$A = 1 + h^2 (v/v_n)^{2n} \quad (23.23)$$

и отличается отсутствием осцилляций (рис. 23.8). Полосовой фильтр с чебышевской характеристикой описывается выражением

$$A = 1 + h^2 T_n^2 (v/v_n) \quad (23.24)$$

и имеет ряд одинаковых выбросов ослабления в полосе пропускания (рис. 23.9). Использованные в (23.23) и (23.24) обозначения  $h$  и  $T_n(x)$  имеют тот же смысл, что и в § 23.3;  $n$  — число звеньев фильтра.

Прототипом полосового фильтра СВЧ можно выбрать полосовой реактивный фильтр по лестничной схеме с контурами на сосредоточенных элементах. Известная из теории линейных цепей

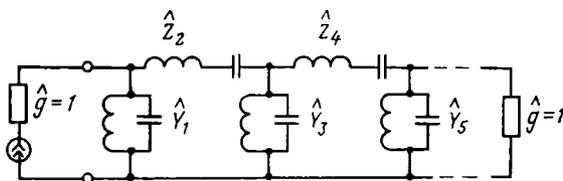


РИС. 23.10

схема этого прототипа содержит в параллельных ветвях параллельные  $LC$ -контуры, в последовательных ветвях — последовательные  $LC$ -контуры, настроенные на одну и ту же резонансную частоту  $f_0$  (рис. 23.10). Вблизи резонансной частоты нормированные по  $g$  проводимости  $Y_k$  параллельных ветвей и сопротивления  $Z_l$  продольных ветвей схемы рис. 23.10 имеют одинаковую частотную зависимость и определяются соотношениями вида (22.50):

$$\hat{Y}_k = i 2 Q_k v, \quad \hat{Z}_l = i 2 Q_l v, \quad (23.25)$$

где  $Q_m$  — нагруженная добротность соответствующего резонансного контура, выражаемая ф-лой (22.47).

Найдем нормированную входную проводимость  $Y_{вх}$  фильтра рис. 23.10. Ее можно представить в виде суммы проводимости первой ветви и входной проводимости части лестничной схемы, начинающейся со второй ветви:  $Y_{вх} = Y_1 + Y_{вх2}$ . В свою очередь,  $Y_{вх2} = 1/(Z_2 + Z_{вх3})$ , где  $Z_{вх3}$  — входное сопротивление части схемы, начинающейся с третьей ветви. Учитывая, что  $Z_{вх3} = 1/(Y_3 + Y_{вх4})$ ,  $Y_{вх4} = 1/(Z_4 + Z_{вх5})$  и т. д., получим общее выражение для  $Y_{вх}$  поло-

сового лестничного фильтра в виде цепной дроби:

$$\hat{Y}_{вх} = \hat{Y}_1 + \frac{1}{Z_2 + \frac{1}{\hat{Y}_3 + \dots + \frac{1}{\hat{Y}_n + 1}}}, \quad (23.26)$$

откуда при учете (23.25)

$$\hat{Y}_{вх} = i 2 Q_1 v + \frac{1}{i 2 Q_2 v + \frac{1}{i 2 Q_3 v + \dots + \frac{1}{i 2 Q_n v + 1}}}. \quad (23.27)$$

Таким образом, зависимости  $\hat{Y}_{вх}$  и, следовательно,  $\rho$  и  $A$  от  $v$  определяются  $n$  значениями нагруженных добротностей контуров. В частности, как показано в теории фильтров с сосредоточенными

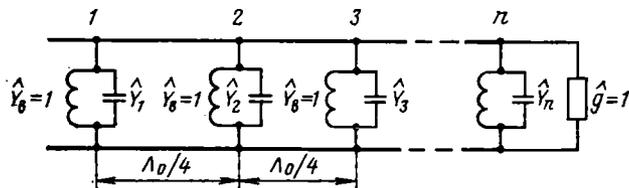


РИС. 23.11

элементами, для получения максимально плоской частотной характеристики (23.23) значения  $Q_m$  должны определяться соотношением

$$Q_m = \frac{\sqrt{h}}{v_n} \sin \frac{(2m-1)\pi}{2n}, \quad (23.28)$$

где  $m=1, 2, 3, \dots, n$  — порядковый номер звена. Для чебышевской характеристики (23.24) также существуют аналитические формулы, которые имеют рекуррентный характер, и поэтому проще воспользоваться в этом случае готовыми таблицами [42].

Полосовые фильтры СВЧ обычно состоят из каскадно соединенных объемных резонаторов. При этом различают два способа соединения соседних резонаторов в цепочку: с помощью отрезков линии передачи (фильтры с четвертьволновыми связями) и непосредственное соединение (фильтры с непосредственными связями).

Эквивалентная схема  $n$ -резонаторного полосового фильтра СВЧ с четвертьволновыми связями приведена на рис. 23.11. Волновые проводимости  $Y_v$  линий передачи на входе и выходе и соединительных отрезков между эквивалентными параллельными контурами одинаковы. Контур настроен на одну и ту же резонанс-

ную частоту  $f_0$ , вблизи которой их нормированные по  $Y_B$  проводимости определяются формулой вида (23.25)

$$\hat{Y}_m = i 2 Q_m v. \quad (23.29)$$

Длина каждого соединительного отрезка равна  $\Lambda_0/4$ , где  $\Lambda_0$  — резонансная длина волны в линии передачи.

Определим входную нормированную проводимость  $Y_{вх}$  схемы рис. 23.11. Входная нормированная проводимость четвертьволнового отрезка эквивалентной линии, нагруженного на проводимость  $Y_H$ , в соответствии с (21.24) равна  $Y = 1/Y_H$ . Полагая, что это выражение приближенно справедливо в узкой полосе частот вблизи  $f_0$ , находим с его помощью  $Y_{вх} = Y_1 + 1/Y_{вх2}$ , где  $Y_{вх2}$  — входная проводимость части схемы, начинающейся со второго контура. В свою очередь,  $Y_{вх2} = Y_2 + 1/Y_{вх3}$ ,  $Y_{вх3} = Y_3 + 1/Y_{вх4}$  и т. д. В результате получаем общее выражение входной проводимости полосового фильтра с четвертьволновыми связями в виде цепной дроби, которая при учете (23.29) имеет вид

$$\hat{Y}_{вх} = i 2 Q_1 v + \frac{1}{i 2 Q_2 v + \frac{1}{i 2 Q_3 v + \dots + \frac{1}{i 2 Q_n v + 1}}}. \quad (23.30)$$

Сопоставление (23.30) с (23.27) показывает, что если нагруженные добротности эквивалентных параллельных контуров фильтра с четвертьволновыми связями приравнять к нагруженным добротностям соответствующих LC-контуров фильтра на рис. 23.10, то у обоих фильтров величины  $Y_{вх}$  и, следовательно,  $\rho$  и  $A$  будут иметь одинаковые зависимости от частотной переменной  $v$ .

Для пропускания значительной мощности применяют полосовые фильтры СВЧ на волноводах, а параллельные контуры эквивалентной схемы рис. 23.11 реализуют при помощи проходных ре-

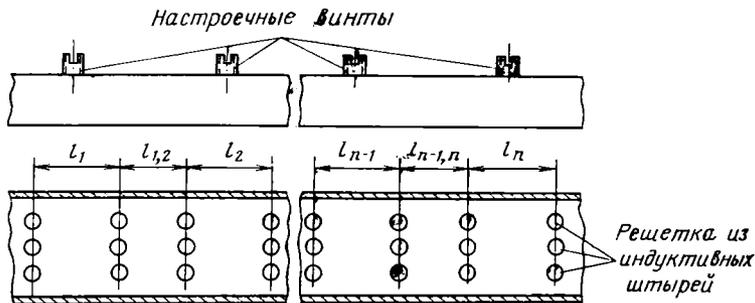


РИС. 23.12

зонаторов с торцевыми нерегулярностями в виде индуктивных решеток или диафрагм (см. § 22.6). Полосовой волноводный  $n$ -резонаторный фильтр с четвертьволновыми связями изображен на рис. 23.12. Наметим путь расчета такого фильтра.

Исходными данными для расчета являются вид частотной характеристики, граничные частоты полос пропускания ( $f_{-п}$ ,  $f_{п}$ ) и заграждения ( $f_{-з}$ ,  $f_{з}$ ) и соответствующие этим частотам значения функции ослабления ( $A_{п}$  и  $A_{з}$ ).

На границе полосы пропускания, где  $v = v_{п}$ , соотношения (23.23) и (23.24) имеют вид  $A_{п} = 1 + h^2$ , откуда  $h^2 = A_{п} - 1$ . На границе полосы заграждения, где  $v = v_{з}$ , в соответствии с (23.23) имеем  $A_{з} = 1 + (A_{п} - 1) (v_{з}/v_{п})^{2n}$ , откуда число звеньев  $n$  фильтра с максимально плоской характеристикой

$$n = \frac{1}{2 \lg (v_{з}/v_{п})} \lg \frac{A_{з} - 1}{A_{п} - 1}. \quad (23.31)$$

В соответствии с (23.24)  $A_{з} = 1 + (A_{п} - 1) T_{2n}^2 (v_{з}/v_{п})$ , откуда при учете (23.8) число звеньев фильтра с чебышевской характеристикой

$$n = \frac{1}{\text{Ar ch } (v_{з}/v_{п})} \text{Ar ch } \sqrt{\frac{A_{з} - 1}{A_{п} - 1}}. \quad (23.32)$$

Значение  $n$  из (23.31) или (23.32) округляется до ближайшего большего целого числа.

По найденным при помощи ф-лы (23.28) или таблиц [42] значениям добротностей проходных резонаторов определяю согласно (22.48) значения торцевых индуктивных реактивностей  $b_{0m} = -|b_{0m}|$ . Затем в соответствии с (22.39), (22.40) находят резонансные длины резонаторов  $l_m$ , которые при индуктивных нерегулярностях будут короче длины  $\rho\Lambda_0/2$ :

$$l_m = \rho \frac{\Lambda_0}{2} - \frac{\Lambda_0}{2\pi} \arctg \frac{2}{|\hat{b}_{0m}|}. \quad (23.33)$$

Длины соединительных отрезков волновода между соседними резонаторами  $l_{m,m+1}$  из-за влияния торцевых индуктивных нерегулярностей будут короче длины  $\Lambda_0/4$  и корректируются так же, как и длины самих резонаторов:

$$l_{m,m+1} = \frac{\Lambda_0}{4} - \frac{\Lambda_0}{4\pi} \left( \arctg \frac{2}{|\hat{b}_{0m}|} + \arctg \frac{2}{|\hat{b}_{0m+1}|} \right). \quad (23.34)$$

Выбрав конкретный вид нерегулярностей (например, решетки из трех индуктивных штырей), по значениям  $b_{0m}$  определяют их конструктивные параметры.

Фильтры с четвертьволновыми связями просты в настройке — каждое звено можно в отдельности настроить на резонансную частоту и затем произвести сборку всего фильтра. Недостатками этих фильтров являются сравнительно большая их длина из-за наличия четвертьволновых соединительных отрезков и большое число реак-

тивных нерегулярностей, равное удвоенному числу проходных резонаторов.

Длину волноводного фильтра и число нерегулярностей в нем можно существенно уменьшить, если перейти от четвертьволновых связей между проходными резонаторами к непосредственным. Этот переход основан на том, что две шунтирующие линию индуктивные проводимости, расположенные на расстоянии  $\Lambda_0/4$  друг от друга, эквивалентны одной шунтирующей индуктивной проводимости и двум небольшим отрезкам линии с обеих сторон от нее (см., например, [27]). Представив схему замещения фильтра с четвертьволновыми связями в виде линии, которая шунтирована

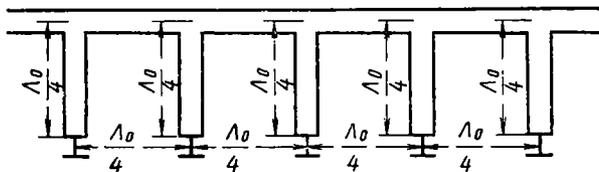


РИС. 23.13

попеременно через интервалы  $l_m$  и  $\Lambda_0/4$  индуктивными проводимостями, и заменив каждую пару проводимостей, разделенных отрезком  $\Lambda_0/4$ , эквивалентной одиночной проводимостью, получим схему замещения, которая является, по существу, схемой замещения волноводного полосового фильтра с непосредственными связями между резонаторами. Фильтры с четвертьволновыми и непосредственными связями имеют одинаковое число резонаторов и аналогичные характеристики. Основными недостатками фильтров с непосредственными связями являются необходимость обеспечения высокой механической точности при их изготовлении и невозможность раздельной настройки резонаторов, что усложняет их регулировку.

В последнее время узлы СВЧ на невысокие уровни мощности успешно проектируют на полосковых линиях (см. § 20.2), которые позволяют получить высоконадежные, компактные, дешевые и обладающие хорошими электрическими характеристиками устройства. Как и в случае волноводных фильтров, различают полосковые фильтры с четвертьволновыми и непосредственными связями. Простой вариант фильтра с четвертьволновыми связями имеет топологию полоски, изображенную на рис. 23.13. В этом фильтре параллельные контуры эквивалентной схемы рис. 23.11 реализуются при помощи параллельно подключенных к основной полосковой линии короткозамкнутых четвертьволновых резонаторов (см. § 22.3).

Выше было показано, что в эквивалентной схеме рис. 23.11, содержащей только параллельные резонансные контуры, эффект чередования параллельных и последовательных контуров полосово-

го фильтра-прототипа (см. рис. 23.10) был достигнут при помощи четвертьволновых соединительных отрезков линии передачи. К эквивалентной схеме рис. 23.11 можно привести и более компактные системы на *связанных* линиях передачи с волной Т, представляю-

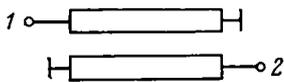


РИС. 23.14

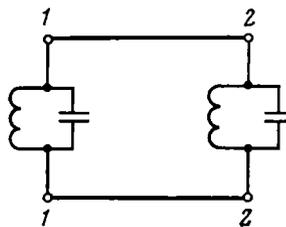


РИС. 23.15

щие собой полосовые фильтры с непосредственными связями между резонаторами. На рис. 23.14 изображена конфигурация полосок одного звена такого фильтра на связанных параллельных полосковых линиях. В этом звене на интервале  $\Lambda_0/4$  осуществляется распределенная электромагнитная связь между боковыми участками соседних короткозамкнутых отрезков линий. На схеме замещения звена (рис. 23.15) параллельные контуры отображают короткозамкнутые отрезки полосковых линий, в которые превращается

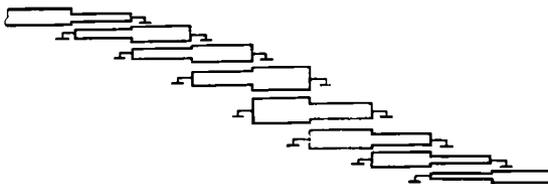


РИС. 23.16

система связанных линий при их взаимном удалении, а соединяющий контуры отрезок длиной линии отображает распределенную связь между полосками. Конфигурация полосок всего полосового фильтра на связанных параллельных полосковых линиях изображена на рис. 23.16.

Существуют модификации полосовых фильтров на параллельных линиях, дающие весьма компактные конструкции. На рис. 23.17 показан принцип преобразования связанных параллельных линий в так называемую схему на встречных стержнях. Каждый короткозамкнутый с обеих сторон полуволновый отрезок (рис. 23.17а) как бы разрезается по середине (в узле тока) и складывается вдвое (рис. 23.17б). При этом первоначальные зазоры связи между отрезками сохраняются неизменными, а ширины отрезков суммиру-

ются. В результате фильтр на рис. 23.16 преобразуется в фильтр на встречных стержнях (на рис. 23.18б крышка фильтра снята). Эти фильтры применяются в широком диапазоне частот — от 300 МГц до 20 ГГц.

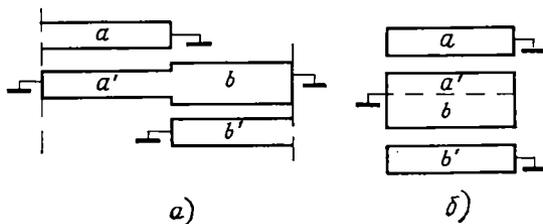


РИС. 23.17

Полосовые фильтры СВЧ легко реализуются и на коаксиальном волноводе. Например, на рис. 23.19 изображен фильтр, по принципу действия аналогичный фильтру на рис. 23.13.

Режекторные фильтры. Проектирование режекторных фильтров СВЧ проводится таким же образом, что и полосовых.

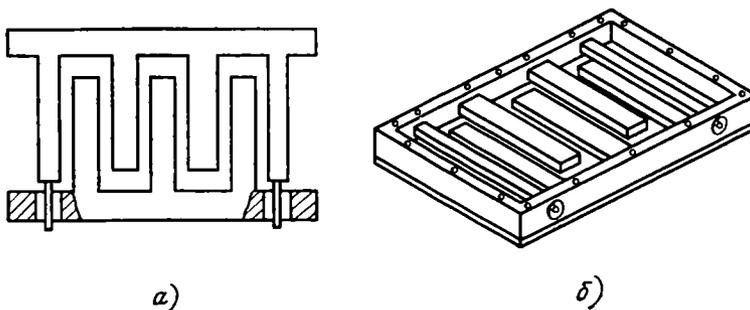


РИС. 23.18

Прототипом режекторного фильтра СВЧ является режекторный лестничный фильтр с сосредоточенными реактивными элементами, который имеет в параллельных ветвях последовательные  $LC$ -контуры, в последовательных ветвях — параллельные  $LC$ -контуры, настроенные на одну и ту же резонансную частоту  $f_0$  (рис. 23.20). Нормированная входная проводимость фильтра вновь выражается цепной дробью (23.26). Как и в предыдущем случае, требуемый вид частотной характеристики обеспечивается специальным подбором значений нагруженных добротностей контуров  $Q_1, Q_2, \dots, Q_n$ .

Режекторные фильтры СВЧ проектируются с четвертьволновыми связями. Две различные эквивалентные схемы такого фильтра приведены на рис. 23.21. Каждая из схем содержит контуры только одного типа, настроенные на одну и ту же резонансную

частоту  $f_0$ . Эффект чередования последовательных и параллельных контуров режекторного фильтра-прототипа (см. рис. 23.20) достигается в обеих схемах рис. 23.21 при помощи четвертьволно-

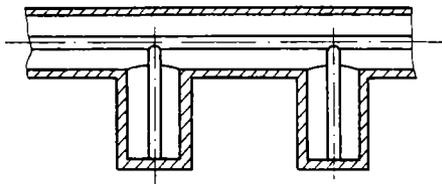


РИС. 23.19

вых соединительных отрезков линии передачи. Как и в случае полосовых фильтров, приравнивание нагруженных добротностей эквивалентных контуров на каждой из схем рис. 23.21 к нагружен-

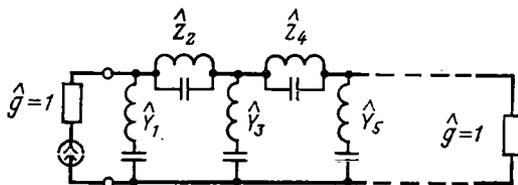


РИС. 23.20

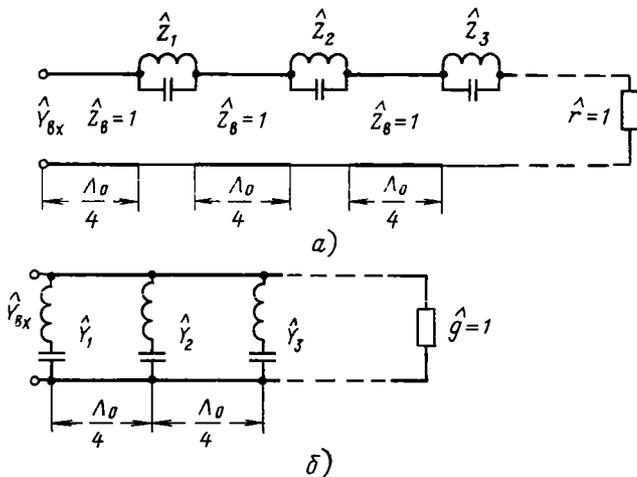


РИС. 23.21

ным добротностям соответствующих  $LC$ -контуров схемы рис. 23.20 обеспечивает одинаковые зависимости  $\hat{Y}_{вх}$ ,  $\rho$  и  $A$  обоих фильтров от частотной переменной  $v$ .

Широко распространенная реализация волноводного режекторного фильтра по схеме рис. 23.21а показана на рис. 23.22. Присоединенные через поперечные щели в широкой стенке волновода объемные резонаторы

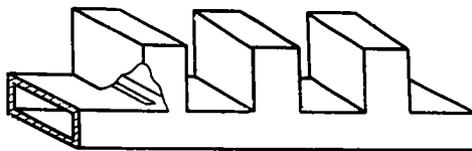


РИС. 23.22

емные резонаторы вблизи резонансной частоты  $f_0$  имеют схему замещения в виде параллельного  $LC$ -контура, включенного последовательно в эквивалентную длинную линию (см. рис. 22.20).

Режекторные фильтры на полосковых линиях и коаксиальном волноводе удобно проектировать по эквивалентной схеме рис. 23.21б. Например, эта схема просто реализуется при помощи параллельно подключенных к основной линии короткозамкнутых на одном конце полуволновых резонаторов (см. § 22.3). Таким образом, если на рис. 23.13 длину  $\Lambda_0/4$  короткозамкнутых отрезков заменить длиной  $\Lambda_0/2$ , то получим конфигурацию полоски режекторного фильтра с четвертьволновыми связями. Аналогичным путем получается режекторный фильтр и в коаксиальном исполнении (см. рис. 23.19).

### 23.6. ФИЛЬТРЫ ГАРМОНИК

Генераторы СВЧ наряду со спектром полезного сигнала (основная и боковые модуляционные частоты) создают также паразитные спектры вблизи гармоник, частоты которых кратны основной частоте сигнала. Поскольку паразитные полосы пропускания полосовых фильтров СВЧ могут совпадать с этими паразитными спектрами, то на выходе генераторов необходимо включать фильт-

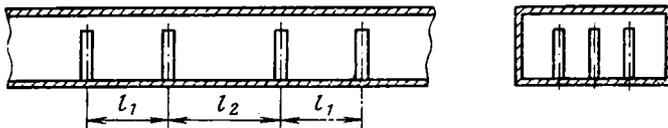


РИС. 23.23

ры гармоник, которые пропускали бы полезный сигнал и подавляли паразитные гармоники, исключая тем самым опасность возникновения вызываемых этими гармониками помех в другой аппаратуре. Существуют фильтры гармоник отражающие, в которых энергия гармоник отражается обратно к генератору, и с поглощением энергии гармоник.

Отражающие фильтры гармоник разделяются на резонансные и аperiodические. Резонансный фильтр состоит из ряда резонансных элементов в линии передачи, которые настроены таким образом, что для волн рабочего типа они почти полностью отражают энергию паразитного спектра вблизи одной из гармоник и пропускают энергию полезного спектра вблизи основной частоты.

В качестве резонансного элемента волноводного резонансного фильтра гармоник часто используют резонансный штырь, длина которого  $l$  близка к  $\lambda_r/4$ , где  $\lambda_r$  — длина волны на частоте  $f_r$  той гармоники, мощность которой нужно отразить (см. § 21.7). Для увеличения ослабления, вносимого фильтром на частоте гармоники, вдоль волновода устанавливается несколько решеток из трех-четырех резонансных штырей, расположенных в поперечном сечении волновода (рис. 23.23). Поскольку на основной частоте сигнала  $f_0$  длина волны  $\lambda_0$  в целое число раз больше  $\lambda_r$ , то на  $f_0$  длина каждого штыря оказывается значительно меньше резонансной, штырь характеризуется емкостной проводимостью (см. § 21.7) и модуль коэффициента отражения волны  $H_{10}$  от одной решетки штырей  $|p_1|$  получается существенно меньше единицы и равным 0,3—0,4. Чтобы на частоте  $f_0$  коэффициент отражения от всего фильтра был равным нулю (ослабление было бы равно нулю), в фильтре применяют несколько решеток из штырей и для взаимной компенсации отраженных от них волн специальным образом подбирают расстояния  $l_1$  и  $l_2$  (см. рис. 23.23). Ослабление подобного фильтра с четырьмя решетками на частотах вблизи  $f_r$  равно 35—40 дБ, а в пределах полосы частот сигнала равно 0,1—0,15 дБ [27].

Если нужно одновременно подавить путем отражения паразитные спектры вблизи ряда гармоник, то либо каскадно включают несколько резонансных фильтров (что не всегда удобно и осуществимо), либо применяют аperiodический фильтр гармоник. Такой фильтр состоит из ряда одинаковых емкостных или индуктивных нерегулярных элементов, которые расположены вдоль линии передачи на равных расстояниях друг от друга. В качестве этих элементов в прямоугольном волноводе могут быть использованы, например, диафрагмы и поперечные решетки штырей, в коаксиальном волноводе и полосковых линиях — параллельно подключенные к основной линии разомкнутые или короткозамкнутые отрезки линии.

Расчет аperiodического фильтра гармоник основывается на теории распространения волн в линии передачи с периодически расположенными одинаковыми нерегулярными элементами. Правильным выбором нерегулярностей и расстояний между ними удастся добиться того, что фильтр пропускает основную частоту, а на частотах нескольких гармоник (например, второй, третьей и четвертой) создает область заграждения. Ослабление такого фильтра на частотах гармоник может превышать 70 дБ, а на основной частоте составляет 0,20—0,25 дБ [27].

Резонансные и аperiodические фильтры гармоник имеют общий недостаток — отраженная фильтром энергия гармоник возвраща-

ется в источник колебаний, что отрицательно влияет на его режим работы и нередко является недопустимым. Кроме того, при использовании этих фильтров энергия на частотах гармоник может переноситься в нагрузку волнами высших типов. Поэтому часто вместо отражающих фильтров применяют фильтры с поглощением энергии гармоник.

В широко распространенном поглощающем волноводном фильтре гармоник (рис. 23.24) главный прямоугольный волновод связан при помощи щелей, прорезанных во всех четырех его стенках, с рядом дополнительных волноводов уменьшенного поперечного сечения, каждый из которых оканчивается поглощающей оконечной нагрузкой (см. § 24.2). Ширина  $a_1$  дополнительных волноводов выбирается таким образом, чтобы в них на частотах сигнала не могла распространяться даже волна основного типа  $H_{10}$ , а на частотах поглощаемой гармоники она бы распространялась. Благодаря этому энергия электромагнитных волн на частотах, занимаемых сигналом, переносится по главному волноводу почти беспрепятственно, не проникая в дополнительные волноводы и не испытывая в них поглощения. Рабочее затухание фильтра в пределах полосы частот сигнала может быть сделано 0,10—0,20 дБ. Энергия гармоник, переносимая вдоль главного волновода как волной основного типа, так и волнами высших типов, проникает в дополнительные волноводы и поглощается в оконечных нагрузках.

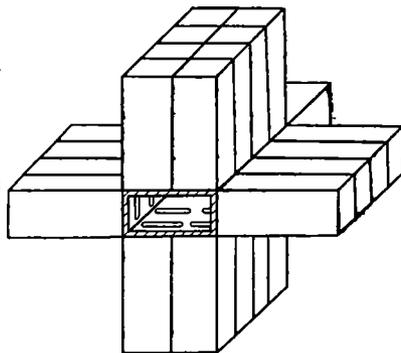


РИС. 23.24

Фильтр на рис. 23.24 имеет дополнительные волноводы, в которых может распространяться волна типа  $H_{10}$  частоты второй гармоники. При этом в волноводы, расположенные вдоль широких стенок главного волновода, интенсивно проникает и поглощается энергия второй гармоники, переносимая по главному волноводу волнами типов  $H_{20}$  и  $H_{10}$ , а в волноводы, расположенные вдоль узких стенок главного волновода, — энергия второй гармоники, переносимая по главному волноводу волной  $H_{01}$ .

Если двойные ряды дополнительных волноводов, расположенных вдоль широких стенок главного волновода (см. рис. 23.24), заменить тройными рядами волноводов, то фильтр наиболее интенсивно будет поглощать энергию на частоте третьей гармоники. Поэтому для эффективного подавления второй и третьей гармоник поглощающие фильтры должны иметь и двойные, и тройные ряды дополнительных волноводов. Поглощающие фильтры могут обеспечить очень большое ослабление на частотах поглощаемых гармоник. Их основным недостатком являются сложность конструкции и большие габариты.

## УСТРОЙСТВА, ВХОДЯЩИЕ В ТРАКТ СВЧ

Волноводные конструктивные элементы  
и оконечные нагрузки

## 24.1. ВОЛНОВОДНЫЕ КОНСТРУКТИВНЫЕ ЭЛЕМЕНТЫ

К волноводным конструктивным элементам относят соединения двух волноводов одинакового сечения, короткозамыкающие порш-ни, изгибы волноводов и скручивание прямоугольного волновода.

