МИНИСТЕРСТВО ЦИФРОВЫХ ТЕХНОЛОГИЙ РЕСПУБЛИКИ УЗБЕКИСТАН ТАШКЕНТСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ ИМЕНИ МУХАММАДА АЛЬ-ХОРАЗМИЙ

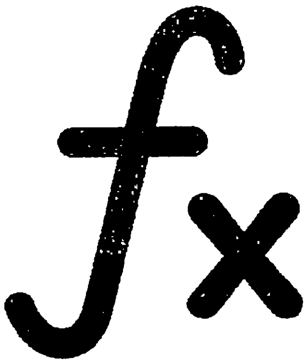
Факультет «СФИТ ТУИТ-БГУИР»
Кафедра «Информационно-компьютерные технологии и программирование»

Яхшибоев Р.Э.

«СПЕЦИАЛЬНЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ И ФУНКЦИИ»

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО ВЫПОЛНЕНИЕ ПРАКТИЧЕСКИХ РАБОТ

для студентов кафедры информационно-компьютерные технологии и программирование



Ташкент – 2023

Автор: Яхшибоев Р.Э.
«Специальные математические методы и функции» / ТУИТ, 40 с. Ташкент, 2023 г.

Изучаемая учебная дисциплина «Специальные математические методы и функции» включает в свой состав ряд тем, представляющих собой существенную значимость для профессиональной деятельности инженера.

Например, интегральные преобразования Фурье, Лапласа, Z -преобразования применяются при решении различных задач в областях радиотехники и электроники, а также связанных с ними приложениях в медицине, биологии, генетике, экологии; методы вариационного исчисления используются в задачах оптимизации сигналов. Освоение предлагаемого учебной программой материала способствует развитию у студентов логического мышления, умения выделять главное, воспитывает стремление к точности, как в учебной деятельности студента, так и в будущей профессиональной деятельности специалиста.

Методическое указание предназначено студентам по 60610900 – Программируемые мобильные системы (1-39 03 02 Программируемые мобильные системы) направлениям совместного факультета Ташкентский университет информационных технологии имени Мухаммада ал-Хоразмий и Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники.

Рецензенты :

Исмаилов О.М. - д.т.н., профессор кафедры "Информационно-компьютерные технологии и программирование" ТУИТ имени Мухаммада аль-Хоразмий.

Базарбаев М.И. - к.ф-м.н. доцент, заведующий кафедры "Биомедицинская инженерия, информатика и биофизика"

Практическое работа № 1

Тема: Линейное пространство, его баланс и размерность

Цель работы: научиться решать задачи на поиск базиса и определение размерности линейного пространства

Теоретическая часть

Пусть M – множество элементов произвольной природы, для которых определены операции сложения и умножения на действительное число:

- паре элементов множества $x \in M$, $y \in M$ отвечает элемент $x + y \in M$, называемый суммой x и y;
- паре $x \in M$, $\alpha \in \mathbb{R}$ отвечает элемент $\alpha x \in M$, называемый произведением числа α и элемента x.

Будем называть множество M *линейным пространством*, если для всех его элементов определены операции сложения и умножения на действительное число и для любых элементов $x, y, z \in M$ и произвольных чисел α, β справедливо:

1. $x + y = y + x$, сложение коммутативно;
2. $x + (y + z) = (x + y) + z$, сложение ассоциативно;
3. существует единственный нулевой элемент $0 \in M$ такой, что $x + 0 = x$, $\forall x \in M$;
4. для каждого элемента существует единственный противоположный элемент $-x$ такой, что $x + (-x) = 0$ $\forall x \in M$,
5. $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$, умножение на число ассоциативно;
6. $1 \cdot x = x$, $\forall x \in M$;
7. $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$, умножение на число дистрибутивно относительно сложения элементов;
8. $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$, умножение вектора на число дистрибутивно относительно сложения чисел.

Задания

1. Для каждого из следующих множеств геометрических векторов определить, будет ли это множество линейным подпространством

пространства V3 :

1) радиус-векторы точек данной плоскости;

2) векторы, образующие с данным ненулевым вектором a угол α ;

3) множество векторов, удовлетворяющих условию x = 1.

2. Пусть L – множество многочленов степени не выше 2, удовлетворяющих условию $p(1) + p'(1) + p''(1) = 0$. Доказать, что L – линейное подпространство в пространстве P_2. Найти его базис и размерность. Дополнить базис подпространства до базиса всего пространства.

3. Образуют ли многочлены $p_1(x) = x^3+x^2 - 1$, $p_2(x) = x^2 - 2x$, $p_3(x)$ = x3 + x,

$p_4(x) = x^2 - 3$ базис в пространстве P_3?

4. Образует ли линейное подпространство пространства 4 R множество V , заданное по правилу:

а) {(, , ; :) 2 }0 V = x1 x2 x3 x4 x1 − x3 = ;

б) {(, , , :) }1 V = x1 x2 x3 x4 x3 + x4 = .

Содержание отчёта

1. Использовать листы формата А4
2. Использовать шрифта Times New Roman, размер кегля 14
3. Интервал 1,5
4. Написать тему, цель и задачи практического работы
5. Выполнить задание
6. Написать выводы и ответить письменно на вопросы.

Контрольные вопросы.

1. Линейное пространство: определение, примеры.

2. Подпространство линейного пространства: определение, критерий подпространства (формулировка и доказательство), примеры.

3. Понятие линейной зависимости и независимости векторов. Необходимое и достаточное условие линейной зависимости векторов: формулировка, доказательство.

4. Определение базиса. Какие условия должны выполняться, если векторы e1, e2, ..., en образуют базис? Теорема о базисе: формулировка, доказательство.

Практическое работа № 2

Тема: Элементы функционального анализа

Цель работы: ознакомлении с основными понятиями и методами функционального анализа

Теоретическая часть

При изучении этой темы предполагается, что студенты знакомы с элементами функционального анализа, именно - с основными типами функциональных пространств (метрическими, банаховыми, гильбертовыми) и теорией линейных операторов.

Напомним некоторые понятия из функционального анализа, которые будут использоваться в последующем изложении.

Определение 1. Множество E называется **линейным нормировнным пространством** над полем вещественных или комплексных чисел, если

1. E - векторное пространство над полем вещественных (комплексных) чисел;
2. на E задана норма, то есть функция $\|\cdot\|: E \to R$, которая каждому элементу $x \in E$ ставит в соответствие число $\|x\|$, причем
   а) $\|x\| \geq 0$ для всех $x \in E$ и $\|x\| = 0$ тогда и только тогда, когда $x = 0$;
   б) $\|\lambda x\| = |\lambda|\,\|x\|$ для каждого λ из поля скаляров и каждого $x \in E$;
   в) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

Линейное нормированное пространство является **метрическим** с метрикой $\rho(x, y) = \|x - y\|$.

