МИНИСТЕРСТВО ПО РАЗВИТИЮ ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ КОММУНИКАЦИЙ РЕСПУБЛИКИ УЗБЕКИСТАН.

ТАШКЕНТСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ ИМЕНИ МУХАММАДА АЛ-ХОРАЗМИЙ

Кафедра

«ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА»

Методические указания к решению задач и упражнений по

“ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКЕ”

Часть 2

ТАШКЕНТ-2017

Авторы: Чай З.С., Шоймардонов С.К.

“Методические указания к решению задач и упражнений по высшей математике. Часть 2 ”

ТУИТ, ТАШКЕНТ-2017

Ташкентский университет информационных технологий, 2017

Оглавление

ВВЕДЕНИЕ

Дифференциальные уравнения занимают особую роль среди математических дисциплин. Любой летательный аппарат летит по траектории, являющейся решением некоторого дифференциального уравнения.

Операционное исчисление – один из методов математического анализа, позволяющий в ряде случаев сводить исследование дифференциальных и некоторых типов интегральных операторов к рассмотрению более простых алгебраических задач.

Операционное исчисление играют важную роль при решении прикладных задач, особенно в современной телемеханике, автоматике, физике, телекоммуникации.

Применимость многих интегральных преобразований к дифференциальным уравнениям существенно ограничивается тем, что эти преобразования определены для функций, интегрируемых на всей прямой. Эти преобразования невозможны для функций, растущих при $x \to \infty$ или $x \to -\infty$, а также для функций, являющихся решениями дифференциальных уравнений, но эту трудность можно преодолеть введением преобразования Лапласа.

Немаловажную роль играют ряды в задачах прикладного характера. С из помощью например можно решать задачи, которые не имеют точного решения. Например, не всегда удается вычислить интеграл по формуле Ньютона-Лейбница, но после разложения в некоторых случаях в ряд Тейлора мы можем вычислить этот интеграл с заданной точностью (заданная точность указывает на то, сколько слагаемых в разложении нам стоит брать).

Данное пособие рекомендуется бакалаврам всех направлений любого Втуза, а также молодым специалистам, желающим повысить свое математическое образование.

5330500 – Компьютерный инжиниринг ("Компьютерный инжиниринг", "ИТ-сервис", "Информационная безопасность", "Мультимедийные технологии");

5330600 – Программный инжиниринг;

5350100 – Телекоммуникационные технологии ("Телекоммуникации", "Телерадиовещание", Мобильные сети);

5350200 – Телевизионные технологии ("Аудиовизуальные технологии", "Телестудийные системы и приложения ");

5350300 – Экономика и менеджмент в сфере информационно – коммуникационных технологий;

5350400 – Информационно - коммуникационные технологии в сфере проффессионального обучения;

5350500 – Технологии почтовой связи;

5350600 – Информатизация и библиотековедение.

1.1 Основные понятия и определения.

При рассмотрении функций нескольких переменных ограничимся подробным описанием функций двух переменных, т.к. все полученные результаты будут справедливы для функций произвольного числа переменных.

Определение 1.1. Если каждой паре независимых друг от друга чисел (x, y) из некоторого множества по какому - либо правилу ставится в соответствие одно или несколько значений переменной z, то переменная z называется **функцией двух переменных.**

$$z = f(x,y)$$

Определение 1.2. Если паре чисел (x, y) соответствует одно значение z, то функция называется **однозначной**, а если более одного, то – **многозначной.**

Определение 1.3. **Областью определения** функции z называется совокупность пар (x, y), при которых функция z существует.

Определение 1.4. **Окрестностью точки** $M_0(x_0, y_0)$ радиуса r называется совокупность всех точек (x, y), которые удовлетворяют условию $\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2} < r$.

Определение 1.5. Число A называется **пределом** функции $f(x,y)$ при стремлении точки $M(x, y)$ к точке $M_0(x_0, y_0)$, если для каждого числа $\varepsilon > 0$ найдется такое число $r > 0$, что для любой точки $M(x, y)$, для которых верно условие

$$MM_0 < r$$

также верно и условие $|f(x,y) - A| < \varepsilon$.

Записывают: $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x,y) = A$

Определение 1.6. Пусть точка $M_0(x_0, y_0)$, принадлежит области определения функции $f(x,y)$. Тогда функция $z = f(x,y)$ называется **непрерывной** в точке $M_0(x_0, y_0)$, если

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x,y) = f(x_0, y_0) \qquad (1)$$

причем точка $M(x, y)$ стремится к точке $M_0(x_0, y_0)$произвольным образом.

Если в какой – либо точке условие (1) не выполняется, то эта точка называется **точкой разрыва** функции $f(x,y)$. Это может быть в следующих случаях:

1) Функция $z=f(x,y)$ не определена в точке $M_0(x_0, y_0)$.
2) Не существует предел $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)$.
3) Этот предел существует, но он не равен $f(x_0,y_0)$.

Свойство 1. Если функция $f(x,y, \ldots)$ определена и непрерывна в замкнутой и ограниченной области D, то в этой области найдется по крайней мере одна точка $N(x_0,y_0, \ldots)$, такая, что для остальных точек верно неравенство $f(x_0,y_0, \ldots)^3 f(x,y, \ldots)$, а также точка $N_1(x_{01},y_{01}, \ldots)$, такая, что для всех остальных точек верно неравенство

$$f(x_{01},y_{01}, \ldots) \le f(x,y, \ldots),$$

тогда $f(x_{01},y_{01}, \ldots) \le f(x,y, \ldots), f(x_0,y_0, \ldots) = M -$ **наибольшее значение** функции, а $f(x_{01},y_{01}, \ldots) = m -$ **наименьшее значение** функции $f(x,y, \ldots)$ в области D.

Непрерывная функция в замкнутой и ограниченной области D достигает по крайней мере один раз наибольшего значения и один раз наименьшего.

Свойство 2. Если функция $f(x,y, \ldots)$ определена и непрерывна в замкнутой ограниченной области D, а M и m – соответственно наибольшее и наименьшее значения функции в этой области, то для любой точки $\mu\in[m,M]$ существует точка $N_0(x_0,y_0, \ldots)$ такая, что $f(x_0,y_0, \ldots) = \mu$.

Проще говоря, непрерывная функция принимает в области D все промежуточные значения между M и m. Следствием этого свойства может служить заключение, что если числа M и m разных знаков, то в области D функция по крайней мере один раз обращается в ноль.

Свойство 3. Функция $f(x,y, \ldots)$, непрерывная в замкнутой ограниченной области D, **ограничена** в этой области, если существует такое число K, что для всех точек области верно неравенство $|f(x,y,\ldots)| < K$.

Свойство 4. Если функция $f(x,y, \ldots)$ определена и непрерывна в замкнутой ограниченной области D, то она **равномерно непрерывна** в этой области, т.е. для любого положительного числа ε существует такое число Δ > 0, что для любых двух точек (x_1,y_1) и

(x_2, y_2) области, находящихся на расстоянии, меньшем Δ, выполнено неравенство

$$|f(x_1,y_1)-f(x_2,y_2)|<\varepsilon$$

Приведенные выше свойства аналогичны свойствам функций одной переменной, непрерывных на отрезке.

1.2. Производные и дифференциалы функций нескольких переменных.

Определение 1.7. Пусть в некоторой области задана функция $z=f(x,y)$. Возьмем произвольную точку $M(x, y)$ и зададим приращение Δx к переменной x. Тогда величина $\Delta_x z=f(x+\Delta x,y)-f(x,y)$ называется **частным приращением функции по x.**

Можно записать

$$\frac{\Delta_x z}{\Delta x}=\frac{f(x+\Delta x,y)-f(x,y)}{\Delta x}.$$

Тогда $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta_x z}{\Delta x}$ называется **частной производной** функции $z=f(x,y)$ по x.

Обозначение: $\frac{\partial z}{\partial x}$; z'_x; $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}$; $f'_x(x,y)$.

Аналогично определяется частная производная функции по y:

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x,y+\Delta y)-f(x,y)}{\Delta y}$$

Геометрическим смыслом частной производной (допустим $\frac{\partial z}{\partial x}$) является тангенс угла наклона касательной, проведенной в точке $N_0(x_0,y_0,z_0)$ к сечению поверхности плоскостью $y = y_0$.

1.3. Полное приращение и полный дифференциал.

Определение 1.8. Для функции $f(x,y)$ выражение $Dz=f(x+Dx,y+Dy)-f(x,y)$ называется **полным приращением.**

Если функция $f(x, y)$ имеет непрерывные частные производные, то

$$\Delta z=f(x+\Delta x,y+\Delta y)-f(x,y)+f(x,y+\Delta y)-f(x,y+\Delta y)=$$
$$=[f(x+\Delta x,y+\Delta y)-f(x,y+\Delta y)]+[f(x,y+\Delta y)-f(x,y)]$$

Применим теорему Лагранжа к выражениям, стоящим в квадратных скобках.

$$f(x,y+\Delta y)-f(x,y)=\Delta y\frac{\partial f(x,\bar{y})}{\partial y}$$

$$f(x+\Delta x,y+\Delta y)-f(x,y+\Delta y)=\Delta x\frac{\partial f(\bar{x},y+\Delta y)}{\partial x}$$

здесь $\bar{y}\in(y,y+\Delta y)$; $\quad\bar{x}\in(x,x+\Delta x)$

Тогда получаем

$$\Delta z=\Delta x\frac{\partial f(\bar{x},y+\Delta y)}{\partial x}+\Delta y\frac{\partial f(x,\bar{y})}{\partial y}$$

Так как частные производные непрерывны, то можно записать равенства:

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\frac{\partial f(\bar{x},y+\Delta y)}{\partial x}=\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}$$

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\frac{\partial f(x,\bar{y})}{\partial y}=\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$$

Определение 1.9. Выражение

$$\Delta z=\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\Delta y+\alpha_1\Delta x+\alpha_2\Delta y$$

называется **полным приращением** функции $f(x,y)$ в некоторой точке (x, y), где α_1 и α_2 – бесконечно малые функции при $\Delta x\to 0$ и $\Delta y\to 0$ соответственно.

Определение 1.10. Полным дифференциалом функции $z=f(x,y)$ называется главная линейная относительно Δx и Δy приращения функции Δz в точке (x, y).

$$dz=f'_x(x,y)dx+f'_y(x,y)dy$$

Для функции произвольного числа переменных:

$$df(x,y,z,...,t)=\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy+...+\frac{\partial f}{\partial t}dt$$

Пример 1.1. Найти линии уровня следующих функций:

1) $z=2x+y$ $\qquad$ 2) $z=\dfrac{1}{6x^2+y^2}$

Решение: 1) уравнение линий уровня данной функции можно записать в виде $2x+y=C$ или $y=-2x+C$. Линии уровня являются прямыми.