В этом и последующих параграфах на рисунках устройств показаны также их условные графические обозначения в схемах, установленные стандартами.

*Соединение волноводов одинакового сечения* осуществляется при помощи фланцев, припаиваемых к концам волноводов и скреп-

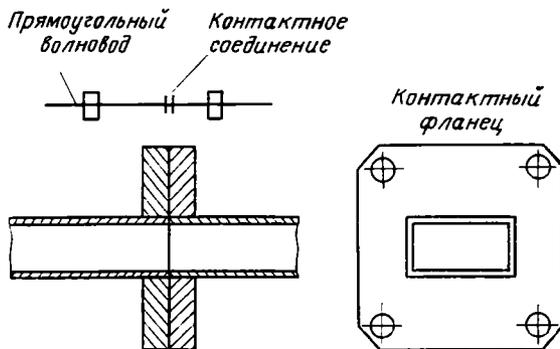


РИС. 24.1

ляемых болтами. Поскольку в сложном волноводном тракте используют большое число таких соединений, то необходимо принимать специальные меры, чтобы они не ухудшали параметры тракта, т. е. не вносили потери и не создавали дополнительные отражения волны рабочего типа. Применяют контактные и дроссельные соединения волноводов. Осуществляемые с помощью плоских фланцев контактные соединения (рис. 24.1) эффективны только при очень точном их изготовлении, когда обеспечиваются хороший механический контакт по всему периметру поперечного сечения стыкуемых волноводов и полное совмещение поперечных сечений (отсутствуют взаимные сдвиги и перекос волноводов).

Дроссельные (реактивные) соединения обеспечивают хороший электрический контакт стыка волноводов без его механического контакта. Например, в дроссельном соединении прямоугольных волноводов (рис. 24.2а) получается хороший электрический контакт между точками  $A$  и  $B$ , который не зависит от качества механического контакта, осуществляемого в точке  $C$ . Рассмотрим это соединение. Один фланец (левый) имеет плоскую торцевую поверхность. Дроссельный фланец (правый) имеет кольцевую канавку глубиной  $l_1$ . Расстояние от канавки до середины широкой стенки волновода равно  $l_2$ . Часть торцевой поверхности дроссельного фланца, ограниченная снаружи канавкой, и плоский фланец образуют так называемую радиальную линию, представляющую собой две параллельные металлические плоскости, между которыми имеется зазор  $h$ . На эквивалентной схеме дроссельного соединения (рис. 24.2б) короткозамкнутая линия с волновым сопротивлением  $Z_{в1}$  отображает образованный кольцевой канавкой коаксиальный волновод с полем  $H_{11}$ , возбуждаемым при распространении в прямоугольном волноводе волны  $H_{10}$ ; линия с волновым сопротивлением  $Z_{в2}$  отображает радиальную линию. Между эквивалентными линиями включено сопротивление механического контакта  $r_k$ . Глубину канавки  $l_1$  делают равной четверти длины волны типа  $H_{11}$  в ко-

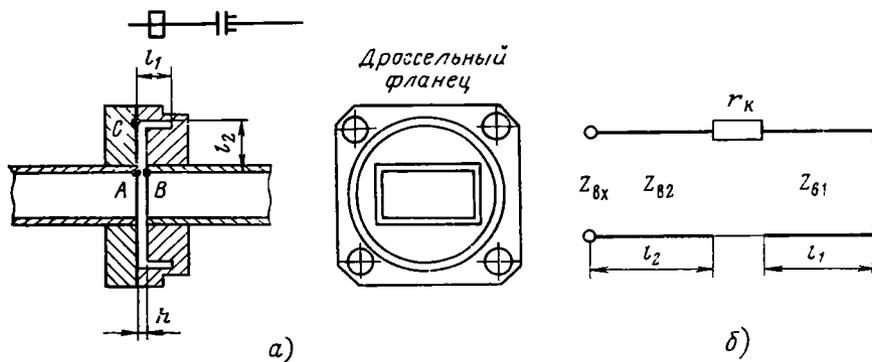


РИС. 24.2

аксиальном волноводе на средней частоте диапазона  $f_0$  [см. ф-лы (18.25) и (19.97)]. Расстояние  $l_2$  подбирают также равным четверти длины волны в радиальной линии на частоте  $f_0$ .

Из рис. 24.2а видно, что входное сопротивление дроссельного соединения  $Z_{вх}$  включено последовательно между сочленяемыми волноводами. На средней частоте  $f_0$  входное сопротивление короткозамкнутого четвертьволнового отрезка линии  $l_1$  равно бесконечности (см. рис. 24.2б). При этом четвертьволновый отрезок линии  $l_2$  нагружен на бесконечно большое сопротивление, вследствие чего входное сопротивление дроссельного соединения  $Z_{вх} = 0$  при любом значении  $r_k$ . Говоря иначе, в рассматриваемом случае механиче-

ский контакт осуществляется в узле продольного тока и не вносит дополнительных потерь.

Дроссельные соединения характеризуются значениями  $K_{б.в} \geq 0,95$  в полосе частот до  $\pm 10\%$ . Если эти значения оказываются недопустимыми, то при работе в широкой полосе частот необходимо использовать тщательно выполненные контактные соединения.

При использовании дроссельных соединений незначительны небольшие взаимные сдвиги и перекосы стыкуемых волноводов.

Дроссельные соединения круглого и коаксиального волноводов конструируются аналогичным образом. Благодаря осевой симметрии

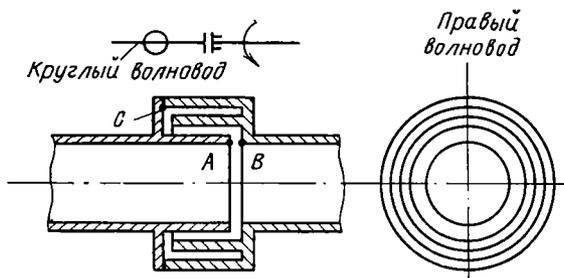


РИС. 24.3

при этих волноводах существуют также их *вращающиеся дроссельные соединения*, которые позволяют без нарушения электрического контакта между соединяемыми линиями вращать одну из них при неподвижной другой. При использовании вращающегося соединения рабочей является волна, обладающая осевой симметрией. Эти соединения применяют, например, для передачи энергии из неподвижного передатчика во вращающуюся антенну.

Для примера на рис. 24.3 изображено вращающееся соединение круглых волноводов, которое имеет эквивалентную схему рис. 24.2б. При вращении, например, правого волновода вокруг горизонтальной оси качество трущегося контакта, осуществляемого в точке С (в узле тока), не влияет на электрический контакт между точками А и В по периметру соединяемых волноводов.

*Короткозамыкающие поршни* (подвижные короткозамкнители) применяют для изменения длины короткозамкнутых отрезков линий передачи и объемных резонаторов. Чтобы короткозамыкающие поршни обеспечивали коэффициент отражения, очень близкий к единице, они должны иметь малые потери. Получение малых потерь возможно лишь при хорошем электрическом контакте между подвижным поршнем и стенкой волновода. Ввиду трудности непосредственного обеспечения хорошего механического контакта по всему периметру подвижного поршня широкое распространение получили дроссельные (реактивные) короткозамыкающие поршни. Поршень рис. 24.4 действует таким же образом, что

и приведенные выше дроссельные соединения волноводов. На его эквивалентной схеме (см. рис. 24.2б) короткозамкнутая линия  $Z_{в1}$  отображает дроссельный зазор, который образован внутренней полостью поршня, линия  $Z_{в2}$  — дроссельный зазор между внешней боковой поверхностью поршня и стенками волновода. Между эк-

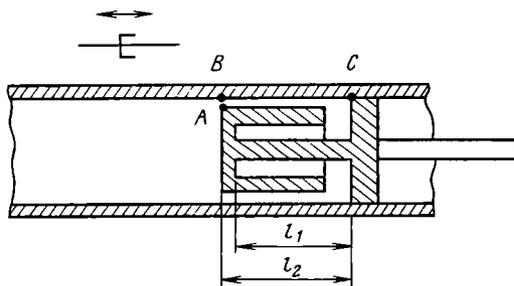


РИС. 24.4

вивалентными линиями включено сопротивление механического контакта  $r_k$ , осуществляемого в точке  $C$ . Сопротивление  $Z_{вх}$  эквивалентной схемы характеризует электрический контакт между точками  $A$  и  $B$  по периметру.

Дроссельные поршни работают удовлетворительно в полосе частот  $\pm 15\%$ .

Необходимость использования дроссельных поршней отпадает, если продольные токи в волноводе равны нулю. Поэтому в круг-

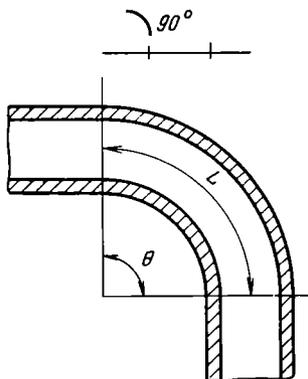


РИС. 24.5

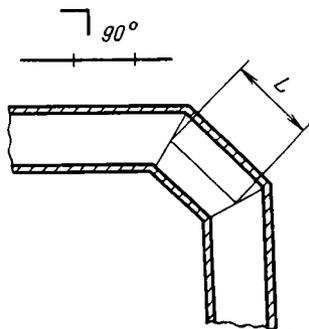


РИС. 24.6

лом волноводе с волной типа  $H_{01}$  короткозамыкающим может служить бесконтактный поршень, представляющий собой диск, который не касается стенок волновода (ср. рис. 22.15).

Изгибы волноводов служат для изменения направления оси волноводной системы. Применяют радиусные (рис. 24.5) и уголко-

вые (рис. 24.6) изгибы. Изгиб прямоугольного волновода производится в одной из двух взаимно перпендикулярных плоскостей. Если изгиб осуществляется в плоскости поляризации волны рабочего типа  $H_{10}$ , проходящей через вектор  $E$  и ось волновода, то его называют изгибом в плоскости  $E$  (рис. 24.7); если изгиб осуществляется в плоскости, проходящей через вектор  $H$  волны  $H_{10}$  и ось волновода, то его называют изгибом в плоскости  $H$  (рис. 24.8).

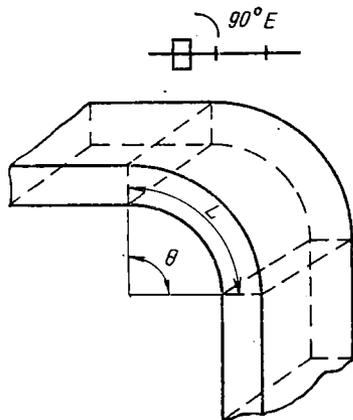


РИС. 24.7

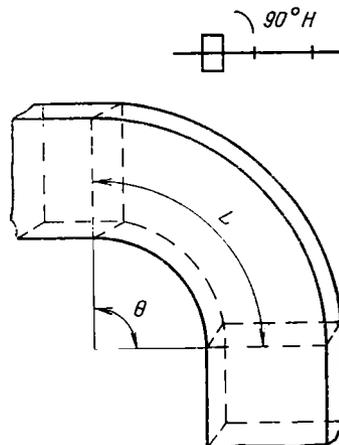


РИС. 24.8

Прямолинейный и изогнутый по радиусу волноводы отображаются эквивалентными линиями с различными волновыми сопротивлениями. В сечениях перехода от прямолинейного волновода к радиусному изгибу и обратно имеются скачки волнового сопротивления эквивалентных линий, которые согласно (21.8) обуславливают местные коэффициенты отражения, равные по величине и противоположные по знаку. Для компенсации этих коэффициентов отражения изгиб должен иметь среднюю длину  $L$ , равную целому числу полуволн в изогнутом волноводе. При увеличении радиуса коэффициенты отражения от концов изгиба уменьшаются. Поэтому для обеспечения достаточно широкополосной работы радиусного изгиба на угол  $\theta=90^\circ$  обычно выбирают длину  $L$  не меньше удвоенной длины волны в волноводе.

Изображенный на рис. 24.6 уголкового изгиба прямоугольного волновода на угол  $90^\circ$  (в плоскости  $E$  или  $H$ ) представляет собой комбинацию двух поворотов на  $45^\circ$ , разнесенных на такое расстояние  $L$ , при котором происходит компенсация коэффициентов отражения от них. Величина  $L$  близка к четверти длины волны в волноводе.

Скручивание прямоугольного волновода применяется для поворота в пространстве плоскости поляризации волны  $H_{10}$  (рис. 24.9). Анализ этого устройства проводится так же, как и радиусного изгиба. Для компенсации коэффициентов отражения от кон-

цов скрученного волновода его длина  $L$  должна быть равна целому числу полуволн в нем. Для обеспечения достаточно широкополосной работы длина скрученного волновода при повороте на угол  $90^\circ$  должна быть не меньше  $2\lambda_0$ .

## 24.2. ПОГЛОЩАЮЩИЕ ОКОНЕЧНЫЕ НАГРУЗКИ

Поглощающие оконечные нагрузки являются одноплечными узлами, применяемыми для полного поглощения всей мощности, переносимой рабочей волной по линии. Это поглощение осуществляется путем преобразования мощности электромагнитной волны в

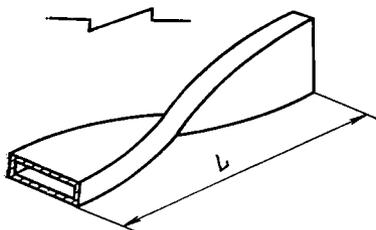


РИС. 24.9

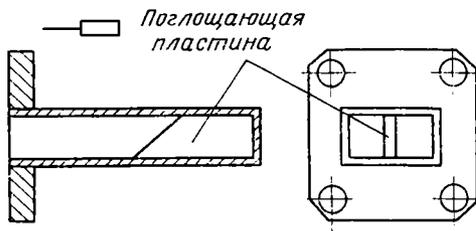


РИС. 24.10

мощность тепловых потерь в веществе. Используемые на практике хорошие поглощающие нагрузки характеризуются значениями  $K_{б.в} = 0,95 \div 0,98$  в полосе частот свыше  $30\%$  от средней частоты; очень хорошие нагрузки имеют коэффициент бегущей волны около  $0,99$  в той же полосе.

Оконечная волноводная нагрузка, предназначенная для поглощения низкого уровня мощности (средняя мощность — менее  $1$  Вт), обычно представляет собой короткозамкнутый отрезок волновода, в который вдоль его оси введены диэлектрические пластины, покрытые слоем поглощающего вещества (графит, окись олова и др.) и расположенные параллельно вектору  $E$  поглощаемой волны. При этом вектор  $E$  обуславливает в поглощающем веществе токи проводимости, наличие которых приводит к превращению электромагнитной мощности в тепло (ср. § 4.1). Для получения наибольшего значения коэффициента бегущей волны в широкой полосе частот пластинам на входе придают клиновидную форму, которая подбирается экспериментальным путем. В качестве примера на рис. 24.10 изображена поглощающая оконечная нагрузка для прямоугольного волновода с волной  $H_{10}$ .

В оконечных нагрузках, предназначенных для поглощения и рассеяния высокого уровня мощности, поглотитель (твердое вещество или вода) занимает значительную часть объема волновода; при этом принимаются меры для улучшения отвода тепла.

# Двухплечные узлы

## 24.3. АТТЕНЮАТОРЫ

Аттенюатор (ослабитель) является двухплечным узлом, предназначенным для уменьшения проходящей через него мощности волны рабочего типа. Различают поглощающие и предельные аттенюаторы, постоянные и переменные. Переменным аттенюатором можно изменять величину ослабления мощности.

*Поглощающие аттенюаторы* действуют по тому же принципу, что и поглощающие нагрузки. Для примера на рис. 24.11 изображена одна из разновидностей переменного поглощающего аттенюатора для одноволнового прямоугольного волновода.

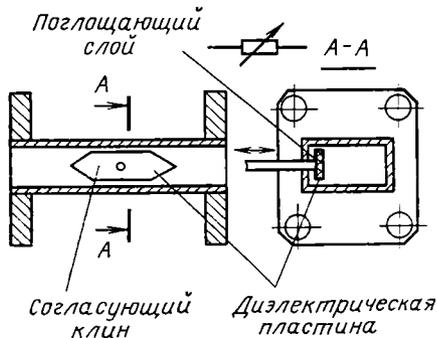


РИС. 24.11

Чем ближе расположен поглощающий слой к середине сечения волновода, тем больше вектор  $E$  рабочей волны  $H_{10}$ , параллельный поверхности этого слоя, и, следовательно, тем больше токи проводимости в слое и поглощение мощности. Путем перемещения пластины перпендикулярно оси волновода можно изменять величину поглощаемой мощности.

*Предельные аттенюаторы* выполняются обычно в виде отрезка круглого волновода с изменяющейся длиной  $l$ , в котором на рабочих длинах волн могут существовать только затухающие местные поля ( $\lambda > \lambda_{кр\psi}$ ) и вход и выход которого соединены одинаковыми элементами связи с коаксиальными волноводами (рис. 24.12).

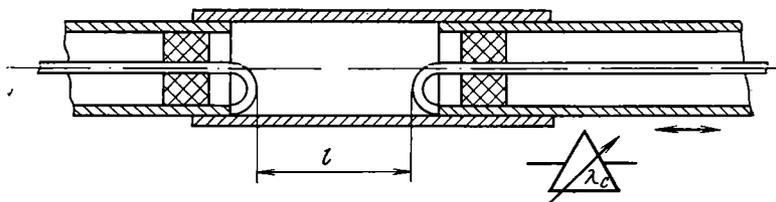


РИС. 24.12

Если возбуждаемое на входе отрезка волновода местное поле рабочего типа имеет амплитуду  $A_m$ , то на его выходе это же поле имеет амплитуду  $A_m e^{-\alpha_{\psi} l}$  (см. § 18.2). Мощность, извлекаемая выходным элементом связи, пропорциональна квадрату амплитуды поля на выходе отрезка волновода  $A_m^2 e^{-2\alpha_{\psi} l}$ . При этом ослаб-

ление аттенюатора (21.113) является линейной функцией длины  $l$  и коэффициента затухания  $\alpha_v$ . Изменением  $l$  можно регулировать величину ослабления  $b$ .

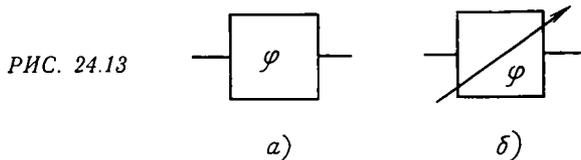
В качестве рабочего используют либо основной тип поля  $H_{11}$ , для которого элементом связи служит петля (см. рис. 24.12), либо первый высший тип  $E_{01}$ , для которого элементом связи является совмещенный с осью волновода зонд. Поскольку коэффициент затухания  $\alpha_v = \sqrt{\kappa_v^2 - k^2} = \sqrt{(2\pi/\lambda_{крv})^2 - (2\pi/\lambda)^2}$  увеличивается с уменьшением  $\lambda_{крv}$ , то в случае рабочего поля типа  $H_{11}$  или  $E_{01}$  возникающие вблизи элемента связи другие местные поля затухают значительно быстрее и не вносят существенных погрешностей в работу аттенюатора.

Если  $\lambda \gg \lambda_{крv}$ , то для рабочего типа поля  $\alpha_v \approx 2\pi/\lambda_{крv}$  и аттенюатор в широкой полосе частот практически не изменяет своих параметров. Абсолютная градуировка, широкополосность, прямая пропорциональность между ослаблением и длиной  $l$  и возможность обеспечивать очень большое ослабление являются достоинствами предельного аттенюатора.

Мощность, не прошедшая в нагрузку, отражается в предельном аттенюаторе обратно к генератору. Чем больше ослабление аттенюатора, тем больше уровень отраженной мощности. Поэтому для нормальной работы генератора необходимо улучшить согласование с ним аттенюатора, которое достигается введением на концах коаксиальных линий поглощающих шайб. Наличие этих шайб создает большое начальное (минимальное) ослабление аттенюатора, что является его недостатком.

#### 24.4. ФАЗОВРАЩАТЕЛИ

Фазовращателем называют двухплечный узел, при прохождении через который волна рабочего типа приобретает определенный сдвиг по фазе. Различают нерегулируемые и регулируемые фазовращатели. Регулируемые фазовращатели позволяют изменять сдвиг по фазе между волнами на его выходе и входе. На рис.



24.13 приведены условные графические обозначения нерегулируемого (а) и регулируемого (б) фазовращателей.

Широко распространенный фазовращатель представляет собой участок волновода с продольной диэлектрической пластиной, которая расположена параллельно вектору  $E$  волны рабочего типа и делает фазовую скорость этой волны меньше, чем в волноводе без

пластины. Пластина наиболее сильно уменьшает фазовую скорость, и следовательно, увеличивает коэффициент фазы  $\beta$  при ее размещении в той области волновода, где параллельный пластине вектор  $E$  принимает наибольшие значения. Проходя участок волновода с диэлектрической пластиной, волна рабочего типа приобретает дополнительный фазовый сдвиг по сравнению с прохождением участка такой же длины, но без пластины. Величину этого сдвига можно регулировать путем перемещения пластины перпендикулярно оси волновода. Для уменьшения коэффициента отражения от пластины ее концам придают клиновидную форму.

Регулируемый фазовращатель для прямоугольного волновода с волной  $H_{10}$  имеет такой же вид, что и соответствующий аттенюатор (см. рис. 24.11), только на пластине отсутствует слой поглощающего вещества.

### 24.5. ФИЛЬТРЫ ДЛЯ ПОДАВЛЕНИЯ ТИПОВ ВОЛН

Эти фильтры предназначены для пропускания по многоволновому волноводу волны рабочего типа и подавления волн других типов. По принципу действия различают излучающие, поглощающие и отражающие фильтры для подавления типов волн.

В излучающем фильтре используют систему щелей, прорезанных в стенках волновода таким образом, чтобы энергия волны рабочего типа не излучалась из них, а энергия подавляемых типов

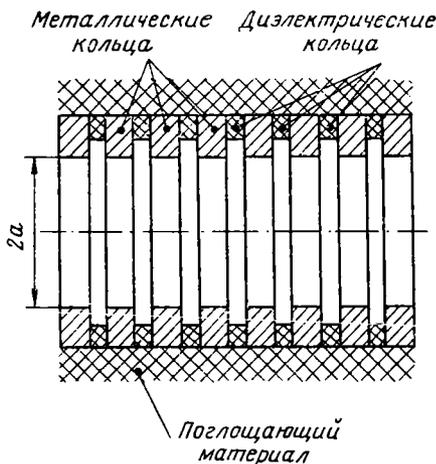


РИС. 24.14

излучалась. Например, излучающим является фильтр кольцевого типа в многоволновом круглом волноводе, широко применяемый для пропускания рабочей волны  $H_{01}$  и ослабления попутного потока (ср. § 19.17). Такой фильтр представляет собой набор чередующихся металлических и диэлектрических колец, имеющих общую ось (рис. 24.14). Узкие кольцевые щели между металлическими кольцами практически не влияют на условия распространения симметричных волн  $H_{0n}$ , имеющих на стенках только кольцевой ток (19.85). Волны всех остальных типов имеют продольную составляющую

плотности тока, которую перерезают кольцевые щели. Энергия этих волн интенсивно излучается из волновода через щели.

Поглощающие фильтры представляют собой покрытые слоем поглощающего вещества тонкие диэлектрические пластины, кото-

рые расположены в волноводе ортогонально векторным линиям  $E$  волны рабочего типа. При этом рабочая волна не создает в поглощающем веществе токов проводимости и не ослабляется фильтром. Волны других типов, линии  $E$  которых не перпендикулярны поверхности пластин, поглощаются. Например, фильтр, который состоит из радиальных пластин в круглом волноводе (рис. 24.15),

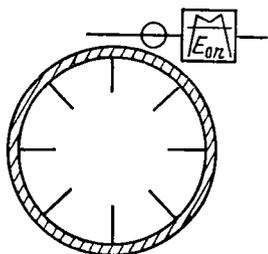


РИС. 24.15

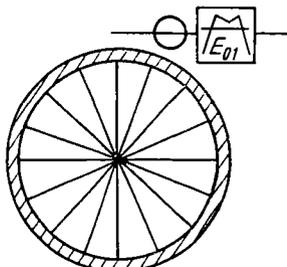


РИС. 24.16

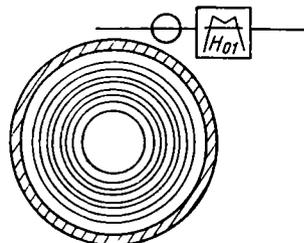


РИС. 24.17

пропускает волну  $H_{01}$ , имеющую единственную отличную от нуля компоненту  $E_{\psi}$ , и поглощает все волны класса  $E$  и типов  $H_{mn}$  ( $m > 0$ ). При этом наиболее интенсивно поглощаются волны  $E_{0n}$ , линии  $E$  которых параллельны поверхности пластин.

Иногда требуется применение отражающих фильтров для подавления нежелательных типов волн. Такой фильтр представляет

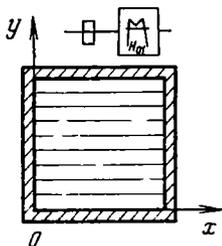


РИС. 24.18

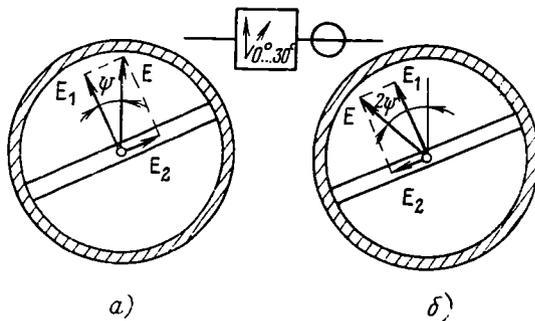


РИС. 24.19

собой решетку из тонких проводников, ориентированных ортогонально линиям  $E$  волны рабочего типа, вследствие чего эта волна не возбуждает в проводниках токов и проходит сквозь решетку почти без отражения. С другой стороны, волны подавляемых типов, имеющие составляющую  $E$ , направленную вдоль проводников, возбуждают в них токи и отражаются решеткой. Наиболее интенсивно возбуждение токов и, следовательно, отражение от решетки

происходят в том случае, когда вектор  $\mathbf{E}$  подавляемой волны ориентирован параллельно проводникам. Например, решетка из радиальных проводников в круглом волноводе (рис. 24.16) пропускает волну  $H_{01}$  и наиболее интенсивно отражает волну  $E_{01}$ ; решетка из кольцевых проводников (рис. 24.17), наоборот, пропускает волну  $E_{01}$  и сильно отражает волну  $H_{01}$ . На рис. 24.18 изображен отражающий фильтр, который пропускает в квадратном волноводе волну  $H_{10}$  и отражает волну  $H_{01}$ .

## 24.6. ПОЛЯРИЗАТОРЫ

Поляризаторами называют устройства для поворота плоскости поляризации линейно поляризованной волны  $H_{11}$  в круглом волноводе или для преобразования линейно поляризованной волны  $H_{11}$  в волну с круговой поляризацией.

На рис. 24.19 изображено устройство для поворота плоскости поляризации волны  $H_{11}$  на указанный на условном обозначении угол, состоящее из участка круглого волновода с продольной диэлектрической пластиной. Пусть на входе поляризатора плоскость поляризации волны  $H_{11}$  образует с нормалью к поверхности пластины угол  $\psi$  (рис. 24.19а). Разложим это волну на две синфазные линейно поляризованные волны  $H_{11}$ , одна из которых поляризована перпендикулярно поверхности пластины, а другая — параллельно ей (ср. § 12.1). Волна, у которой вектор  $\mathbf{E}$  перпендикулярен диэлектрической пластине, проходит вдоль нее почти с такой же фазовой скоростью, что и в волноводе без пластины. Волна, у которой вектор  $\mathbf{E}$  параллелен пластине, обладает уменьшенной фазовой скоростью и увеличенным коэффициентом фазы  $\beta = \beta_2$ . Если длина пластины  $l$  подобрана таким образом, что на выходе поляризатора эти волны приобретают сдвиг по фазе  $(\beta_2 - \beta_1)l = \pi$ , то их сумма вновь образует линейно поляризованную волну  $H_{11}$  с плоскостью поляризации, повернутой на угол  $2\psi$  относительно плоскости поляризации волны на входе (рис. 24.19б). Обеспечив возможность поворота пластины вокруг оси волновода в пределах от  $0$  до  $90^\circ$ , можно поворачивать плоскость поляризации распространяющейся в волноводе волны  $H_{11}$  в пределах от  $0$  до  $180^\circ$ .

Чтобы участок круглого волновода с диэлектрической пластиной преобразовывал линейно поляризованную волну  $H_{11}$  в волну с круговой поляризацией, нужно обеспечить на его выходе равенство амплитуд волн, поляризованных параллельно и перпендикулярно пластине, и сдвиг по фазе между ними на  $\pi/2$  (ср. § 12.2). Для получения равных амплитуд плоскость поляризации волны  $H_{11}$  на входе должна образовывать с нормалью к пластине угол  $45^\circ$  (рис. 24.20); сдвиг фаз на выходе  $(\beta_2 - \beta_1)l = \pi/2$  достигается путем подбора длины пластины  $l$ . Очевидно, что это устройство преобразует также волну  $H_{11}$  с круговой поляризацией в линейно поляризованную волну, у которой плоскость поляризации образует с нормалью к пластине угол  $45^\circ$ .