Определение 2. Линейное нормированное пространство E называется **банаховым,** если оно является полным относительно метрики $\rho(x, y) = \|x - y\|$, то есть каждая фундаментальная последовательность x_n ($\|x_n - x_m\| \to 0$ при $n,m \to \infty$) сходится к некоторому элементу из E.

Примеры

1. Пространство $C[a, b]$ - множество непрерывных функций f: $[a, b] \to R$ с нормой $\|f\| = \max_{a \leq t \leq b} |f(t)|$.
2. Пространство $C^{(p)}[a, b]$ - множество функций f: $[a, b] \to R$,

имеющих непрерывные производные до p-го порядка включительно с нормой
$\|f\|_p = \max_{a \le t \le b} |f(t)| + \max_{a \le t \le b} |f'(t)| + \ldots \max_{a \le t \le b} |f^{(p)}(t)|$.

Определение 3. Функционал - это числовая функция $\Phi(x)$, заданная на банаховом пространстве E.

В дальнейшем будут рассматриваться функционалы с действительными значениями. На функционалы распространяются обычные понятия анализа: непрерывность, дифференцируемость и другие.

Определение 4.

Функционал $\Phi: E \to R$ называется **непрерывным** в точке $y_0 \in E$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$, что для всех y таких, что $\|y - y_0\| < \delta$, выполняется неравенство
$|\Phi(y) - \Phi(y_0)| < \varepsilon$.

Определение 5.

Функционал $l(\cdot) \quad : E \to R$ на банаховом пространстве E называется линейным, если
1) $l(\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2) = \lambda_1 l(y_1) + \lambda_2 l(y_2)$,
2) $l(\cdot)$ - непрерывен.

Определение 6.

Функционал $\Phi(y)$, определенный на банаховом пространстве E, называется **дифференцируемым** в точке $y_0 \in E$, если приращение $\Delta\Phi(y_0, h) \equiv \Phi(y_0 + h) - \Phi(y_0)$ представимо в виде:
$\Delta\Phi(y_0, h) = l(h) + o(h)$,
где $l(h)$ - линейный функционал, $o(h) = \alpha(h) \cdot \|h\|$, причем $\alpha(h) \to 0$ при $\|h\| \to 0$.

Линейный функционал $l(h)$ обозначается $\delta\Phi(y_0, h)$ и называется **первой вариацией функционала** Φ в точке $y_0 \in E$.

Определение 7.

Точка $y_0 \in E$ называется **точкой локального максимума** (минимума) функционала $\Phi(\cdot) : E \to$ R, если существует окрестность $U(y_0) = \{y \in E : \|y - y_0\| < \varepsilon\}$, $\varepsilon > 0$, точки y_0 такая, что для всех $y \in U(y_0)$ выполняется неравенство $\Phi(y) < \Phi(y_0)$ (соответственно $\Phi(y) > \Phi(y_0)$).

Если выполняется строгое неравенство, то точка y_0 называется **точкой строгого локального максимума** (минимума).

При нахождении локальных экстремумов

дифференцируемых функционалов используется следующий результат (аналог известной в анализе теоремы Ферма).

Утверждение. Если функционал $\Phi : E \to R$ дифференцируем в точке $y_0 \in E$ и y_0 является точкой локального экстремума, то

$\delta\Phi(y_0; h) := l(h) \equiv 0$

для всех $h \in E$.

Доказательство: Пусть, например, y_0 - точка локального минимума.

Предположим, что существует элемент $h_0 \in E$, для которого $l(h_0) \neq 0$, скажем $l(h_0) > 0$.

Полагая $h = t\,h_0$, t - вещественное число, рассмотрим приращение

$\Delta\Phi(y_0, h) = l(h) + \alpha(h)\|h\| = t\,[l(h_0) + \alpha(th_0)\|h_0\|]$.

Для достаточно малых t выражение в скобках будет положительным, а поэтому $\Delta\Phi(y_0, h) > 0$ при $t > 0$ для сколь угодно близких к y_0 точек из E.

Это противоречит тому, что y_0 является точкой локального максимума. Утверждение доказано.

Задания

1. Пусть $E1, E2, E3, E4$ – базис в векторном пространстве. Разложить вектор

$X = e1 + 2E2 - E3 + 3E4$ по новому базису $И1, И2, И3, И4$, если $И1 = E1$,

$И2 = E1 + E2$, $И3 = E1 + E2 + E3$, $И4 = E1 + E2 + E3 + E4$.

Указание. Выпишите матрицу перехода от старого базиса к новому, столбцами которой являются координаты новых базисных векторов в старом базисе. Строки этой матрицы являются коэффициентами в формулах преобразования старых координат через новые.

2. Найти матрицу A' оператора A:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

В базисе $И1 = E1 + E3$, $И2 = 2E1 + E2$, $И3 = E1 + E2 + E3$.

Указание. Искомая матрица $A' = T\text{-}1\,A\,T$, где T – матрица перехода из старого базиса к новому.

3. Найти собственные числа и собственные векторы линейного оператора, заданного матрицей

$$A=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 5 & 3\end{pmatrix}.$$

Указание. Для определения собственных чисел составьте характеристическое уравнение:

$$\begin{vmatrix}1-\lambda & 3\\ 5 & 3-\lambda\end{vmatrix}=0.$$

Координаты собственных векторов $RI=(Xi,Yi)$ должны удовлетворять системе уравнений, коэффициенты которых получены из элементов строк определителя, стоящего в левой части характеристического уравнения, при подстановке LI.

4. В пространстве 3-мерных векторов задан оператор

$AX=(Xi)I$,

Где I – базисный вектор декартовой системы координат. Выяснить геометрический смысл этого оператора.

Указание. Множитель Xi – скалярное произведение, то есть число, поэтому вектор $(Xi)I$ коллинеарен оси Ox.

5. Привести матрицу A линейного оператора к диагональному виду и найти соответствующий базис, если

$$A=\begin{pmatrix}-1 & 3 & -1\\ -3 & 5 & -1\\ -3 & 3 & 1\end{pmatrix}.$$

Указание. Найдите собственные числа и собственные векторы матрицы линейного оператора, задайте базис из линейно независимых собственных векторов $R1$, $R2$, $R3$, в котором матрица оператора примет диагональный вид, и составьте матрицу перехода к новому базису.

Содержание отчёта

1. Использовать листы формата А4
2. Использовать шрифта Times New Roman, размер кегля 14
3. Интервал 1,5
4. Написать тему, цель и задачи практического работы
5. Выполнить задание
6. Написать выводы и ответить письменно на вопросы.

Контрольные вопросы.

1. Непрерывные линейные функционалы на пр-вах Lp (прямая теорема).
2. Непрерывные линейные функционалы на пр-вах Lp (обратная теорема).
3. Непрерывные линейные функционалы на гильбертовом пр-ве.
4. Непрерывные линейные функционалы на C[а,в] (прямая теорема).
5. Сопряженные операторы.