(x_2, y_2) области, находящихся на расстоянии, меньшем Δ, выполнено неравенство

$$|f(x_1,y_1)-f(x_2,y_2)|<\varepsilon$$

Приведенные выше свойства аналогичны свойствам функций одной переменной, непрерывных на отрезке.

1.2. Производные и дифференциалы функций нескольких переменных.

Определение 1.7. Пусть в некоторой области задана функция $z=f(x,y)$. Возьмем произвольную точку $M(x, y)$ и зададим приращение Δx к переменной x. Тогда величина $\Delta_x z=f(x+\Delta x,y)-f(x,y)$ называется **частным приращением функции по x.**

Можно записать

$$\frac{\Delta_x z}{\Delta x}=\frac{f(x+\Delta x,y)-f(x,y)}{\Delta x}.$$

Тогда $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta_x z}{\Delta x}$ называется **частной производной** функции $z=f(x,y)$ по x.

Обозначение: $\frac{\partial z}{\partial x}$; z'_x; $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}$; $f'_x(x,y)$.

Аналогично определяется частная производная функции по y:

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x,y+\Delta y)-f(x,y)}{\Delta y}$$

Геометрическим смыслом частной производной (допустим $\frac{\partial z}{\partial x}$) является тангенс угла наклона касательной, проведенной в точке $N_0(x_0,y_0,z_0)$ к сечению поверхности плоскостью $y = y_0$.

1.3. Полное приращение и полный дифференциал.

Определение 1.8. Для функции $f(x,y)$ выражение $Dz=f(x+Dx,y+Dy)-f(x,y)$ называется **полным приращением.**

Если функция $f(x, y)$ имеет непрерывные частные производные, то

$$\Delta z=f(x+\Delta x,y+\Delta y)-f(x,y)+f(x,y+\Delta y)-f(x,y+\Delta y)=$$
$$=[f(x+\Delta x,y+\Delta y)-f(x,y+\Delta y)]+[f(x,y+\Delta y)-f(x,y)]$$

Применим теорему Лагранжа к выражениям, стоящим в квадратных скобках.

$$f(x, y+\Delta y)-f(x, y)=\Delta y\frac{\partial f(x,\bar{y})}{\partial y}$$

$$f(x+\Delta x, y+\Delta y)-f(x, y+\Delta y)=\Delta x\frac{\partial f(\bar{x}, y+\Delta y)}{\partial x}$$

здесь $\bar{y}\in(y, y+\Delta y)$; $\bar{x}\in(x, x+\Delta x)$

Тогда получаем

$$\Delta z=\Delta x\frac{\partial f(\bar{x}, y+\Delta y)}{\partial x}+\Delta y\frac{\partial f(x,\bar{y})}{\partial y}$$

Так как частные производные непрерывны, то можно записать равенства:

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\frac{\partial f(\bar{x}, y+\Delta y)}{\partial x}=\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}$$

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\frac{\partial f(x,\bar{y})}{\partial y}=\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$$

Определение 1.9. Выражение

$$\Delta z=\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\Delta y+\alpha_1\Delta x+\alpha_2\Delta y$$

называется **полным приращением** функции $f(x,y)$ в некоторой точке (x, y), где α_1 и α_2 – бесконечно малые функции при $\Delta x\to 0$ и $\Delta y\to 0$ соответственно.

Определение 1.10. Полным дифференциалом функции $z=f(x,y)$ называется главная линейная относительно Δx и Δy приращения функции Δz в точке (x, y).

$$dz=f'_x(x,y)dx+f'_y(x,y)dy$$

Для функции произвольного числа переменных:

$$df(x,y,z,\ldots,t)=\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy+\ldots+\frac{\partial f}{\partial t}dt$$

Пример 1.1. Найти линии уровня следующих функций:

1) $z=2x+y$ 2) $z=\dfrac{1}{6x^2+y^2}$

Решение: 1) уравнение линий уровня данной функции можно записать в виде $2x+y=C$ или $y=-2x+C$. Линии уровня являются прямыми.

(x_2, y_2) области, находящихся на расстоянии, меньшем Δ, выполнено неравенство

$$|f(x_1, y_1) - f(x_2, y_2)| < \varepsilon$$

Приведенные выше свойства аналогичны свойствам функций одной переменной, непрерывных на отрезке.

1.2. Производные и дифференциалы функций нескольких переменных.

Определение 1.7. Пусть в некоторой области задана функция $z = f(x,y)$. Возьмем произвольную точку $M(x, y)$ и зададим приращение Δx к переменной x. Тогда величина $\Delta_x z = f(x+\Delta x, y) - f(x,y)$ называется **частным приращением функции по x.**

Можно записать

$$\frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x, y) - f(x,y)}{\Delta x}.$$

Тогда $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x}$ называется **частной производной функции** $z = f(x,y)$ по x.

Обозначение: $\frac{\partial z}{\partial x}$; z'_x; $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}$; $f'_x(x,y)$.

Аналогично определяется частная производная функции по y:

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y+\Delta y) - f(x,y)}{\Delta y}$$

Геометрическим смыслом частной производной (допустим $\frac{\partial z}{\partial x}$) является тангенс угла наклона касательной, проведенной в точке $N_0(x_0, y_0, z_0)$ к сечению поверхности плоскостью $y = y_0$.

1.3. Полное приращение и полный дифференциал.

Определение 1.8. Для функции $f(x,y)$ выражение $Dz = f(x+Dx, y+Dy) - f(x,y)$ называется **полным приращением.**

Если функция $f(x, y)$ имеет непрерывные частные производные, то

$$\Delta z = f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x,y) + f(x, y+\Delta y) - f(x, y+\Delta y) =$$
$$= [f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x, y+\Delta y)] + [f(x, y+\Delta y) - f(x,y)]$$

Применим теорему Лагранжа к выражениям, стоящим в квадратных скобках.

$$f(x,y+\Delta y)-f(x,y)=\Delta y\frac{\partial f(x,\bar{y})}{\partial y}$$

$$f(x+\Delta x,y+\Delta y)-f(x,y+\Delta y)=\Delta x\frac{\partial f(\bar{x},y+\Delta y)}{\partial x}$$

здесь $\bar{y}\in(y,y+\Delta y)$; $\bar{x}\in(x,x+\Delta x)$

Тогда получаем

$$\Delta z=\Delta x\frac{\partial f(\bar{x},y+\Delta y)}{\partial x}+\Delta y\frac{\partial f(x,\bar{y})}{\partial y}$$

Так как частные производные непрерывны, то можно записать равенства:

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\frac{\partial f(\bar{x},y+\Delta y)}{\partial x}=\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}$$

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\frac{\partial f(x,\bar{y})}{\partial y}=\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$$

Определение 1.9. Выражение

$$\Delta z=\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\Delta y+\alpha_1\Delta x+\alpha_2\Delta y$$

называется **полным приращением** функции $f(x,y)$ в некоторой точке $(x,\ y)$, где α_1 и α_2 – бесконечно малые функции при $\Delta x\to 0$ и $\Delta y\to 0$ соответственно.

Определение 1.10. Полным дифференциалом функции $z=f(x,y)$ называется главная линейная относительно Δx и Δy приращения функции Δz в точке $(x,\ y)$.

$$dz=f'_x(x,y)dx+f'_y(x,y)dy$$

Для функции произвольного числа переменных:

$$df(x,y,z,\ldots,t)=\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy+\ldots+\frac{\partial f}{\partial t}dt.$$

Пример 1.1. Найти линии уровня следующих функций:

1) $z=2x+y$ 2) $z=\dfrac{1}{6x^2+y^2}$

Решение: 1) уравнение линий уровня данной функции можно записать в виде $2x+y=C$ или $y=-2x+C$. Линии уровня являются прямыми.

2) уравнение линий уровня данной функции можно записать в виде $\frac{1}{6x^2+y^2}=C$ или $C(6x^2+y^2)=1$ (C>0) или $\frac{x^2}{\frac{1}{6C}}+\frac{y^2}{\frac{1}{C}}=1$ $(C>0)$. Линии уровня являются эллипсами.

Пример 1.2. Найти точки разрыва функции $z=\frac{xy-2}{x^2-y}$.

Решение: Для данной функции знаменатель не должен обращаться в ноль. Если $x^2-y=0$, то $y=x^2$ – уравнение параболы. Следовательно, данная функция имеет линией разрыва параболу $y=x^2$.

Пример 1.3. Найти полный дифференциал функции $u=x^{y^2z}$.

Решение:

$$du=\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy+\frac{\partial u}{\partial z}dz$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=y^2zx^{y^2z-1};\quad \frac{\partial u}{\partial y}=x^{y^2z}\ln x\cdot 2yz;\quad \frac{\partial u}{\partial z}=x^{y^2z}\ln x\cdot y^2;$$

$$du=y^2zx^{y^2z-1}dx+2x^{y^2z}yz\ln x dy+y^2x^{y^2z}\ln x dz$$

Пример 1.4. Найти полный дифференциал функции $z=\frac{y}{x^2-y^2}$.

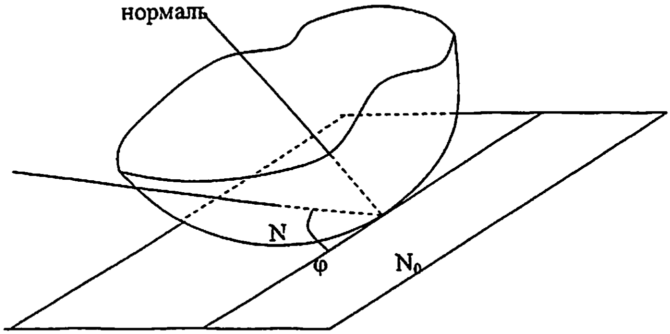
Решение:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{-2yx}{(x^2-y^2)^2}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{y'(x^2-y^2)-y(-2y)}{(x^2-y^2)^2}=\frac{x^2-y^2+2y^2}{(x^2-y^2)^2}=\frac{x^2+y^2}{(x^2-y^2)^2}$$

$$dz=-\frac{2xy}{(x^2-y^2)}dx+\frac{x^2+y^2}{(x^2-y^2)^2}dy$$

Геометрический смысл полного дифференциала. Касательная плоскость и нормаль к поверхности.



касательная плоскость

Пусть N и N_0 – точки данной поверхности. Проведем прямую NN_0. Плоскость, которая проходит через точку N_0, называется **касательной плоскостью** к поверхности, если угол между секущей NN_0 и этой плоскостью стремится к нулю, когда стремится к нулю расстояние NN_0.