## 24.7. ПЕРЕХОДЫ С ОДНОГО ВОЛНОВОДА НА ДРУГОЙ

Рассмотрим кратко устройство переходов с одного типа волновода на другой. Переходы с коаксиального волновода на прямоугольный или круглый (коаксиально-волноводные переходы) схематически изображены на рис. 19.20. Разработаны специальные

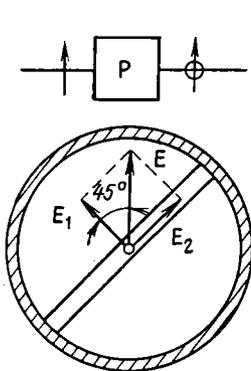


РИС. 24.20

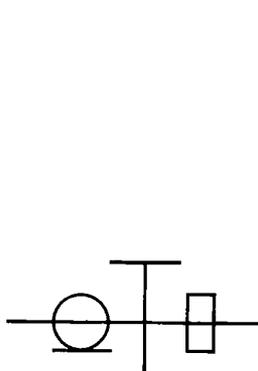


РИС. 24.21

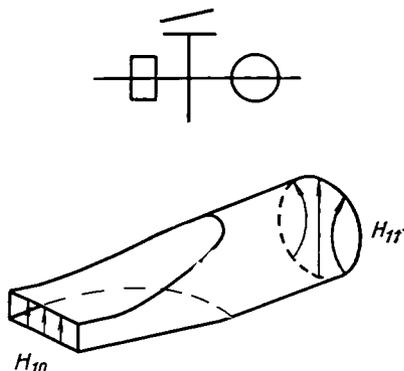


РИС. 24.22

способы согласования этих переходов в довольно широкой полосе частот и увеличения пропускаемой через них мощности. Для примера на рис. 24.21 показано условное графическое обозначение перехода с коаксиального волновода на прямоугольный.

Плавные переходы с прямоугольного одноволнового волновода на круглый волновод с волной  $H_{11}$  (рис. 24.22) или  $H_{01}$  (рис. 24.23)

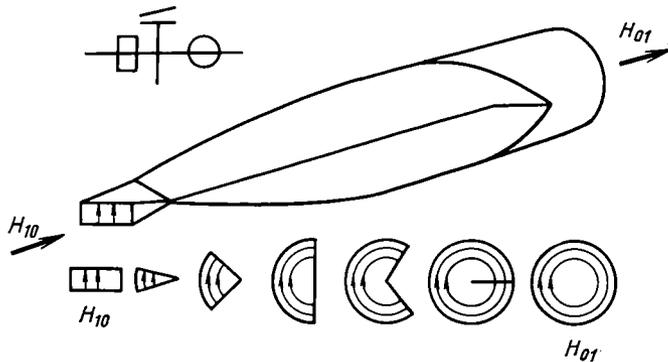


РИС. 24.23

осуществляются постепенной деформацией прямоугольного поперечного сечения в круглое, при которой распределение поля волны  $H_{10}$  плавно (на участке в несколько длин волн) трансформируется в распределение поля волны типа  $H_{11}$  круглого волновода.

Устройства на рис. 24.22, 24.23 служат также и обратными переходами с круглого волновода с волной соответственно  $H_{11}$  или  $H_{01}$  на прямоугольный волновод с волной  $H_{10}$ .

## Трехплечные узлы

### 24.8. Т-ОБРАЗНЫЕ СОЕДИНЕНИЯ ПРЯМОУГОЛЬНЫХ ВОЛНОВОДОВ

Широко распространенными трехплечными узлами являются соединения под прямым углом двух одноволновых прямоугольных волноводов, называемые Т-образными соединениями (волноводными тройниками). Подобно изгибам прямоугольного волновода (см. § 24.1) различают Т-образное соединение волноводов в плоскости

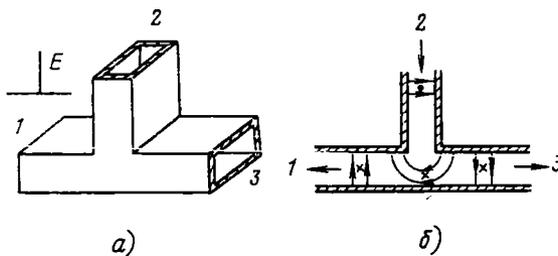


РИС. 24.24

$E$  рабочей волны  $H_{10}$ , или  $E$ -тройник (рис. 24.24а), и Т-образное соединение волноводов в плоскости  $H$  волны  $H_{10}$ , или  $H$ -тройник (рис. 24.25а).

На рис. 24.24б приведена примерная структура поля в  $E$ -тройнике при поступлении волны в плечо 2 и наличии согласованных нагрузок в плечах 1 и 3. В плечах 1 и 3, расположенных симметрично относительно плеча 2, в противоположные стороны бегут волны  $H_{10}$ , у которых на одинаковых расстояниях от разветвления векторы  $E_{\perp}$  равны по величине и противофазны, а векторы  $H_{\perp}$  равны по величине и синфазны (продольные составляющие вектора Пойнтинга этих волн направлены в противоположные стороны). Поскольку условное напряжение  $\dot{U}$  пропорционально величине вектора  $E_{\perp}$  волны  $H_{10}$ , а условный ток  $I$  — величине вектора  $H_{\perp}$  (см. § 21.3), то в эквивалентных плечах 1 и 3 длинных линиях на одинаковых расстояниях от разветвления напряжения  $\dot{U}_1$  и  $\dot{U}_3$  равны по величине и противофазны, а токи  $I_1$  и  $I_3$  равны и синфазны. Упрощенной схемой замещения  $E$ -тройника является *последовательное* соединение длинных линий (рис. 24.26а), которое как раз и обеспечивает нужное распределение напряжений и токов в эквивалентных линиях.

На рис. 24.25б изображена примерная структура поля в  $H$ -тройнике при нахождении источника энергии в плече 2 и согласован-

ных нагрузок в плечах 1 и 3. В плечах 1 и 3, расположенных симметрично относительно плеча 2, в противоположные стороны бегут волны  $H_{10}$ , у которых на одинаковых расстояниях от разветвления векторы  $E_{\perp}$  равны и синфазны, а векторы  $H_{\perp}$  противофазны. При

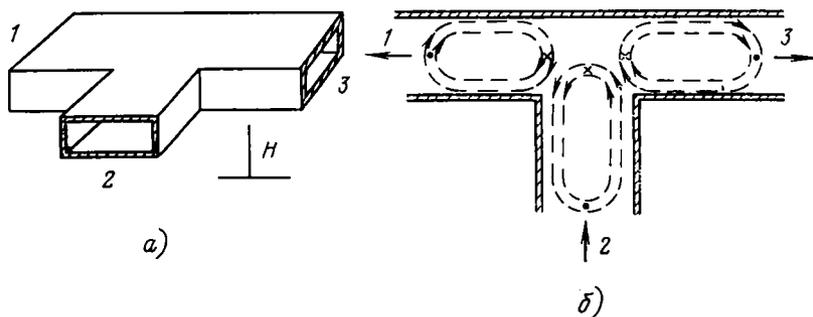


РИС. 24.25

этом в эквивалентных плечах 1 и 3 длинных линиях на одинаковых расстояниях от разветвления напряжения  $U_1$  и  $U_3$  равны и синфазны, а токи  $I_1$  и  $I_3$  равны и противофазны. Упрощенной схемой за-



РИС. 24.26

мещения Н-тройника является *параллельное* соединение длинных линий (рис. 24.26б), обеспечивающее нужное распределение напряжений и токов в эквивалентных линиях.

Если плечо 2 Н-тройника перегородить короткозамыкателем в сечении, которое совпадает с плоскостью узкой стенки волновода, образованного плечами 1 и 3 (см. рис. 24.25а), то плечо 2 перестает влиять на распространение волн  $H_{10}$  в этом волноводе. Чтобы отразить это на эквивалентной схеме, отмеченному выше сечению в плече 2 соответствуют на рис. 24.26б точки *aa*, удаленные на всех частотах от точек *bb* на расстояние  $L/4$ . Действительно, при коротком замыкании точек *aa* четвертьволновый отрезок длиной линии имеет согласно (21.24) бесконечно большое сопротивление в точках *bb* и не шунтирует длинной линии, эквивалентной плечам 1 и 3.

Изображенные на рис. 24.26 эквивалентные схемы Т-образных соединений волноводов являются упрощенными, так как они не учитывают существование в области разветвления затухающих местных полей высших типов. Известны уточненные эквивалентные схемы, которые определены электродинамическими методами. Однако при решении многих практических задач оказывается достаточным использование упрощенных эквивалентных схем.

#### 24.9. ПОЛЯРИЗАЦИОННЫЙ ФИЛЬТР

Поляризационным фильтром называют трехплечный узел для разделения двух бегущих волн, отличающихся одна от другой поворотом плоскости поляризации на  $90^\circ$ . Поляризационные фильтры чаще всего используют в волноводных трактах тех систем, в которых передатчик и приемник работают на одну антенну, причем излучаемые и принимаемые ею волны имеют взаимно перпендикулярные плоскости поляризации.

На рис. 24.27 схематически изображен поляризационный фильтр, состоящий из Т-образного соединения квадратных волноводов и двух отражающих фильтров, которые аналогичны пока-

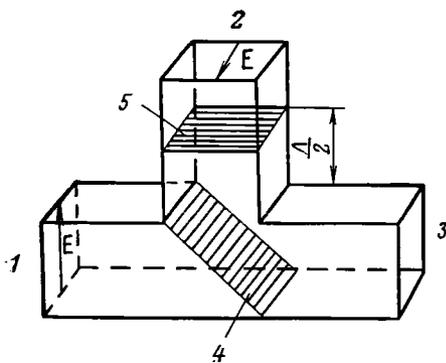


РИС. 24.27

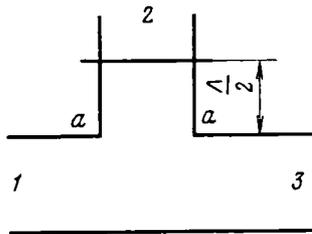


РИС. 24.28

занному на рис. 24.18. От передатчика волна основного типа с *вертикальным* вектором  $E$  поступает в плечо 1, пропускается фильтром 4 и полностью отражается фильтром 5. Для этой волны Т-образное соединение волноводов представляет Е-тройник и все устройство имеет эквивалентную схему в виде последовательного соединения длинных линий с замкнутым накоротко на расстоянии  $\Delta/2$  от точек  $aa$  плечом 2 (рис. 24.28). При этом в точках  $aa$  входное сопротивление плеча 2 равно нулю и волна практически полностью проходит из плеча 1 в плечо 3 и излучается антенной, подключенной к плечу 3.

Принимаемое антенной электромагнитное поле поступает в плечо 3 в виде волны основного типа с *горизонтальным* вектором  $E$ ,

которая отражается фильтром 4 и пропускается фильтром 5. Для этой волны плечи 3 и 2 и наклонная отражающая решетка 4 образуют разновидность уголкового изгиба в плоскости  $H$ . Этот изгиб можно спроектировать таким образом, чтобы из плеча 3 волна практически полностью проходила в плечо 2, к которому подключен приемник.

## Мосты и направленные ответвители

### 24.10. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ПАРАМЕТРЫ

Мосты и направленные ответвители представляют собой реактивные взаимные четырехплечные узлы. Если волна от источника поступает в одно (любое) из плеч, а в остальных трех плечах включены согласованные нагрузки, то в идеальном случае мощность этой падающей волны без отражения от узла делится только между двумя плечами, а третье плечо оказывается развязанным от входного — волна в него через узел не передается.

Пусть, например, волна поступает в плечо 1, а развязанным является плечо 3, т. е.  $S_{31}=0$ ,  $S_{21}\neq 0$  и  $S_{41}\neq 0$ . У взаимного узла коэффициенты передачи в противоположных направлениях одинаковы, вследствие чего при поступлении волны в плечо 3 развязанным оказывается плечо 1, т. е.  $S_{13}=0$ ,  $S_{23}\neq 0$  и  $S_{43}\neq 0$ . Поскольку  $S_{12}=S_{21}\neq 0$  и  $S_{32}=S_{23}\neq 0$ , то при поступлении волны в плечо 2 развязанным оказывается плечо 4 и наоборот. Таким образом, у мостов и направленных ответвителей плечи попарно развязаны.

Если поступающая во входное плечо мощность делится поровну между двумя другими плечами, то узел называют мостом. При существенно неравном делении мощности узел с попарно развязанными плечами называют направленным ответвителем.

Направленный ответвитель представляет собой конструктивно две линии передачи, соединенные между собой определенным устройством связи. Его условное графическое обозначение в схемах показано на рис. 24.29. Наряду с входным плечом, в которое поступает мощность от источника, и развязанным плечом, в которое мощность не передается, будем различать плечо прямой связи со входом, которое расположено в одной линии со входным плечом, и плечо направленной связи, которое расположено в одной линии с развязанным плечом. Пусть, например, 1 есть входное плечо. Если при этом 4 является плечом направленной связи, а 3 — развязанным плечом (см. рис. 24.29), то ответвитель называют сонаправленным; если же, наоборот, 3 — плечо направленной связи, а 4 — развязанное плечо, то ответвитель называют противонаправленным.

*Переходным затуханием* направленного ответвителя  $S$  называют выраженное в децибелах отношение мощности, поступающей

во входное плечо (например, 1), к мощности, ответвляемой в плечо направленной связи (например, 4):

$$C = 10 \lg \frac{P_{1\text{ср}+}}{P_{4\text{ср}-}} = 10 \lg \frac{|a_1|^2}{|b_4|^2} = 20 \lg \frac{1}{|S_{41}|}. \quad (24.1)$$

Если  $P_{4\text{ср}-} \ll P_{1\text{ср}+}$  и переходное затухание принимает большие значения, то имеем направленный ответвитель со слабой связью; если  $P_{4\text{ср}-} = P_{1\text{ср}+}$  и  $C=0$ , то имеем направленный ответвитель с полной связью. При  $P_{4\text{ср}-} = 0,5P_{1\text{ср}+}$  (мощность делится поровну между двумя выходными плечами) и  $C = 3$  дБ четырехплечный узел является мостом.

В реальном направленном ответвителе в развязанное плечо поступает некоторая мощность. Количеством это явление характеризует *направленность D*, равная выражен-

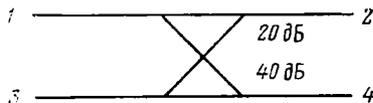


РИС. 24.29

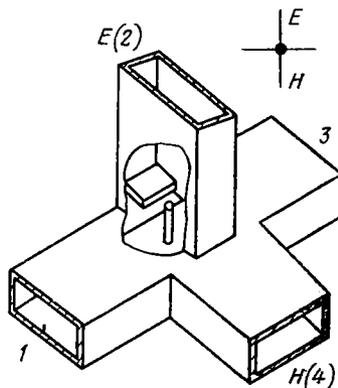


РИС. 24.30

ному в децибелах отношению мощности в плече направленной связи (например, 4) к мощности в развязанном плече (например, 3):

$$D = 10 \lg \frac{P_{4\text{ср}-}}{P_{3\text{ср}-}} = 10 \lg \frac{|b_4|^2}{|b_3|^2} = 20 \lg \frac{|S_{41}|}{|S_{31}|}. \quad (24.2)$$

У идеально направленного ответвителя  $P_{3\text{ср}-} = 0$  и направленность равна бесконечности. (На рис. 24.29 верхнее число означает переходное затухание, нижнее — направленность.)

Широко распространенными мостами являются двойной тройник, кольцевой, квадратный и щелевой мосты, которые будут рассмотрены ниже.

### 24.11 ДВОЙНОЙ ВОЛНОВОДНЫЙ ТРОЙНИК

Двойной волноводный тройник (двойное Т-образное соединение волноводов) представляет собой соединение в одном узле Е- и Н-тройников, плоскости симметрии которых совмещены (рис. 24.30). Входящее в Е-тройник плечо, ось которого лежит в плоскости симметрии, называют плечом *E* двойного тройника (плечо 2), а входящее в Н-тройник плечо, ось которого лежит в плос-

кости симметрии, называют плечом  $H$  (плечо 4). Оставшихся два плеча называют боковыми (плечи 1 и 3).

Плечи  $E$  и  $H$  двойного тройника всегда развязаны между собой. Действительно, при падении на узел волны  $H_{10}$  из плеча  $E$  электрическое поле в плечах 1 и 3 на равных расстояниях от плоскости симметрии противофазно (ср. рис. 24.24б), вследствие чего в плече  $H$  возбуждаются поля высших типов класса  $H$  (например,  $H_{20}$ ). При падении волны  $H_{10}$  из плеча  $H$  электрическое поле в плечах 1 и 3 синфазно (ср. рис. 24.25б) и направлено параллельно оси плеча  $E$ . При этом в плече  $E$  возбуждаются поля высших типов класса  $E$  (например,  $E_{11}$ ). Поскольку в каждом из плеч узла может распространяться волна только основного типа  $H_{10}$ , то высшие типы представляют собой затухающие местные поля и энергии не переносят.

При падении волны из плеча  $E$  или  $H$  благодаря геометрической симметрии двойного тройника в боковые плечи 1 и 3 с согласованными нагрузками проходят одинаковые мощности. При этом в случае отсутствия согласования двойного тройника со стороны входного плеча часть мощности отражается от узла в это плечо.

Согласование со стороны плеча  $E$  можно получить введением в него односторонней индуктивной диафрагмы (см. рис. 24.30), с помощью которой удастся компенсировать отраженную от узла в это плечо волну. Согласование со стороны плеча  $H$  можно получить введением реактивного штыря. Покажем, что если двойной тройник согласован и со стороны плеч  $H$  и  $E$ , то, во-первых, он согласован и со стороны боковых плеч, во-вторых, мощность, поступающая из источника в одно из боковых плеч, делится поровну между плечами  $H$  и  $E$  и, в-третьих, боковые плечи взаимно развязаны. Другими словами, в этом случае двойной тройник обладает всеми свойствами моста.

Из согласованного плеча  $H$  в боковое плечо (например, 1) проходит половина мощности. Согласно теореме взаимности и в обратном направлении — из бокового плеча в плечо  $H$  — проходит половина мощности. Такое же утверждение справедливо относительно прохождения мощности из согласованного плеча  $E$  в боковое плечо и обратно. Таким образом, действительно, мощность из бокового плеча не отражается обратно в него, делится поровну между плечами  $H$  и  $E$  и не проходит в другое боковое плечо.

Эти результаты могут быть получены и при рассмотрении матрицы рассеяния двойного тройника. Благодаря геометрической симметрии этого узла имеем:  $S_{33} = S_{11}$ ,  $S_{32} = -S_{12}$  (из плеча  $E$  электрические поля в плечи 1 и 3 расходятся в противофазе),  $S_{34} = S_{14}$  (из плеча  $H$  электрические поля в плечи 1 и 3 расходятся в фазе). Приняв во внимание также развязку между плечами  $H$  и  $E$  ( $S_{24} = S_{42} = 0$ ), согласование узла со стороны этих плеч ( $S_{22} = S_{44} = 0$ ) и условия взаимности узла (21.102), получим матрицу рассеяния двойного тройника (восьмиполюсника) в следующем виде:

$$[S] = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & S_{14} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} & S_{24} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} & S_{34} \\ S_{41} & S_{42} & S_{43} & S_{44} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & S_{14} \\ S_{12} & 0 & -S_{12} & 0 \\ S_{13} & -S_{12} & S_{11} & S_{14} \\ S_{14} & 0 & S_{14} & 0 \end{bmatrix}.$$

Поскольку двойной тройник потерь не имеет, то его матрица рассеяния является унитарной и, следовательно, сумма квадратов модулей всех элементов любого столбца равна единице (см. § 21.8):

$$\begin{aligned} |S_{11}|^2 + |S_{12}|^2 + |S_{13}|^2 + |S_{14}|^2 &= 1, \\ 2|S_{12}|^2 &= 1, \quad 2|S_{14}|^2 = 1. \end{aligned}$$

Из этих соотношений следует, что  $|S_{12}| = |S_{14}| = 1/\sqrt{2}$  и  $|S_{11}|^2 + |S_{13}|^2 = 0$ . Из последнего равенства вытекает, что  $|S_{11}| = 0$  и  $|S_{13}| = 0$ .

Таким образом, двойной тройник согласован и со стороны боковых плеч ( $S_{11} = S_{33} = 0$ ), поступающая в боковое плечо мощность поровну делится между  $H$  и  $E$  плечами ( $|S_{21}| = |S_{41}| = 1/\sqrt{2}$ ) и боковые плечи взаимно развязаны ( $S_{13} = S_{31} = 0$ ).

Граничные сечения в плечах узла можно выбрать таким образом, чтобы аргументы элементов матрицы  $S_{12} = \dot{b}_1/\dot{a}_2$  и  $S_{14} = \dot{b}_1/\dot{a}_4$  обратились в нуль (точнее, были бы кратны  $2\pi$ ). При этом условии  $S_{12} = |S_{12}|$ ,  $S_{14} = |S_{14}|$  и матрица рассеяния двойного тройника принимает вид (на частоте  $f_0$  полного согласования узла со стороны плеч  $H$  и  $E$ )

$$[S] = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (24.3)$$

Двойной тройник имеет сравнительно широкий диапазон рабочих частот, определяемый полосой, в пределах которой сохраняется хорошее согласование узла со стороны плеч  $H$  и  $E$ , и при  $K_{с.в.} < 1,1$  достигающий (10—15) % от средней частоты  $f_0$ .

## 24.12. КОЛЬЦЕВОЙ МОСТ

Кольцевой мост состоит из замкнутой на себя линии передачи длиной  $1,5\Lambda_0$ , к которой через три интервала в  $\frac{1}{4}\Lambda_0$  и один интервал в  $\frac{3}{4}\Lambda_0$  присоединены четыре плеча. Если кольцевой мост выполнен из полосковых линий (топология его полосы изображена на рис. 24.31а) или коаксиальных волноводов (рис. 24.31б), то на эквивалентной схеме моста плечи соединены параллельно с замкнутой на себя длиной линией (рис. 24.32). Если мост вы-

полнен из прямоугольного волновода, который свернут в кольцо в плоскости  $E$  волны  $H_{10}$ , и присоединения к нему плеч образуют три  $E$ -тройника (см. рис. 24.31в), то согласно § 24.8 его эк-

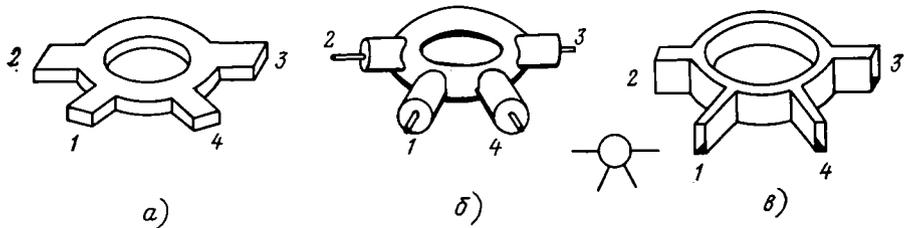


РИС. 24.31

вивалентная схема содержит последовательные соединения длинных линий (рис. 24.33). В настоящее время наибольшее распространение имеет кольцевой мост из полосковых линий.

Рассмотрим мост с параллельным соединением длинных линий (см. рис. 24.32). Пусть волна частоты  $f_0$ , которой соответ-

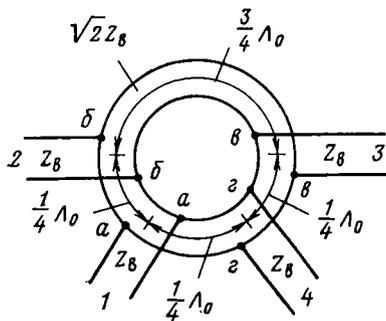


РИС. 24.32

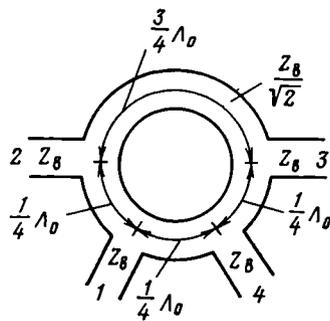


РИС. 24.33

ствует длина волны  $\Lambda_0$ , от источника поступает в плечо  $1$ , а в остальных плечах включены согласованные с ними нагрузками. Из плеча  $1$  по кольцу распространяются две волны. Поскольку в точках  $aa$  обе волны имеют одинаковые и синфазные напряжения (напряженности электрического поля  $E_{\perp}$ ), а длины их путей до точек  $bb$  подключения плеча  $3$  отличаются на  $\Lambda_0/2$ , то в точках  $bb$  обе волны оказываются в противофазе и здесь существует узел (нуль) напряжения. При этом волна в плечо  $3$  не проходит, т. е. плечи  $1$  и  $3$  являются развязанными ( $S_{31} = S_{13} = 0$ ).

Точки  $bb$  с узлом напряжения можно замкнуть накоротко, не нарушив режима работы устройства с входным плечом  $1$ . Обра-

зовавшиеся при этом два короткозамкнутых отрезка длиной  $\frac{3}{4}\Lambda_0$  и  $\Lambda_0/4$  имеют бесконечно большие входные сопротивления в точках  $bb$  и  $gg$  и могут вообще быть исключены из схемы. Следовательно, в рассматриваемом случае четвертьволновые отрезки  $ab$  и  $ag$  кольцевой линии с волновым сопротивлением  $Z_{в.к}$  оказываются нагруженными на сопротивления, равные волновому сопротивлению плеча  $Z_в$ , имеют в точках  $aa$  входные сопротивления  $Z = Z_{в.к}^2/Z_в$  и подключены в этих точках параллельно. Чтобы в точках  $aa$  нагрузить плечо  $1$  на сопротивление  $Z_в$  и тем самым согласовать узел со стороны этого плеча, нужно выполнить условие  $Z_{в.к}^2/2Z_в = Z_в$ . Таким образом, при  $Z_{в.к} = \sqrt{2}Z_в$  отсутствует отражение от плеча  $1$  ( $S_{11} = 0$ ) и вся поступающая в него мощность делится поровну между плечами  $2$  и  $4$  ( $|S_{21}| = |S_{41}| = 1/\sqrt{2}$ ). Поскольку, проходя пути  $l_{ab} = l_{ag} = l = \Lambda_0/4$ , волны приобретают сдвиг по фазе  $\beta l = \pi/2$ , то  $S_{21} = S_{41} = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-i\beta l} = -\frac{i}{\sqrt{2}}$ .

Таким же путем легко показать, что при поступлении волны частоты  $f_0$  в плечо  $2$  развязанным оказывается плечо  $4$  ( $S_{42} = 0$ ) и мощность поровну делится между плечами  $1$  и  $3$ , причем  $S_{12} = -i/\sqrt{2}$ ,  $S_{32} = i/\sqrt{2}$ . Согласование ( $S_{22} = 0$ ) вновь имеет место при  $Z_{в.к} = \sqrt{2}Z_в$ .

Из соображений симметрии очевидны следующие равенства:  $S_{44} = S_{11}$ ,  $S_{33} = S_{22}$ ,  $S_{34} = S_{21}$ ,  $S_{24} = S_{31}$ . Приняв во внимание условия взаимности узла (21.102) и приведенные выше соотношения, получим матрицу рассеяния кольцевого моста (на частоте  $f_0$ )

$$[S] = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & S_{14} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} & S_{24} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} & S_{34} \\ S_{41} & S_{42} & S_{43} & S_{44} \end{bmatrix} = -\frac{i}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (24.4)$$

Сравнение (24.4) с (24.3) показывает, что свойства двойного тройника и кольцевого моста одинаковы (на средней частоте  $f_0$ ).

Аналогичным способом можно рассмотреть кольцевой мост с последовательным соединением длинных линий (см. рис. 24.31*в* и 24.33). Как и в предыдущем случае, плечи  $1-3$  и  $2-4$  попарно развязаны. Другими словами, при поступлении мощности в одно из плеч она делится поровну между двумя плечами, примыкающими с обеих сторон ко входному. При последовательном соединении линий условие согласования моста имеет вид  $Z_{в.к} = Z_в/\sqrt{2}$ .

С отходом от средней частоты  $f_0$  ( $\Lambda \neq \Lambda_0$ ) быстро нарушаются согласование моста со стороны входного плеча, одинаковое распределение мощностей между выходными плечами и изоляция развязанного плеча. Основными недостатками кольцевого моста являются сравнительно узкая полоса рабочих частот (около 5% от  $f_0$ ) и большие габариты.