Практическое работа № 3

Тема: Применение обобщенного ряда Фурье при решении задач

Цель работы: уметь решать задачи на поиск коэффициентов ряда Фурье

Теоретическая часть

Во-первых, к изучению материалов страницы следует подойти в отличной форме. Выспавшимися. отдохнувшими и трезвыми. Без сильных эмоций по поводу сломанной лапы хомячка и навязчивых мыслей о тяготах жизни аквариумных рыбок. Ряд Фурье не сложен с точки зрения понимания, однако практические задания требуют просто повышенной концентрации внимания – в идеале следует полностью отрешиться от внешних раздражителей. Ситуация усугубляется тем, что не существует лёгкого способа проверки решения и ответа. Таким образом, если ваше самочувствие ниже среднего, то лучше заняться чем-нибудь попроще. Правда.

Во-вторых, перед полётом в космос необходимо изучить приборную панель космического корабля. Начнём со значений функций, которые должны щёлкаться на автомате:

$\cos 0 = 1$

$\sin 0 = 0$

При любом натуральном значении n:

1) $\sin \pi n = 0$. И в самом деле, синусоида «прошивает» ось абсцисс через каждое «пи»:
$\sin \pi = 0, \sin 2\pi = 0, \sin 3\pi = 0, \sin 4\pi = 0, \sin 5\pi = 0, \ldots$

В случае отрицательных значений аргумента результат, само собой, будет таким же: $\sin(-\pi n) = 0$.

2) $\cos \pi n = (-1)^n$. А вот это знали не все. Косинус «пи эн» представляет собой эквивалент «мигалки»:

$\cos \pi = -1$

$\cos 2\pi = 1$

$\cos 3\pi = -1$

$\cos 4\pi = 1$

$\cos 5\pi = -1$

...

Отрицательный аргумент дела не меняет: $\cos(-\pi n) = (-1)^n$.

Задания

1. Вычислить определённые интегралы

а) $\int_{-\pi}^{0} \cos nx\,dx$ б) $\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx\,dx$ в) $\int_{0}^{3} \sin \frac{\pi nx}{3}\,dx$ г) $\int_{-2}^{2} \cos \frac{\pi nx}{2}\,dx$

д) $\int_{-\pi}^{0} \sin nx\,dx$ е) $\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx\,dx$ ж) $\int_{0}^{3} \cos \frac{\pi nx}{3}\,dx$ з) $\int_{-2}^{2} \sin \frac{\pi nx}{2}\,dx$

где n принимает натуральные значения.

2. Разложить функцию $f(x) = x+1$ в ряд Фурье на промежутке $[-\pi, \pi]$. Построить график $f(x) = x+1$, график суммы ряда $S(x)$ и частичной суммы $S_3(x)$.

3. Разложить в ряд Фурье функцию $f(x)$, заданную на отрезке $[-\pi, \pi]$. Начертить график функции и полной суммы ряда.

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x, & \text{если } -\pi \le x \le 0 \\ 0, & \text{если } 0 < x \le \pi \end{cases}$$

4. Разложить функцию $f(x)$ в ряд Фурье и построить график суммы.

$$f(x)=\begin{cases}-2, & \text{если } -3<x\le 0\\ 3-x, & \text{если } 0<x\le 3\end{cases}$$

Содержание отчёта

1. Использовать листы формата А4
2. Использовать шрифта Times New Roman, размер кегля 14
3. Интервал 1,5
4. Написать тему, цель и задачи практического работы
5. Выполнить задание
6. Написать выводы и ответить письменно на вопросы.

Контрольные вопросы.

1. На какие типы периодических сигналов делятся спектры?
2. Как можно разложить периодические сигналы в ряд Фурье?
3. Как нечеткие сигналы вписываются в ряд Фурье?
4. Сигналы какого типа представляют собой сигналы сложной формы, распространяющиеся в рядах Фурье?

Практическое работа № 4

Тема: Линейные отображения, функционалы, операторы

Цель работы: научиться решать задачи на поиск ядра, образа и ранга линейного отображения

Теоретическая часть

Линейным отображением (линейным оператором) векторного пространства L_K над полем K в векторное пространство M_K (над тем же полем K) называется отображение

$$f:\ L_K \to M_K,$$

удовлетворяющее *условию линейности*

$$f(\alpha x+\beta y)=\alpha f(x)+\beta f(y).$$

для всех $x, y \in L_K$ и $\alpha, \beta \in K$.

- **Линейный функционал** — линейный оператор, для которого $M = K$:
- $f : L_K \to K$
- **Эндоморфизм** — линейный оператор, для которого $L = M$:
  $f : L_K \to L_K$
- **Тождественный оператор** — оператор $x \mapsto x$, отображающий каждый элемент пространства в себя.
- **Нулевой оператор** — оператор, переводящий каждый элемент L_K в нулевой элемент M_K.

Ядром линейного отображения $f : A \to B$ называются подмножество *A*, которое отображается в нуль:

$$\mathrm{Ker} f = \{x \in A : f(x) = 0\}$$

Ядро линейного отображения образует подпространство в линейном пространстве *A*.

Образом линейного отображения *f* называется следующее подмножество *B*:

$$\mathrm{Im} f = \{f(x) \in B : x \in A\}$$

Образ линейного отображения образует подпространство в линейном пространстве *B*.

Отображение $f : A \times B \to C$ прямого произведения линейных пространств *A* и *B* в линейное пространство *C* называется **билинейным**, если оно линейно по обоим своим аргументам.

Отображение прямого произведения большего числа линейных пространств $f : A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n \to B$ называется **поли линейным**, если оно линейно по всем своим аргументам.

Задания

1. Найти матрицу линейного отображения между двумя конкретными пространствами, например, между

пространством векторов в трехмерном пространстве и пространством многочленов второй степени.

2. Найти ядро, образ и ранг линейного отображения и определить, является ли оно инъективным, сюръективным или биективным.
3. Найти базис ядра и образа линейного отображения.
4. Найти функционал, удовлетворяющий определенным условиям, например, функционал, линейный и ограниченный на пространстве непрерывных функций на отрезке [0,1] с заданной нормой.
5. Найти ядро и образ функционала, а также его норму.
6. Найти функционал, который достигает своего максимума или минимума на заданном пространстве.
7. Найти спектр оператора и его собственные значения и векторы.
8. Найти ядро и образ оператора, и его ранг.
9. Найти оператор, который диагонализуется, и найти его собственные значения и собственные векторы.

Содержание отчёта

1. Использовать листы формата А4
2. Использовать шрифта Times New Roman, размер кегля 14
3. Интервал 1,5
4. Написать тему, цель и задачи практического работы
5. Выполнить задание
6. Написать выводы и ответить письменно на вопросы.

Контрольные вопросы.