Определение 1.11. Нормалью к поверхности в точке N_0 называется прямая, проходящая через точку N_0 перпендикулярно касательной плоскости к этой поверхности.

В какой – либо точке поверхность имеет либо только одну касательную плоскость, либо не имеет ее вовсе.

Если поверхность задана уравнением $z = f(x,y)$, где $f(x,y)$ – функция, дифференцируемая в точке $M_0(x_0, y_0)$, касательная плоскость в точке $N_0(x_0, y_{0,}(x_0, y_0))$ существует и имеет уравнение:

$$z - f(x_0, y_0) = f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0)$$

Уравнение нормали к поверхности в этой точке:

$$\frac{x - x_0}{f'_x(x_0 y_0)} = \frac{y - y_0}{f'_y(x_0, y_0)} = \frac{z - z_0}{-1}$$

Геометрическим смыслом полного дифференциала функции двух переменных $f(x,y)$ в точке (x_0, y_0) является приращение аппликаты (координаты z) касательной плоскости к поверхности при переходе от точки (x_0, y_0)к точке$(x_0 + Dx, y_0 + Dy)$. Как видно, геометрический смысл полного дифференциала функции двух переменных является пространственным аналогом геометрического смысла дифференциала функции одной переменной.

Пример 1.5. Найти уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности

$$z = x^2 - 2xy + y^2 - x + 2y$$

в точке $M(1,\ 1,\ 1)$.

Решение:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x - 2y - 1; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -2x + 2y + 2$$

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_M = -1; \quad \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_M = 2;$$

Уравнение касательной плоскости:

$$z - 1 = -(x-1) + 2(y-1); \qquad x - 2y + z = 0;$$

Уравнение нормали:

$$\frac{x-1}{-1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-1}{-1};$$

1.4. Приближенные вычисления с помощью полного дифференциала

Пусть функция $f(x,y)$ дифференцируема в точке (x,y). Найдем полное приращение этой функции:

$$\Delta z = f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x,y)$$

$$f(x+\Delta x, y+\Delta y) = f(x,y) + \Delta z$$

Если подставить в эту формулу выражение

$$\Delta z \approx dz = \frac{\partial f}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\Delta y$$

то получим приближенную формулу:

$$f(x+\Delta x, y+\Delta y) \approx f(x,y) + \frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\Delta y$$

Пример 1.6. Вычислить приближенно $1{,}02^{3{,}01}$.

Решение: Искомое число будем рассматривать как значение функции z^y при $x = 1 + 0{,}2$, $y = 3 + 0{,}1$. Значение функции в точке $(1,3)$ равно: $z(1,3) = 1^3 = 1$, $\Delta x = 0{,}02$, $\Delta y = 0{,}01$. Используя формулу $f(x+\Delta x, y+\Delta y) \approx f(x,y) + \frac{\partial z}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial z}{\partial y}\Delta y$, получим

$$\Delta z \approx dz = yx^{y-1}\cdot\Delta x + x^y\ln x\cdot\Delta y = 3\cdot 1\cdot 0{,}02 + 1\cdot\ln 1\cdot 0{,}01 = 0{,}06.$$

Следовательно, $1{,}02^{3{,}01}\approx 1+0{,}06=1{,}06$.

Пример 1.7. Вычислить приближенно значение $\sqrt{1{,}04^{1{,}99}+\ln 1{,}02}$ исходя из значения функции $u=\sqrt{x^y+\ln z}$ при $x=1, y=2, z=1$.

Решение: Из заданного выражения определим

$\Delta x = 1{,}04 - 1 = 0{,}04$, $\Delta y = 1{,}99 - 2 = -0{,}01$, $\Delta z = 1{,}02 - 1 = 0{,}02$.

Найдем значение функции $u(x,y,z) = \sqrt{1^2+\ln 1} = 1$

Находим частные производные:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{y\cdot x^{y-1}}{2\sqrt{x^y+\ln z}}=\frac{2\cdot 1}{2\sqrt{1}}=1$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{x^y\ln x}{2\sqrt{x^y+\ln z}}=0$$

$$\frac{\partial u}{\partial z}=\frac{\frac{1}{z}}{2\sqrt{x^y+\ln z}}=\frac{1}{2}$$

Полный дифференциал функции u равен:

$$du = 0{,}04\cdot\frac{\partial u}{\partial x} - 0{,}01\cdot\frac{\partial u}{\partial y} + 0{,}02\cdot\frac{\partial u}{\partial z} = 1\cdot 0{,}04 - 0\cdot 0{,}01 + \frac{1}{2}\cdot 0{,}02 =$$

$$= 0{,}04 + 0{,}01 = 0{,}05$$

$$\sqrt{1{,}04^{1{,}99}+\ln 1{,}02}\approx u(1,2,1)+du = 1+0{,}05 = 1{,}05$$

Точное значение этого выражения: 1,0492752256873 19176.

1.5. Частные производные высших порядков.

Если функция f(x, y) определена в некоторой области D, то ее частные производные $f'_x(x,y)$ и $f'_y(x,y)$ тоже будут определены в той же области или ее части.

Будем называть эти производные частными производными первого порядка.

Производные этих функций будут **частными производными второго порядка.**

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=f''_{xx}(x,y); \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=f''_{yy}(x,y);$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=f''_{xy}(x,y); \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=f''_{yx}(x,y);$$

Продолжая дифференцировать полученные равенства, получим частные производные более высоких порядков.

Определение 1.12. Частные производные вида

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y};\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x};\frac{\partial^3 z}{\partial x\partial y\partial x};\frac{\partial^3 z}{\partial x\partial y\partial y}$$

и т.д. называются **смешанными производными.**

Теорема 1.1. Если функция $f(x,y)$ и ее частные производные $f'_x, f'_y, f''_{xy}, f''_{yx}$ определены и непрерывны в точке $M(x,y)$ и ее окрестности, то верно соотношение:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}$$

То есть частные производные высших порядков не зависят от порядка дифференцирования.

Аналогично определяются дифференциалы высших порядков:

$$dz=f'_x(x,y)dx+f'_y(x,y)$$

$$d^2z=d\left[f'_x(x,y)dx+f'_y(x,y)dy\right]=f''_{x^2}(x,y)(dx)^2+2f''_{xy}(x,y)dxdy+f''_{y^2}(x,y)(dy)^2$$

$$d^3z=f'''_{x^3}(x,y)(dx)^3+3f'''_{x^2y}(x,y)(dx)^2dy+3f'''_{xy^2}(x,y)dx(dy)^2+f'''_{y^3}(x,y)(dy)^3$$

....

$$d^nz=\left(\frac{\partial}{\partial x}dx+\frac{\partial}{\partial y}dy\right)^n f(x,y)$$

Здесь $n-$ символическая степень производной, на которую заменяется реальная степень после возведения в нее стоящего в скобках выражения.

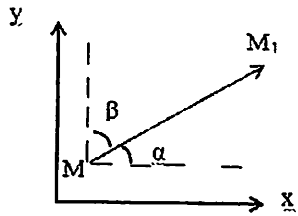
1.6. Производная функции в данном направлении.

Производной функции $z=f(x,y)$ в данном направлении $l=\overline{MM_1}$ называется $\frac{\partial z}{\partial l}=\lim\limits_{M_1M\to 0}\frac{f(M_1)-f(M)}{M_1M}$,

где $f(M)$ и $f(M_1)-$ это значения функции в точках M и M_1. Если функция дифференцируема, то справедлива формула

$$\frac{\partial z}{\partial l}=\frac{\partial z}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial z}{\partial y}\cos\beta, \qquad (1)$$

где α – угол, образованный вектором l с осью OX, а β – угол, образованный вектором l с осью OY, причем α+β=90:



Аналогично определяется производная в данном направлении l для функции трех аргументов $u=f(x,y,z)$. В этом случае

$$\frac{\partial u}{\partial l}=\frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma, \qquad (2)$$

где α,β,γ – углы между направлением l и соответствующими координатными осями. Производная в данном направлении характеризует скорость изменения функции в этом направлении:

Градиентом функции $z=f(x,y)$ называется вектор проекциями которого на координатные оси являются соответствующие частные производные данной функции:

$$grad\,z=\frac{\partial z}{\partial x}i+\frac{\partial z}{\partial y}j\,. \qquad (3)$$

Производная данной функции в направлении l связана с градиентом функции следующей формулой:

$\frac{\partial z}{\partial l}=np_l grad\,z$, то есть производная в данном направлении равна проекции градиента функции на направление дифференцирования.

Пример 1.8. Найти производную функции $z=2x^2-3y^2$ в точке M(1,0) в направлении, соответствующем с осью OX угол в 60^0.

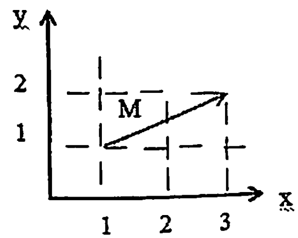
Решение: Найдем частные производные данной функции и их значения в точке М: $\frac{\partial z}{\partial x} = 4x$, $\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_M = 4$, $\frac{\partial z}{\partial y} = -6y$, $\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_M = 0$, Здесь $\cos\alpha = \cos 60^0 = \frac{1}{2}$, $\cos\beta = \cos 30^0 = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Применяя формулу (2), получим $\frac{\partial z}{\partial l} = 4 \cdot \frac{1}{2} + 0 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 2$.

Пример 1.9. Найти и построить градиент функции $z = x^2 y$ в точке M(1,1).

Решение: Вычислим частные производные и их значения в точке М:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2xy,\ \left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_M = 2,\ \frac{\partial z}{\partial y} = x^2,\ \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_M = 1.$$

Следовательно, $grad\, z = 2i + j$:



1.7. Экстремум функции нескольких переменных.

Определение 1.13. Если для функции $z = f(x,y)$, определенной в некоторой области, в некоторой окрестности точки $M_0(x_0, y_0)$ верно неравенство

$$f(x_0, y_0) > f(x,y)$$

то точка M_0 называется **точкой максимума.**

Определение 1.14. Если для функции $z=f(x,y)$, определенной в некоторой области, в некоторой окрестности точки $M_0(x_0, y_0)$ верно неравенство

$$f(x_0,y_0)<f(x,y)$$

то точка M_0 называется **точкой минимума.**

1.7.1. Необходимые и достаточные условия экстремума.

Теорема 1.2. (Необходимые условия экстремума).

Если функция $f(x,y)$ в точке (x_0, y_0) имеет экстремум, то в этой точке либо обе ее частные производные первого порядка равны нулю $f'_x(x_0,y_0)=0$, $f'_y(x_0,y_0)=0$ либо хотя бы одна из них не существует.