### 24.13. КВАДРАТНЫЙ МОСТ

Квадратный мост представляет собой «квадрат» из четырех четвертьволновых отрезков линий передачи, к которому в точках соединения этих отрезков подключены четыре плеча. Если квадратный мост выполнен из коаксиальных волноводов или полосковых линий, то его эквивалентная схема содержит параллельные соединения длинных линий (рис. 24.34). Если же мост выполнен

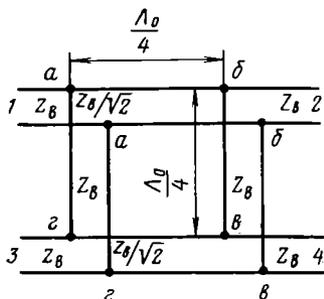


РИС. 24.34

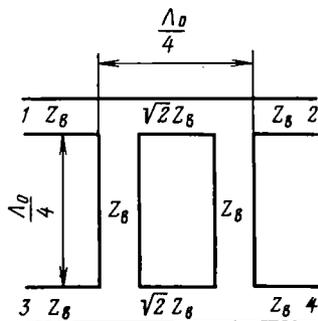


РИС. 24.35

при помощи Т-образных соединений прямоугольных волноводов в  $E$ -плоскости, то эквивалентная схема состоит из последовательных соединений длинных линий (рис. 24.35).

Рассмотрим мост с параллельным соединением длинных линий (см. рис. 24.34). Можно таким образом подобрать волновые сопротивления отрезков длиной  $\Lambda_0/4$ , образующих «квадрат», чтобы при поступлении в плечо 1 волны частоты  $f_0$  (которой соответствует длина волны  $\Lambda_0$ ) и включении в остальные плечи согласованных нагрузок, во-первых, плечо 3 оказалось развязанным, во-вторых, отсутствовала отраженная волна в плече 1 и, в-третьих, поступающая мощность поровну делилась между плечами 2 и 4.

Если плечи 1 и 3 действительно развязаны, то при поступлении волны в плечо 1 в точках  $гг$  существует узел напряжения и их можно замкнуть накоротко, не нарушив режима работы устройства. Исключив два короткозамкнутых четвертьволновых отрезка  $аг$  и  $вг$  (ср. § 24.12) и отобразив плечи 2 и 4 подключением их волновых сопротивлений  $Z_B$  к точкам  $бб$  и  $вв$ , получим схему рис. 24.36. Чтобы участок схемы  $бв$  имел в точках  $бб$  входное сопротивление  $Z_{вх} = Z_B$  и, следовательно, мощности поровну распределялись между плечами 2 и 4, волновое сопротивление отрезка линии  $бв$  должно быть равно  $Z_B$ . Поскольку общее сопротивление в точках  $бб$  равно  $Z_B/2$ , то, чтобы получить в точках  $аа$  входное сопротивление  $Z_B$  и тем самым согласовать узел со стороны плеча 1, нужно выбрать волновое сопротивление отрезка  $аб$  равным  $Z_B/\sqrt{2}$ . Если обозначить напряжение в точках  $аа$

через  $\dot{U}_1$  и учесть, что поступающая из плеча 1 мощность поровну делится между плечами 2 и 4 и что фазы волн в точках  $bb$  и  $vv$  запаздывают по отношению к фазе в точках  $aa$  соответственно на  $\pi/2$  и  $\pi$ , получим:

$$\dot{U}_{bb} = \frac{\dot{U}_1}{\sqrt{2}} e^{-i\frac{\pi}{2}} = -\frac{i}{\sqrt{2}} \dot{U}_1, \quad \dot{U}_{vv} = \frac{\dot{U}_1}{\sqrt{2}} e^{-i\pi} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \dot{U}_1.$$

Рассмотрим теперь участок схемы, который в предположении возможности короткого замыкания точек  $gg$  ранее был исключен (рис. 24.37). Если подобрать волновые сопротивления отрезков  $ag$  и  $bg$  таким образом, что суммарный ток в короткозамыкателе окажется равным нулю, то параметры схемы будут одинаковыми как при наличии короткозамыкателя, так и при его отсутствии — в точках  $gg$  будет существовать узел напряжения и, следовательно,

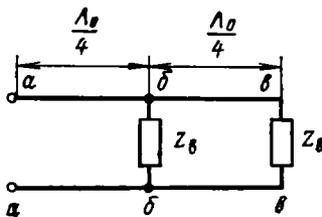


РИС. 24.36

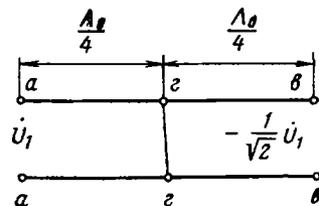


РИС. 24.37

но, плечи 1 и 3 будут развязаны. Как известно, ток в короткозамыкателе  $I_H$  четвертьволнового короткозамкнутого отрезка длиной линии выражается через напряжение на его входе  $\dot{U}_{вх}$ , а его волновое сопротивление  $Z_B$  — соотношением  $I_H = i \dot{U}_{вх}/Z_B$ . Следовательно, чтобы эти токи для четвертьволновых короткозамкнутых отрезков линий  $ag$  и  $bg$  (см. рис. 24.37) были равны по величине и противоположны по знаку, т. е. чтобы суммарный ток в короткозамыкателе был равен нулю, достаточно принять волновые сопротивления этих отрезков соответственно равными  $Z_B$  и  $Z_B/\sqrt{2}$ .

Таким образом, при поступлении волн в плечо 1 имеем:  $S_{11}=0$ ,  $S_{21}=-i/\sqrt{2}$ ,  $S_{31}=0$  и  $S_{41}=-1/\sqrt{2}$ . Благодаря геометрической симметрии квадратного моста (см. рис. 24.34) получаем равенства:  $S_{ii}=S_{11}$ ,  $S_{43}=S_{21}$ ,  $S_{42}=S_{31}$ ,  $S_{32}=S_{41}$ . С помощью приведенных выше соотношений и условий взаимности узла (21.102) находим матрицу рассеяния квадратного моста (на частоте  $f_0$ )

$$[S] = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & S_{14} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} & S_{24} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} & S_{34} \\ S_{41} & S_{42} & S_{43} & S_{44} \end{bmatrix} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 & i & 0 & 1 \\ i & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & i \\ 1 & 0 & i & 0 \end{bmatrix}. \quad (24.5)$$

Аналогично можно рассмотреть квадратный мост с последовательным соединением длинных линий. Значения волновых сопротивлений сторон «квадрата», обеспечивающие согласование такого моста и попарную развязку смежных плеч 1—3 и 2—4, приведены на рис. 24.35.

Подобно кольцевому мосту квадратный мост имеет узкую полосу пропускания и довольно большие габариты.

#### 24.14. ВОЛНОВОДНЫЙ ЩЕЛЕВОЙ МОСТ

Волноводный щелевой мост состоит из двух прямоугольных одноволновых волноводов, связанных между собой щелью (по всей высоте волновода) в общей узкой стенке (рис. 24.38). При определенной длине щели  $l$  и согласовании узла мощность поступающей в плечо 1 волны  $H_{10}$  делится поровну между плечами 2

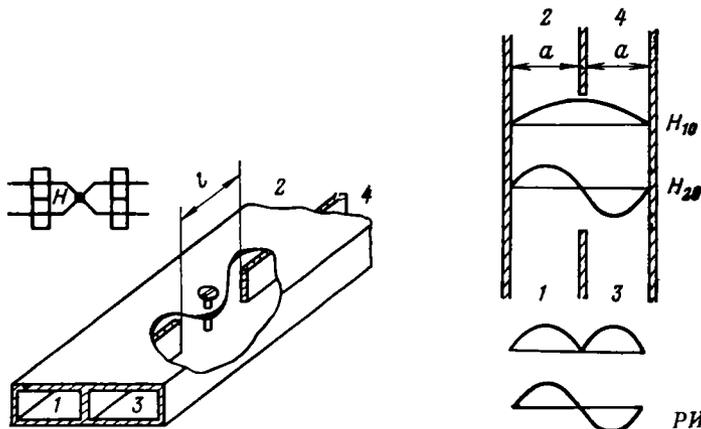


РИС. 24.38

РИС. 24.39

и 4, причем волна в плече 4 отстает по фазе на  $\pi/2$  от волны в плече 2. Благодаря геометрической симметрии моста аналогичное деление мощности и то же соотношение фаз в выходных плечах имеют место при поступлении волны в любое другое плечо.

Для рассмотрения возбуждения моста из плеча 1 применим следующий прием. Предположим, что в плечи 1 и 3 одновременно поступают равные по амплитуде волны  $H_{10}$ , которые в одном случае синфазны, а в другом — противофазны (рис. 24.39). Суперпозиция этих двух режимов эквивалентна тому, что в плечо 1 поступает волна двойной амплитуды, а в плечо 3 падающая волна отсутствует.

Участок без узкой стенки образует отрезок  $l$  прямоугольного волновода с размером широкой стенки  $a' = 2a$ . Поскольку в этом широком волноводе для рабочих длин волн выполняется условие  $\lambda < a'$ , то в нем могут распространяться волны двух типов:  $H_{10}$  и  $H_{20}$ . При поступлении в плечи 1 и 3 противофазных волн в ши-

роком волноводе возникает поле, структура которого соответствует волне  $H_{20}$ . При распространении по волноводу длиной  $l$  волна  $H_{20}$  приобретает отставание по фазе  $\theta_1 = \frac{2\pi}{\Lambda_{20}} l = \frac{2\pi}{\lambda} l \sqrt{1 - (\lambda/a')^2}$ . Поскольку на входе и на выходе щели тонкая металлическая стенка между волноводами оказывается в узле электрического поля волны  $H_{20}$ , то граничное условие на стенке  $E_{\tau} = 0$  автоматически выполняется. При этом противофазные волны проходят из плеч 1 и 3 в плечи 2 и 4 практически без отражения.

При поступлении в плечи 1 и 3 синфазных волн в широком волноводе возбуждается волна  $H_{10}$ , которая при своем распространении отстает по фазе на  $\theta_2 = \frac{2\pi}{\Lambda_{10}} l = \frac{2\pi}{\lambda} l \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{2a'}\right)^2}$ . На входе и выходе щели металлическая стенка оказывается в пучности электрического поля волны  $H_{10}$  и граничное условие  $E_{\tau} = 0$  нарушается. Вследствие этого преобразование синфазных волн в плечах 1 и 3 в волну  $H_{10}$  широкого волновода и обратное преобразование волны  $H_{10}$  в две синфазные волны в плечах 2 и 4 сопровождаются отражениями. Благодаря симметрии узла и синфазности падающих волн отраженные волны в плечах 1 и 3 одинаковы по амплитуде и по фазе. Поместив в центре щели винт, можно добиться компенсации отраженных волн. Этот винт не нарушает согласования при поступлении противофазных волн в плечи 1 и 3, так как он находится в узле электрического поля волны  $H_{20}$ . Так как винт расположен в центре симметричного устройства, он обеспечивает согласование со стороны любого плеча.

Суперпозиция режимов синфазного и противофазного возбуждения плеч 1 и 3 показывает, что при согласовании моста эти плечи развязаны — при поступлении волны только в плечо 1 в плечо 3 отсутствует отраженная волна. При согласовании амплитуды синфазных и противофазных волн  $H_{10}$  в плечах 2 и 4 одинаковы, т. е.  $|U_{2с}| = |U_{4с}| = |U_{2пр}| = |U_{4пр}|$ . Однако если в плече 1 условные напряжения  $U_{1с}$  и  $U_{1пр}$  были синфазны, то в плече 2 между  $U_{2с}$  и  $U_{2пр}$  существует разность фаз, равная  $\Delta\theta = \theta_2 - \theta_1 = -2\pi l (1/\Lambda_{10} - 1/\Lambda_{20})$ ; если  $U_{3с}$  и  $U_{3пр}$  были противофазны, то между  $U_{4с}$  и  $U_{4пр}$  разность фаз равна  $\pi - \Delta\theta$  (рис. 24.40).

Из рисунка видно, что при наличии согласования напряжения результирующих волн  $U_2$  и  $U_4$  в выходных плечах, вообще говоря, не равны друг другу и в случае, если входным является плечо 1, волна в плече 4 отстает по фазе от волны в плече 2 на  $\pi/2$ . Только при  $\Delta\theta = \pi/2$  выполняется равенство  $|U_2| = |U_4|$ , и, следовательно, мощность падающей волны делится поровну между плечами 2 и 4. Значение  $\Delta\theta = \pi/2$  обеспечивается на частоте  $f_0$ , для которой длина щели моста  $l = \Lambda_{10}\Lambda_{20}/4(\Lambda_{20} - \Lambda_{10})$ .

Таким образом, при поступлении волны в плечо 1, обеспечении условий согласования и равного деления мощности между плечами 2 и 4 имеем:  $S_{11} = 0$ ,  $S_{21} = i/\sqrt{2}$ ,  $S_{31} = 0$ ,  $S_{41} = 1/\sqrt{2}$ . Бла-

годаря геометрической симметрии моста получаем равенства:  $S_{ii}=S_{11}$ ,  $S_{43}=S_{21}$ ,  $S_{42}=S_{31}$ ,  $S_{32}=S_{41}$ . Учитывая также условия взаимности узла (21.102), находим матрицу рассеяния щелевого моста (на частоте  $f_0$ )

$$[S] = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & S_{14} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} & S_{24} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} & S_{34} \\ S_{41} & S_{42} & S_{43} & S_{44} \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 & i & 0 & 1 \\ i & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & i \\ 1 & 0 & i & 0 \end{bmatrix}. \quad (24.6)$$

Сопоставление (24.6) с (24.5) показывает, что на средней частоте  $f_0$  свойства квадратного и щелевого мостов одинаковы.

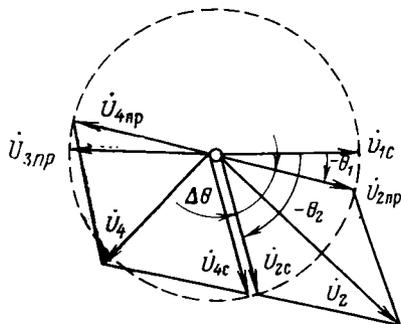


РИС. 24.40

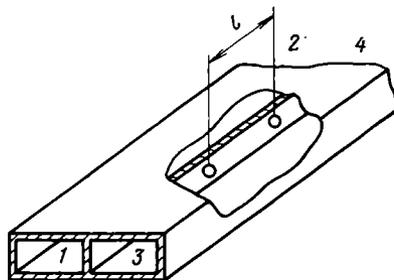


РИС. 24.41

Полоса рабочих частот щелевого моста определяется допустимой неравномерностью распределения мощностей между выходными плечами и достигает (10—15) % от средней частоты, т. е. является сравнительно широкой.

#### 24.15. НАПРАВЛЕННЫЕ ОТВЕТВИТЕЛИ СО СВЯЗЬЮ ЧЕРЕЗ НЕСКОЛЬКО ОТВЕРСТИЙ

На рис. 24.41 показан направленный ответвитель, в котором связь между прямоугольными волноводами осуществляется через два небольших отверстия, прорезанных в общей узкой стенке волноводов. Отверстия связи разнесены вдоль длины волноводов на расстояние  $l$ .

Пусть, например, волна  $H_{10}$  поступает в плечо 1 верхнего волновода (рис. 24.42). Каждое отверстие возбуждает в ответвляющем (нижнем) волноводе две одинаковые волны  $H_{10}$ , которые распространяются в противоположные стороны. Поскольку отверстия малы и связь слабая, то можно пренебречь изменением амплитуды волны в верхнем (основном) волноводе при прохождении отверстий. Направив ось  $z$  волноводов слева направо (в на-

правлении бегущей волны в основном волноводе) и совместив сечение  $z=0$  с левым отверстием, имеем для условного напряжения суммарной волны  $H_{10}$  в плече 4 следующее выражение:

$$\dot{U}_{4+} = \dot{U}_{1+} (s_1 + s_2) e^{-i\beta z}. \quad (24.7)$$

Здесь  $\dot{U}_{1+}$  — условное напряжение волны  $H_{10}$  в основном волноводе в сечении левого отверстия;  $s_1$  и  $s_2$  — соответственно коэффициенты передачи через левое и правое отверстия. Аналогич-

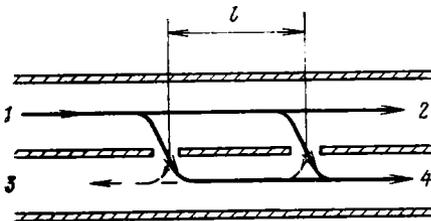


РИС. 24.42

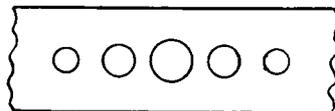


РИС. 24.43

ным путем для напряжения волны  $H_{10}$  в плече 3, бегущей справа налево, получим

$$\dot{U}_{3-} = \dot{U}_{1+} (s_1 + s_2 e^{-i2\beta l}) e^{i\beta z}. \quad (24.8)$$

Таким образом, при распространении волны в основном волноводе слева направо в плече 4 ответвляющего волновода обе волны оказываются в фазе и складываются независимо от расстояния  $l$  между отверстиями и частоты (см. рис. 24.42); в плече 3 волна, возбуждаемая правым отверстием, отстает по фазе на угол  $2\beta l$  от волны, возбуждаемой левым отверстием, так как пробегает дополнительный путь в основном и ответвляющем волноводах, равный  $2l$ . При  $s_1 = s_2 = s$  согласно (24.7) и (24.8) имеем:

$$\begin{aligned} \dot{U}_{4-} &= 2\dot{U}_{1+} s e^{-i\beta z}, \quad \dot{U}_{3-} = \dot{U}_{1+} s (1 + e^{-i2\beta l}) e^{i\beta z} = \\ &= 2\dot{U}_{1+} s \cos \beta l e^{-i\beta l} e^{i\beta z}. \end{aligned} \quad (24.9)$$

На частоте  $f_0$ , для которой  $l$  равно четверти длины волны в волноводе и, следовательно,  $\beta_0 l = \pi/2$ , обе волны в плече 3 оказываются в противофазе и при равенстве амплитуд полностью компенсируют друг друга (выражение для  $U_{3-}$  обращается в нуль). Плечи 1 и 3 оказываются взаимно развязанными. Вследствие геометрической симметрии устройства взаимно развязанными являются также плечи 2 и 4. Согласно (24.9) при условии  $f \neq f_0$  ( $\beta l \neq \pi/2$ ) в плечо, которое на частоте  $f_0$  было развязанным, проходит волна и двухдырочный ответвитель теряет направленные свойства. Недостатком этого ответвителя является узкополосность по направленности  $D$ , определяемой согласно (24.2) и (24.9) выражением  $D = 20 \lg \frac{1}{|\cos \beta l|}$ . С уходом от частоты  $f_0$  направленность резко падает.

Для расширения полосы частот, в которой сохраняется высокая направленность, применяют направленные ответвители с несколькими отверстиями связи, расположенными обычно на равных расстояниях  $l$  вдоль длины волноводов. При этом вместо (24.7) и (24.8) имеем:

$$\begin{aligned} \dot{U}_{4-} &= \dot{U}_{1+} (s_1 + s_2 + \dots + s_{n+1}) e^{-i\beta z}, \\ \dot{U}_{3-} &= \dot{U}_{1+} (s_1 + s_2 e^{-i2\beta l} + \dots + s_{n+1} e^{-i2n\beta l}) e^{i\beta z}, \end{aligned} \quad (24.10)$$

где  $n+1$  — общее число отверстий. Диаметры отверстий делают неодинаковыми (рис. 24.43), что обеспечивает изменение коэффициента передачи  $s_k$  от отверстия к отверстию. Пусть отношения  $s_k/s_1$  (где  $k=1, 2, 3, \dots, n+1$ ) равны соответствующим членам биномиального ряда степени  $n$

$$2^n = (1+1)^n = 1 + n + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \dots + n + 1. \quad (24.11)$$

При этом соотношения (24.10) принимают вид:

$$\left. \begin{aligned} \dot{U}_{4-} &= \dot{U}_{1+} s_1 \left[ 1 + n + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} + \dots + n + 1 \right] e^{-i\beta z} = \\ &= 2^n \dot{U}_{1+} s_1 e^{-i\beta z}, \\ \dot{U}_{3-} &= \dot{U}_{1+} s_1 \left[ 1 + n e^{-i2\beta l} + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} e^{-i4\beta l} + \right. \\ &+ \dots + e^{-i2n\beta l} \left. \right] e^{i\beta z} = \dot{U}_{1+} s_1 (1 + e^{-i2\beta l})^n e^{i\beta z} = \\ &= 2^n \dot{U}_{1+} s_1 \cos^n \beta l \cdot e^{-in\beta l} e^{i\beta z} \end{aligned} \right\} \quad (24.12)$$

и направленность  $D = 20 \lg \frac{1}{|\cos \beta l|^n} = 20n \lg \frac{1}{|\cos \beta l|}$ . Таким образом, вновь на частоте  $f_0$ , для которой  $l = \Lambda_0/4$  и  $\cos \beta_0 l = 0$ , плечи 1 и 3, 2 и 4 оказываются попарно взаимно развязанными. Чем больше  $n$ , тем в более широкой полосе частот многоручный ответвитель сохраняет высокую направленность.

#### 24.16. НАПРАВЛЕННЫЕ ОТВЕТВИТЕЛИ И МОСТЫ НА СВЯЗАННЫХ ЛИНИЯХ ПЕРЕДАЧИ С Т-ВОЛНОЙ

В технике СВЧ широко применяют направленные ответвители на параллельных связанных полосковых линиях и коаксиальных волноводах, в которых рабочей является волна типа Т. Типичные конструкции направленных ответвителей на полосковых линиях с так называемой боковой связью показаны на рис. 24.44 ( $a$  — конфигурация полосок двух связанных линий;  $b$  и  $в$  — соответственно поперечные сечения ответвителей на симметричных и несимметричных линиях с заземленными основаниями).

Для анализа работы направленного ответвителя на связанных линиях с волной Т при его возбуждении, например, из плеча 1

применим следующий прием. Предположим, что в плечи 1 и 3 одновременно поступают равные по амплитуде волны Т, которые в одном случае синфазны, а в другом — противофазны. Суперпо-

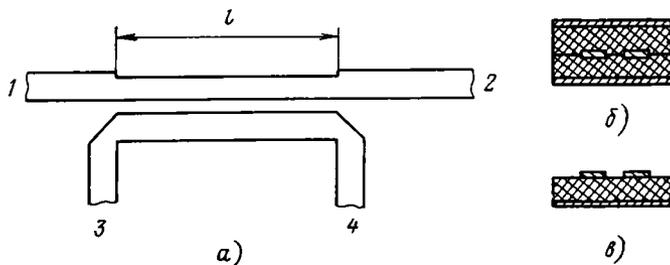


РИС. 24.44

зиция этих двух режимов эквивалентна тому, что в плечо 1 поступает волна Т двойной амплитуды, а в плечо 3 падающая волна отсутствует.

Для примера на рис. 24.45 показаны структуры поля бегущих волн Т в поперечном сечении симметричных связанных полосковых линий при синфазном (а) и противофазном (б) возбуждении

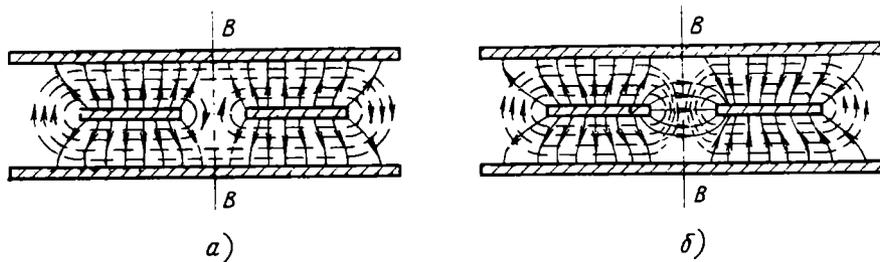


РИС. 24.45

плеч 1 и 3. В случае противофазного возбуждения на плоскости симметрии  $ВВ$  связанных линий выполняется условие  $E_{\tau} = 0$ , совпадающее по своему виду с граничным условием на идеально проводящей поверхности. Следовательно, если с этой плоскостью совместить идеально проводящую стенку, которая разделит связанные линии на две изолированные системы, то в каждой из этих систем электромагнитный процесс при противофазном возбуждении будет протекать так же, как и в отсутствие стенки.

В случае синфазного возбуждения на плоскости симметрии  $ВВ$  выполняется условие  $H_{\tau} = 0$ , совпадающее с граничным усло-

вием на поверхности идеального магнитного проводника<sup>1)</sup>. Следовательно, если с этой плоскостью совместить стенку из идеального магнитного проводника, то в каждой из двух образовавшихся изолированных систем электромагнитный процесс при синфазном

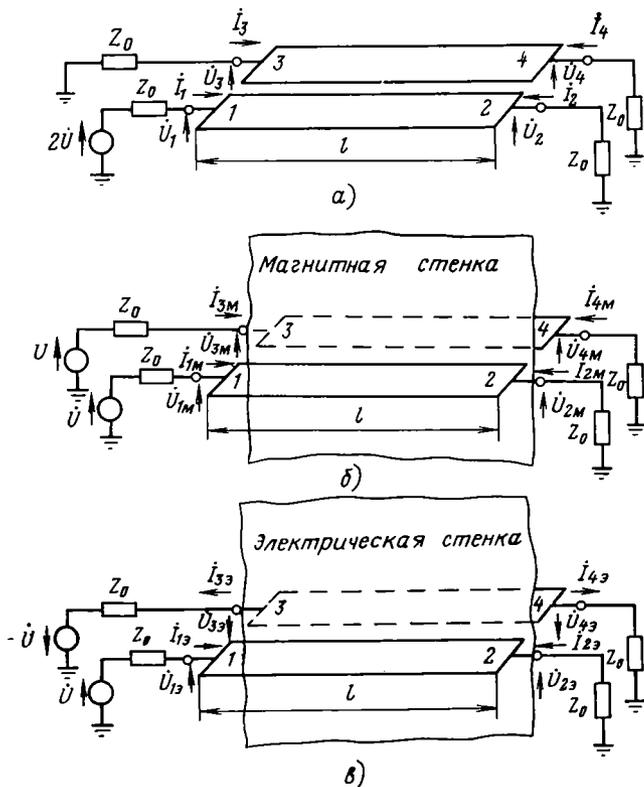


РИС. 24.46

возбуждении будет таким же, как и в отсутствие магнитной стенки.

Таким образом, анализ двух взаимодействующих связанных линий благодаря принципу суперпозиции и введению синфазного и противофазного режимов сводится к рассмотрению изолирован-

<sup>1)</sup> Понятие идеального магнитного проводника является логическим следствием введения в теорию понятия фиктивных магнитных токов. Граничные условия на поверхности идеального магнитного проводника имеют вид  $[\mathbf{Hn}^0] = 0$ ,  $[\mathbf{E}n^0] = -\eta_m$ , где  $\eta_m$  — плотность поверхностного магнитного тока, и связаны с граничными условиями на поверхности идеального электрического проводника (3.71) перестановкой вида (10.5). Как и в случае идеального электрического проводника, переменное поле внутри идеального магнитного проводника равно нулю.

ной полосковой линии в присутствии электрической и магнитной стенок.

На рис. 24.46а схематически изображен направленный ответвитель длиной  $l$  на связанных полосковых линиях, каждое плечо которого нагружено на активное сопротивление  $Z_0$  (являющееся, по существу, волновым сопротивлением подключенных к ответвителю линий передачи) и который возбуждается источником напряжения  $2\dot{U}$ , включенным последовательно в плечо 1. Рисунки 24.46б и в иллюстрируют синфазный и противофазный режимы возбуждения плеч 1 и 3, суперпозиция которых приводит к исходному случаю рис. 24.46а. Волновые сопротивления изолированной полосковой линии в присутствии магнитной стенки  $Z_{в.м}$  (рис. 24.46б) и электрической стенки  $Z_{в.э}$  (рис. 24.46в) различны и зависят от геометрических параметров поперечного сечения линии и свойств заполняющего ее диэлектрика; расчет  $Z_{в.м}$  и  $Z_{в.э}$  приведен, например, в [24].

С помощью принципа суперпозиции получаем для входного сопротивления направленного ответвителя (см. рис. 24.46а)

$$Z_{вх} = \frac{\dot{U}_1}{i_1} = \frac{\dot{U}_{1м} + \dot{U}_{1э}}{i_{1м} + i_{1э}}, \quad (24.13)$$

где

$$i_{1м} = \frac{\dot{U}}{Z_0 + Z_{1м}}; \quad \dot{U}_{1м} = Z_{1м} i_{1м}$$

и согласно (21.22)

$$Z_{1м} = Z_{в.м} \frac{Z_0 + i Z_{в.м} \operatorname{tg} \beta l}{Z_{в.м} + i Z_0 \operatorname{tg} \beta l}$$

(см. рис. 24.46б),  $i_{1э} = \frac{\dot{U}}{Z_0 + Z_{1э}}, \quad \dot{U}_{1э} = Z_{1э} i_{1э},$

$$Z_{1э} = Z_{в.э} \frac{Z_0 + i Z_{в.э} \operatorname{tg} \beta l}{Z_{в.э} + i Z_0 \operatorname{tg} \beta l} \quad (\text{см. рис. 24.46в}).$$

Подставив эти соотношения в (24.13), находим, что в случае

$$Z_0 = \sqrt{Z_{в.м} Z_{в.э}} \quad (24.14)$$

для всех значений  $\beta l$ , т. е. для всех частот (на которых существует одноволновый режим), выполняется условие согласования направленного ответвителя  $Z_{вх} = Z_0$  и в плече 1 отсутствует отраженная волна. Практически выполнение условия (24.14) осуществляется изменением ширины полосок в области связи.