1. Что такое линейное отображение?
2. Как определяется матрица линейного отображения?
3. Какие свойства имеют линейные отображения?
4. Что такое ядро линейного отображения? Как его найти?
5. Что такое образ линейного отображения? Как его найти?
6. Что такое ранг линейного отображения? Как его найти?
7. Что такое инъективное, сюръективное и биективное линейное отображение?
8. Что такое функционал?

Практическое работа № 5

Тема: Решение задач математической физики

Цель работы: научиться решать задачи математической физики

Теоретическая часть

Решение задач математической физики — это процесс применения математических методов для описания физических явлений и процессов. Оно включает в себя постановку физической задачи, анализ ее условий и решение математических уравнений, описывающих явление.

Для решения задач математической физики используются различные математические методы, включая дифференциальные уравнения, интегральные уравнения, теорию функций комплексного переменного, теорию операторов, функциональный анализ и другие.

Решение задач математической физики может быть как аналитическим, так и численным. В аналитическом решении используются методы, позволяющие получить точное аналитическое решение уравнений. В численном решении задачи, с другой стороны, используются методы численного анализа, которые позволяют приближенно решить уравнения.

Примеры задач математической физики, которые решаются в науке и технике, включают задачи теплопроводности, задачи волновой динамики, задачи механики сплошных сред, задачи электромагнитной динамики, задачи квантовой механики и другие.

Решение задач математической физики имеет широкое применение в различных областях, таких как физика, инженерия, биология, медицина и др.

Пример. Определить тип уравнений. Привести к каноническому виду.

Решение. Вычисляем дискриминант:

$D = 2^2 - 1 = 3 > 0$, уравнение гиперболического типа.

Записываем:

$$(dy)^2 - 4dxdy + (dx)^2 = 0,$$

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 4\frac{dy}{dx} + 1 = 0,$$

$$\frac{dy}{dx} = 2 \pm \sqrt{3}.$$

Обозначим $a = 2+\sqrt{3}$, $b = 2-\sqrt{3}$, тогда решение

$$\begin{cases} y - ax = c_1, \\ y - bx = c_2. \end{cases}$$

Делаем замену:

$$\begin{cases} \xi = y - ax, \\ \eta = y - bx; \end{cases}$$

Тогда обратная замена:

$$\begin{cases} x = \dfrac{\xi - \eta}{b - a}, \\ y = \dfrac{b\xi - a\eta}{b - a}. \end{cases}$$

Вычисляем производные:

$$\xi_x = -a,\ \xi_y = 1,$$

$$\eta_x = -b,\ \eta_y = 1.$$

$$u_x = -au_\xi - bu_\eta,$$

$$u_y = u_\xi + u_\eta.$$

$$u_{xx} = a^2 u_{\xi\xi} + b^2 u_{\eta\eta} + 2u_{\xi\eta} ab,$$

$$u_{yy} = u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} + 2u_{\xi\eta},$$

$$u_{xy} = -au_{\xi\xi} - bu_{\eta\eta} + u_{\xi\eta}(-a-b).$$

Подставляем все в исходное уравнение $u_{xx}+4u_{xy}+u_{yy}+u_x+u_y-x^2y=0$:

$$\left(a^2u_{\xi\xi}+b^2u_{\eta\eta}+2u_{\xi\eta}ab\right)+4\left(-au_{\xi\xi}-bu_{\eta\eta}+u_{\xi\eta}(-a-b)\right)+$$

$$+\left(u_{\xi\xi}+u_{\eta\eta}+2u_{\xi\eta}\right)+\left(-au_\xi-bu_\eta\right)+\left(u_\xi+u_\eta\right)-\left(\frac{\xi-\eta}{b-a}\right)^2\left(\frac{b\xi-a\eta}{b-a}\right)=0.$$

Подставляем $a=2+\sqrt{3}, b=2-\sqrt{3}$, учитывая, что
$a^2=7+4\sqrt{3}, b^2=7-4\sqrt{3}, ab=1, a+b=4, b-a=-2\sqrt{3}$.

Получаем:

$$u_{\xi\xi}\left(7+4\sqrt{3}+1-8-4\sqrt{3}\right)+u_{\eta\eta}\left(7-4\sqrt{3}+1-8+4\sqrt{3}\right)+u_{\xi\eta}(2+2-16)+\widetilde{F}=0,$$

$$-12u_{\xi\eta}+\widetilde{F}=0.$$

Получили уравнение гиперболического типа в каноническом виде. За $\widetilde{F}$ обозначены все слагаемые порядка меньше 2:

$$\widetilde{F}=\left(-au_\xi-bu_\eta\right)+\left(u_\xi+u_\eta\right)-\left(\frac{\xi-\eta}{b-a}\right)^2\left(\frac{b\xi-a\eta}{b-a}\right),$$ где $a=2+\sqrt{3}, b=2-\sqrt{3}$.

Задания

1. Найдите собственные значения и собственные функции оператора Шрёдингера для гармонического осциллятора.
2. Рассчитайте распределение температуры внутри круглой пластины, находящейся в условиях теплообмена с окружающей средой.
3. Решите задачу о распространении звуковой волны в однородной среде.
4. Рассчитайте поле скоростей жидкости внутри цилиндрической трубы при стационарном течении.
5. Найдите распределение электрического поля внутри сферического конденсатора.

Содержание отчёта

1. Использовать листы формата А4
2. Использовать шрифта Times New Roman, размер кегля 14
3. Интервал 1,5
4. Написать тему, цель и задачи практического работы

5. Выполнить задание
6. Написать выводы и ответить письменно на вопросы.

Контрольные вопросы.

1. Что такое уравнение теплопроводности?
2. Какие методы решения уравнения Лапласа используются в математической физике?
3. Какие граничные условия могут быть заданы для уравнения Пуассона?
4. Какие методы решения уравнения Шредингера используются в квантовой механике?
5. Какое уравнение используется для описания движения жидкости?
6. Что такое закон сохранения энергии в физике?

Практическое работа № 6
Тема: Гамма и бета функции

Теоретическая часть

Гамма-функция

$$\Gamma(z) \equiv \int_0^\infty e^{-t}\, t^{z-1}\, dt\,.$$

Функцию исследовал Леонард Эйлер в 1730 г. Сходимость интеграла на верхнем пределе обеспечивает функция e^{-t}. Сходимость на нижнем пределе зависит от величины z. При целом отрицательном и нулевом z интеграл расходится.

Анализ интеграла

Область интегрирования $(0,\infty)$ разбиваем на участки $(0,1)$ и $(1,\infty)$

$$\Gamma(z) = Q(z) + P(z),$$

где

$$Q(z) \equiv \int_1^{\infty} e^{-t} t^{z-1}\, dt, \quad P(z) \equiv \int_0^1 e^{-t} t^{z-1}\, dt.$$

1. Функция $Q(z)$ конечна при любых z.

Доказательство

На верхнем пределе e^{-t} убывает с ростом t быстрее любой степенной функции, и интеграл сходится при любых z.