Эту точку (x_0, y_0) будем называть **критической точкой.**

Теорема 1.3. (Достаточные условия экстремума).

Пусть в окрестности критической точки (x_0, y_0) функция $f(x,y)$ имеет непрерывные частные производные до второго порядка включительно. Обозначим через D выражение:

$$D(x,y)=f''_{x^2}(x,y)\cdot f''_{y^2}(x,y)-\left[f''_{xy}(x,y)\right]^2$$

1) Если $D(x_0,y_0) > 0$, то в точке (x_0, y_0) функция $f(x,y)$ имеет экстремум, если $f''_{x^2}(x_0,y_0)<0$ – максимум, если $f''_{x^2}(x_0,y_0)>0$ – минимум.
2) Если $D(x_0,y_0)<0$, то в точке (x_0, y_0) функция $f(x,y)$ не имеет экстремума
3) Если $D=0$, вывод о наличии экстремума сделать нельзя.

1.7.2. Условный экстремум.

Условный экстремум находится, когда переменные x и y, входящие в функцию $u=f(x,y)$, не являются независимыми, т.е. существует некоторое соотношение $\varphi(x, y) = 0$, которое называется **уравнением связи.**

Тогда из переменных x и y, только одна будет независимой, так как другая может быть выражена через нее из уравнения связи.

Тогда $u=f(x,y(x))$.

$$\frac{du}{dx}=\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx}$$

В точках экстремума:

$$\frac{du}{dx}=\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx}=0 \qquad (1)$$

Кроме того:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{dy}{dx}=0 \qquad (2)$$

Умножим равенство (2) на число λ и сложим с равенством (1).

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx}\right)+\lambda\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{dy}{dx}\right)=0$$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}+\lambda\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)+\left(\frac{\partial f}{\partial y}+\lambda\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)\frac{dy}{dx}=0$$

Для выполнения этого условия во всех точках найдем неопределенный коэффициент λ так, чтобы выполнялась система трех уравнений:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial f}{\partial x}+\lambda\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}=0\\ \dfrac{\partial f}{\partial y}+\lambda\dfrac{\partial\varphi}{\partial y}=0\\ \varphi(x,y)=0\end{cases}$$

Полученная система уравнений является необходимыми условиями условного экстремума. Однако это условие не является достаточным. Поэтому при нахождении критических точек требуется их дополнительное исследование на экстремум.

Выражение $u=f(x,y)+\lambda\varphi(x,y)$ называется **функцией Лагранжа.**

Пример 1.15. Найти экстремум функции $f(x,y)=xy$, если уравнение связи:

$$2x+3y-5=0$$

Решение:

$$u=xy+\lambda(2x+3y-5)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=y+2\lambda; \qquad \frac{\partial u}{\partial y}=x+3\lambda;$$

$$\begin{cases}y+2\lambda=0\\ x+3\lambda=0\\ 2x+3y-5=0\end{cases}$$

$$\lambda=-\frac{5}{12}; \qquad x=\frac{5}{4}; \qquad y=\frac{5}{6};$$

Таким образом, функция имеет экстремум в точке $\left(\frac{5}{4};\frac{5}{6}\right)$.

Использование функции Лагранжа для нахождения точек экстремума функции называется также **методом множителей Лагранжа.**

Выше мы рассмотрели функцию двух переменных, однако, все рассуждения относительно условного экстремума могут быть распространены на функции большего числа переменных.

ГЛАВА 2. ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ.

2.1. Основные понятия и определения.

Решение различных геометрических, физических и инженерных задач часто приводят к уравнениям, которые связывают независимые переменные, характеризующие ту ил иную задачу, с какой – либо функцией этих переменных и производными этой функции различных порядков.

В качестве примера можно рассмотреть простейший случай равноускоренного движения материальной точки. Известно, что перемещение материальной точки при равноускоренном движении является функцией времени и выражается по формуле:

$$S = V_0 t + \frac{at^2}{2}$$

В свою очередь ускорение a является производной по времени t от скорости V, которая также является производной по времени t от перемещения , то есть

$$V = \frac{dS}{dt}; \qquad a = \frac{dV}{dt} = \frac{d^2S}{dt^2};$$

тогда получаем: $S = f(t) = V_0 t + \dfrac{f''(t)\cdot t}{2}$ – уравнение связывает функцию $f(t)$ с независимой переменной t и производной второго порядка функции $f(t)$.

Определение 2.1. Дифференциальным уравнением называется уравнение, связывающее независимые переменные, их функции и производные (или дифференциалы) этой функции.

Определение 2.2. Если дифференциальное уравнение имеет одну независимую переменную, то оно называется **обыкновенным дифференциальным уравнением**, если же независимых переменных две или более, то такое дифференциальное уравнение называется **дифференциальным уравнением в частных производных.**

Определение 2.3. Наивысший порядок производных, входящих в уравнение, называется **порядком дифференциального уравнения.**

Определение 2.4. Общим решением дифференциального уравнения называется такая дифференцируемая функция $y=\varphi(x,C)$, которая при подстановке в исходное уравнение вместо неизвестной функции обращает уравнение в тождество.

2.1.1. Свойства общего решения.

1) так как постоянная C – произвольная величина, то вообще говоря дифференциальное уравнение имеет бесконечное множество решений.

2) При каких- либо начальных условиях $x = x_0, y(x_0) = y_0$ существует такое значение $C = C_0$, при котором решением дифференциального уравнения является функция $y = \varphi(x, C_0)$.

Определение 2.5. Решение вида $y = \varphi(x, C_0)$ называется **частным решением** дифференциального уравнения.

Определение 2.6. Задачей Коши (Огюстен Луи Коши (1789-1857)- французский математик) называется нахождение любого частного решения дифференциального уравнения вида $y = \varphi(x, C_0)$, удовлетворяющего начальным условиям $y(x_0) = y_0$.

Теорема 2.1. (Коши) (теорема о существовании и единственности решения дифференциального уравнения 1- го порядка)

Если функция f(x, y) непрерывна в некоторой области D в плоскости XOY и имеет в этой области непрерывную частную производную $y'=f(x,y)$, *то какова бы не была точка* (x_0, y_0) *в области D, существует единственное решение* $y=\varphi(x)$ *уравнения* $y'=f(x,y)$, *определенное в некотором интервале, содержащем точку* x_0, *принимающее при* $x = x_0$ *значение* $\varphi(x_0) = y_0$, *т.е. существует единственное решение дифференциального уравнения.*

Определение 2.7. Интегралом дифференциального уравнения называется любое уравнение, не содержащее производных, для которого данное дифференциальное уравнение является следствием.

Пример 2. 1. Найти общее решение дифференциального уравнения $xy' + y = 0$

Решение: Общее решение дифференциального уравнения ищется с помощью интегрирования левой и правой частей уравнения, которое предварительно преобразовано следующим образом:

$$x\frac{dy}{dx} + y = 0$$

$$xdy = -ydx$$

$$\frac{dy}{y} = -\frac{dx}{x}$$

Теперь интегрируем: $\int \frac{dy}{y} = -\int \frac{dx}{x}$

$$\ln y = -\ln x + C_0, \quad \ln y + \ln x = C_0, \quad \ln xy = C_0, \quad xy = e^{C_0} = C,$$

$y = \frac{C}{x}$ - это общее решение исходного дифференциального уравнения.

Допустим, заданы некоторые начальные условия: $x_0 = 1; y_0 = 2$, тогда имеем $2 = \frac{C}{1}; \quad C = 2;$

При подстановке полученного значения постоянной в общее решение получаем частное решение при заданных начальных условиях (решение задачи Коши) $y = \frac{2}{x}$

Определение 2.8. Интегральной кривой называется график $y = \varphi(x)$ решения дифференциального уравнения на плоскости XOY.

Определение 2.9. Особым решением дифференциального уравнения называется такое решение, во всех точках которого условие единственности Коши не выполняется, т.е. в окрестности некоторой точки (x, y) существует не менее двух интегральных кривых.

Особые решения не зависят от постоянной C.

Особые решения нельзя получить из общего решения ни при каких значениях постоянной C. Если построить семейство интегральных кривых дифференциального уравнения, то особое решение будет изображаться линией, которая в каждой своей точке касается по крайней мере одной интегральной кривой.

Отметим, что не каждое дифференциальное уравнение имеет особые решения.

Пример 2.2. Найти общее решение дифференциального уравнения: $y' + y = 0$. Найти особое решение, если оно существует.

Решение:

$$\frac{dy}{dx} = -y$$

$$\frac{dy}{y} = -dx$$

$$\int \frac{dy}{y} = -\int dx$$

$$\ln y = -x + C$$

$$y = e^{-x} \cdot e^{C}$$

$$y = C_1 \cdot e^{-x}$$

Данное дифференциальное уравнение имеет также особое решение $y = 0$. Это решение невозможно получить из общего, однако при подстановке в исходное уравнение получаем тождество. Мнение, что решение $y = 0$ можно получить из общего решения при $C_1 = 0$ ошибочно, ведь $C_1 = e^{C} \neq 0$.

2.2. Дифференциальные уравнения первого порядка.

Определение 2.10. Дифференциальным уравнением первого порядка называется соотношение, связывающее функцию, ее первую производную и независимую переменную, т.е. соотношение вида:

$$F(x, y, y') = 0$$

Если такое соотношение преобразовать к виду $y' = f(x,y)$ то это дифференциальное уравнение первого порядка будет называться уравнением, **разрешенным относительно производной.**

Преобразуем такое выражение далее:

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y); \quad dy = f(x,y)dx; \quad f(x,y)dx - dy = 0;$$

Функцию $f(x,y)$ представим в виде: $f(x,y) = -\frac{P(x,y)}{Q(x,y)}, \quad Q(x,y) \neq 0;$

тогда при подстановке в полученное выше уравнение имеем:

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$$

- это так называемая **дифференциальная форма** уравнения первого порядка.

Уравнения вида $y' = f(x)$.

Пусть функция $f(x)$ – определена и непрерывна на некотором интервале $a < x < b$.

В таком случае все решения данного дифференциального уравнения находятся как $y = \int f(x)dx + C$. Если заданы начальные условия x_0 и y_0, то можно определить постоянную C.

2.2.1. Уравнения с разделяющимися переменными

Определение 2.11. Дифференциальное уравнение $y' = f(x,y)$ называется **уравнением с разделяющимися переменными,** если его можно записать в виде

$$y' = \alpha(x)\beta(y)$$

Такое уравнение можно представить также в виде:

$$y' - \alpha(x)\beta(y) = 0; \quad dy - \alpha(x)\beta(y)dx = 0; \quad \frac{dy}{\beta(y)} - \alpha(x)dx = 0$$

при $\beta(y) \neq 0$;

Перейдем к новым обозначениям $\alpha(x) = -X(x); \quad \frac{1}{\beta(y)} = Y(y);$

Получаем: $$X(x)dx + Y(y)dy = 0;$$

$$\int X(x)dx + \int Y(y)dy = C$$

После нахождения соответствующих интегралов получается общее решение дифференциального уравнения с разделяющимися переменными.