Будем далее считать, что равенство (24.14) выполняется и ответвитель согласован. При  $Z_{вх} = Z_0$  напряжение, подводимое к плечу 1 (на вход ответвителя),  $\dot{U}_1 = \dot{U}_{1+} = \dot{U}$  (см. рис. 24.46а). Напряжения  $\dot{U}_{1м} = \dot{U}_{3м}$  и  $\dot{U}_{2м} = \dot{U}_{4м}$  легко определить по формулам § 21.2 из анализа длинной линии, которая имеет электрическую длину  $\theta = \beta l$  и волновое сопротивление  $Z_{в.м}$ , нагружена на каж-

дом конце на сопротивление (24.14) и возбуждается последовательно включенным источником напряжения  $\dot{U}$  (см. рис. 24.46б). Напряжения  $\dot{U}_{13} = -\dot{U}_{33}$  и  $\dot{U}_{23} = -\dot{U}_{43}$  находим аналогичным путем из анализа такой же линии, но с волновым сопротивлением  $Z_{в.э}$  (см. рис. 24.46в). Затем с помощью принципа суперпозиции получаем:

$$\dot{U}_{2-} = \dot{U}_{2М} + \dot{U}_{23} = \frac{\sqrt{1-K^2} \dot{U}}{\sqrt{1-K^2} \cos \theta + i \sin \theta}; \quad (24.15)$$

$$\dot{U}_{3-} = \dot{U}_{3М} + \dot{U}_{33} = \dot{U}_{1М} - \dot{U}_{13} = \frac{i K \sin \theta \dot{U}}{\sqrt{1-K^2} \cos \theta + i \sin \theta}; \quad (24.16)$$

$$\dot{U}_{4-} = \dot{U}_{4М} + \dot{U}_{43} = \dot{U}_{2М} - \dot{U}_{23} = 0, \quad (24.17)$$

где

$$K = \frac{Z_{в.М} - Z_{в.э}}{Z_{в.М} + Z_{в.э}}. \quad (24.18)$$

Таким образом, ответитель на связанных линиях с волной  $T$  противонаправленный. Согласованный ответитель в соответствии с (24.17) обладает бесконечной направленностью, которая, как и согласование, не зависит от частоты. Отсутствие в плече 4 выходящей волны обусловлено тем, что при  $Z_0 = \sqrt{Z_{в.М} Z_{в.э}}$  напряжения  $\dot{U}_{4М} = -\dot{U}_{43}$  и при суперпозиции две волны компенсируют друг друга. Согласно (24.16) волна, выходящая из плеча направленной связи, достигает максимума при  $\theta = \pi/2$ , т. е. на частоте, для которой  $l = \lambda/4$ , и обращается в нуль при  $\theta = \pi$  ( $l = \lambda/2$ ).

Подставив в (24.16)  $\theta = \pi/2$ , получаем равенство  $\dot{U}_{3\text{макс}} / \dot{U}_{1+} = K$ , в соответствии с которым параметр  $K$  (24.18) называют максимальным коэффициентом связи ответителя по напряжению.

Наименьшее изменение в полосе частот вытекающего из (24.16) выражения  $\frac{|\dot{U}_{1+}|^2}{|\dot{U}_{3-}|^2} = \frac{1-K^2 \cos^2 \theta}{K^2 \sin^2 \theta}$  и, следовательно, переходного за-

тухания  $C = 10 \lg \frac{|\dot{U}_{1+}|^2}{|\dot{U}_{3-}|^2}$  имеет место вблизи  $\theta = \pi/2$ . Поэтому средней частоте  $f_0$  рабочей полосы обычно соответствуют длина волны  $\lambda_0 = 4l$  и минимум переходного затухания  $C_{\text{мин}} = 20 \lg(1/K)$ . При расчете направленного ответителя задаются значением  $C_{\text{мин}}$ , по которому определяют  $K = 10^{-C_{\text{мин}}/20}$ . Из (24.14) и (24.18) следуют соотношения:

$$Z_{в.М} = Z_0 \sqrt{\frac{1+K}{1-K}}, \quad Z_{в.э} = Z_0 \sqrt{\frac{1-K}{1+K}}, \quad (24.19)$$

которые позволяют по известным значениям  $Z_0$  и  $K$  найти  $Z_{в.М}$  и  $Z_{в.э}$ . Размеры поперечного сечения связанных линий, обеспечивающие требуемые значения  $Z_{в.М}$  и  $Z_{в.э}$ , определяют по формулам или графикам, приведенным в специальной литературе (например,

[24]), после выбора типа линий и вида связи между ними. В частности, для ответвителей со слабой связью (большое переходное затухание,  $C_{\text{мин}}=20\div 30$  дБ) удобно применять полосковые ли-

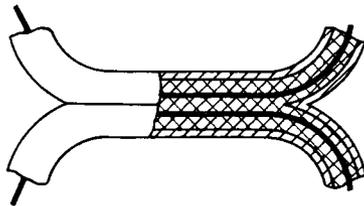


РИС. 24.47

нии с боковой связью (см. рис. 24.44). Направленный ответвитель со слабой связью на коаксиальных волноводах показан на рис. 24.47.

Для направленных ответвителей с сильной связью, например для получения моста ( $C_{\text{мин}}=3$  дБ), целесообразно использовать так называемую лицевую связь между линиями передачи с вол-

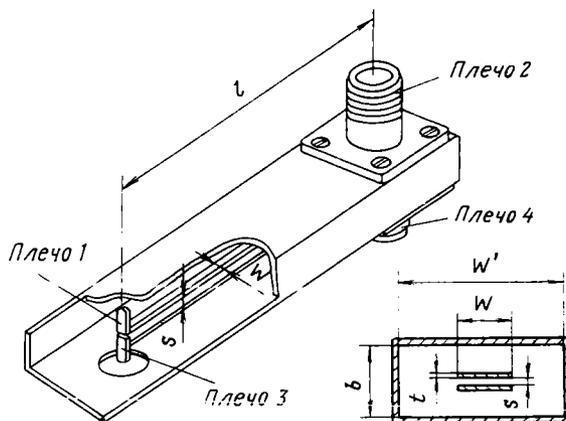


РИС. 24.48

ной Т (рис. 24.48). К мосту, изображенному на рис. 24.48, присоединяют коаксиальные волноводы. Существуют аналогичные мосты, к которым присоединяют полосковые линии. Мост на связанных линиях с волной Т конструктивно более прост, чем кольцевой и квадратный мосты, и имеет более широкую полосу рабочих частот.

## 24.17. ПРИМЕНЕНИЕ МОСТОВ И НАПРАВЛЕННЫХ ОТВЕТВИТЕЛЕЙ

Мосты и направленные ответвители весьма широко применяются в трактах СВЧ для выполнения разнообразных функций. Рассмотрим некоторые типичные случаи использования этих устройств.

Использование мостов совместно с частотными фильтрами СВЧ позволяет создать так называемые разделительные фильтры, которые разделяют в трактах сигналы различных частот (ча-

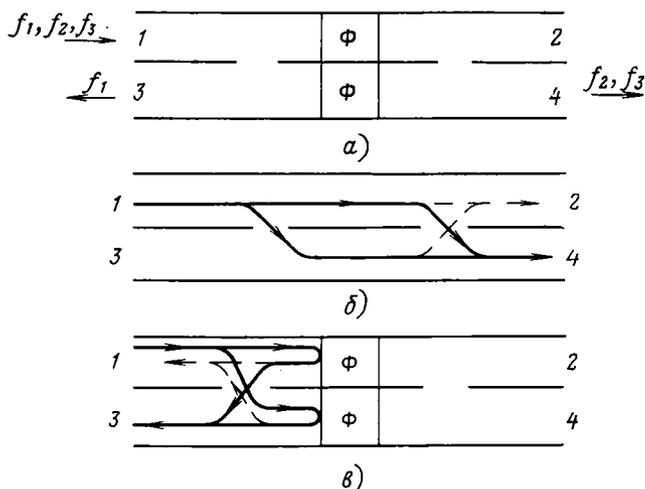


РИС. 24.49

стотные каналы и стволы). На рис. 24.49а схематически изображена ячейка разделительного фильтра, состоящая из двух щелевых мостов и двух режекторных фильтров между ними, которые отражают волны на частоте  $f_1$  и пропускают на других частотах. Волны на частоте  $f \neq f_1$  проходят из плеча 1 в плечо 4 двумя путями (рис. 24.49б), оказываются в плече 4 синфазными и складываются. Волна на частоте  $f \neq f_1$ , проходящая из плеча 1 в плечо 2 через два щелевых моста (см. рис. 24.49б), отстает по фазе на  $\pi$  по отношению к волне, непосредственно прошедшей из плеча 1 в плечо 2. В плече 2 две противофазные волны с равными амплитудами компенсируют друг друга. Таким образом, на частотах  $f_2, f_3, \dots$  волны из плеча 1 проходят только в плечо 4 (плечо 3 связано с плечом 1).

Волна, поступающая в плечо 1 на частоте  $f_1$ , делится щелевым мостом; каждая из двух образовавшихся волн отражается фильтром и вновь делится щелевым мостом (рис. 24.49в). При этом две отраженные волны в плече 1 имеют противоположные фазы и компенсируют друг друга, а в плече 3 имеют одинаковые фазы

и складываются. В результате волна на частоте  $f_1$  из плеча 1 полностью проходит в плечо 3.

Подключив к плечу 4 следующую ячейку, можно выделить волну на частоте  $f_2$  и т. д. Таким способом осуществляется последовательное разделение сигналов всех частот.

Разделительный фильтр является взаимным устройством и может служить также для объединения в одном тракте сигналов различных частот (все стрелки на рис. 24.49 можно повернуть в противоположную сторону). Таким образом, при помощи разделительных фильтров можно осуществить частотное уплотнение тракта СВЧ, при котором один тракт используется для одновременной передачи нескольких сигналов различных частот.

Использование мостов совместно с разрядниками<sup>1)</sup> позволяет создать антенные переключатели, которые применяются в импульсных радиолокационных станциях для попеременного подключения передатчика и приемника, работающих на одной и той

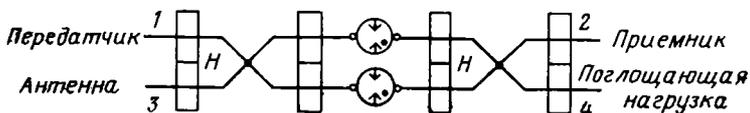


РИС. 24.50

же частоте, к общей антенне. Попеременное подключение производится переключателем автоматически, и его частота может достигать нескольких тысяч раз в секунду.

Одна из схем антенного волноводного переключателя состоит из двух щелевых мостов и двух разрядников между ними. Ее условное графическое обозначение приведено на рис. 24.50. При работе передатчика разрядники закорачивают выходные плечи левого моста и мощность из плеча 1 (из передатчика) проходит в плечо 3 к антенне (ср. рис. 24.49а). Мощность, просочившаяся в режиме передачи через разрядники, проходит из плеча 1 в плечо 4 (ср. рис. 24.49б) и рассеивается в поглощающей нагрузке, но не попадает на вход приемника. В режиме приема разрядники не шунтируют волноводы, мощность из плеча 3 (из антенны) проходит в плечо 2 к приемнику (ср. рис. 24.49б) и не попадает на вход передатчика и в поглощающую нагрузку.

Мосты нашли применение в различных схемах измерительной техники и в устройствах с намагниченным ферритом, волны в которых не удовлетворяют теореме взаимности (см. гл. 25).

<sup>1)</sup> Разрядник — газоразрядный прибор, в котором при передаче по волноводу высокого уровня мощности возникает и поддерживается высокочастотный разряд, вызывающий режим короткого замыкания волновода и отражение падающей на разрядник волны. При передаче по волноводу низкого уровня мощности разряд не возникает и волна без отражения проходит через разрядник.

Поскольку направленные ответвители со слабой связью отвечают из основной линии передачи незначительную часть падающей или отраженной бегущей волны, то их широко используют

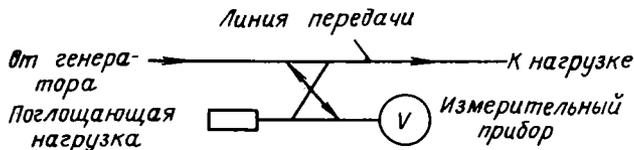


РИС. 24.51

для контроля и измерения параметров режима в основной линии. Например, для измерения или контроля мощности падающей волны, бегущей в линии слева направо (рис. 24.51), к ней присоединяют направленный ответвитель, у которого в плечо направленной связи включен измеритель мощности, а в развязанное плечо — поглощающая нагрузка. Для измерения мощности отраженной волны нужно поменять местами измеритель мощности и поглощающую нагрузку.

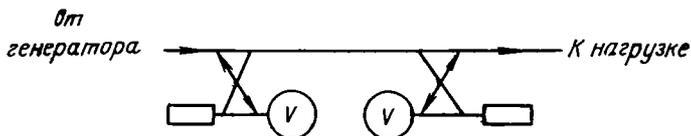


РИС. 24.52

Двумя направленными ответвителями, присоединенными к линии передачи навстречу друг другу (рис. 24.52), измеряют модуль коэффициента отражения (отношение амплитуд отраженной и падающей волн).

Направленные ответвители на связанных полосковых линиях (см. § 24.16) применяются для создания разделительных направленных фильтров, имеющих значительно меньшие габариты и массу, чем разделительные фильтры на мостах. Ячейка разделительного направленного фильтра состоит из двух одинаковых четвертьволновых направленных ответвителей с довольно слабой связью, вторичные полосковые линии которых соединены в кольцо с периметром, равным целому числу длин волн  $\Lambda_0$  в полосковых линиях (рис. 24.53). Такое кольцо является резонатором бегущей волны — ответвленная из входного плеча (например, 1) в кольцо волна резонансной частоты  $f_0$  накладывается в фазе на бегущую по кольцу волну, вследствие чего амплитуда этой бегущей волны возрастает и может существенно превысить амплитуду волны, поступающей из входного плеча. Если оба направленных ответвителя согласованы (см. § 24.16) и обладают бесконечной направленностью, в кольце нет отражений (распространяется чис-

то бегущая волна) и специальным образом подобраны коэффициенты связи ответвителей по напряжению (см. [24]), то на резонансной частоте  $f_0$  волна из входного плеча 1 не попадает в плечо прямой связи 2 и, следовательно, полностью проходит в плечо 3 узла. На частоте  $f_0$  в плече 2 происходит взаимная компенсация двух противофазных волн с равными амплитудами (волны, прошедшей из входного плеча 1, и волны, ответвленной из кольца и равной незначительной части бегущей по кольцу волны). Вблизи  $f_0$  мощность волны, поступающей из плеча 1, делится меж-

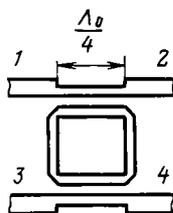


РИС. 24.53

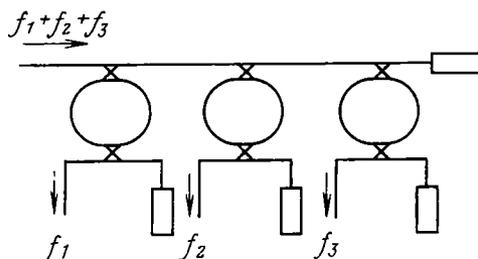


РИС. 24.54

ду плечами 3 и 2. Вдали от резонансной частоты кольца и частоты минимального переходного затухания направленного ответвителя волна из плеча 1 полностью проходит в плечо 2. Таким образом, устройство ведет себя относительно цепи направленной связи (плечи 1—3) как полосовой фильтр, а относительно цепи прямой связи (плечи 1—2) — как дополняющий режекторный фильтр. Так как в очень широкой полосе частот отраженная от входного плеча волна отсутствует, ячейки вида рис. 24.53 легко объединять при создании систем частотного разделения (или объединения) каналов (рис. 24.54).

#### 24.18. УСТРОЙСТВА СВЧ С ПРИМЕНЕНИЕМ *pin*-ДИОДОВ

В последнее время в технике СВЧ широкое распространение получили регулирующие устройства (например, переключатели, фазовращатели) на полупроводниковых *pin*-диодах, управляемые постоянным напряжением. Основными достоинствами этих устройств являются большое быстродействие (до  $10^{-6}$ — $10^{-7}$  с), малая управляющая мощность (десятки милливатт), большой срок службы (до 200 000 ч) и способность работать при весьма значительных высокочастотных мощностях (импульсная мощность может достигать десятков киловатт, средняя мощность — сотен ватт). Использование *pin*-диодов с полосковыми линиями позволяет создавать сверхминиатюрные электрически управляемые регулирующие устройства.

Эквивалентная упрощенная схема на СВЧ полупроводникового диода с *p-i*- и *i-n*-переходами (*pin*-диода) представляет собой

параллельное соединение активного сопротивления  $r_d$  и весьма малой емкости  $C_d$ , причем изменение напряжения смещения на диоде изменяет в  $10^2$ — $10^4$  раз значение  $r_d$  и почти не влияет на  $C_d$ . Емкость  $C_d$  часто компенсируют параллельным подключением к *pin*-диоду индуктивности. При прямом напряжении смещения (плюс источника соединен с областью *p*), сопровождаемом небольшим управляющим током через диод, *pin*-диод обладает на СВЧ очень малым комплексным сопротивлением и в первом приближении представляет собой короткозамкнутую цепь. При нуле-

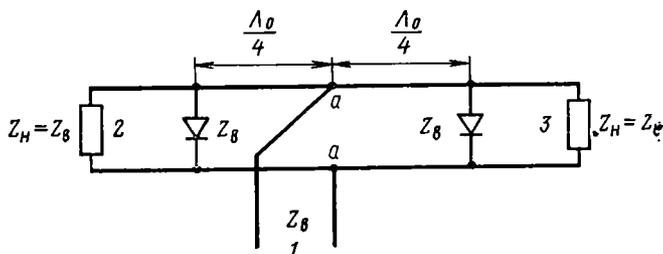


РИС. 24.55

вом или обратном напряжении смещения комплексное сопротивление *pin*-диода становится очень большим, что в первом приближении можно считать разрывом цепи.

Многообразные виды *pin*-диодов приспособлены к применению в различных типах линий передачи, параллельному и последовательному способам включения, работе с различными уровнями высокочастотной мощности, различному быстродействию, креплению при помощи введения в линию передачи специальных конструктивных элементов или без них.

Эквивалентная схема простейшего узкополосного двухканального переключателя представлена на рис. 24.55. Можно так подобрать дополнительные согласующие элементы (на рисунке не показаны), что для электромагнитных волн СВЧ в узком диапазоне частот параллельно включенный *pin*-диод будет представлять собой либо короткое замыкание линии передачи (при положительном напряжении смещения), либо очень большое сопротивление, практически не шунтирующее линию передачи (при отрицательном напряжении смещения). Пусть, например, управляющие напряжения таковы, что левый диод открыт и отражает электромагнитную волну, а правый диод закрыт и пропускает ее. При этом на частоте  $f_0$  (которой соответствует длина волны в линии передачи  $\Lambda_0$ ) плечо 2 имеет согласно (21.24) в точка *aa* бесконечно большое сопротивление и сигнал из плеча 1 полностью проходит в плечо 3. При противоположной полярности управляющих напряжений сигнал из плеча 1 поступает в плечо 2. Для расширения полосы пропускания и увеличения ослабления по закрытому каналу следует применить в каждом плече каскадное включе-

ние нескольких параллельных *pin*-диодов через отрезки линии длиной  $\Lambda_0/4$ .

На рис. 24.56 изображены два каскадно соединенных моста и между ними параллельно включенные в линии передачи управляемые *pin*-диоды. Если на диоды подать отрицательное напря-

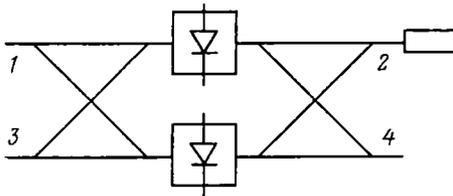


РИС. 24.56

жение смещения, то вся мощность из входного плеча 1 пройдет в плечо 4 (ср., например, рис. 24.49б). Если на диоды подать положительное смещение, при котором они замыкают накоротко линии передачи, то вся мощность из плеча 1 пройдет в плечо 3 (ср. рис. 24.49в). Таким образом, схема на рис. 24.56 может быть использована в качестве управляемого двухканального переключателя.

Переключатели на большое число каналов получаются путем каскадного включения двухканальных переключателей (рис. 24.57а) либо на основе разветвительных цепей (рис. 24.57б).

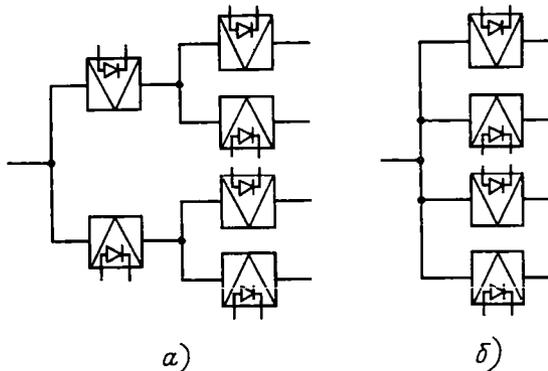


РИС. 24.57

Очень важным классом регулирующих устройств являются фазовращатели на *pin*-диодах с электрически управляемым дискретным изменением фазы, которые широко используются в антенной технике (фазированные антенные решетки). Находят применение отражательные и проходные дискретные фазовращатели. Простейший узкополосный отражательный одноступенчатый фа-

звращатель представляет собой короткозамкнутый отрезок линии передачи СВЧ с параллельно включенным управляемым *pin*-диодом (рис. 24.58). Поскольку волна проходит через отражательный фазовращатель дважды — в прямом и обратном направлениях, — то в случае отражения от открытого *pin*-диода ее фазовый сдвиг на выходе фазовращателя будет на величину  $2\beta l$  меньше, чем в случае отражения от короткозамкнутого конца линии при закрытом *pin*-диоде.

Простейший проходной одноступенчатый фазовращатель представляет собой устройство с попеременным подключением к схеме с помощью управляемых *pin*-диодов двух согласованных отрезков линии передачи различной длины (рис. 24.59, *pin*-диоды включены последовательно). При этом на выходе фазовращателя разность фазовых сдвигов, соответствующих двум различным управляющим напряжениям, будет равна  $\beta(l_1 - l_2)$ .

Проходной одноступенчатый фазовращатель можно также получить из двух одинаковых и синхронно работающих одноступенчатых отражательных фазовращателей и моста (рис. 24.60). При этом волна, поступающая во входное плечо 1, делится мостом на две волны одинаковой амплитуды, которые отражаются от фазовращателей в плечах 2 и 4, приобретают один из двух возможных фазовых сдвигов и проходят в выходное плечо 3 (ср. рис. 24.49в).

Наибольший практический интерес представляют многоступенчатые фазовращатели, обеспечивающие скачок фазы  $\Delta\varphi$  и число фазовых состояний  $m$ . Обычно принимают  $\Delta\varphi = 2\pi/m$ , чтобы фазовращатель мог изменять фазу от 0 до  $2\pi$  через  $\Delta\varphi$ .

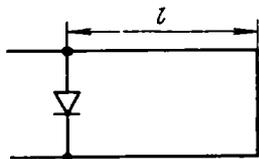


РИС. 24.58

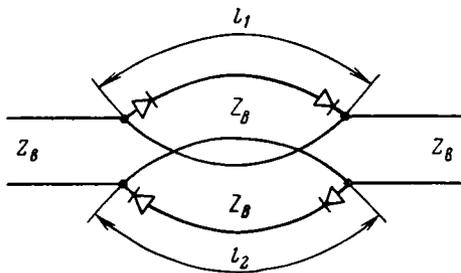


РИС. 24.59

Проходной многоступенчатый фазовращатель можно создать, например, каскадным соединением  $p$  одноступенчатых проходных фазовращателей, каждый из которых характеризуется значениями фазового сдвига 0 или  $\pi/2^{k-1}$ , где  $k$  — номер каскада (рис. 24.61). Такой фазовращатель позволяет изменять фазу через  $\Delta\varphi = \pi/2^{p-1}$  от 0 до  $2\pi$ , причем для выбора любого из  $m = 2^p$  возможных фазовых состояний фазовращателя требуется использовать всего  $p$  управляющих сигналов (по числу каскадов), каждый

из которых принимает условные значения 0 (фазовый сдвиг каскада равен нулю) или 1 (фазовый сдвиг равен  $\pi/2^{k-1}$ ). Потери мощности в фазовращателе существенно зависят от параметров *pin*-диодов и увеличиваются с ростом числа каскадов *p*. Для длины волны  $\lambda = 10 \div 15$  см ослабление трехкаскадного фазовращате-

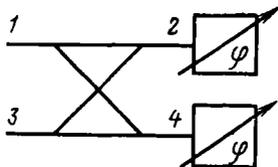


РИС. 24.60

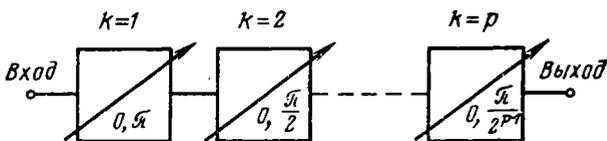


РИС. 24.61

ля достигает 1,0—1,5 дБ. Поэтому на практике обычно ограничиваются значением  $p = 3$  ( $\Delta\varphi = \pi/4$ ,  $m = 8$ ).

Отражательный многоступенчатый фазовращатель можно получить путем короткого замыкания выхода проходного фазовращателя. Поскольку волна проходит отражательный фазовращатель дважды, то фазовый сдвиг в каждом его каскаде получится в 2 раза больше, чем в исходном проходном фазовращателе. Это необходимо учитывать при проектировании отражательного многоступенчатого фазовращателя.

## Глава 25

### УСТРОЙСТВА СВЧ С НАМАГНИЧЕННЫМ ФЕРРИТОМ



#### 25.1. ВИДЫ НЕВЗАИМНЫХ УСТРОЙСТВ СВЧ С НАМАГНИЧЕННЫМ ФЕРРИТОМ

До сих пор мы рассматривали взаимные устройства, волны в которых подчиняются теореме взаимности и которые, следовательно, имеют одинаковые коэффициенты передачи в двух противоположных направлениях ( $S_{ik} = S_{ki}$ ). Электромагнитные волны в устройствах с намагниченным ферритом не подчиняются теореме взаимности, вследствие чего эти устройства называют невзаимными. При распространении в линии передачи с намагниченным ферритом волн в противоположных направлениях можно создать условия, при которых эти волны будут иметь различные фазовые скорости, повороты плоскости поляризации или затухания. Благодаря этому удается создать ряд очень ценных для техники СВЧ невзаимных устройств, условные графические обозначения которых приведены на рис. 25.1.

В невзаимном фазовращателе (рис. 25.1а) волна при распространении в направлении большей стрелки приобретает больший сдвиг по фазе, чем в обратном направлении; на обозначении фазовращателя указывается разность фазовых сдвигов  $\varphi$  в прямом и обратном направлениях. В невзаимном поляризаторе происхо-

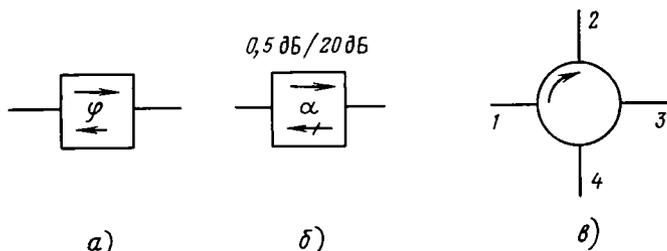


РИС. 25.1

дит невзаимный поворот плоскости поляризации волн на определенный угол. В вентиле или невзаимном аттенуаторе (рис. 25.1б) волна в прямом направлении (в направлении неперечеркнутой стрелки) имеет малое затухание (например, 0,5 дБ), а в обратном направлении — большое (например, 20 дБ). На рис. 25.1в приведено условное обозначение четырехплечного циркулятора, в котором волна из плеча 1 полностью проходит в плечо 2, из плеча 2 — в плечо 3 и т. д. ( $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 1$ ). Находят применение и трехплечные циркуляторы.