На нижнем пределе интеграл конечен при любых z

$$\int_1^C e^{-t} t^{z-1}\, dt < \frac{1}{e}\int_1^C t^{z-1}\, dt = \begin{cases} \left.\dfrac{1}{ez} t^z\right|_{t=1}^{t=C}, & z \neq 0, \\ \left.\dfrac{1}{e}\ln t\right|_{t=1}^{t=C}, & z = 0. \end{cases}$$

2. Функция $P(z) \equiv \int_0^1 e^{-t} t^{z-1}\, dt$ имеет полюса первого порядка при $z = 0, -1, -2, \ldots$

Доказательство

Учитывая $t \le 1$, разлагаем в ряд Маклорена

$$e^{-t} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} t^n,$$

получаем

$$P(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \int_0^1 t^{z+n-1}\, dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{1}{z+n} \left. t^{z+n} \right|_0^1 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{1}{z+n}$$

При положительном $z > 0$ используем $z + n \ge \delta > 0$, тогда

$$P(z) < \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\delta\, n!} = \frac{e}{\delta} \text{ – конечное,}$$

где учтено

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\equiv e\cong 2{,}72\,.$$

При отрицательном $z=-m+\varepsilon$, где $\varepsilon\to\pm0$; $m=0,1,2,\ldots$, для

$$P(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}\frac{1}{z+n}$$

получаем

$$P(-m+\varepsilon)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}\frac{1}{n-m+\varepsilon}.$$

Одно слагаемое $n=m$ дает полюс первого порядка, остальные слагаемые конечные и ими пренебрегаем вблизи полюсов, тогда

$$\lim_{\varepsilon\to\pm0}\tilde{A}(-m+\varepsilon)=\frac{(-1)^m}{m!}\frac{1}{\varepsilon},$$

$$\lim_{\varepsilon\to\pm0}\frac{\Gamma[N(-n+\varepsilon)]}{\Gamma[M(-m+\varepsilon)]}=(-1)^{Nn-Mm}\frac{(Mm)!}{(Nn)!}\frac{M}{N},$$

где $m,n,M,N=0,1,2,\ldots$

Доказательство

Используя, получаем:

$$\frac{\Gamma[N(-n+\varepsilon)]}{\Gamma[M(-m+\varepsilon)]}=\frac{\Gamma(-Nn+N\varepsilon)}{\Gamma(-Mm+M\varepsilon)}=\frac{(-1)^{Nn}}{(-1)^{Mm}}\frac{(Mm)!}{(Nn)!}\frac{M\varepsilon}{N\varepsilon}=(-1)^{Nn-Mm}\frac{(Mm)!}{(Nn)!}\frac{M}{N}.$$

В точках $z=0,-1,-2,-3,\ldots$ ***функция*** $\Gamma(z)$ ***имеет полюса первого порядка.***

Бета-функция

Определяется в виде

$$\mathrm{B}(x,y)\equiv\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt$$

Связь с гамма-функцией

В заменяем аргумент

$$t=\cos^2\varphi, \quad 1-t=\sin^2\varphi, \quad dt=-2\sin\varphi\cos\varphi\, d\varphi,$$

$$t_1=0, \quad \varphi_1=\pi/2;$$

$$t_2=1, \quad \varphi_2=0,$$

получаем

$$\mathrm{B}(x.y)=2\int_0^{\pi/2}\cos^{2x-1}\varphi\sin^{2y-1}\varphi\, d\varphi.$$

Сравниваем с

$$\int_0^{\pi/2}\cos^{2x-1}\varphi\sin^{2y-1}\varphi\, d\varphi=\frac{1}{2}\frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)},$$

находим

$$\mathrm{B}(x,y)\equiv\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt=\frac{\tilde{A}(x)\tilde{A}(y)}{\tilde{A}(x+y)}.$$

Замена $x\leftrightarrow y$ в дает

$$\mathrm{B}(x,y)=\mathrm{B}(y,x).$$

Интеграл со степенными функциями

В заменяем аргумент $t\to z$:

$$t=\frac{z-a}{b-a}, \quad 1-t=\frac{b-z}{b-a},$$

$$dt=\frac{dz}{b-a},$$

$$t_1=0, \quad z_1=a,$$

$$t_2=1, \quad z_2=b,$$

заменяем параметры

$$x-1=p, \quad y-1=q,$$

получаем

$$\int_a^b (z-a)^p (b-z)^q dz = (b-a)^{p+q+1} \frac{\Gamma(p+1)\Gamma(q+1)}{\Gamma(p+q+2)}.$$

В разделе Примеры 2 получено

$$\mathrm{B}(x,y) = \int_0^\infty \frac{z^{x-1}}{(1+z)^{x+y}} dz.$$

Формула удвоения $B(z,z)$

Из

$$\mathrm{B}(x,y) \equiv \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1} dt$$

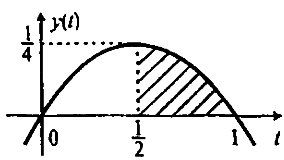
при $x=y=z$

$$B(z,z) = \int_0^1 [t(1-t)]^{z-1} dt = \int_0^1 \left[\frac{1}{4} - \left(t-\frac{1}{2}\right)^2\right]^{z-1} dt = 2\int_{1/2}^1 [y(t)]^{z-1} dt,$$

где

$$y(t) \equiv t(1-t) = \frac{1}{4} - \left(t - \frac{1}{2}\right)^2.$$

График $y(t)$ симметричен относительно $t=1/2$, область интегрирования в последнем интеграле отмечена штриховкой.



В интеграле

$$B(z,z)=2\int\limits_{1/2}^{1}\left[\frac{1}{4}-\left(t-\frac{1}{2}\right)^2\right]^{z-1}dt$$

заменяем аргумент

$$t-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}u^{1/2},$$

$$t_1=1/2,\quad u_1=0,$$

$$t_2=1,\quad u_2=1,$$

$$dt=\frac{1}{4}u^{-1/2}du,$$

$$\frac{1}{4}-\left(t-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{2^2}(1-u),$$

получаем

$$\mathrm{B}(z,z)=\frac{1}{2^{2z-1}}\int\limits_0^1 u^{-1/2}(1-u)^{z-1}du\equiv\frac{1}{2^{2z-1}}\mathrm{B}\left(\frac{1}{2},z\right),$$

где учтены

$$\int\limits_0^1 u^{x-1}(1-u)^{y-1}du=\mathrm{B}(x,y).$$

Из

$$\mathrm{B}(x,y)=\frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}.$$

находим

$$\mathrm{B}\left(\frac{1}{2},z\right)=\sqrt{\pi}\frac{\Gamma(z)}{\Gamma(z+1/2)},$$

$$\mathrm{B}(z,z)=\frac{\Gamma(z)\Gamma(z)}{\Gamma(2z)}.$$

Подставляем в и получаем ***формулу удвоения***

$$\sqrt{\pi}\,\Gamma(2z)=2^{2z-1}\,\Gamma(z)\,\Gamma\left(z+\frac{1}{2}\right).$$

Задания

1. Отношение бета-функции к гамма-функции.
2. Некоторые важные результаты.
3. Производная гамма-функции 11.
4. Вычисление некоторых интегралов.