Если заданы начальные условия, то при их подстановке в общее решение находится постоянная величина C , а, соответственно, и частное решение.

Пример 2.3. Найти общее решение дифференциального уравнения: $yy' = \frac{-2x}{\cos y}$ $\quad y\cos y \cdot \frac{dy}{dx} = -2x$ $\quad y\cos y dy = -2xdx$

$\int y\cos y dy = -2\int xdx$

Интеграл, стоящий в левой части, берется по частям:

$$\int y\cos y dy = \begin{Bmatrix} u = y; & dv = \cos y dy; \\ du = dy; & v = \sin y \end{Bmatrix} = y\sin y - \int \sin y dy = y\sin y + \cos y$$

$$y\sin y + \cos y = -x^2 + C$$

$$y\sin y + \cos y + x^2 + C = 0$$

- это есть общий интеграл исходного дифференциального уравнения, т.к. искомая функция и не выражена через независимую переменную. В этом и заключается **отличие** общего (частного) **интеграла** от общего (частного) **решения.**

Чтобы проверить правильность полученного ответа, продифференцируем его по переменной x:

$$y'\sin y + yy'\cos y - y'\sin y + 2x = 0$$

$$yy' = -\frac{2x}{\cos y} \text{ - верно.}$$

2.2.2. Однородные дифференциальные уравнения первого порядка.

Определение 2.12. Функция $f(x,y)$ называется **однородной n – го измерения** относительно своих аргументов x и y , если для любого значения параметра t (кроме нуля) выполняется тождество:

$$f(tx,ty)=t^n f(x,y).$$

Определение 2.13. Дифференциальное уравнение вида $y'=f(x,y)$ называется **однородным**, если его правая часть $f(x,y)$ есть однородная функция нулевого измерения относительно своих аргументов.

Любое уравнение вида $P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0$ является однородным, если функции $P(x,y)$ и $Q(x,y)$ – однородные функции одинакового измерения.

Решение любого однородного уравнения основано на приведении этого уравнения к уравнению с разделяющимися переменными.

Рассмотрим однородное уравнение $y'=f(x,y)$.

Т.к. функция $f(x,y)$ – однородная нулевого измерения, то можно записать:

$$f(tx,ty)=f(x,y).$$

Т.к. параметр t вообще говоря произвольный, предположим, что $t=\frac{1}{x}$. Получаем:

$$f(x,y)=f\left(1,\frac{y}{x}\right)$$

Правая часть полученного равенства зависит фактически только от одного аргумента $u=\frac{y}{x}$, т.е.

$$f(x,y)=\varphi\left(\frac{y}{x}\right)=\varphi(u);$$

Исходное дифференциальное уравнение таким образом можно записать в виде:

$$y'=\varphi(u)$$

Далее заменяем $y=ux$, $y'=u'x+ux'$.

$$u'x+ux'=\varphi(u);\quad u'x+u=\varphi(u);\quad u'=\frac{\varphi(u)-u}{x};$$

таким образом, получили уравнение с разделяющимися переменными относительно неизвестной функции u.

$$\frac{du}{\varphi(u)-u}=\frac{dx}{x}; \quad \int\frac{du}{\varphi(u)-u}=\int\frac{dx}{x}+C;$$

Далее, заменив вспомогательную функцию u на ее выражение через x и y найдя интегралы, получим общее решение однородного дифференциального уравнения.

2.2.3. Линейные дифференциальные уравнения первого порядка.

Определение 2.14. Дифференциальное уравнение называется **линейным** относительно неизвестной функции и ее производной, если оно может быть записано в виде:

$$y'+P(x)y=Q(x),$$

при этом, если правая часть $Q(x)$ равна нулю, то такое уравнение называется **линейным однородным** дифференциальным уравнением, если правая часть $Q(x)$ не равна нулю, то такое уравнение называется **линейным неоднородным** дифференциальным уравнением.

$P(x)$ и $Q(x)$ – функции непрерывные на некотором промежутке $a<x<b$.

Линейные однородные дифференциальные уравнения.

Рассмотрим методы нахождения общего решения линейного однородного дифференциального уравнения первого порядка вида

$$y'+P(x)y=0.$$

Для этого типа дифференциальных уравнений разделение переменных не представляет сложностей.

$$\frac{dy}{y}=-P(x)dx$$

$$\ln|y|=-\int P(x)dx+\ln|C|;$$

$$\ln\left|\frac{y}{C}\right|=-\int P(x)dx;$$

Общее решение: $$y = Ce^{-\int P(x)dx}$$

Линейные неоднородные дифференциальные уравнения.

Для интегрирования линейных неоднородных уравнений $(Q(x) \neq 0)$ применяются в основном два метода: метод Бернулли и метод Лагранжа.

2.2.4. Уравнение Бернулли

Определение 2.15. Уравнением Бернулли называется уравнение вида

$$y' + Py = Q \cdot y^n,$$

где P и Q – функции от x или постоянные числа, а n – постоянное число, не равное 1.

Для решения уравнения Бернулли применяют подстановку $z = \frac{1}{y^{n-1}}$, с помощью которой, уравнение Бернулли приводится к линейному.

Для этого разделим исходное уравнение на y^n.

$$\frac{y'}{y^n} + P\frac{1}{y^{n-1}} = Q;$$

Применим подстановку, учтя, что $z' - (n-1)Pz = -(n-1)Q$.

$$-\frac{z'}{n-1} + Pz = Q$$

$$z' - (n-1)Pz = -(n-1)Q$$

т.е. получилось линейное уравнение относительно неизвестной функции z.

Решение этого уравнения будем искать в виде:

$$z = e^{-\int P_1 dx}\left(\int Q_1 e^{\int P_1 dx} dx + C\right)$$

$$Q_1 = -(n-1)Q; \qquad P_1 = -(n-1)P.$$

Пример 2.4. Решить уравнение $xy' + y = xy^2 \ln x$. Разделим уравнение на xy^2: $\frac{y'}{y^2} + \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{y} = \ln x$.

Полагаем $z = \frac{1}{y}$; $z' = -\frac{y'}{y^2}$.

$$-z' + \frac{1}{x} z = \ln x; \qquad z' - \frac{1}{x} z = -\ln x$$

Полагаем $P = -\frac{1}{x}$, $Q = -\ln x$.

$$z = e^{\int \frac{dx}{x}} \left(\int -\ln x e^{-\int \frac{dx}{x}} dx + C \right); \qquad z = e^{\ln x} \left(\int -\ln x e^{-\ln x} dx + C \right)$$

$$z = x \left(\int -\ln x \cdot \frac{dx}{x} + C \right); \qquad z = x \left(-\int \ln x d(\ln x) + C \right) \qquad z = x \left(-\frac{\ln^2 x}{2} + C \right)$$

Произведя обратную подстановку, получаем:

$$\frac{1}{y} = x \left(-\frac{\ln^2 x}{2} + C \right).$$

2.3. Уравнения высших порядков

2.3.1. Уравнения, допускающие понижение порядка.

Понижение порядка дифференциального уравнения – основной метод решения уравнений высших порядков. Этот метод дает возможность сравнительно легко находить решение, однако, он применим далеко не ко всем уравнениям. Рассмотрим случаи, когда возможно понижение порядка.

Уравнения вида $y^{(n)} = f(x)$.

Если $f(x)$ – функция непрерывная на некотором промежутке $a < x < b$, то решение может быть найдено последовательным интегрированием.

$$y^{(n-1)} = \int f(x) dx + C_1;$$

$$y^{(n-2)} = \int\left(\int f(x)dx + C_1\right)dx + C_2 = \int dx\int f(x)dx + C_1x + C_2;$$

....

$$y = \int dx\int dx....\int f(x)dx + C_1\frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + C_2\frac{x^{n-2}}{(n-2)!} + ... + C_n;$$

Пример 2.5. Решить уравнение $y''' = e^{2x}$ с начальными условиями $x_0 = 0; y_0 = 1; \; y_0' = -1; \; y_0'' = 0.$

Решение:

$$y'' = \int e^{2x}dx + C_1 = \frac{1}{2}e^{2x} + C_1; \quad y' = \int\left(\frac{1}{2}e^{2x} + C_1\right)dx = \frac{1}{4}e^{2x} + C_1x + C_2;$$

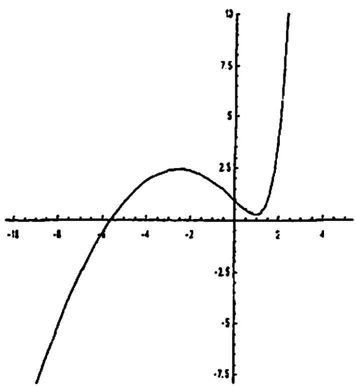
$$y = \int\left(\frac{1}{4}e^{2x} + C_1x + C_2\right) = \frac{1}{8}e^{2x} + \frac{1}{2}C_1x^2 + C_2x + C_3;$$

Подставим начальные условия:

$$1 = \frac{1}{8} + C_3; \quad -1 = \frac{1}{4} + C_2; \quad 0 = \frac{1}{2} + C_1; \quad C_1 = -\frac{1}{2}; \quad C_2 = -\frac{5}{4}; \quad C_3 = \frac{7}{8};$$

Получаем частное решение (решение задачи Коши): $y = \frac{1}{8}e^{2x} - \frac{1}{4}x^2 - \frac{5}{4}x + \frac{7}{8}$.

Ниже показана интегральная кривая данного дифференциального уравнения.



2.3.2. Линейные дифференциальные уравнения высших порядков.