В реальных невзаимных устройствах СВЧ ферритовый элемент представляет собой стержень или пластину, которые занимают незначительную часть внутреннего объема устройства. Теория распространения направляемых неоднородных плоских волн в линиях передачи, частично заполненных намагниченным ферритом, значительно сложнее, чем исследованные в гл. 16 идеализированные случаи распространения однородных плоских волн в безграничной намагниченной ферритовой среде. Однако в качественном отношении рассмотренные выше эффекты наблюдаются и в линиях передачи с ферритом — сохраняется эффективное управление с помощью постоянного магнитного поля параметрами распространяющихся волн. Проектирование ферритовых устройств должно производиться с учетом конечных размеров ферритового образца. При этом приведенные выше зависимости параметров безграничного феррита от  $H_0$  могут быть использованы только для качественного рассмотрения процессов в этих устройствах. В частности, существование размагничивающего эффекта в малом ферритовом образце заставляет для получения внутри феррита необходимого поля  $H_0$  увеличивать внешнее постоянное магнитное поле  $H'_0$ .

Невзаимные ферритовые устройства в круглом и прямоугольном волноводах удобно осуществлять на волнах сантиметрового

диапазона. В дециметровом диапазоне габариты невзаимных устройств в этих волноводах становятся настолько большими, что их целесообразно применять только для пропускания большого уровня мощности. В остальных случаях в дециметровом диапазоне и на более длинных волнах используют ферритовые устройства в коаксиальном волноводе и полосковой линии, позволяющих получить очень компактные конструкции. Полосковые невзаимные устройства применяют также и в сантиметровом диапазоне при конструировании миниатюрной аппаратуры.

Поскольку теория распространения волн в устройствах, частично заполненных намагниченным ферритом, сложна, ограничимся лишь качественным описанием принципов их работы.

### 25.2. НЕВЗАИМНЫЕ ФЕРРИТОВЫЕ УСТРОЙСТВА В КРУГЛОМ ВОЛНОВОДЕ

В круглом волноводе наибольшее применение получили циркуляторы и переключатели, в которых используется эффект Фарадея.

Важной частью этих устройств является невзаимный поляризатор. Он представляет собой отрезок круглого волновода, на оси которого с помощью диэлектрической (пенопластовой) втулки укреплен тонкий ферритовый стержень, заостренный с обоих концов для уменьшения отражений (см. среднюю часть

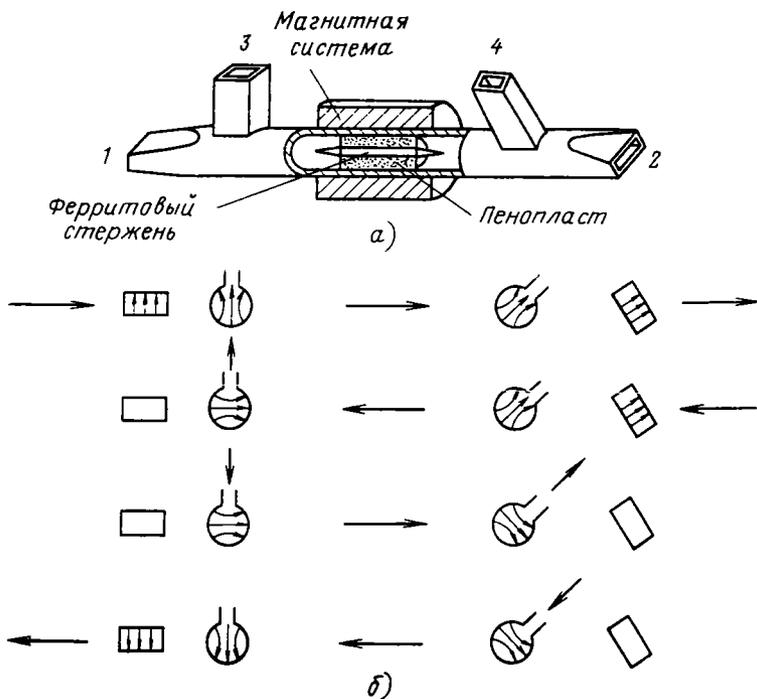


РИС. 25.2

устройства, изображенного на рис. 25.2а). Вокруг волновода расположен соленоид с током или цилиндрический постоянный магнит, создающий продольное намагничивание ферритового стержня. При распространении в волноводе волны  $H_{11}$ , имеющей в области расположения тонкого ферритового стержня поперечный и линейно поляризованный вектор  $\mathbf{H}$ , и при наличии продольного постоянного поля  $\mathbf{H}_0$ , величина которого значительно меньше резонансного значения (ср. рис. 16.3, область А), в устройстве существуют условия для волноводного эффекта Фарадея, который состоит в невязимном повороте структуры поля волны  $H_{11}$ . Пройдя вдоль стержня, линейно поляризованная волна  $H_{11}$  повернется вокруг оси поляризатора по часовой стрелке, если смотреть в направлении вектора  $\mathbf{H}_0$ , независимо от направления распространения волны, причем угол поворота определяется величиной  $H_0$  и длиной стержня  $l$  [ср. рис. 16.4 и ф-лу (16.35)].

На рис. 25.2а изображен четырехплечный циркулятор, в котором используется эффект Фарадея. Прямоугольные одноволновые волноводы 2 и 4 повернуты вокруг оси поляризатора относительно одноволновых волноводов 1 и 3 на угол  $45^\circ$  по часовой стрелке, если смотреть в направлении от плеча 1 к плечу 2. Поляризатор создает поворот структуры поля  $H_{11}$  также на угол  $45^\circ$  по часовой стрелке, если смотреть в том же направлении (внутри феррита вектор  $\mathbf{H}_0$  направлен от плеча 1 к плечу 2).

Поступающая в прямоугольный волновод 1 волна  $H_{10}$  преобразуется в волну  $H_{11}$  круглого волновода, которая, проходя через поляризатор, поворачивается и затем преобразуется в волну  $H_{10}$ , выходящую из плеча 2 (рис. 25.2б). При этом в волноводах 3 и 4 могли бы возбудиться волны класса Е; однако, поскольку волноводы сделаны одноволновыми, этого не происходит. При поступлении волны  $H_{10}$  в плечо 2 и распространении волны  $H_{11}$  в поляризаторе справа налево вновь происходит поворот структуры поля на  $45^\circ$  по часовой стрелке, в результате которого создаются условия для полного прохождения волны  $H_{10}$  в плечо 3 (см. рис. 25.2б). Аналогичным образом из плеча 3 волна проходит в плечо 4, а из плеча 4 — в плечо 1 (см. рис. 25.2б).

При противоположном направлении намагничивающего поля  $\mathbf{H}_0$  поляризатор поворачивает структуру поля  $H_{11}$  на  $45^\circ$  против часовой стрелки, если смотреть в направлении от плеча 1 к плечу 2 (поворот осуществляется по часовой стрелке относительно направления  $\mathbf{H}_0$ ). В результате этого рассмотренная выше последовательность коммутации плеч  $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 1$  заменяется на обратную  $1 \rightarrow 4 \rightarrow 3 \rightarrow 2 \rightarrow 1$ . Это обстоятельство используют для создания быстродействующих переключателей плеч, управляемых изменением направления тока соленоида. Таким переключателем может быть рассмотренный нами выше циркулятор (без плеча 3), у которого направление передачи  $1 \rightarrow 2$  изменяется на  $1 \rightarrow 4$  при изменении направления тока.

Достоинством невязимных ферритовых устройств, использующих эффект Фарадея, является малая величина намагничивающе-

го поля  $H_0$ . Это обстоятельство, в частности, позволяет получить весьма быстродействующие переключатели, производящие переключение каналов за время около 0,15 мкс. Основными недостатками устройств, использующих эффект Фарадея, являются сравнительная сложность конструкции, большие габариты, трудность обеспечения хорошего согласования переходов от прямоугольных волноводов 3 и 4 (см. рис. 25.2а) к круглому, необходимость применения длинных соленоидов. В большинстве случаев более простыми и компактными оказываются невзаимные ферритовые устройства в прямоугольном волноводе.

### 25.3. НЕВЗАИМНЫЕ ФЕРРИТОВЫЕ УСТРОЙСТВА В ПРЯМОУГОЛЬНОМ ВОЛНОВОДЕ

Из (19.37) видно, что в прямоугольном волноводе составляющие  $H_x$  и  $H_z$  прямой волны типа  $H_{10}$  колеблются со сдвигом по фазе на  $\pi/2$ , причем амплитуда  $H_{xm}$  изменяется в зависимости от координаты  $x$  по закону  $\sin(\pi x/a)$ , а амплитуда  $H_{zm}$  — по закону  $|\cos(\pi x/a)|$ . Поэтому в прямоугольном волноводе существуют два значения  $x=x_1$  и  $x=x_2$ , при которых  $H_{xm}=H_{zm}$  и, следовательно, конец вектора  $\mathbf{H}$ , лежащего в плоскости  $y=\text{const}$ , описывает с течением времени окружность (см. § 12.2). С помощью (19.37) легко найти, что  $x_1 = \frac{a}{\pi} \arctg \frac{\Lambda}{2a}$  и  $x_2 = a - x_1$ . Поскольку  $H_x(t, x_2) = -H_x(t, x_1)$  и  $H_z(t, x_2) = -H_z(t, x_1)$ , то в точках  $x_1$  и  $x_2$  направления вращения вектора  $\mathbf{H}$  будут противоположны. Если, например,

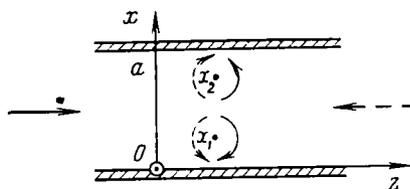


РИС. 25.3

смотреть на прямоугольный волновод в направлении  $-y^0$  (см. рис. 25.3 и рис. 25.4), то в точке  $x_1$  вращение вектора  $\mathbf{H}$  падающей волны (распространяющейся в направлении  $z^0$ ) будет происходить по часовой стрелке, а в точке  $x_2$  — против часовой стрелки (рис. 25.3).

Аналогичным образом легко убедиться, что вектор  $\mathbf{H}$  отраженной волны  $H_{10}$  (распространяющейся в направлении  $-z^0$ ) также описывает в точках  $x_1$  и  $x_2$  окружность, причем при наблюдении в направлении  $-y^0$  вращение в точке  $x_1$  теперь происходит против часовой стрелки, а в точке  $x_2$  — по часовой стрелке (см. рис. 25.3).

Поместим внутри волновода смещенную с его середины продольную пластину феррита (рис. 25.4), которая заострена с обоих концов для уменьшения отражений и намагничена до насыщения постоянным полем  $\mathbf{H}_0$ , направленным перпендикулярно широким стенкам. При этом внутри феррита векторы  $\mathbf{H}$  падающей и отраженной волн  $H_{10}$  лежат в плоскости, перпендикулярной  $\mathbf{H}_0$ , и вращаются в противоположные стороны. Следовательно, одна из

этих волн, вектор  $\mathbf{H}$  которой вращается по часовой стрелке, если смотреть в направлении  $\mathbf{H}_0$ , является волной с положительным направлением вращения (совпадающим с направлением прецес-

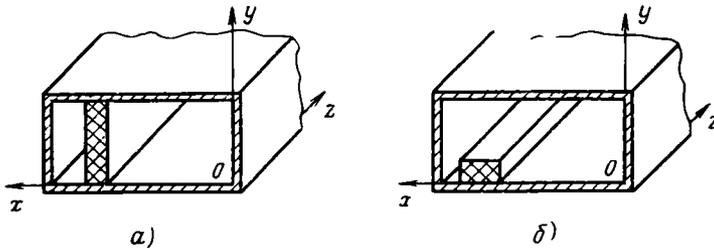


РИС. 25.4

сии  $\mathbf{J}$  в намагниченном феррите), интенсивно взаимодействует с ферритом и характеризуется скалярной эквивалентной магнитной проницаемостью  $\tilde{\mu}_{\text{эк}+}$  (ср. § 16.1), которая учитывает, что феррит заполняет лишь часть поперечного сечения волновода. Волна  $H_{10}$ , распространяющаяся вдоль волновода в противоположном направлении, имеет в феррите вектор  $\mathbf{H}$ , вращающийся против часовой стрелки, является волной с отрицательным направлением вращения (противоположным направлению прецессии  $\mathbf{J}$ ), испытывает малое затухание при всех значениях  $\mathbf{H}_0$  и характеризуется скалярной эквивалентной магнитной проницаемостью  $\tilde{\mu}_{\text{эк}-}$ . Различные значения  $\tilde{\mu}_{\text{эк}}$  для падающей и отраженной волн создают эффект невязанности — зависимость коэффициента распространения волны  $H_{10}$  от направления ее распространения.

Если, например, пластина феррита помещена в области  $x \approx x_2$  и постоянное поле  $\mathbf{H}_0$  приложено в направлении  $-y^0$  (рис. 25.5), то падающая волна, распространяющаяся в направлении  $z^0$ , характеризуется магнитной проницаемостью  $\tilde{\mu}_{\text{эк}-}$ , а отраженная волна — магнитной проницаемостью  $\tilde{\mu}_{\text{эк}+}$ . Сделав при этом величину  $H_0$  примерно равной резонансному значению (ср. рис. 16.3, область С), обеспечим для отраженной волны условие ферромагнитного резонанса, вызывающего ее сильное поглощение в феррите. В то же время потери падающей волны в феррите окажутся очень малы. Полученное невязанное устройство представляет собой вентиль, в котором использовано явление ферромагнитного резонанса.

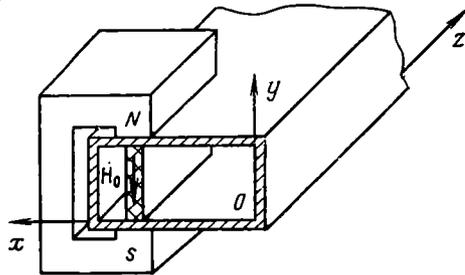


РИС. 25.5

С изменением частоты  $f$  дисперсия волны  $H_{10}$  приводит к довольно быстрому изменению значения  $x_2$  и, следовательно, к нарушению условий существования внутри феррита круговой поляризации  $H$ . Для обеспечения внутри феррита круговой поляризации

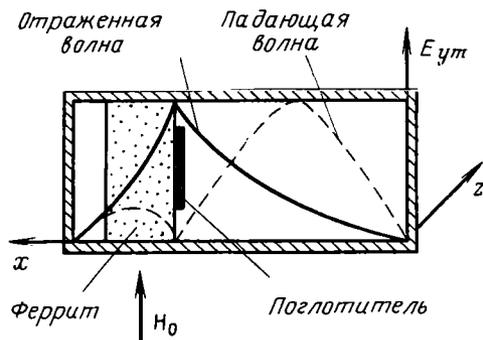


РИС. 25.6

ции в более широкой полосе частот обычно применяют специально подобранные диэлектрические пластины, расположенные рядом с ферритом и концентрирующие электромагнитное поле. Кроме того, при изменении  $f$  постоянное поле  $H_0$  перестает соответствовать резонансному значению и для расширения полосы частот вы-

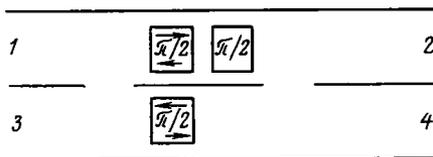


РИС. 25.7

годно использовать ферриты с пологой кривой вблизи резонанса. Относительная полоса частот, в которой резонансный вентиль обеспечивает достаточно большое затухание отраженной волны (20—25 дБ), обычно не превышает 10—12%.

Устройство на рис. 25.5 превращается в невзаимный фазовращатель, если сделать величину  $H_0$  значительно меньше резонансной (ср. рис. 16.3, область А). Поскольку в этом случае  $\tilde{\mu}_{\text{ЭК}\pm} \approx \mu'_{\text{ЭК}\pm}$  и  $\mu'_{\text{ЭК}-} > \mu'_{\text{ЭК}+}$ , то в соответствии со справедливым для волны  $H_{10}$  соотношением  $\beta_{\pm} = \sqrt{\omega^2 \epsilon_a \mu_0 \mu'_{\text{ЭК}\pm} - (\pi/a)^2}$  получим  $\beta_- > \beta_+$ . Таким образом, падающая волна при прохождении вдоль ферритовой пластины получит больший сдвиг по фазе, чем отраженная.

Если в устройстве на рис. 25.5 изменить ориентацию поля  $H_0$ , направив его по  $+y^0$ , то падающая волна будет иметь положитель-

ное направление вращения  $\mathbf{H}$ , а отраженная волна — отрицательное. Сделав при этом  $H_0$  такой величины, при которой внутри феррита  $\mu'_+ < 0$  (ср. рис. 16.3, область  $B$ ), получим вытеснение из феррита поля падающей волны; для отраженной волны феррит является теперь практически диэлектриком, в котором концентрируется ее поле (рис. 25.6). В результате на поверхности феррита напряженность электрического поля падающей волны становится

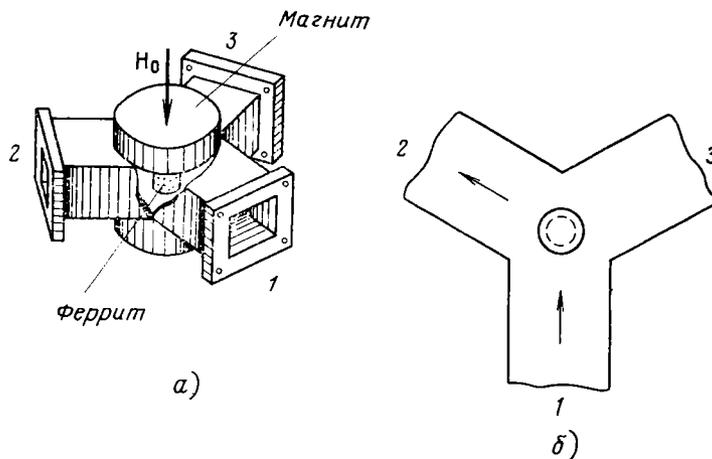


РИС. 25.8

малой, а отраженной волны — большой. Для получения вентиля, основанного на использовании эффекта смещения поля, к поверхности феррита приклеивается пленка из поглощающего материала, в которой происходит сильное поглощение отраженной волны. Преимуществами этого вентиля по сравнению с резонансным являются меньшие значения намагничивающего поля  $H_0$  (что снижает габариты и массу постоянного магнита) и более широкая полоса рабочих частот, доходящая до 20—25%. Вследствие этого вентиль со смещением поля — наиболее распространенный в настоящее время вентиль на невысокие уровни мощности.

На рис. 25.7 схематически изображен фазовый циркулятор, который состоит из двух щелевых мостов, двух невзаимных включенных навстречу друг другу фазовращателей с фазовым сдвигом  $\pi/2$  и одного взаимного фазовращателя, обеспечивающего сдвиг на  $\pi/2$  в обоих направлениях. Волна из плеча 1 проходит в плечо 2 двумя путями. Одна волна, идущая непосредственно из плеча 1 в плечо 2, получает сдвиг по фазе  $\pi/2 + \pi/2 = \pi$ . Вторая волна, проходящая в плечо 2 через щелевые мосты, получает также сдвиг по фазе, равный  $\pi$ . Следовательно, обе волны в плече 2 складываются. В плечо же 4 из плеча 1 волны приходят в противофазе и гасят друг друга. В результате вся энергия проходит

из плеча 1 в плечо 2. Аналогичным путем легко убедиться, что циркулятор работает по схеме  $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 1$ .

Основным достоинством фазовых циркуляторов является их способность работать на больших уровнях мощности (например, при  $\lambda = 4$  см  $P_{\text{ср}} = 10$  кВт). Это обусловлено делением мощности поровну между двумя каналами и расположением ферритовой пластины не в максимуме электрического поля (что повышает электрическую прочность). Главными недостатками этих циркуляторов являются большие габариты и масса.

В миллиметровом и сантиметровом диапазонах волн широкое распространение получили простые по конструкции и компактные волноводные трехплечные Y-циркуляторы. Такой циркулятор часто состоит из симметричного тройника в плоскости  $H$  и намагниченной ферритовой шайбы в его центре (рис. 25.8а). Величину  $H_0$  выбирают значительно меньше резонансной (ср. рис. 16.3, область А). Упрощенно действие этого циркулятора можно представить следующим образом. Можно считать, что при поступлении волны из плеча 1 поля в плечах 2 и 3 являются результатом суперпозиции двух волн — первичной и вторичной. Первичные волны в плечах 2 и 3 симметричного тройника имеют одинаковые амплитуды и фазы. Амплитуды и фазы вторичных волн в плечах 2 и 3 зависят от размеров и электрических характеристик намагниченных ферритовых шайб. Можно так подобрать эти параметры, чтобы первичные и вторичные волны имели одинаковые амплитуды и были бы в плече 2 синфазны, а в плече 3 противофазны. При этом волна из плеча 1 проходит в плечо 2. Вследствие симметрии устройства действие циркулятора происходит по схеме  $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 1$ . При противоположном направлении поля  $H_0$  циркулятор действует по схеме  $1 \rightarrow 3 \rightarrow 2 \rightarrow 1$ . Для расширения полосы рабочих частот Y-циркулятора оказывается целесообразным надеть на ферритовую шайбу диэлектрическое кольцо. Подобные серийные циркуляторы работают в полосе частот 10—15%, вносят потери не более 0,5 дБ, обеспечивают развязку между плечами не менее 20 дБ и имеют  $K_{\text{с.в}} = 1,08 \div 1,10$ .

#### 25.4. НЕВЗАИМНЫЕ ФЕРРИТОВЫЕ УСТРОЙСТВА В КООКСИАЛЬНОМ ВОЛНОВОДЕ И ПОЛОСКОВЫХ ЛИНИЯХ

Как уже отмечалось выше, компактны ферритовые устройства в коаксиальном волноводе и полосковых линиях.

Направляемые этими линиями передачи Т-волны не имеют областей с вращающимся вектором  $\mathbf{H}$ . Поэтому для осуществления в коаксиальном волноводе и полосковых линиях резонансных ферритовых вентилях необходимо, прежде всего, в некоторой области создать такое искажение поля Т, чтобы в ней наряду с поперечной составляющей появилась продольная составляющая  $H_z$  высокочастотного поля и результирующий вектор  $\mathbf{H}$  приобрел вращение. Этому можно достигнуть, например, введением внутрь линии передачи диэлектрического вкладыша. Подбором формы,

размеров и диэлектрической проницаемости вкладыша удается добиться, чтобы возле его поверхности вектор  $\mathbf{H}$  был поляризован по кругу (вращение векторов  $\mathbf{H}$  падающей и отраженной волн происходит в противоположных направлениях). Резонансный вентиль получается благодаря расположению намагниченной ферритовой пластины в области с вращающимся вектором  $\mathbf{H}$ , причем направление постоянного поля  $\mathbf{H}_0$  выбирается таким, чтобы оно было перпендикулярно плоскости, в которой вращается вектор  $\mathbf{H}$ ,

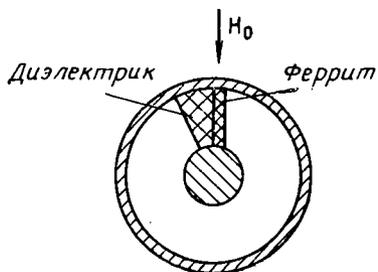


РИС. 25.9

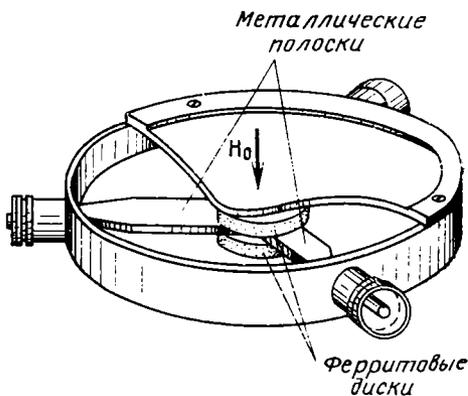


РИС. 25.10

а величина  $H_0$  соответствует области ферромагнитного резонанса. Диапазон рабочих частот коаксиальных и полосковых резонансных вентилях, в которых используются диэлектрические вкладыши, определяется шириной области ферромагнитного резонанса феррита и может соответствовать даже двукратному изменению частоты. В диапазоне рабочих частот затухание в прямом направлении составляет 1—1,5 дБ, в обратном направлении составляет 15—20 дБ.

В качестве примера на рис. 25.9 показано поперечное сечение коаксиального резонансного вентиля с диэлектрическим вкладышем.

Основными недостатками подобных вентилях являются необходимость экспериментального подбора формы и размеров феррито-диэлектрической вставки и довольно большое затухание в прямом направлении, обусловленное потерями в диэлектрическом вкладыше.

Если в устройстве на рис. 25.9 величину  $H_0$  выбрать достаточно далеко от резонансной, то получим невзаимный фазовращатель, у которого волна одного направления распространения (с отрицательным вращением  $\mathbf{H}$ ) имеет больший сдвиг по фазе, чем волна противоположного направления (с положительным вращением  $\mathbf{H}$ ). При помощи двух мостов на коаксиальных волноводах

и невзаимных фазовращателей можно спроектировать фазовый циркулятор.

Однако наибольшее распространение на дециметровых и метровых волнах (а также в малогабаритной аппаратуре на сантиметровых волнах) получил компактный и обладающий хорошими электрическими параметрами Y-циркулятор на полосковых линиях (рис. 25.10), который действует таким же образом, что и волноводный Y-циркулятор (см. § 25.3).

Диапазонные свойства полосковых Y-циркуляторов определяются частотными характеристиками намагниченного феррита. Для обеспечения хорошего согласования узла в возможно более широкой полосе частот оказывается целесообразным надеть на ферритовые диски специальные диэлектрические кольца. При этом удается создать даже такие циркуляторы, у которых верхняя частота рабочего диапазона вдвое больше нижней. В рабочем диапазоне серийные полосковые циркуляторы вносят потери 0,3—0,5 дБ, обеспечивают развязку между плечами 20—30 дБ и имеют  $K_{с.в.} = 1,25$ .

### 25.5. ПРИМЕНЕНИЕ НЕВЗАИМНЫХ ФЕРРИТОВЫХ УСТРОЙСТВ

Рассмотрим некоторые типичные случаи применения в трактах СВЧ невзаимных устройств с намагниченным ферритом.

Для устранения влияния произвольной нагрузки на генератор (для развязки) часто используют вентиль, который поглощает отраженные от нагрузки волны. Это обеспечивает стабильность работы генератора по мощности и частоте. Вместо обычного вен-

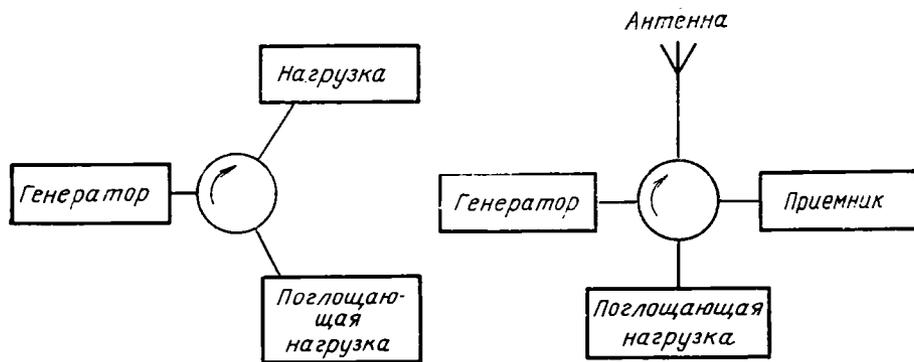


РИС. 25.11

РИС. 25.12

тиля, непосредственно поглощающего отраженную волну, часто применяют трехплечий циркулятор, который направляет эту волну в плечо с оконечной поглощающей нагрузкой (рис. 25.11). Эту схему наиболее целесообразно использовать при работе мощного генератора на плохо согласованную нагрузку, когда поглотить

большую мощность отраженной волны непосредственно в венти-  
ле становится затруднительным.

Циркуляторы можно применять для одновременной работы пе-  
редатчика и приемника на одну антенну (рис. 25.12).

Использование циркуляторов совместно с частотными филь-  
трами СВЧ позволяет создать разделительные фильтры значитель-  
но меньших габаритов и массы, чем в случае использования мос-  
тов (ср. § 24.17). Несколько высокочастотных сигналов, которые

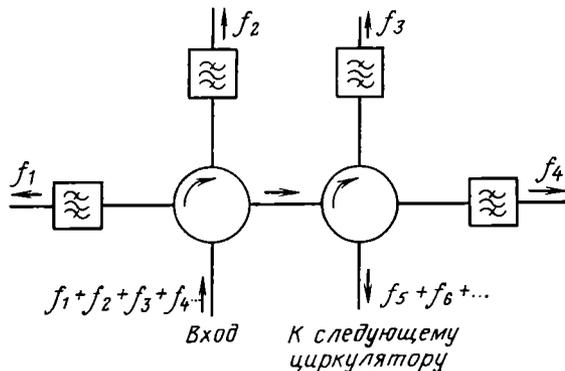


РИС. 25.13

поступают одновременно в тракт СВЧ, например, из антенны, раз-  
деляются между различными каналами с помощью циркулятора  
и включенных в его плечи полосовых фильтров, отражающих вол-  
ны вне своей полосы пропускания (рис. 25.13). Очевидно, что это  
же устройство может объединить в одном тракте сигналы от нес-  
кольких передатчиков, работающих на различных частотах.