Содержание отчёта

1. Использовать листы формата А4
2. Использовать шрифта Times New Roman, размер кегля 14
3. Интервал 1,5
4. Написать тему, цель и задачи практического работы
5. Выполнить задание
6. Написать выводы и ответить письменно на вопросы.

Контрольные вопросы.

1. Зачем нам нужна гамма-функция?
2. Как гамма-функция может интерполировать функцию факториала?
3. Как будет выглядеть график гамма-функции?
4. Свойства гамма-функции
5. Определение бета-функции$B(m, n)$

Практическое работа № 7

Тема: Дифференциальные уравнения и функции Бесселя, их приложения

Цель работы:

Теоретическая часть

Дифференциальные уравнения являются одним из основных инструментов математического моделирования и находят широкое применение во многих областях науки, техники и экономики. Одним из классов дифференциальных уравнений, которые имеют важное практическое значение, являются уравнения, связанные с функциями Бесселя.

Функции Бесселя являются решениями дифференциальных уравнений, которые возникают при решении задач математической физики, таких как задачи о колебаниях, теплопроводности и электродинамике. Функции Бесселя являются особым классом функций, которые имеют множество интересных свойств и приложений.

Одно из наиболее распространенных приложений функций Бесселя — это задачи о колебаниях. Например, функции Бесселя используются для описания колебаний звуковых волн в акустических системах, колебаний мембраны в динамических громкоговорителях, колебаний механических систем, таких как колебания струны и мембраны.

Также функции Бесселя используются в задачах математической физики, связанных с распространением электромагнитных волн и решениями уравнений теплопроводности. В этих задачах функции Бесселя выступают в качестве базисных функций, которые позволяют разложить решение задачи в ряд Фурье.

Функции Бесселя также находят применение в других областях науки и техники, таких как оптика, теория управления, теория вероятностей и статистика, теория чисел и т.д.

Таким образом, функции Бесселя и дифференциальные уравнения, связанные с ними, имеют широкий спектр приложений в различных областях науки и техники и представляют собой важный инструмент для математического моделирования и анализа.

Дифференциальное уравнение Бесселя Определение. Дифференциальное уравнение

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - \nu^2)y = 0, x > 0$$

называется *уравнением Бесселя* ν-го порядка.

Число ν может быть и комплексным, но мы будем рассматривать действительные неотрицательные значения ν.

Замечания

1. Разделив обе части равенства (П4.1) на x Ф 0 и учитывая, что $xy' + y'' = (xy'У$, получаем уравнение

$$(xy')' + \left(x - \frac{\nu^2}{x}\right)y = 0,$$

которое называется *уравнением Бесселя в самосопряженном виде.*

2. После деления на $x^2 *$ 0 приходим к еще одному представлению уравнения Бесселя:

$$y'' + \frac{1}{x}y' + \left(1 - \frac{\nu^2}{x^2}\right)y = 0.$$

Решения уравнения Бесселя. Уравнение Бесселя является линейным дифференциальным уравнением второго порядка. Поэтому его общее решение представляется с помощью двух линейно независимых частных решений. Доказано, что решения уравнения Бесселя не являются, вообще говоря, элементарными функциями. Их находят в виде степенных рядов. Так, одно из решений уравнения v-го порядка имеет вид

$$J_\nu(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{\Gamma(k+1)\Gamma(k+\nu+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu}, x > 0,$$

где Г (^) = | t^z~^{x}e~'dt, z> 0 — *гамма-функция Эйлера.*

Как уже отмечалось, мы считаем, что порядок уравнения v> 0. Оказывается, что и ряд

$$J_{-\nu}(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{\Gamma(k+1)\Gamma(k-\nu+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k-\nu}, x > 0$$

представляет одно из решений уравнения Бесселя порядка v> 0.

Определение. Функция, определенная равенством, где vsl, называется *функцией Бесселя первого рода порядка* v.

Замечания

1. Если порядок уравнения Бесселя v > 0 не является целым числом, то его частные решения *J*$_v$*(x)* из и *J*_$_v$*(x)* из линейно независимы, так что общее решение этого уравнения имеет вид

$$y(x) = C_1 J_\nu(x) + C_2 J_{-\nu}(x),$$

где С| и С₂ — произвольные постоянные.

Часто вместо *J*_$_x$*(x)* в качестве линейно независимого с *J*$_v$*(x)* решения используют линейную комбинацию функций *J*$_v$*(x)* и У_$_y$(х):

$$N_\nu(x) = \operatorname{ctg}\pi\nu J_\nu(x) - \frac{1}{\sin\pi\nu} J_{-\nu}(x).$$

Тогда общее решение уравнения Бесселя принимает вид:

$$y(x) = C_1 J_\nu(x) + C_2 N_\nu(x).$$

Задания

1. Распределение тепла в твердых телах или жидкостях. Это может быть описано дифференциальным уравнением теплопроводности, которое может быть решено с помощью функций Бесселя.
2. Распределение электрического поля в цилиндрических или сферических системах. Это может быть описано дифференциальным уравнением Пуассона, которое может быть решено с помощью функций Бесселя.
3. Решение задач колебаний мембран и струн. Это может быть описано дифференциальным уравнением колебаний, которое может быть решено с помощью функций Бесселя.
4. Распределение света в оптических системах, таких как линзы или зеркала. Это может быть описано дифференциальным уравнением Гельмгольца, которое может быть решено с помощью функций Бесселя.

Содержание отчёта

1. Использовать листы формата А4
2. Использовать шрифта Times New Roman, размер кегля 14
3. Интервал 1,5
4. Написать тему, цель и задачи практического работы
5. Выполнить задание
6. Написать выводы и ответить письменно на вопросы.

Контрольные вопросы.

1. Что такое дифференциальное уравнение?
2. Дайте примеры физических задач, которые могут быть решены с помощью дифференциальных уравнений и функций Бесселя.
3. Что такое функции Бесселя и как они связаны с решением дифференциальных уравнений в цилиндрических координатах?

4. Какие методы можно использовать для решения дифференциальных уравнений и функций Бесселя?
5. Как связаны функции Бесселя разных порядков и как они влияют на решение дифференциальных уравнений?
6. Какие приложения имеют функции Бесселя в науке и технике?

Практическое работа № 8

Тема: Применение преобразования Лапласа и Z – преобразования при решении задач

Цель работы: ознакомиться с применением преобразования Лапласа и Z-преобразования при решении различных задач

Теоретическая часть

Преобразование Лапласа и Z-преобразование — это математические методы, которые позволяют перевести дифференциальные уравнения или разностные уравнения соответственно в алгебраические уравнения. Эти методы широко используются в различных областях науки и инженерии для анализа и проектирования систем.