Определение 2.16. Линейным дифференциальным уравнением n – го порядка называется любое уравнение первой степени относительно функции y и ее производных $y', y'', ..., y^{(n)}$ вида:

$$p_0 y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + p_2 y^{(n-2)} + ... + p_{n-1} y' + p_n y = f(x);$$

Где $p_0, p_1, ..., p_n$ – функции от x или постоянные величины, причем $p_0 \neq 0$. Левую часть этого уравнения обозначим $L(y)$.

$$p_0 y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + p_2 y^{(n-2)} + ... + p_{n-1} y' + p_n y = L(y);$$

Определение 2.17. Если $f(x) = 0$, то уравнение $L(y) = 0$ называется **линейным однородным** уравнением, если $f(x) \neq 0$, то уравнение $L(y) = f(x)$ называется **линейным неоднородным** уравнением, если все коэффициенты $p_0, p_1, p_2, ... p_n$ – постоянные числа, то уравнение $L(y) = f(x)$ называется **линейным дифференциальным уравнением высшего порядка с постоянными коэффициентами.**

Отметим одно важное свойство линейных уравнений высших порядков, которое отличает их от нелинейных. Для нелинейных уравнений частный интеграл находится из общего, а для линейных – наоборот, общий интеграл составляется из частных. Линейные уравнения представляют собой наиболее изученный класс дифференциальных уравнений высших порядков. Это объясняется сравнительной простотой нахождения решения. Если при решении каких – либо практических задач требуется решить нелинейное дифференциальное уравнение, то часто применяются приближенные методы, позволяющие заменить такое уравнение “близким” к нему линейным.

2.3.3. Структура общего решения, определитель Вронского.

Определение 2.18. Фундаментальной системой решений линейного однородного дифференциального уравнения n –го порядка на интервале (a, b) называется всякая система n линейно независимых на этом интервале решений уравнения.

Определение 2.19. Если из функций y_i составить определитель n – го порядка

$$W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ y_1' & y_2' & \dots & y_n' \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix},$$

то этот определитель называется **определителем Вронского.**

(Юзеф Вроньский (1776 – 1853) – польский математик и философ - мистик)

Теорема 2.2. *Если функции $y_1, y_2, \dots, y_n$ линейно зависимы, то составленный для них определитель Вронского равен нулю.*

Теорема 2.3. *Если функции $y_1, y_2, \dots, y_n$ линейно независимы, то составленный для них определитель Вронского не равен нулю ни в одной точке рассматриваемого интервала.*

Теорема 2.4. *Для того, чтобы система решений линейного однородного дифференциального уравнения $y_1, y_2, \dots, y_n$ была фундаментальной необходимо и достаточно, чтобы составленный для них определитель Вронского был не равен нулю.*

Теорема 2.5. *Если $y_1, y_2, \dots, y_n$ - фундаментальная система решений на интервале (a, b), то общее решение линейного однородного дифференциального уравнения является линейной комбинацией этих решений.*

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \dots + C_n y_n$$

где C_i – постоянные коэффициенты.

Применение приведенных выше свойств и теорем рассмотрим на примере линейных однородных дифференциальных уравнений второго порядка.

2.3.4. Линейные однородные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами.

Характеристическое уравнение.

Решение дифференциального уравнения вида $y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+...+a_ny=0$ или, короче, $L(y)=0$ будем искать в виде $y=e^{kx}$, где $k = const$.

т.к. $y'=ke^{kx}$; $y''=k^2e^{kx}$; ... $y^{(n)}=k^ne^{kx}$, то

$$L(e^{kx})=e^{kx}(k^n+a_1k^{n-1}+...+a_n).$$

При этом многочлен $F(k)=k^n+a_1k^{n-1}+...+a_n$ называется **характеристическим многочленом** дифференциального уравнения. Для того, чтобы функция $y=e^{kx}$ являлась решением исходного дифференциального уравнения, необходимо и достаточно, чтобы

$$L(e^{kx})=0;\ \text{т.е.}\ e^{kx}F(k)=0.$$

т.к. $e^{kx}\neq 0$, то $F(k)=0$ - это уравнение называется **характеристическим уравнением.**

Как и любое алгебраическое уравнение степени n, характеристическое уравнение $k^n+a_1k^{n-1}+...+a_n=0$ имеет n корней. Каждому корню характеристического уравнения k_i соответствует решение дифференциального уравнения.

В зависимости от коэффициентов k характеристическое уравнение может иметь либо n различных действительных корней, либо среди действительных корней могут быть кратные корни, могут быть комплексно – сопряженные корни, как различные, так и кратные.

Не будем подробно рассматривать каждый случай, а сформулируем общее правило нахождения решения линейного однородного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами.

Составляем характеристическое уравнение и находим его корни.

Частное и общее решения.

Находим частные решения дифференциального уравнения, причем:

а) каждому действительному корню соответствует

решение e^{kx};

б) каждому действительному корню кратности m ставится в соответствие m решений:

$$e^{kx};\quad xe^{kx};\quad \ldots\quad x^{m-1}e^{kx}.$$

в) каждой паре комплексно – сопряженных корней $\alpha \pm i\beta$ характеристического уравнение ставится в соответствие два решения:

$$e^{\alpha x}\cos\beta x \text{ и } e^{\alpha x}\sin\beta x$$

г) каждой паре m – кратных комплексно – сопряженных корней $\alpha \pm i\beta$ характеристического уравнения ставится в соответствие $2m$ решений:

$$e^{\alpha x}\cos\beta x,\quad xe^{\alpha x}\cos\beta x,\quad \ldots\quad x^{m-1}e^{\alpha x}\cos\beta x,$$
$$e^{\alpha x}\sin\beta x,\quad xe^{\alpha x}\sin\beta x,\quad \ldots x^{m-1}e^{\alpha x}\sin\beta x.$$

Составляем линейную комбинацию найденных решений.

Эта линейная комбинация и будет являться общим решением исходного линейного однородного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами.

Пример 2.6. Решить уравнение $y''' - y = 0$.

Решение: Составим характеристическое уравнение: $k^3 - 1 = 0$;

$$(k-1)(k^2+k+1) = 0;\qquad k_1 = 1;\qquad k^2+k+1 = 0;$$

$$D = 1-4 = -3;\qquad k_2 = -\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i;\qquad k_3 = -\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i;$$

Общее решение имеет вид: $y = C_1 e^x + e^{-\frac{x}{2}}\left[C_2 \cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + C_3 \sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right]$.

Пример 2.7. Решить уравнение $y^{IV} - y = 0$.

Решение: Составим характеристическое уравнение: $k^4 - 1 = 0$.

$$(k^2-1)(k^2+1) = 0; \qquad k_1 = 1; \quad k_2 = -1; \quad k_3 = i; \quad k_4 = -i.$$

Общее решение: $y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + C_3 \cos x + C_4 \sin x$.

Пример 2.8. Решить уравнение $y'' - 4y' + 4y = 0$.

Решение: Характеристическое уравнение: $k^2 - 4k + 4 = 0$; $\quad k_1 = k_2 = 2$.

Общее решение: $y = C_1 e^{2x} + C_2 x e^{2x}$.

Пример 2.9. Решить уравнение $y'' + 2y' + 5y = 0$.

Решение: Характеристическое уравнение:

$k^2 + 2k + 5 = 0$; $\quad D = -16$; $\quad k_1 = -1 + 2i$; $\quad k_2 = -1 - 2i$.

Общее решение: $y = e^{-x}(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x)$.

Пример 2.10. Решить уравнение $y''' - 7y'' + 6y' = 0$.

Решение: Характеристическое уравнение:

$k^3 - 7k^2 + 6k = 0$; $\quad k(k^2 - 7k + 6) = 0$; $\quad k_1 = 0$; $k_2 = 1$; $k_3 = 6$;

Общее решение: $y = C_1 + C_2 e^x + C_3 e^{6x}$;

Пример 2.11. Решить уравнение $y'' - y' - 2y = 0$.

Решение: Характеристическое уравнение:

$k^2 - k - 2 = 0$; $\quad k_1 = -1$; $k_2 = 2$;

Общее решение: $y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{2x}$.

Пример 2.12. Решить уравнение $y^V - 9y''' = 0$.

Решение: Характеристическое уравнение: $k^5 - 9k^3 = 0$; $\quad k^3(k^2 - 9) = 0$;

$$k_1 = k_2 = k_3 = 0; \qquad k_4 = 3; \qquad k_5 = -3;$$

Общее решение: $y = C_1 + C_2x + C_3x^2 + C_4e^{3x} + C_5e^{-3x}$;

2.3.5. Линейные неоднородные дифференциальные уравнения с произвольными коэффициентами.

Линейные однородные дифференциальные уравнения с произвольными коэффициентами.

Рассмотрим уравнение вида

$$p_0y^{(n)} + p_1y^{(n-1)} + p_2y^{(n-2)} + \ldots + p_{n-1}y' + p_ny = 0$$

Определение 2.20. Выражение

$$p_0y^{(n)} + p_1y^{(n-1)} + p_2y^{(n-2)} + \ldots + p_{n-1}y' + p_ny = L(y)$$

называется **линейным дифференциальным оператором.**

Линейный дифференциальный оператор обладает следующими свойствами:

1) $L(Cy) = CL(y)$;

2) $L(y_1 + y_2) = L(y_1) + L(y_2)$;

Решения линейного однородного уравнения обладают следующими свойствами:

1) Если функция y_1 является решением уравнения, то функция Cy_1, где C – постоянное число, также является его решением.

2) Если функции y_1 и y_2 являются решениями уравнения, то $y_1 + y_2$ также является его решением.

<u>Структура общего решения.</u>

Определение 2.21. Фундаментальной системой решений линейного однородного дифференциального уравнения n –го порядка на интервале (a,b) называется всякая система n линейно независимых на этом интервале решений уравнения.

Определение 2.22. Если из функций y_i составить определитель n – го порядка

$$W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ y_1' & y_2' & \dots & y_n' \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix},$$

то этот определитель называется **определителем Вронского.**

(Юзеф Вроньский (1776 – 1853) – польский математик и философ - мистик)

Теорема 2.6. *Если функции $y_1, y_2, \dots, y_n$ линейно зависимы, то составленный для них определитель Вронского равен нулю.*

Теорема 2.7. *Если функции $y_1, y_2, \dots, y_n$ линейно независимы, то составленный для них определитель Вронского не равен нулю ни в одной точке рассматриваемого интервала.*

Теорема 2.8. *Для того, чтобы система решений линейного однородного дифференциального уравнения $y_1, y_2, \dots, y_n$ была фундаментальной необходимо и достаточно, чтобы составленный для них определитель Вронского был не равен нулю.*

Теорема 2.9. *Если $y_1, y_2, \dots, y_n$- фундаментальная система решений на интервале (a,b), то общее решение линейного однородного дифференциального уравнения является линейной комбинацией этих решений.*

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \dots + C_n y_n,$$

где C_i – постоянные коэффициенты.

Применение приведенных выше свойств и теорем рассмотрим на примере линейных однородных дифференциальных уравнений второго порядка.

Линейные неоднородные дифференциальные уравнения с произвольными коэффициентами.

Рассмотрим уравнение вида $y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \dots + p_n(x)y = f(x)$.

С учетом обозначения $y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \dots + p_n(x)y = L(x)$ можно записать:

$$L(x)=f(x).$$

При этом будем полагать, что коэффициенты и правая часть этого уравнения непрерывны на некотором интервале (конечном или бесконечном).