## ПРИЛОЖЕНИЕ 1

### ВЕКТОРНЫЙ АНАЛИЗ

#### 1.1. ЭЛЕМЕНТЫ ВЕКТОРНОЙ АЛГЕБРЫ

Скалярное произведение векторов

$$\mathbf{A}\mathbf{B} = (\mathbf{A}\mathbf{B}) = (\mathbf{B}\mathbf{A}). \quad (\text{П1.1})$$

Векторное произведение векторов

$$[\mathbf{A}\mathbf{B}] = [\mathbf{A}, \mathbf{B}] = -[\mathbf{B}\mathbf{A}]. \quad (\text{П1.2})$$

Смешанное (векторно-скалярное) произведение векторов

$$\mathbf{A}[\mathbf{B}\mathbf{C}] = \mathbf{B}[\mathbf{C}\mathbf{A}] = \mathbf{C}[\mathbf{A}\mathbf{B}]. \quad (\text{П1.3})$$

Двойное векторное произведение векторов

$$[\mathbf{A}[\mathbf{B}\mathbf{C}]] = \mathbf{B}(\mathbf{A}\mathbf{C}) - \mathbf{C}(\mathbf{A}\mathbf{B}). \quad (\text{П1.4})$$

## 1.2. ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ТЕОРЕМЫ

*Теорема Остроградского — Гаусса.* Если произвольный вектор  $\mathbf{A}$  и его первые частные производные однозначны и непрерывны в объеме  $V$  и на ограничивающей этот объем замкнутой поверхности  $S$ , то

$$\oint_S \mathbf{A} dS = \int_V \operatorname{div} \mathbf{A} dV. \quad (\text{П1.5})$$

*Теорема Стокса.* Если произвольный вектор  $\mathbf{A}$  и его первые частные производные однозначны и непрерывны на поверхности  $S$  и на ограничивающем ее замкнутом контуре  $L$ , то

$$\oint_L \mathbf{A} dl = \int_S \operatorname{rot} \mathbf{A} dS, \quad (\text{П1.6})$$

причем направление обхода контура  $L$  и положительная нормаль к поверхности  $S$  образуют праввинтовую систему.

## 1.3. ОПЕРАТОР ГАМИЛЬТОНА (НАБЛА-ОПЕРАТОР)

Сведение разнообразных дифференциальных пространственных операций к простой и однотипной схеме осуществляется при помощи дифференциального оператора Гамильтона. В декартовой системе координат оператор Гамильтона раскрывается следующим образом:

$$\nabla = x^0 \frac{\partial}{\partial x} + y^0 \frac{\partial}{\partial y} + z^0 \frac{\partial}{\partial z}, \quad (\text{П1.7})$$

где  $x^0, y^0, z^0$  — единичные векторы (орты) по осям  $x, y, z$ .

## 1.4. НЕКОТОРЫЕ ФОРМУЛЫ С ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМИ ОПЕРАЦИЯМИ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

$$\operatorname{grad} \varphi = \nabla \varphi; \quad (\text{П1.8})$$

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = \nabla \mathbf{A}; \quad (\text{П1.9})$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{A} = [\nabla \mathbf{A}]; \quad (\text{П1.10})$$

$$\operatorname{grad} (\varphi + \psi) = \operatorname{grad} \varphi + \operatorname{grad} \psi; \quad (\text{П1.11})$$

$$\operatorname{div} (\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \operatorname{div} \mathbf{A} + \operatorname{div} \mathbf{B}; \quad (\text{П1.12})$$

$$\operatorname{rot} (\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \operatorname{rot} \mathbf{A} + \operatorname{rot} \mathbf{B}; \quad (\text{П1.13})$$

$$\operatorname{grad} (\varphi\psi) = \psi \operatorname{grad} \varphi + \varphi \operatorname{grad} \psi; \quad (\text{П1.14})$$

$$\operatorname{div} (\varphi \mathbf{A}) = \mathbf{A} \operatorname{grad} \varphi + \varphi \operatorname{div} \mathbf{A}; \quad (\text{П1.15})$$

$$\operatorname{div} [\mathbf{A}\mathbf{B}] = \mathbf{B} \operatorname{rot} \mathbf{A} - \mathbf{A} \operatorname{rot} \mathbf{B}; \quad (\text{П1.16})$$

$$\operatorname{rot} (\varphi \mathbf{A}) = [\operatorname{grad} \varphi, \mathbf{A}] + \varphi \operatorname{rot} \mathbf{A}. \quad (\text{П1.17})$$

## 1.5. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ОПЕРАЦИИ ВТОРОГО ПОРЯДКА

$$\operatorname{div} \operatorname{grad} \varphi = \nabla (\nabla \varphi) = \nabla^2 \varphi \quad (\text{П1.18})$$

— оператор Лапласа (лапласиан) от скалярной функции  $\varphi$ ;

$$\operatorname{div} \operatorname{rot} \mathbf{A} = \nabla [\nabla \mathbf{A}] \equiv 0; \quad (\text{П1.19})$$

$$\operatorname{rot} \operatorname{grad} \varphi = [\nabla, \nabla \varphi] \equiv 0; \quad (\text{П1.20})$$

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{A} = [\nabla [\nabla \mathbf{A}]] = \nabla (\nabla \mathbf{A}) - (\nabla \nabla) \mathbf{A} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{A} - \nabla^2 \mathbf{A}; \quad (\text{П1.21})$$

$$\nabla^2 \mathbf{A} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{A} - \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{A} \quad (\text{П1.22})$$

— лапласиан от векторной функции  $\mathbf{A}$ .

1.6. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ОПЕРАЦИИ В НЕКОТОРЫХ  
ОРТОГОНАЛЬНЫХ СИСТЕМАХ КООРДИНАТ

1. *Обобщенная цилиндрическая система координат* ( $u, v, z$ ):

$$\text{grad } \varphi = u^0 \frac{1}{h_u} \frac{\partial \varphi}{\partial u} + v^0 \frac{1}{h_v} \frac{\partial \varphi}{\partial v} + z^0 \frac{\partial \varphi}{\partial z} = \text{grad}_{\perp} \varphi + z^0 \frac{\partial \varphi}{\partial z}; \quad (\text{П1.23})$$

$$\text{div } \mathbf{A} = \frac{1}{h_u h_v} \left[ \frac{\partial}{\partial u} (h_v A_u) + \frac{\partial}{\partial v} (h_u A_v) \right] + \frac{\partial A_z}{\partial z} = \text{div}_{\perp} \mathbf{A} + \frac{\partial A_z}{\partial z}; \quad (\text{П1.24})$$

$$\text{rot } \mathbf{A} = u^0 \left[ \frac{1}{h_v} \frac{\partial A_z}{\partial v} - \frac{\partial A_v}{\partial z} \right] + v^0 \left[ \frac{\partial A_u}{\partial z} - \frac{1}{h_u} \frac{\partial A_z}{\partial u} \right] + z^0 \frac{1}{h_u h_v} \left[ \frac{\partial}{\partial u} (h_v A_v) - \frac{\partial}{\partial v} (h_u A_u) \right]; \quad (\text{П1.25})$$

$$\begin{aligned} \text{div grad } \varphi &= \nabla^2 \varphi = \frac{1}{h_u h_v} \left[ \frac{\partial}{\partial u} \left( \frac{h_v}{h_u} \frac{\partial \varphi}{\partial u} \right) + \frac{\partial}{\partial v} \left( \frac{h_u}{h_v} \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right) \right] + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = \\ &= \text{div grad}_{\perp} \varphi + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = \nabla_{\perp}^2 \varphi + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}, \end{aligned} \quad (\text{П1.26})$$

где  $u^0, v^0, z^0$  — координатные орты в точке наблюдения;  $h_u, h_v$  ( $h_z=1$ ) — коэффициенты Ламе;  $\text{grad}_{\perp} \varphi, \text{div}_{\perp} \mathbf{A}, \text{div grad}_{\perp} \varphi = \nabla_{\perp}^2 \varphi$  — дифференциальные операции по поперечным координатам  $u$  и  $v$ .

2. *Декартова прямоугольная система координат* ( $x, y, z$ ):

$$\text{grad } \varphi = x^0 \frac{\partial \varphi}{\partial x} + y^0 \frac{\partial \varphi}{\partial y} + z^0 \frac{\partial \varphi}{\partial z}; \quad (\text{П1.27})$$

$$\text{div } \mathbf{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}; \quad (\text{П1.28})$$

$$\text{rot } \mathbf{A} = x^0 \left( \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) + y^0 \left( \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) + z^0 \left( \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right); \quad (\text{П1.29})$$

$$\text{div grad } \varphi = \nabla^2 \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}. \quad (\text{П1.30})$$

3. *Цилиндрическая система координат* ( $r, \psi, z$ ):

$$\text{grad } \varphi = r^0 \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \psi^0 \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \psi} + z^0 \frac{\partial \varphi}{\partial z}; \quad (\text{П1.31})$$

$$\text{div } \mathbf{A} = \frac{\partial A_r}{\partial r} + \frac{1}{r} A_r + \frac{1}{r} \frac{\partial A_{\psi}}{\partial \psi} + \frac{\partial A_z}{\partial z}; \quad (\text{П1.32})$$

$$\text{rot } \mathbf{A} = r^0 \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial A_z}{\partial \psi} - \frac{\partial A_{\psi}}{\partial z} \right] + \psi^0 \left[ \frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r} \right] + z^0 \left[ \frac{\partial}{\partial r} (r A_{\psi}) - \frac{\partial A_r}{\partial \psi} \right]; \quad (\text{П1.33})$$

$$\text{div grad } \varphi = \nabla^2 \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \psi^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}. \quad (\text{П1.34})$$

4. *Сферическая система координат* ( $R, \theta, \psi$ ):

$$\text{grad } \varphi = R^0 \frac{\partial \varphi}{\partial R} + \theta^0 \frac{1}{R} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} + \psi^0 \frac{1}{R \sin \theta} \frac{\partial \varphi}{\partial \psi}; \quad (\text{П1.35})$$

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = \frac{\partial A_R}{\partial R} + \frac{2}{R} A_R + \frac{1}{R \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta A_\theta) + \frac{1}{R \sin \theta} \frac{\partial A_\psi}{\partial \psi}; \quad (\text{Пл. 36})$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{A} = R^0 \frac{1}{R \sin \theta} \left[ \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta A_\psi) - \frac{\partial A_\theta}{\partial \psi} \right] + \theta^0 \frac{1}{R \sin \theta} \left[ \frac{\partial A_R}{\partial \psi} - \frac{\partial}{\partial R} (R \sin \theta A_\psi) \right] + \Psi^0 \frac{1}{R} \left[ \frac{\partial}{\partial R} (R A_\theta) - \frac{\partial A_R}{\partial \theta} \right]; \quad (\text{Пл. 37})$$

$$\operatorname{div} \operatorname{grad} \varphi = \nabla^2 \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial R^2} + \frac{2}{R} \frac{\partial \varphi}{\partial R} + \frac{1}{R^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{R^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \psi^2}. \quad (\text{Пл. 38})$$

5. В декартовой системе координат

$$\nabla^2 \mathbf{A} = x^0 \nabla^2 A_x + y^0 \nabla^2 A_y + z^0 \nabla^2 A_z, \quad (\text{Пл. 39})$$

где  $\nabla^2 A_x$ ,  $\nabla^2 A_y$ ,  $\nabla^2 A_z$  определяются ф-лой (Пл.30).

В криволинейной системе координат выполнение операции  $\nabla^2 \mathbf{A}$  производится по ф-ле (Пл.22).

### 1.7. СВОЙСТВА ВЕКТОРНЫХ ПОЛЕЙ

Будем полагать, что вектор  $\mathbf{A}$  и его первые частные производные однозначны и непрерывны во всех точках поля. Тогда:

1. Векторное поле  $\mathbf{A}$  задано однозначно, если известны его ротор и дивергенция как функции пространственных координат:

$$\operatorname{rot} \mathbf{A} = \mathbf{F}(\mathbf{R}), \quad \operatorname{div} \mathbf{A} = f(\mathbf{R}), \quad (\text{Пл. 40})$$

причем эти функции должны отличаться от нуля в ограниченной области пространства.

2. Векторное поле  $\mathbf{A}$  называют *потенциальным*, если

$$\mathbf{A} = -\operatorname{grad} \varphi, \quad (\text{Пл. 41})$$

где функцию  $\varphi$  именуют скалярным потенциалом поля  $\mathbf{A}$ . Введение знака минус в (Пл.41) не имеет принципиального значения и вызвано тем обстоятельством, что в физических задачах принято направлять вектор  $\mathbf{A}$  в сторону убывания потенциала  $\varphi$ .

Необходимым и достаточным условием потенциальности поля  $\mathbf{A}$  является равенство

$$\operatorname{rot} \mathbf{A} = 0. \quad (\text{Пл. 42})$$

В частности, необходимость этого условия следует непосредственно из (Пл.41) при учете (Пл.20). В соответствии с (Пл.40) условием однозначного задания потенциального поля  $\mathbf{A}$  является известное во всех точках поля значение его дивергенции:

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = f(\mathbf{R}). \quad (\text{Пл. 43})$$

3. Векторное поле  $\mathbf{A}$  называют *соленоидальным*, если

$$\mathbf{A} = \operatorname{rot} \mathbf{C}, \quad (\text{Пл. 44})$$

где функцию  $\mathbf{C}$  именуют векторным потенциалом поля  $\mathbf{A}$ .

Необходимым и достаточным условием соленоидальности поля  $\mathbf{A}$  является равенство

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = 0. \quad (\text{Пл. 45})$$

В частности, необходимость этого условия следует непосредственно из (Пл.44) при учете (Пл.19). В соответствии с (Пл.40) условием однозначного задания соленоидального поля  $\mathbf{A}$  является известное во всех точках поля значение его ротора:

$$\operatorname{rot} \mathbf{A} = \mathbf{F}(\mathbf{R}). \quad (\text{Пл. 46})$$

4. Векторное поле  $\mathbf{A}$  общего типа удовлетворяет уравнениям (П1.40), в которых  $\mathbf{F}(\mathbf{R}) \neq 0$  и  $f(\mathbf{R}) \neq 0$ . Это поле может быть единственным образом представлено суммой потенциального  $\mathbf{A}_1$  и соленоидального  $\mathbf{A}_2$  векторных полей:

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2, \quad (\text{П1.47})$$

где

$$\text{rot } \mathbf{A}_1 = 0, \quad \text{div } \mathbf{A}_2 = 0. \quad (\text{П1.48})$$

Взяв дивергенцию и ротор от обеих частей (П1.47), с учетом соотношений (П1.48) получим:

$$\text{div } \mathbf{A}_1 = \text{div } \mathbf{A} = f(\mathbf{R}); \quad (\text{П1.49})$$

$$\text{rot } \mathbf{A}_2 = \text{rot } \mathbf{A} = \mathbf{F}(\mathbf{R}). \quad (\text{П1.50})$$

Таким образом, все истоки поля  $\mathbf{A}$  включаются в потенциальную часть  $\mathbf{A}_1$  разложения (П1.47) (определяют потенциальные свойства поля  $\mathbf{A}$ ), а все вихри — в соленоидальную часть  $\mathbf{A}_2$  разложения (определяют соленоидальные свойства поля  $\mathbf{A}$ ).

## ПРИЛОЖЕНИЕ 2

### СВЕДЕНИЯ О ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЯХ ЦЕЛОГО ПОРЯДКА

#### 2.1. УРАВНЕНИЕ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ И ЕГО ОБЩЕЕ РЕШЕНИЕ

Многие обладающие осевой симметрией задачи электродинамики приводят к следующему дифференциальному уравнению:

$$\frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dR}{dr} + \left( \kappa^2 - \frac{m^2}{r^2} \right) R = 0, \quad (\text{П2.1})$$

где  $R$  — функция от  $r$  в полярной системе координат  $(r, \psi)$ ;  $m$  — постоянная, которая принимает только целые значения ( $m=0, 1, 2, 3, \dots$ ). Введение независимой переменной

$$\rho = \kappa r \quad (\text{П2.2})$$

преобразует (П2.1) в дифференциальное уравнение

$$\frac{d^2 R}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{dR}{d\rho} + \left( 1 - \frac{m^2}{\rho^2} \right) R = 0, \quad (\text{П2.3})$$

называемое *уравнением цилиндрических функций* (уравнением Бесселя)  $m$ -го порядка. Общее решение уравнения (П2.3) есть линейная комбинация его двух независимых частных решений:

$$R(\rho) = AJ_m(\rho) + BN_m(\rho) \quad (\text{П2.4})$$

или

$$R(\rho) = CH_m^{(1)}(\rho) + DH_m^{(2)}(\rho), \quad (\text{П2.5})$$

где  $A, B, C, D$  — произвольные постоянные. Частные решения ур-ния (П2.3) — цилиндрические функции — связаны между собой соотношениями:

$$\begin{aligned} H_m^{(1)}(\rho) &= J_m(\rho) + i N_m(\rho), \\ H_m^{(2)}(\rho) &= J_m(\rho) - i N_m(\rho) \end{aligned} \quad (\text{П2.6})$$

и имеют следующие названия:  $J_m(\rho)$  — функция Бесселя  $m$ -го порядка,  $N_m(\rho)$  — функция Неймана  $m$ -го порядка;  $H_m^{(1)}(\rho)$  — функция Ханкеля первого рода  $m$ -го порядка;  $H_m^{(2)}(\rho)$  — функция Ханкеля второго рода  $m$ -го порядка.

## 2.2. ВЫБОР ОБЩЕГО РЕШЕНИЯ В РАЗЛИЧНЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБЛАСТЯХ

Для электромагнитного поля вид общего решения ур-ния (П2.3) в различных областях определяется свойствами цилиндрических функций.

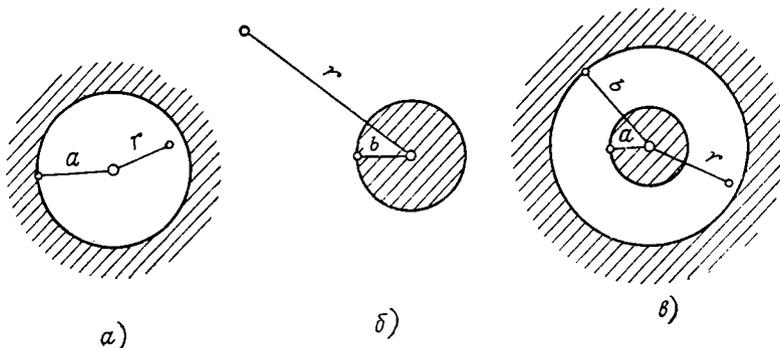


РИС. П2.1

1. Вид решения в области  $0 \leq r \leq a$  (рис. П2.1а) определяется свойствами цилиндрических функций при нулевом значении аргумента  $\rho = \kappa r$ .

При малых значениях модуля аргумента ( $|\rho| \ll 1$ ) можно применять приближенные формулы:

$$\left. \begin{aligned} J_0(\rho) &\approx 1 - \left(\frac{\rho}{2}\right)^2, \quad J_1(\rho) \approx \frac{\rho}{2} - \frac{1}{2} \left(\frac{\rho}{2}\right)^3, \quad J_m \approx \frac{1}{m!} \left(\frac{\rho}{2}\right)^m \\ &\text{при } m = 2, 3 \dots \end{aligned} \right\} (\text{П2.7})$$

$$\left. \begin{aligned} N_0(\rho) &\approx \frac{2}{\pi} \ln(0,89\rho), \quad N_m(\rho) \approx -\frac{(m-1)!}{\pi} \left(\frac{2}{\rho}\right)^m \\ &\text{при } m = 1, 2, 3 \dots \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} H_0^{(1)}(\rho) &\approx 1 + i \frac{2}{\pi} \ln(0,89\rho) = i \frac{2}{\pi} \ln(-i 0,89\rho), \\ H_0^{(2)}(\rho) &\approx 1 - i \frac{2}{\pi} \ln(0,89\rho) = -i \frac{2}{\pi} \ln(i 0,89\rho), \\ H_m^{(1)}(\rho) &\approx -i \frac{(m-1)!}{\pi} \left(\frac{2}{\rho}\right)^m, \\ H_m^{(2)}(\rho) &\approx i \frac{(m-1)!}{\pi} \left(\frac{2}{\rho}\right)^m \text{ при } m = 1, 2, 3 \dots \end{aligned} \right\} (\text{П2.8})$$

где факториал нуля принят равным единице.

Из этих формул видно, что при  $\rho=0$  функции  $N_m(\rho)$ ,  $H_m^{(1)}(\rho)$  и  $H_m^{(2)}(\rho)$  обращаются в бесконечность, а функции  $J_m(\rho)$  остаются конечными. Поскольку электромагнитное поле должно быть конечным, то для его представления в точке  $r=0$  могут быть использованы только функции Бесселя. Таким образом, в области  $0 \leq r \leq a$ , включающей точку  $r=0$ , решение уравнения (П2.3) имеет вид

$$R(\rho) = AJ_m(\rho), \quad (\text{П2.9})$$

к которому мы пришли от (П2.4), положив  $B=0$ .

2. Вид решения в области  $b \leq r \leq \infty$  (рис. П2.1б) определяется свойствами цилиндрических функций при весьма больших значениях модуля аргумента  $\rho = \kappa r$ .

При этих значениях ( $|\rho| \gg 1$ ,  $|\rho| \gg m$ ) справедливы асимптотические формулы:

$$J_m(\rho) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi\rho}} \cos \left[ \rho - \frac{\pi}{2} \left( m + \frac{1}{2} \right) \right] \quad N_m(\rho) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi\rho}} \sin \times \\ \times \left[ \rho - \frac{\pi}{2} \left( m + \frac{1}{2} \right) \right]; \quad (\text{П2.10})$$

$$H_m^{(1)}(\rho) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi\rho}} e^{i \left[ \rho - \frac{\pi}{2} \left( m + \frac{1}{2} \right) \right]}, \quad H_m^{(2)}(\rho) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi\rho}} e^{-i \left[ \rho - \frac{\pi}{2} \left( m + \frac{1}{2} \right) \right]}. \quad (\text{П2.11})'$$

Если параметр  $\kappa^2$  в (П2.1) есть комплексное или вещественное отрицательное число, то условимся в соотношении

$$\kappa = \sqrt{\kappa^2} = \kappa' + i\kappa'' \quad (\text{П2.12})'$$

оставлять то значение квадратного корня, которое дает отрицательную мнимую часть  $\kappa$ :

$$\text{Im } \kappa = \kappa'' < 0. \quad (\text{П2.13})'$$

Представив косинус и синус в (П2.10) в виде суммы двух экспонент и подставив в них и в (П2.11) соотношения (П2.2) и (П2.12), легко убедиться, что при выполнении условия (П2.13) функции  $J_m(\rho)$ ,  $N_m(\rho)$  и  $H_m^{(1)}(\rho)$  возрастают с увеличением  $r$  по закону  $e^{-\kappa''r} = e^{|\kappa''|r}$ , а функция  $H_m^{(2)}(\rho)$  убывает по закону  $e^{\kappa''r} = e^{-|\kappa''|r}$ . Поскольку при  $r \rightarrow \infty$  функции  $J_m(\rho)$ ,  $N_m(\rho)$  и  $H_m^{(1)}(\rho)$  стремятся к бесконечности, а функция  $H_m^{(2)}(\rho) \rightarrow 0$ , то для представления поля в области  $b \leq r \leq \infty$  в случае выполнения условия (П2.13) могут быть применены только функции  $H_m^{(2)}(\rho)$ :

$$R(\rho) = DH_m^{(2)}(\rho). \quad (\text{П2.14})'$$

Если параметр  $\kappa^2$  есть вещественное положительное число, то условимся брать квадратный корень со знаком плюс:  $\kappa = +\sqrt{\kappa^2}$ . При вещественных положительных значениях  $\rho = \kappa r \gg 1$  функция  $H_m^{(1)}(\kappa r)$  согласно (П2.11) описывает (при временной зависимости  $e^{i\omega t}$ ) бегущие волны, *сходящиеся* вдоль радиусов  $r$  из бесконечности к оси, и, следовательно, должна быть исключена из решения для  $R(r)$  в области  $b \leq r \leq \infty$ . Невозможность существования сходящихся из бесконечности к оси волн обусловлена отсутствием источников поля на бесконечности. В этом случае для представления поля в области  $b \leq r \leq \infty$  вновь следует воспользоваться решением (П2.14), так как функция  $H_m^{(2)}(\kappa r)$  при  $\kappa r \gg 1$  согласно (П2.11) определяет бегущие волны, *расходящиеся* по радиальным направлениям в бесконечность. Волновые поверхности этих волн описываются уравнением  $r = \text{const}$  и имеют форму цилиндров, вследствие чего волны называют *цилиндрическими*. При отсутствии потерь амплитуды цилиндрических волн с возрастанием  $r$  убывают по закону  $1/\sqrt{r}$ .

Что касается функций  $J_m(\kappa r)$  и  $N_m(\kappa r)$ , то согласно (П2.10) при вещественном  $\rho = \kappa r \gg 1$  они соответствуют стоячим в радиальных направлениях волнам, возникшим в результате наложения расходящихся и сходящихся вдоль ра-

диусов волн. Следовательно, и при вещественных  $\rho$  эти функции непригодны для представления  $R(r)$  в области  $b \leq r \leq \infty$ .

3. В области  $a \leq r \leq b$  (рис. П2.1б) все цилиндрические функции конечны. В этой области удобно записать общее решение ур-ния (П2.3) в виде (П2.4)

$$R(\rho) = AJ_m(\rho) + BN_m(\rho). \quad (\text{П2.15})$$

### 2.3. НЕКОТОРЫЕ ФОРМУЛЫ С ЦИЛИНДРИЧЕСКИМИ ФУНКЦИЯМИ

Если через  $Z_m(\rho)$  обозначить произвольную цилиндрическую функцию  $m$ -го порядка, то справедливы следующие формулы:

$$Z'_0(\rho) = -Z_1(\rho); \quad (\text{П2.16})$$

$$\int \rho^{m+1} Z_m(\rho) d\rho = \rho^{m+1} Z_{m+1}(\rho); \quad (\text{П2.17})$$

$$\int \left[ \frac{m^2 Z_m^2(\rho)}{\rho^2} + Z_m'^2(\rho) \right] \rho d\rho = \frac{\rho^2}{2} \left[ Z_m^2(\rho) \left( 1 - \frac{m^2}{\rho^2} \right) + \frac{2}{\rho} Z_m(\rho) Z_m'(\rho) + Z_m'^2(\rho) \right]. \quad (\text{П2.18})$$

### 2.4. ЦИЛИНДРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ $J_m(\rho)$ И $N_m(\rho)$ ОТ ВЕЩЕСТВЕННОГО ПОЛОЖИТЕЛЬНОГО АРГУМЕНТА

В частном случае вещественных положительных значений аргумента  $\rho$  функции  $J_m(\rho)$  и  $N_m(\rho)$  принимают лишь вещественные значения. На рис. П2.2, П2.3 изображены графики этих функций. В рассматриваемом случае

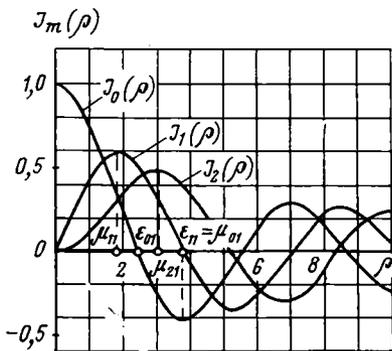


РИС. П2.2

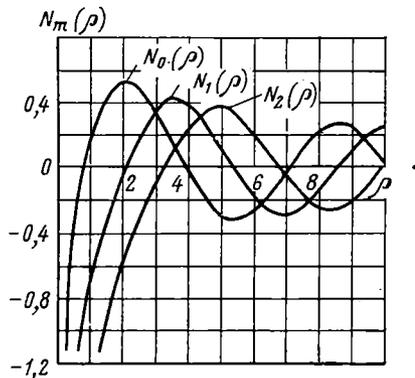


РИС. П2.3

функции  $J_m(\rho)$  и  $N_m(\rho)$  имеют осциллирующий характер, принимают бесконечное число раз нулевые и экстремальные значения и их экстремальные значения монотонно убывают с увеличением аргумента  $\rho$  [ср. ф-лы (П2.10)].

### 2.5. КОРНИ ФУНКЦИЙ БЕССЕЛЯ И ПРОИЗВОДНЫХ ФУНКЦИЙ БЕССЕЛЯ

Корни функции Бесселя целого порядка, т. е. корни уравнения

$$J_m(\epsilon) = 0, \quad (\text{П2.19})$$

образуют бесконечную последовательность вещественных положительных значений  $\epsilon_{m,n}$ . Символ  $\epsilon_{m,n}$  обозначает  $n$ -й корень функции Бесселя  $m$ -го порядка (ин-

декс  $m=0, 1, 2, 3, \dots$  указывает порядок функции Бесселя, индекс  $n=1, 2, 3, \dots$  — порядковый номер корня). Корни  $\epsilon_{mn}$  равны значениям аргумента  $\rho$ , при которых функции  $J_m(\rho)$  пересекает ось абсцисс (см. рис. П2.2). В табл. П2.1 приведены значения первых трех корней нескольких функций Бесселя.