Преобразование Лапласа Преобразование Лапласа — это интегральное преобразование, которое позволяет переводить функцию времени в функцию частоты. Оно определяется следующим образом:

$$\boxed{F(s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st}dt}$$

Где *F(s)* - преобразование Лапласа функции *f(t)*,
s - комплексная переменная,
t - время.

Преобразование Лапласа обладает рядом свойств, которые облегчают анализ и решение уравнений. Некоторые из этих свойств включают линейность, сдвиг, производную и интегрирование.

Применение преобразования Лапласа включает решение дифференциальных уравнений, нахождение частотных характеристик систем, решение задач управления и фильтрации, анализ систем с переменными коэффициентами и т.д.

Z-преобразование — это дискретное преобразование, которое позволяет переводить последовательности значений в функцию частоты. Оно определяется следующим образом:

$$\boxed{F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f(n) z^{-n}}$$

где $F(z)$ - Z-преобразование последовательности $f(n)$,
z - комплексная переменная.

Z-преобразование также обладает рядом свойств, которые облегчают анализ и решение уравнений. Некоторые из этих свойств включают линейность, сдвиг, производную и интегрирование.

Применение Z-преобразования включает решение разностных уравнений, нахождение частотных характеристик систем, решение задач управления и фильтрации, анализ систем с переменными коэффициентами и т.д.

Оригинал — последовательность $\{f(k),\ k = 0, 1, \ldots\}$, удовлетворяющая условию: $|f(k)| < M e^{\sigma k}$, где M и σ — положительные постоянные.

Изображение последовательности $\{f(k),\ k = 0, 1, \ldots\}$ — функция $F(z)$ комплексного переменного z, определяемая равенством

$$F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f(k)}{z^k}.$$

Изображение является аналитической функцией при $|z| > e^{\sigma}$.

Совокупность всех оригиналов называется **пространством оригиналов,** а совокупность всех изображений — **пространством изображений.**

Переход, определяющий изображение $F(z)$ по оригиналу $\{f(k),\ k = 0, 1, \ldots\}$, называется **Z-преобразованием:**

$$F(z) = Z[f(k)].$$

Оригинал по изображению находится с помощью обратного Z-преобразования по формуле:

$$f(k) = \frac{1}{2\pi i}\oint\limits_C F(z)z^{k-1}dz, \quad k = 0, 1, \dots,$$

где C — контур, внутри которого лежат все особые точки функции $F(z)$.

Задания

1. Найти изображения по оригиналам:

а) $f(k) = a^k$; б) $f(k) = 1$; в) $f(k) = \frac{a^k}{k!}$; г) $f(k) = e^{ak}$.

2. **Найти оригиналы для функций:**

а) $F(z) = \frac{z}{(z-1)^2}$; б) $F(z) = \frac{z^2}{z^2 - z - 1}$; в) $F(z) = \frac{1}{(z-a)(z-b)}$;

г) $F(z) = \frac{z}{(z^2-9)^2}$; д) $F(z) = \frac{z^2+z}{z^2-z+1}$; е) $F(z) = \frac{z^2}{z^2-\sqrt{2}z+1}$;

3. **Найти решение задачи:**
$x(k+2) - x(k+1) + x(k) = 0,\ x(0) = 1,\ x(1) = 2$.

4. **Найти решение задачи:**

$$x(k+2) - \sqrt{3}x(k+1) + x(k) = 0,\ x(0) = \frac{1}{2},\ x(1) = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Содержание отчёта

1. Использовать листы формата А4
2. Использовать шрифта Times New Roman, размер кегля 14
3. Интервал 1,5
4. Написать тему, цель и задачи практического работы
5. Выполнить задание
6. Написать выводы и ответить письменно на вопросы.

Контрольные вопросы.

1. Что такое преобразование Лапласа и для чего оно

используется?

2. Каким образом можно применять преобразование Лапласа для решения дифференциальных уравнений?
3. Что такое Z-преобразование и для чего оно используется?
4. Каким образом можно применять Z-преобразование для анализа и проектирования систем связи и управления?
5. Каким образом можно применять преобразование Лапласа и Z-преобразование для анализа и прогнозирования временных рядов в экономике и финансах?
6. Какие навыки развиваются у студентов в процессе выполнения практической работы по применению преобразования Лапласа и Z-преобразования для решения задач в науке и инженерии?

Практическое работа № 9

Тема: Элементы вариационного исчисления

Цель работы: овладении навыками формулирования и решения задач вариационного исчисления с использованием соответствующих математических методов

Теоретическая часть

Вариационное исчисление — это раздел математического анализа, который изучает экстремальные свойства функционалов (то есть функций, которые отображают множество функций в действительные числа). Вариационное исчисление имеет множество приложений в физике, инженерии, экономике и других областях.

Элементы вариационного исчисления включают:

1. Функционалы — это функции, которые отображают множество функций в действительные числа. Примером функционала может служить интеграл от функции, определенной на некотором интервале.
2. Вариации — это малые изменения функций, которые приводят к изменению значения функционала. Вариация функции определяется как разность между функцией и

функцией, отличающейся от исходной функции на некоторую малую величину.

3. Условия экстремума — это условия, которые должны выполняться, чтобы функционал достигал экстремума (минимума или максимума) на некотором множестве функций.
4. Уравнения Эйлера-Лагранжа — это уравнения, которые определяют функции, для которых функционал достигает экстремума. Уравнения Эйлера-Лагранжа получаются путем решения определенного дифференциального уравнения.
5. Вариационные методы — это методы решения задач, которые сводятся к нахождению экстремума функционала. Вариационные методы используются для решения различных задач в науке и инженерии, таких как оптимизация, теория управления, механика и другие.

Задания

1. Решить классическую задачу вариационного исчисления:

$$\int_0^1 \dot{x}^2 dt \to extr, \quad x(0) = 1, x(1) = 0.$$

2. Решить задачу Больца

$$\int_0^1 \dot{x}^2 dt + \alpha x^2(1) \to extr, \quad x(0) = 1.$$

3. Решить изопериметрическую задачу

$$\int_0^1 \dot{x}^2 dt \to extr, \int_0^1 x^2 dt = 3, \quad x(0) = 1, x(1) = 6.$$

4. Решить задачу со старшими производными

$$\int_0^\pi (\ddot{x}^2 + 4x^2) dt \to extr, \quad x(0) = \dot{x}(0) = 0, \ \dot{x}(\pi) = sh(\pi).$$

Содержание отчёта

1. Использовать листы формата А4
2. Использовать шрифта Times New Roman, размер кегля 14
3. Интервал 1,5
4. Написать тему, цель и задачи практического работы

5. Выполнить задание
6. Написать выводы и ответить письменно на вопросы.

Контрольные вопросы.