Теорема 2.10. *Общее решение линейного неоднородного дифференциального уравнения* $y^{(n)}+p_1(x)y^{(n-1)}+...+p_n(x)y=f(x)$ *в некоторой области есть сумма любого его решения и общего решения соответствующего линейного однородного дифференциального уравнения.*

<u>**Доказательство.**</u> Пусть Y – некоторое решение неоднородного уравнения. Тогда при подстановке этого решения в исходное уравнение получаем тождество: $L(\ Y)\equiv\ f($ Пусть $y_1,y_2,...,y_n$ - фундаментальная система решений линейного однородного уравнения $L(y)=0$. Тогда общее решение однородного уравнения можно записать в виде:

$y=C_1y_1+C_2y_2+...+C_ny_n;\quad C_i=const.$ Далее покажем, что сумма $Y+C_1y_1+C_2y_2+...+C_ny_n$ является общим решением неоднородного уравнения.

$$L(Y+C_1y_1+C_2y_2+...+C_ny_n)=L(Y)+L(C_1y_1)+L(C_2y_2)+...+L(C_ny_n)=$$
$$=L(Y)=f(x)$$

Вообще говоря, решение Y может быть получено из общего решения, так как является частным решением. Таким образом, в соответствии с доказанной теоремой, для решения линейного неоднородного дифференциального уравнения необходимо найти общее решение соответствующего однородного уравнения и каким- то образом отыскать одно частное решение неоднородного уравнения. Обычно оно находится подбором.

Метод вариации произвольных постоянных.

Сначала находят общее решение соответствующего однородного уравнения в виде: $y=C_1y_1+C_2y_2+...+C_ny_n=\sum_{i=1}^{n}C_iy_i;$

затем, полагая коэффициенты C_i функциями от x, ищется решение неоднородного уравнения: $y=\sum_{i=1}^{n}C_i(x)y_i;$

Можно доказать, что для нахождения функций $C_i(x)$ надо решить систему уравнений:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} C_i'(x) y_i = 0 \\ \sum_{i=1}^{n} C_i'(x) y_i' = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \sum_{i=1}^{n} C_i'(x) y_i^{(n-1)} = f(x) \end{cases}$$

Пример 2.13. Решить уравнение $y'' + y = x - \sin 2x.$

Решение: Решаем линейное однородное уравнение $y'' + y = 0.$

$$k^2 + 1 = 0; \quad k_1 = i; \quad k_2 = -i.$$

$$y = e^{\alpha x}(A\cos\beta x + B\sin\beta x); \quad \alpha = 0; \quad \beta = 1;$$

$$y = A\cos x + B\sin x;$$

Решение неоднородного уравнения будет иметь вид:

$$y = A(x)\cos x + B(x)\sin x;$$

Составляем систему уравнений:

$$\begin{cases} A'(x)\cos x + B'(x)\sin x = 0 \\ -A'(x)\sin x + B'(x)\cos x = x - \sin 2x \end{cases}$$

Решим эту систему:

$$\begin{cases} B'(x) = -A'(x)\dfrac{\cos x}{\sin x} \\ -A'(x)\sin x - A'(x)\dfrac{\cos^2 x}{\sin x} = x - \sin 2x \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{-A'(x)}{\sin x} = x - \sin 2x \\ B'(x) = \cos x(x - \sin 2x) \end{cases}$$

Из соотношения $A'(x) = 2\sin^2 x\cos x - x\sin x$ найдем функцию *A(x).*

$$A(x) = \int \left(2\sin^2 x\cos x - x\sin x\right)dx = 2\int \sin^2 x\cos x dx - \int x\sin x dx = \frac{2}{3}\sin^3 x - \int x\sin x dx =$$

$$= \begin{Bmatrix} u = x; & dv = \sin x dx; \\ du = dx; & v = -\cos x \end{Bmatrix} = \frac{2}{3}\sin^3 x + x\cos x - \int \cos x dx = \frac{2}{3}\sin^3 x + x\cos x - \sin x + C_1.$$

Теперь находим *B(x)*.

$$B(x)=\int x\cos x dx-2\int\cos^2 x\sin x dx=\begin{Bmatrix} u=x; & dv=\cos x dx; \\ du=dx; & v=\sin x; \end{Bmatrix}=x\sin x-\int\sin x dx+\frac{2}{3}\cos^3 x=$$
$$=\frac{2}{3}\cos^3 x+x\sin x+\cos x+C_2.$$

Подставляем полученные значения в формулу общего решения неоднородного уравнения:

$$y=\frac{2}{3}\sin^3 x\cos x+x\cos^2 x-\sin x\cos x+C_1\cos x+\frac{2}{3}\sin x\cos^3 x+$$
$$+x\sin^2 x+\sin x\cos x+C_2\sin x=\frac{2}{3}\sin x\cos x(\sin^2 x+\cos^2 x)+x(\sin^2 x+\cos^2 x)+$$
$$+C_1\cos x+C_2\sin x.$$

Окончательный ответ: $y=\frac{1}{3}\sin 2x+x+C_1\cos x+C_2\sin x;$

Таким образом, удалось избежать нахождения частного решения неоднородного уравнения методом подбора.

Вообще говоря, метод вариации произвольных постоянных пригоден для нахождения решений любого линейного неоднородного уравнения. Но т.к. нахождение фундаментальной системы решений соответствующего однородного уравнения может быть достаточно сложной задачей, этот метод в основном применяется для неоднородных уравнений с постоянными коэффициентами.

2.3.6. Линейные неоднородные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами

Уравнения с правой частью специального вида.

Представляется возможным представить вид частного решения в зависимости от вида правой части неоднородного уравнения.

Различают следующие случаи.

I. Правая часть линейного неоднородного дифференциального уравнения имеет вид: $f(x)=P(x)e^{\alpha x}$, где $P(x)=A_0x^m+A_1x^{m-1}+...+A_m$ - многочлен степени m.

Тогда частное решение ищется в виде: $y=x^r e^{\alpha x}Q(x)$. Здесь $Q(x)$- многочлен той же степени, что и $P(x)$, но с неопределенными коэффициентами, а r – число, показывающее сколько раз число α является корнем характеристического уравнения для соответствующего линейного однородного дифференциального уравнения.

Пример 2.14. Решить уравнение $y'''-4y'=x$

Решение: Решим соответствующее однородное уравнение: $y'''-4y'=0$. $k^3-4k=0$; $k(k^2-4)=0$; $k_1=0$; $k_2=2$; $k_3=-2$;
$y=C_1+C_2e^{2x}+C_3e^{-2x}$;

Теперь найдем частное решение исходного неоднородного уравнения.

Сопоставим правую часть уравнения с видом правой части, рассмотренным выше.

$$P(x)=x;\quad \alpha=0.$$

Частное решение ищем в виде: $y=x^r e^{\alpha x}Q(x)$, где $r=1$; $\alpha=0$; $Q(x)=Ax+B$.

т.е. $y=Ax^2+Bx$.

Теперь определим неизвестные коэффициенты A и B.

Подставим частное решение в общем виде в исходное неоднородное дифференциальное уравнение : $y'=2Ax+B$; $y''=2A$; $y'''=0$;

$$0-8Ax-4B=x;\quad -8A=1;\quad A=-\frac{1}{8};\quad B=0;$$

Итого, частное решение: $y=-\dfrac{x^2}{8}$.

II. Правая часть линейного неоднородного дифференциального уравнения имеет вид: $f(x)=e^{\alpha x}[P_1(x)\cos\beta x+P_2(x)\sin\beta x]$

Здесь $P_1(x)$ и $P_2(x)$ – многочлены степени m_1 и m_2 соответственно.

Тогда частное решение неоднородного уравнения будет иметь вид:

$$y = x^r e^{\alpha x}\left[Q_1(x)\cos\beta x + Q_2(x)\sin\beta x\right]$$

где число r показывает сколько раз число $\alpha + i\beta$ является корнем характеристического уравнения для соответствующего однородного уравнения, а $Q_1(x)$ и $Q_2(x)$ – многочлены степени не выше m, где m- большая из m_1 и m_2. Заметим, что если правая часть уравнения является комбинацией выражений рассмотренного выше вида, то решение находится как комбинация решений вспомогательных уравнений, каждое из которых имеет правую часть, соответствующую выражению, входящему в комбинацию.

То есть, если уравнение имеет вид: $L(y) = f_1(x) + f_2(x)$, то частное решение этого уравнения будет $y = y_1 + y_2$, где y_1 и y_2 – частные решения вспомогательных уравнений $L(y) = f_1(x)$ и $L(y) = f_2(x)$.

Для иллюстрации решим рассмотренный выше пример другим способом.

Пример 2.15. Решить уравнение $y'' + y = x - \sin 2x$.

Решение: Правую часть дифференциального уравнения представим в виде суммы двух функций $f_1(x) + f_2(x) = x + (-sinx)$.

Составим и решим характеристическое уравнение: $k^2 + 1 = 0$; $k_{1,2} = \pm i$;

1. Для функции $f_1(x)$ решение ищем в виде $y_1 = x^r e^{\alpha x} Q(x)$.
Получаем: $\alpha = 0$, $r = 0, Q(x) = Ax + B$; т.е. $y_1 = Ax + B$;

$$y_1' = A; \qquad y_1'' = 0;$$
$$Ax + B = x; \quad A = 1; \quad B = 0;$$

Итого: $y_1 = x$;

Для функции $f_2(x)$ решение ищем в виде:
$y_2 = x^r e^{\alpha x}(Q_1(x)\cos\beta x + Q_2(x)\sin\beta x)$

Анализируя функцию $f_2(x)$, получаем:

$P_1(x)=0;\quad P_2(x)=-1;\quad \alpha=0;\quad \beta=2;\quad r=0;$

Таким образом, $y_2 = C\cos 2x + D\sin 2x;$

$$y_2' = -2C\sin 2x + 2D\cos 2x;$$
$$y_2'' = -4C2\cos x - 4D\sin 2x;$$
$$-4C\cos 2x - 4D\sin 2x + C\cos 2x + D\sin 2x = -\sin 2x;$$

$$-3C\cos 2x - 3D\sin 2x = -\sin 2x$$

$$A=0;\quad B=\frac{1}{3};$$

Итого: $y_2 = \frac{1}{3}\sin 2x;$ т.е. искомое частное решение имеет вид:

$y = y_1 + y_2 = \frac{1}{3}\sin 2x + x;$

Общее решение неоднородного дифференциального уравнения:

$$y = \frac{1}{3}\sin 2x + x + C_1\cos x + C_2\sin x;$$

Рассмотрим примеры применения описанных методов.