Корни производной функции Бесселя целого порядка, т. е. корни уравнения

$$J'_m(\mu) = 0, \quad (\text{П2.20})$$

также образуют бесконечную последовательность вещественных положительных значений  $\mu_{mn}$ . Символ  $\mu_{mn}$  обозначает  $n$ -й корень производной функции Бесселя  $m$ -го порядка. Корни  $\mu_{mn}$  равны значениям аргумента  $\rho$ , при которых функция  $J_m(\rho)$  экстремальна и, следовательно, ее производная равна нулю (см. рис. П2.2). Несколько значений  $\mu_{mn}$  приведено в табл. П2.2.

ТАБЛИЦА П. 2.1

$m$	$\epsilon_{mn}$		
	$n=1$	$n=2$	$n=3$
0	2,405	5,520	8,654
1	3,832	7,016	10,173
2	5,136	8,417	11,620
3	6,380	9,761	13,015

ТАБЛИЦА П. 2.2

$m$	$\mu_{mn}$		
	$n=1$	$n=2$	$n=3$
0	3,832	7,016	10,173
1	1,841	5,331	8,536
2	3,054	6,706	9,969
3	4,201	8,015	11,346

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Айзенберг Г. З. Антенны ультракоротких волн. М., Связьиздат, 1957. 700 с.
2. Альтман Дж. Л. Устройства сверхвысоких частот. Пер. с англ. под ред. проф. И. В. Лебедева. М., «Мир», 1968. 488 с.
3. Борн М., Вольф Э. Основы оптики. Пер. с нем. под ред. Г. П. Мотулевич. М., «Наука», 1970. 856 с.
4. Брунов Б. Я. и др. Теория электромагнитного поля. М.—Л., ГЭИ, 1962. 512 с.
5. Вайнштейн Л. А. Электромагнитные волны. М., «Сов. радио», 1957. 581 с.
6. Взятыхшев В. Ф. Диэлектрические волноводы. М., «Советское радио», 1970. 214 с.
7. Власов А. А. Макроскопическая электродинамика. М., ГИТТЛ, 1955. 228 с.
8. Вольман В. И., Пименов Ю. В. Техническая электродинамика. М., «Связь», 1971. 488 с.
9. Говорков В. А. Электрические и магнитные поля. М., «Энергия», 1968. 488 с.
10. Говорков В. А., Купалян С. Д. Теория электромагнитного поля в упражнениях и задачах. М., «Высшая школа», 1970. 304 с.
11. Гольдштейн Л. Д., Зернов Н. В. Электромагнитные поля и волны. М., «Сов. радио», 1971. 662 с.
12. ГОСТ 18238—72. Линии передачи сверхвысоких частот. Термины и определения. М., Стандартгиз, 1972. 11 с.
13. Емелин Б. Ф. Нерегулярные волноводы и резонаторы. Л., Изд. ВКАС, 1959. 220 с.
14. Ефимов И. Е. Радиочастотные линии передачи. М., «Сов. радио», 1964. 600 с.
15. Каценеленбаум Б. З. Высокочастотная электродинамика. М., «Наука», 1966. 240 с.
16. Кисунько Г. В. Электродинамика полных систем. Л., Изд. ВКАС, 1949. 426 с.
17. Купалян С. Д. Теоретические основы электротехники. Ч. 3. Электромагнитное поле. М., «Энергия», 1970. 248 с.
18. Лавров В. М. Теория электромагнитного поля и основы распространения радиоволн. М., «Связь», 1964. 368 с.
19. Лебедев И. В. Техника и приборы СВЧ. Т. I. М., «Высшая школа», 1970. 440 с.

20. Левин Л. Современная теория волноводов. Пер. с англ. Э. Л. Бурштейн а. М., ИИЛ, 1954. 216 с.
21. Малорацкий Л. Г. Миниатюризация элементов и устройств СВЧ. М., «Сов. радио», 1976. 216 с.
22. Марков Г. Т., Васильев Е. Н. Математические методы прикладной электродинамики. М., «Сов. радио», 1970. 120 с.
23. Марков Г. Т., Чаплин А. Ф. Возбуждение электромагнитных волн. М.—Л., «Энергия», 1967. 376 с.
24. Маттей Д. Л., Янг Л., Джонс Е. М. Т. Фильтры СВЧ, согласующие цепи и цепи связи. В 2 т. Пер. с англ. под ред. Л. В. Алексеева и Ф. В. Кушнира. М., «Связь», 1971—1972. Т. 1. 1971. 440 с. Т. 2. 1972. 496 с.
25. Машковцев Б. М., Цибизов К. Н., Емелин Б. Ф. Теория волноводов. М.—Л., «Наука», 1966. 352 с.
26. Микаэлян А. Л. Теория и применение ферритов на сверхвысоких частотах. М.—Л., ГЭИ, 1963. 663 с.
27. Модель А. М. Фильтры СВЧ в радиорелейных системах. М., «Связь», 1967. 352 с.
28. Нейман Л. Р., Демирчян К. С. Теоретические основы электротехники. Ч. 4. Теория электромагнитного поля. Л., «Энергия», 1967. 408 с.
29. Никольский В. В. Электродинамика и распространение радиоволн. М., «Наука», 1973. 608 с.
30. Поливанов К. М. Теоретические основы электротехники. Ч. 3. Теория электромагнитного поля. М., «Энергия», 1969. 352 с.
31. Сазонов Д. М., Гридин А. Н. Техника СВЧ. М., Изд. МЭИ, 1970. 314 с.
32. Семенов А. А. Теория электромагнитных волн. М., Изд. МГУ, 1968. 318 с.
33. Справочник по волноводам. Пер. с англ. под ред. проф. Я. Н. Фельда. М., «Сов. радио», 1952. 432 с.
34. Стрэттон Дж. А. Теория электромагнетизма. Пер. с англ. под ред. проф. С. М. Рытова. М.—Л., ГИТТЛ, 1948. 539 с.
35. Тамм И. Е. Основы теории электричества. М., ГИТТЛ, 1956. 620 с.
36. Терминология теоретической электротехники. Комитет технической терминологии АН СССР. Сборники рекомендуемых терминов. Вып. 46. М., Изд. АН СССР, 1958. 48 с.
37. Техника СВЧ. Под ред. Б. М. Машковцева. Л., Изд. ВКАС, 1972. 432 с.
38. Фальковский О. И. Введение в техническую электродинамику. Л., Изд. ЛЭИС, 1968. 152 с.
39. Федоров Н. Н. Основы электродинамики. М., «Высшая школа», 1965. 328 с.
40. Фельд Я. Н., Бененсон Л. С. Антенно-фидерные устройства. Ч. 2. М., Изд. ВВИА, 1959. 552 с.
41. Фельдштейн А. Л., Явич Л. Р. Синтез четырехполюсников и восьмиполусников на СВЧ. М., «Связь», 1965. 352 с.
42. Фельдштейн А. Л., Явич Л. Р., Смирнов В. П. Справочник по элементам волноводной техники. М., «Сов. радио», 1967. 651 с.
43. Физическая оптика. Комитет научно-технической терминологии АН СССР. Сборники рекомендуемых терминов. Вып. 79. М., «Наука», 1970. 52 с.
44. Фрадин А. З. Антенны сверхвысоких частот. М., «Сов. радио», 1957. 448 с.
45. Франк Ф., Мизес Р. Дифференциальные и интегральные уравнения математической физики. Ч. 2. Пер. с нем. под ред. Л. Э. Гуревича. Л.—М., ОНТИ, 1937. 998 с.
46. Харвей А. Ф. Техника сверхвысоких частот. В 2 т. Пер. с англ. под ред. В. И. Сушкевича. М., «Сов. радио», 1965. Т. I. 784 с. Т. II. 775 с.
47. Хёнл Х., Мауэ А., Вестфаль К. Теория дифракции. Пер. с нем. под ред. Г. Д. Малюжинца. М., «Мир», 1964. 428 с.
48. Ширман Я. Д. Радиоволноводы и объемные резонаторы. М., Связьиздат, 1959. 380 с.
49. Юзвинский В. И. Техника сверхвысоких частот (волноводно-резонаторные устройства). Л., Изд. ВКАС, 1967. 334 с.
50. Яворский Б. М., Детлаф А. А., Милковская Л. Б. Курс физики. Т. II. Электричество и магнетизм. М., «Высшая школа», 1966. 411 с.

# ОГЛАВЛЕНИЕ

	Стр.
Предисловие	3
Буквенные обозначения и единицы измерения основных величин	5

## Часть I

### Введение в техническую электродинамику

#### ГЛАВА 1 ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ

1.1. Электромагнитное поле и электрический заряд. Основные свойства электромагнитного поля	6
1.2. Электрическое и магнитное поля как две стороны единого электромагнитного поля	9

#### ГЛАВА 2 ОСНОВНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ, ХАРАКТЕРИЗУЮЩИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЕ ПОЛЕ. УРАВНЕНИЯ ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ В ИНТЕГРАЛЬНОЙ ФОРМЕ

2.1. Связанные и свободные электрические заряды	10
2.2. Плотность электрического заряда	11
2.3. Напряженность электрического поля $E$ . Поток вектора $E$	12
2.4. Обобщение закона Гаусса. Электрическое смещение $D$	13
2.5. Классификация сред по их макроскопическим параметрам. Абсолютная диэлектрическая проницаемость	16
2.6. Электрические токи проводимости и переноса. Плотность тока	19
2.7. Магнитная индукция $B$ . Магнитный поток	21
2.8. Принцип непрерывности магнитного потока	22
2.9. Обобщение закона электромагнитной индукции	23
2.10. Связь между постоянным электрическим током и обусловленным им магнитным полем. Напряженность магнитного поля $H$	25
2.11. Симметрия между электрическими и магнитными явлениями. Ток смещения	28
2.12. Закон сохранения электрического заряда в интегральной форме. Принцип непрерывности электрического тока	30
2.13. Закон полного тока	31
2.14. Магнитные свойства сред	31

#### ГЛАВА 3 УРАВНЕНИЯ ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ В ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ФОРМЕ. ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ

3.1. Закон полного тока и обобщенный закон электромагнитной индукции в дифференциальной форме	34
3.2. Обобщенный закон Гаусса и принцип непрерывности магнитного потока в дифференциальной форме	35
3.3. Закон сохранения электрического заряда и принцип непрерывности электрического тока в дифференциальной форме	36
3.4. Система уравнений электродинамики в дифференциальной форме	37
3.5. Сторонние источники электромагнитного поля	39
3.6. Система дифференциальных уравнений электродинамики для изотропных линейных сред. Принцип суперпозиции	40
3.7. Система уравнений электродинамики для однородных непроводящих сред	40
3.8. Система уравнений электродинамики для однородных проводящих сред без сторонних источников	41

3.9. Граничные условия на поверхности раздела двух сред . . . . .	42
3.10. Граничные условия на поверхности идеально проводящей среды . . . . .	46
3.11. Система уравнений в дифференциальной форме и граничные условия для комплексных амплитуд. Комплексная диэлектрическая проницаемость среды . . . . .	48
3.12. Электрические свойства изотропных линейных сред в монохроматическом поле . . . . .	52

#### ГЛАВА 4

#### ЭНЕРГИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ

4.1. Теорема Умова — Пойнтинга. Вектор Пойнтинга . . . . .	53
4.2. Выражения средних за период значений произведений двух монохроматических векторов через их комплексные амплитуды . . . . .	56
4.3. Теорема Умова — Пойнтинга для комплексных амплитуд . . . . .	58

#### ГЛАВА 5

#### УСЛОВИЯ ЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ

5.1. Теорема единственности для внутренней задачи электродинамики . . . . .	61
5.2. Условия излучения. Теорема единственности для внешней задачи электродинамики . . . . .	63

#### ГЛАВА 6

#### ВОЛНОВЫЕ УРАВНЕНИЯ ДЛЯ ВЕКТОРОВ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ. ЭЛЕКТРОДИНАМИЧЕСКИЕ ПОТЕНЦИАЛЫ

6.1. Волновые уравнения для векторов электромагнитного поля . . . . .	67
6.2. Электродинамические потенциалы . . . . .	69
6.3. Электродинамические потенциалы в безграничной среде. Волновой характер электромагнитного поля . . . . .	70
6.4. Использование электродинамических потенциалов в методе комплексных амплитуд . . . . .	74

## Часть II

### Статические и стационарные поля

#### ГЛАВА 7

#### СТАТИЧЕСКИЕ ПОЛЯ

7.1. Классификация электромагнитных явлений . . . . .	76
7.2. Уравнения электростатики . . . . .	77
7.3. Скалярный потенциал электростатического поля . . . . .	80
7.4. Задачи электростатики . . . . .	81
7.5. Простейшие примеры электростатического поля . . . . .	83
7.6. Метод зеркальных изображений . . . . .	88
7.7. Энергия электростатического поля . . . . .	90
7.8. Электрическая емкость удлинённого проводящего тела . . . . .	91
7.9. Система заряженных проводящих тел . . . . .	92
7.10. Электрическая емкость между двумя проводящими телами. Конденсатор . . . . .	94
7.11. Магнитоэстатическое поле . . . . .	95

#### ГЛАВА 8

#### СТАЦИОНАРНОЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЕ ПОЛЕ

8.1. Стационарное электрическое поле в проводящей среде . . . . .	96
8.2. Метод электростатической аналогии . . . . .	97
8.3. Стационарное электрическое поле в диэлектрике . . . . .	98
8.4. Основные уравнения стационарного магнитного поля . . . . .	99
8.5. Простейшие примеры стационарного магнитного поля . . . . .	100
8.6. Энергия стационарного магнитного поля . . . . .	102
8.7. Индуктивность, взаимная индуктивность . . . . .	102

**Часть III****Излучение и распространение  
электромагнитных волн****ГЛАВА 9  
ЭЛЕМЕНТАРНЫЙ ЭЛЕКТРИЧЕСКИЙ ИЗЛУЧАТЕЛЬ**

9.1. Излучение электромагнитных волн . . . . .	106
9.2. Понятие об элементарном электрическом излучателе . . . . .	106
9.3. Комплексные амплитуды векторов поля элементарного электрического излучателя . . . . .	108
9.4. Электромагнитное поле в ближней зоне . . . . .	110
9.5. Электромагнитное поле в дальней зоне . . . . .	111
9.6. Мощность излучения, сопротивление излучения . . . . .	114

**ГЛАВА 10  
ОБЩИЕ ПРИНЦИПЫ ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ.  
ЭЛЕМЕНТАРНЫЙ МАГНИТНЫЙ ИЗЛУЧАТЕЛЬ, ЭЛЕМЕНТ ГЮЙГЕНСА**

10.1. Уравнения Максвелла при наличии фиктивных магнитных токов и зарядов . . . . .	115
10.2. Принцип перестановочной двойственности уравнений Максвелла . . . . .	117
10.3. Поле излучения элементарного магнитного излучателя . . . . .	118
10.4. Лемма Лоренца. Теорема взаимности . . . . .	121
10.5. Теорема эквивалентности . . . . .	123
10.6. Принцип Гюйгенса — Френеля. Элемент Гюйгенса . . . . .	125

**ГЛАВА 11  
ОДНОРОДНЫЕ ПЛОСКИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ВОЛНЫ  
В БЕЗГРАНИЧНОЙ ИЗОТРОПНОЙ СРЕДЕ**

11.1. Однородная плоская электромагнитная волна . . . . .	130
11.2. Однородная плоская волна в среде без потерь . . . . .	131
11.3. Однородная плоская волна в среде с потерями . . . . .	134

**ГЛАВА 12  
ПОЛЯРИЗАЦИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН**

12.1. Линейно поляризованные волны . . . . .	139
12.2. Поляризованные по кругу и эллиптически поляризованные волны . . . . .	140

**ГЛАВА 13  
ВОЛНОВЫЕ ЯВЛЕНИЯ НА ГРАНИЦЕ РАЗДЕЛА ДВУХ СРЕД**

13.1. Однородная плоская волна, распространяющаяся в произвольном направлении . . . . .	143
13.2. Падение плоской волны на границу раздела двух диэлектриков . . . . .	144
13.3. Нормальное падение плоской волны на границу раздела диэлектриков . . . . .	152
13.4. Полное прохождение волны через границу раздела диэлектриков . . . . .	153
13.5. Полное внутреннее отражение . . . . .	159
13.6. Падение плоской волны на границу раздела диэлектрика и идеального проводника . . . . .	160
13.7. Падение плоской волны на границу раздела диэлектрика и среды с потерями . . . . .	163
13.8. Приближенные граничные условия Леонтовича — Щукина . . . . .	163

**ГЛАВА 14  
ПОВЕРХНОСТНЫЙ ЭФФЕКТ**

14.1. Сильный и слабый поверхностный эффект . . . . .	165
14.2. Эквивалентный поверхностный ток и сопротивление проводника при сильном поверхностном эффекте . . . . .	166

14.3. Средняя мощность тепловых потерь в проводящем теле при сильном поверхностном эффекте . . . . .	170
14.4. Сопротивление цилиндрического провода . . . . .	170
<b>ГЛАВА 15</b>	
<b>ДИФРАКЦИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН</b>	
15.1. Задачи дифракции . . . . .	174
15.2. Переход от уравнений Максвелла к уравнениям геометрической оптики. Геометрические волновые поверхности и лучи . . . . .	176
15.3. Оптическая длина пути. Принцип Ферма . . . . .	179
15.4. Изменение поля вдоль луча . . . . .	181
15.5. Отражение и преломление в геометрической оптике . . . . .	183
15.6. Метод физической оптики (приближение Гюйгенса — Кирхгофа) . . . . .	185
<b>ГЛАВА 16</b>	
<b>ОДНОРОДНЫЕ ПЛОСКИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ВОЛНЫ В БЕЗГРАНИЧНОЙ АНИЗОТРОПНОЙ СРЕДЕ</b>	
16.1. Свойства и параметры намагниченных феррита и плазмы для монохроматических электромагнитных волн . . . . .	187
16.2. Уравнения Максвелла для намагниченных феррита и плазмы . . . . .	197
16.3. Распространение однородных плоских волн в продольно намагниченных феррите и плазме . . . . .	197
16.4. Распространение однородных плоских волн в поперечно намагниченных феррите и плазме . . . . .	202
<b>Часть IV</b>	
<b>Электромагнитные волны, направляемые регулярными линиями передачи</b>	
<b>ГЛАВА 17</b>	
<b>ВВЕДЕНИЕ В ТЕОРИЮ ВОЛН, НАПРАВЛЯЕМЫХ РЕГУЛЯРНЫМИ ЛИНИЯМИ ПЕРЕДАЧИ</b>	
17.1. Линии передачи и их классификация . . . . .	206
17.2. Решение уравнений Максвелла для регулярных линий передачи . . . . .	207
17.3. Классификация направляемых волн . . . . .	211
<b>ГЛАВА 18</b>	
<b>ОБЩАЯ ТЕОРИЯ ВОЛН, НАПРАВЛЯЕМЫХ РЕГУЛЯРНЫМИ ВОЛНОВОДАМИ</b>	
18.1. Граничные условия для продольных составляющих поля. Красовые задачи Дирихле и Неймана . . . . .	213
18.2. Поля магнитного и электрического классов, их свойства и параметры . . . . .	215
18.3. Поле поперечного электромагнитного класса, его свойства и параметры . . . . .	219
18.4. Мощность, переносимая вдоль волновода бегущей волной . . . . .	221
18.5. Скорость распространения энергии вдоль волновода. Групповая скорость . . . . .	223
18.6. Затухание электромагнитных волн в волноводе, обусловленное потерями в металлических стенках . . . . .	226
18.7. Графическое изображение структуры поля . . . . .	228
18.8. Поля основного и высших типов . . . . .	229
18.9. Требования, предъявляемые к линии передачи . . . . .	230
<b>ГЛАВА 19</b>	
<b>РЕГУЛЯРНЫЕ ВОЛНОВОДЫ</b>	
19.1. Прямоугольный волновод . . . . .	231
19.2. Решение краевых задач . . . . .	231
19.3. Параметры полей типов $H_{mn}$ и $E_{mn}$ . . . . .	233
19.4. Комплексные амплитуды составляющих векторов $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ . . . . .	235
19.4. Мощность, переносимая бегущими волнами типов $H_{mn}$ и $E_{mn}$ . . . . .	236

19.5. Коэффициент затухания волн типов $H_{mn}$ и $E_{mn}$ , обусловленный потерями в металлических стенках	237
19.6. Волна основного типа	239
19.7. Концепция однородных плоских волн в волноводе	242
19.8. Выбор размеров поперечного сечения волновода в одноволновом режиме	245
19.9. Структура полей бегущих волн высших типов	246
19.10. Волноводы с поперечным сечением П- и Н-образной форм	248
Круглый волновод	249
19.11. Решение краевых задач	249
19.12. Параметры полей типов $H_{mn}$ и $E_{mn}$	252
19.13. Комплексные амплитуды составляющих векторов $E$ и $H$	253
19.14. Мощность, переносимая бегущими волнами типов $E_{mn}$ и $H_{mn}$	254
19.15. Коэффициент затухания волн типов $H_{mn}$ и $E_{mn}$ , обусловленный потерями в металлических стенках	255
19.16. Структура полей бегущих волн	256
19.17. Особенности использования круглого волновода	259
19.18. Эллиптический волновод	261
Коаксиальный круглый волновод	262
19.19. Поля в коаксиальном круглом волноводе	262
19.20. Мощность, переносимая бегущей Т-волной	265
19.21. Коэффициент затухания Т-волны, обусловленный потерями в металлических стенках	266
19.22. Выбор размеров коаксиального круглого волновода	266
19.23. Способы возбуждения волн в волноводах	267

## ГЛАВА 20

### РЕГУЛЯРНЫЕ ОТКРЫТЫЕ ЛИНИИ ПЕРЕДАЧИ

20.1. Симметричная двухпроводная линия передачи	269
20.2. Полосковые линии передачи	270
20.3. Основные этапы определения поля в линии передачи поверхностной волны	275
20.4. Диэлектрическая круглая линия передачи. Волоконный световод	278
20.5. Однопроводная круглая линия передачи	285

## Часть V

### Линейные устройства СВЧ

## ГЛАВА 21

### ВВЕДЕНИЕ В ТЕОРИЮ ВОЛНОВОДОВ С НЕРЕГУЛЯРНЫМИ ЭЛЕМЕНТАМИ

21.1. Нерегулярность реальных волноводов. Метод эквивалентных схем	287
21.2. Описание направляемых Т-волн теорией длинных линий	289
21.3. Эквивалентность между волноводом и длинной линией	294
21.4. Представление полного поля в волноводе векторными рядами. Мощность, переносимая полным полем вдоль волновода	298
21.5. Эквивалентная схема нерегулярности в волноводе	300
21.6. Плоские нерегулярности в волноводе	303
21.7. Штыри в прямоугольном волноводе	308
21.8. Волновая матрица рассеяния	310
21.9. Волновая матрица передачи четырехполюсника. Ослабление четырехполюсника	316

## ГЛАВА 22

### ОБЪЕМНЫЕ РЕЗОНАТОРЫ

22.1. Основные классы объемных резонаторов	318
22.2. Собственные колебания цилиндрического резонатора без потерь	321
22.3. Коаксиальные и полосковые резонаторы с укорачивающей емкостью	328
22.4. Квазистационарные резонаторы	329
22.5. Добротность объемных закрытых резонаторов	332

	Стр.
22.6. Пролодной волноводный резонатор . . . . .	335
22.7. Перестройка частоты объемных резонаторов . . . . .	338
22.8. Вынужденные колебания закрытых объемных резонаторов	340

**ГЛАВА 23**  
**СОГЛАСОВАНИЕ НАГРУЗКИ С ЛИНИЕЙ ПЕРЕДАЧИ.**  
**ЧАСТОТНЫЕ ФИЛЬТРЫ СВЧ**

Согласование нагрузки с линией передачи . . . . .	342
23.1. Принцип согласования нагрузки с линией передачи	342
23.2. Узкополосное согласование . . . . .	343
23.3. Широкополосное согласование активных сопротивлений	345
Частотные фильтры СВЧ . . . . .	350
23.4. Метод расчета частотных отражающих фильтров СВЧ	350
23.5. Полосовые и режекторные фильтры . . . . .	352
23.6. Фильтры гармоник . . . . .	361

**ГЛАВА 24**  
**УСТРОЙСТВА, ВХОДЯЩИЕ В ТРАКТ СВЧ**

Волноводные конструктивные элементы и оконечные нагрузки	364
24.1. Волноводные конструктивные элементы . . . . .	364
24.2. Поглощающие оконечные нагрузки	369
Двухплечные узлы . . . . .	370
24.3. Аттеньюаторы . . . . .	370
24.4. Фазовращатели . . . . .	371
24.5. Фильтры для подавления типов волн . . . . .	372
24.6. Поляризаторы . . . . .	374
24.7. Переходы с одного волновода на другой	375
Трехплечные узлы . . . . .	376
24.8. Т-образные соединения прямоугольных волноводов	376
24.9. Поляризацонный фильтр	378
Мосты и направленные ответвители . . . . .	379
24.10. Основные понятия и параметры . . . . .	379
24.11. Двойной волноводный тройник . . . . .	380
24.12. Кольцевой мост . . . . .	382
24.13. Квадратный мост . . . . .	385
24.14. Волноводный щелевой мост . . . . .	387
24.15. Направленные ответвители со связью через несколько отверстий . . . . .	389
24.16. Направленные ответвители и мосты на связанных линиях передачи с Т-волной . . . . .	391
24.17. Применение мостов и направленных ответвителей . . . . .	397
24.18. Устройства СВЧ с применением <i>pin</i> -диодов . . . . .	400

**ГЛАВА 25**  
**УСТРОЙСТВА СВЧ С НАМАГНИЧЕННЫМ ФЕРРИТОМ**

25.1. Виды невзаимных устройств СВЧ с намагниченным ферритом	404
25.2. Невзаимные ферритовые устройства в круглом волноводе . . . . .	406
25.3. Невзаимные ферритовые устройства в прямоугольном волноводе . . . . .	408
25.4. Невзаимные ферритовые устройства в коаксиальном волноводе и плосковых линиях . . . . .	412
25.5. Применение невзаимных ферритовых устройств . . . . .	414
<i>Приложение 1.</i> Векторный анализ . . . . .	415
<i>Приложение 2.</i> Сведения о цилиндрических функциях целого порядка . . . . .	419
Список литературы . . . . .	423

**ИБ № 509**

**Олег Исаакович Фальковский**

**ТЕХНИЧЕСКАЯ ЭЛЕКТРОДИНАМИКА**

Отв. редактор Б. М. Машковцев

Редактор С. Т. Симонова

Художник Т. М. Чиркова

Художественный редактор Е. П. Аксенов

Технический редактор Е. Р. Черепова

Корректор Г. Г. Лев

---

Сдано в набор 3/Х 1977 г.  
Подп. в печ. 21/ХII 1977 г.  
Т-18575 Формат 60×90/16 Бумага тип. № 2  
гарнитура литер., печать высокая 27,0 усл.-печ. л.  
27,6 уч.-изд. л. Тираж 20 000 экз. Изд. № 17631  
Зак. № 253 Цена 1 руб. 30 коп.  
Издательство «Связь».

Москва 101000, Чистопрудный бульвар, д. 2

---

Типография издательства «Связь»  
Госкомиздата СССР  
Москва 101000, ул. Кирова, д. 40

## *Уважаемые читатели!*

Издательство «Связь» в 1978 г.  
выпускает следующие книги:

Чернышев В. П. **Антенно-фидерные устройства радиосвязи и радиовещания.** Учебник для техникумов. М., «Связь», 1978 (III кв.). 15 л. с ил. 20 000 экз. 75 к. в пер. 30404.

Рассматриваются устройство и работа антенн и фидеров, применяемых в радиосвязи и радиовещании; описываются их основные параметры и характеристики. Особое внимание уделяется разъяснению физических процессов, протекающих в антеннах и фидерах, а также вопросам эксплуатации: рекомендациям по выбору типов антенн в зависимости от вида работы и условий распространения, по производству необходимых измерений.

Книга предназначена для учащихся техникумов связи.

**Антенны.** Сборник статей. Под ред. А. А. Пистолькорса. Вып. 26. М., «Связь», 1978 (II кв.). 14 л. с ил. 5000 экз. 85 к. 30404.

Описывается уникальный декаметровый радиотелескоп УТР-2. Приводятся принципы построения и характеристики его антенн. Рассмотрен интерферометр декаметрового диапазона УРАН-2.

Ряд статей посвящен различным вопросам антенной техники: дана оценка надежности фазирующих антенных решеток, рассматриваются антенны обратного излучения, полосковые линии, решетки с коммутационным управлением и др.

Сборник рассчитан на научных работников, специализирующихся в области антенн.

Эти книги можно приобрести во всех магазинах, распространяющих научно-техническую литературу.