1. Что такое функционал в вариационном исчислении?
2. Каким образом можно найти экстремаль функционала в вариационном исчислении?
3. Что такое уравнение Эйлера-Лагранжа и как его получают?
4. Каким образом можно использовать уравнение Эйлера-Лагранжа для нахождения экстремалей?
5. Что такое условия трансверсальности в вариационном исчислении?
6. Каким образом можно использовать условия трансверсальности для нахождения экстремалей?

Практическое работа № 10

Тема: Решение задач методом операционного исчисления

Цель работы: приобретении практических навыков решения задач оптимального управления для динамических систем

Теоретическая часть

Метод операционного исчисления является математической техникой, позволяющей решать задачи оптимального управления. Он основывается на представлении динамической системы в виде оператора, который действует на функцию состояния системы. Операторы задаются с помощью уравнений эволюции, а функции состояния и управления определяются с помощью начальных и конечных условий.

Прежде чем перейти к описанию метода операционного исчисления, рассмотрим основные понятия, связанные с задачей оптимального управления.

Динамическая система определяется уравнениями, описывающими изменение состояния системы во времени. В общем случае, динамическая система может быть описана системой дифференциальных уравнений:

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t),$$

где $x(t)$ - вектор состояния системы,
$u(t)$ - управление,
t - время, а f - некоторая функция.

Цель задачи оптимального управления состоит в том, чтобы выбрать такое управление $u(t)$, которое минимизирует функционал качества J, определенный следующим образом:

$$J(u) = \varphi(x(T)) + \int_{t_0}^{T} L(x(t), u(t), t)dt,$$

где φ - функция, задающая весовой коэффициент для состояния системы в момент времени T, а L - функция, задающая весовой коэффициент для состояния системы в каждый момент времени t на интервале [t_0, T].

Теперь перейдем к методу операционного исчисления. Он заключается в построении оператора, который действует на функцию состояния системы и определяется с помощью уравнений эволюции. Оператор действует на функцию $x(t)$ и обозначается как L:

$$\mathcal{L}x(t) = f(x(t), u(t), t).$$

С помощью оператора L задача оптимального управления может быть сформулирована как задача поиска функции $x(t)$, которая минимизирует функционал:

$$J(u) = \varphi(x(T)) + \int_{t_0}^{T} L(x(t), u(t), t)dt,$$

при условии, что начальное состояние x(t_0) известно и функция $x(t)$ удовлетворяет уравнению эволюции:

$$\mathcal{L}x(t) = f(x(t), u(t), t).$$

Задания

1. Найти изображение данного оригинала, или оригинала, удовлетворяющего данному уравнению

$$f(t) = \frac{e^{2t} - e^{-3t}}{t}.$$

2. Пользуясь определением, найти изображение функции:

$$f(t) = 3^t.$$

3. Найти изображение функции:

$$\int_0^t \cos\tau \cdot e^{-3\tau} d\tau.$$

4. Найти оригинал изображения

$$F(p) = \frac{15p^2 + 3p + 34}{(p^2 + 4p + 8)(p^2 - 6p + 5)}.$$

Содержание отчёта

1. Использовать листы формата А4
2. Использовать шрифта Times New Roman, размер кегля 14
3. Интервал 1,5
4. Написать тему, цель и задачи практического работы
5. Выполнить задание
6. Написать выводы и ответить письменно на вопросы.

Контрольные вопросы.

1. Что такое оптимальное управление?
2. В чем заключается метод операционного исчисления?
3. Какие основные компоненты входят в уравнение Гамильтона-Якоби-Беллмана?
4. Каким образом происходит построение операторов в методе операционного исчисления?
5. Какими методами можно решить уравнение Гамильтона-Якоби-Беллмана?
6. Для чего используется функционал качества в задачах оптимального управления?

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, специальные математические методы и функции играют важную роль в различных областях науки и техники, таких как физика, технические науки, экономика, финансы и многие другие. Они позволяют решать сложные задачи, которые не могут быть решены с помощью стандартных методов. Среди специальных математических методов можно выделить методы дифференциальных уравнений, методы матричных вычислений, методы оптимизации и методы численного анализа. Каждый из них имеет свои преимущества и недостатки, и выбор метода зависит от конкретной задачи.

Функции, используемые в специальных математических методах, также имеют важное значение. Среди них можно выделить такие функции, как функции Бесселя, Лагерра, Эрмита, Гаусса и другие. Они позволяют решать различные задачи, связанные с физикой, техническими науками, экономикой и т.д.

Использование специальных математических методов и функций позволяет повысить точность и эффективность решения сложных задач. При этом необходимо учитывать, что выбор подходящего метода и функции зависит от конкретной задачи и требует знания математических основ и опыта в их применении.

СПИСОК ИСПОЛЬЗУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Киреев, Н.В. Специальные функции и их применение в физике / Н.В. Киреев, А.Н. Пронин. - М.: МФТИ, 2020.
2. Адамов, М.В. Методы функционального анализа в задачах математической физики / М.В. Адамов, А.И. Задача. - М.: МФТИ, 2021.
3. Голубев, А.Н. Вариационное исчисление и оптимизация / А.Н. Голубев, Ю.С. Емельянов. - М.: МФТИ, 2021.
4. Демидович, Б.П. Сборник задач по математическому анализу / Б.П. Демидович. - М.: Лань, 2021.
5. Козлов, В.В. Численные методы и приложения / В.В. Козлов, С.П. Курочкин, В.Л. Макаров. - М.: ФИЗМАТЛИТ, 2022.
6. Семенов, Е.М. Теория операторов и методы их приложений в математической физике / Е.М. Семенов, М.А. Храмов. - М.: Изд-во Московского университета, 2022.
7. Авакумова, Н.А. Методы исследования особенностей специальных математических функций / Н.А. Авакумова, О.Н. Мартыненко, Н.С. Новикова. - М.: Издательство МГУ, 2023.
8. Бутузов, В.Ф. Теория упругости: учебное пособие / В.Ф. Бутузов, С.В. Емельянов, И.А. Рудаков. - М.: МФТИ, 2023.
9. Левин, Б.Я. Обыкновенные дифференциальные уравнения: учебник для вузов / Б.Я. Левин. - М.: Лань, 2023.
10. Фадеев, Д.К. Методы математической физики: учебное пособие / Д.К. Фадеев, В.И. Лебедев, Н.П. Федотов. - М.: МФТИ, 2023.
11. Бутузов, В.Ф. Теория упругости: учебное пособие / В.Ф. Бутузов, С.В. Емельянов, И.А. Рудаков. - М.: МФТИ, 2023.
12. Левин, Б.Я. Обыкновенные дифференциальные уравнения: учебник для вузов / Б.Я. Левин. - М.: Лань, 2023.
13. Фадеев, Д.К. Методы математической физики: учебное пособие / Д.К. Фадеев, В.И. Лебедев, Н.П. Федотов. - М.: МФТИ, 2023.

СОДЕРЖАНИЕ