Пример 2.16. Решить уравнение $y'' - 2y' + y = 3e^x$.

Решение: Составим характеристическое уравнение для соответствующего линейного однородного дифференциального уравнения:

$k^2 - 2k + 1 - 0;\qquad k_1 = k_2 = 1;$

Общее решение однородного уравнения: $y = C_1e^x + C_2xe^x$.

Теперь найдем частное решение неоднородного уравнения в виде:

$$y = x^r e^{\alpha x}Q(x)\ ,\ \alpha=1;\quad r=2;\quad Q(x)=C;\ y=Cx^2e^x.$$

Воспользуемся методом неопределенных коэффициентов:

$$y' = 2Cxe^x + Cx^2e^x;\qquad y'' = 2Ce^x + 2Cxe^x + 2Cxe^x + Cx^2e^x.$$

Подставляя в исходное уравнение, получаем:

$$2Ce^x + 4Cxe^x + Cx^2e^x - 4Cxe^x - 2Cx^2e^x + Cx^2e^x = 3e^x.$$

$$2C=3; \qquad C=\frac{3}{2}.$$

Частное решение имеет вид: $y=\frac{3}{2}x^2e^x$.

Общее решение линейного неоднородного уравнения: $y=C_1e^x+C_2xe^x+\frac{3}{2}x^2e^x$.

Пример 2.17. Решить уравнение $y'''-y'=x^2-1$.

Решение: Характеристическое уравнение:

$$k^3-k=0; \quad k(k^2-1)=0; \quad k_1=0; \quad k_2=1; \quad k_3=-1;$$

Общее решение однородного уравнения: $y=C_1+C_2e^x+C_3e^{-x}$.

Частное решение неоднородного уравнения: $y=x^re^{\alpha x}Q(x)$

$$\alpha=0; \quad r=1; \quad Q(x)=Ax^2+Bx+C.$$

$$y=Ax^3+Bx^2+Cx$$

Находим производные и подставляем их в исходное неоднородное уравнение:

$$y'=3Ax^2+2Bx+C; \quad y''=6Ax+2B; \quad y'''=6A;$$

$$6A-3Ax^2-2Bx-C=x^2-1;$$

$$-3A=1; \quad -2B=0; \quad 6A-C=-1;$$

$$A=-\frac{1}{3}; \quad B=0; \quad C=-1;$$

Получаем общее решение неоднородного дифференциального уравнения:

$$y=C_1+C_2e^x+C_3e^{-x}-\frac{1}{3}x^3-x.$$

3.1. Преобразование Лапласа. Оригиналы и изображения

Рассмотрим функцию действительного переменного t, определенную при $t>0$. Будем также считать, что функция $f(t)$ – кусочно - непрерывная, т.е. в любом конечном интервале она имеет конечное число точек разрыва первого рода, и определена на бесконечном интервале $(-\infty,\infty)$, но $f(t) = 0$ при $t < 0$.

Будем считать, что функция ограничена условием:

$$|f(t)| < Me^{at}$$

Рассмотрим функцию

$$F(p) = \int_0^\infty e^{-pt} f(t)dt$$

где $p = a + ib$ – комплексное число.

Определение 3.1. Функция $F(p)$ называется **изображением Лапласа** функции $f(t)$.

Также функцию $F(p)$ называют **L – изображением** или **преобразованием Лапласа.**

Обозначается $F(p) = L\{f(t)\}$; $\quad F(p) \xrightarrow{\bullet} f(t)$; $\quad F(p) \stackrel{\bullet}{=} f(t)$;

При этом функция f(t) называется **начальной функцией** или **оригиналом**, а процесс нахождения оригинала по известному изображению называется **операционным исчислением.**

Теорема 3.1. (Теорема единственности) *Если две непрерывные функции f(x) и g(x) имеют одно и то же L – изображение F(p), то они тождественно равны.*

Определение 3.2. Функцией Хэвисайда (Оливер Хэвисайд (1850 – 1925) – английский физик) называется функция

$$\sigma_0(t)=\begin{cases}1, & t\ge 0\\ 0, & t<0\end{cases}$$

3.1.1. Свойства изображений.

Если $F(p)\doteq f(t)$, то справедливы следующие свойства:

1) *Свойство подобия.*

$$f(\alpha t)\doteq\frac{1}{\alpha}F\left(\frac{p}{\alpha}\right);\qquad \alpha>0;$$

2) *Свойство линейности.*

$$L[Af(t)+Bg(t)]=AL[f(t)]+BL[g(t)].$$

3) *Смещение изображения.*

$$f(t)e^{-\alpha t}\doteq F(p+\alpha)$$

$$\int_0^t f(\tau)d\tau\doteq\frac{F(p)}{p}$$

3.1.2. Таблица изображений некоторых функций.

Для большинства функций изображение находится непосредственным интегрированием.

Пример 3.1. Найти изображение функции $f(t)\ =sint$.

Решение:

$$F(p)=\int_0^\infty e^{-pt}\sin t dt=\begin{Bmatrix}u=e^{-pt}; & dv=\sin t dt;\\ du=-pe^{-pt}dt; & v=-\cos t;\end{Bmatrix}=-e^{-pt}\cos t\Big|_0^\infty-\int_0^\infty pe^{-pt}\cos t dt=$$

$$=1-p\int_0^\infty e^{-pt}\cos t dt=\begin{Bmatrix}u=e^{-pt}; & dv=\cos t dt;\\ du=-pe^{-pt}dt; & v=\sin t;\end{Bmatrix}=1-pe^{-pt}\sin t\Big|_0^\infty-\ p^2\int_0^\infty e^{-pt}\sin t dt.$$

$$(1+p^2)\int_0^\infty e^{-pt}\sin t dt=1$$

$$\int_0^\infty e^{-pt}\sin t dt=\frac{1}{1+p^2};\qquad \sin t\doteq\frac{1}{1+p^2};$$

Для многих функций изображения посчитаны и приведены в соответствующих таблицах.

№	$f(t)$	$F(p)$	№	$f(t)$	$F(p)$
1	1	$\frac{1}{p}$	9	t^n	$\frac{n!}{p^{n+1}}$
2	$\sin\alpha t$	$\frac{\alpha}{p^2+\alpha^2}$	10	$t\sin at$	$\frac{2pa}{(p^2+a^2)^2}$
3	$\cos\alpha t$	$\frac{p}{p^2+\alpha^2}$	11	$t\cos at$	$-\frac{a^2-p^2}{(p^2+a^2)^2}$
4	$e^{-\alpha t}$	$\frac{1}{p+\alpha}$	12	$te^{-\alpha t}$	$\frac{1}{(p+\alpha)^2}$
5	$sh\,\alpha t$	$\frac{\alpha}{p^2-\alpha^2}$	13	$\frac{1}{2a^3}(\sin at - at\cos at)$	$\frac{1}{(p^2+a^2)^2}$
6	$ch\,\alpha t$	$\frac{p}{p^2-\alpha^2}$	14	$t^n f(t)$	$(-1)^n\frac{d^n}{dp^n}F(p)$
7	$e^{-\alpha t}\sin at$	$\frac{a}{(p+\alpha)^2+a^2}$	15	$\int_0^t f_1(\tau)f_2(t-\tau)d\tau$	$F_1(p)F_2(p)$
8	$e^{-\alpha t}\cos at$	$\frac{p+\alpha}{(p+\alpha)^2+a^2}$	16	$f^{(n)}(t)$	$p^nF(p)$ *

* - при условии, что $f(0)=f'(0)=...=f^{(n-1)}(0)=0$

3.1.3. Дифференцирование и интегрирование оригинала и изображения.

1) Дифференцирование изображения.

$$(-1)^n\frac{d^n}{dp^n}F(p)\doteqdot t^n f(t)$$

2) Интегрирование изображения.

$$\frac{f(t)}{t} \doteq \int_p^{\infty} F(q)dq$$

(Справедливо при условии, что интеграл сходится)

3) Дифференцирование оригинала.

$$pF(p) - f(0) \doteq f'(t)$$

4) Интегрирование оригинала.

3.1.4. Теоремы свертки и запаздывания.

Теорема 3.2. (теорема запаздывания) *Если* $f(t) = 0$ *при* $t < 0$, *то справедлива формула*

$$L[f(t-t_0)] = e^{-pt_0}L[f(t)]$$

где t_0 *– некоторая точка.*

Определение 3.3. Выражение $\int_0^t f_1(\tau) f_2(t-\tau)d\tau$ называется **сверткой** функций $f_1(t)$ и $f_2(t)$ и обозначается $f_1 * f_2$.

Теорема 3.3. (теорема свертки) *Преобразование Лапласа от свертки равно произведению преобразований Лапласа от функций* $f_1(t)$ *и* $f_2(t)$.

$$F_1(p)F_2(p) \doteq \int_0^t f_1(\tau) f_2(t-\tau)d\tau$$

3.1.5. Интеграл Дюамеля.

Теорема 3.4. (Интеграл Дюамеля (Дюамель (1797 – 1872) – французский математик)). Если $F(p) \doteq f(t)$; $G(p) \doteq g(t)$, то верно равенство

$$pF(p)G(p) \doteq f(t)g(0) + \int_0^t f(\tau) g'(t-\tau)d\tau$$

Для нахождения изображений различных функций наряду с непосредственным интегрированием применяются приведенные выше теоремы и свойства.

Пример 3.2. Найти изображение функции $\frac{\sin t}{t}$.

Решение: Из таблицы изображений получаем: $\sin t \doteqdot \frac{1}{p^2+1}$.

По свойству интегрирования изображения получаем: $\frac{f(t)}{t} \doteqdot \int_p^{\infty} F(q)dq$

$$\frac{\sin t}{t} \doteqdot \int_p^{\infty} \frac{1}{q^2+1} dq = arctgq\Big|_p^{\infty} = \frac{\pi}{2} - arctgp;$$

Пример 3.3. Найти изображение функции $\sin^2 t$.

Решение: Из тригонометрии известна формула $\sin^2 t = \frac{1-\cos 2t}{2}$.

Тогда $\sin^2 t \doteqdot \frac{1}{2} L[1-\cos 2t] = \frac{1}{2} L[1] - \frac{1}{2} L[\cos 2t] = \frac{1}{2p} - \frac{p}{2(p^2+4)} =$

$\frac{p^2+4-p^2}{2p(p^2+4)} = \frac{2}{p(p^2+4)}$.

3.2. Операционный метод решения линейных дифференциальных уравнении с постоянными коэффициентами.

Операционное исчисление используется как для нахождения значений интегралов, так и для решение дифференциальных уравнений.

Пусть дано линейное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами.

$$a_n x^{(n)}(t) + \ldots + a_1 x'(t) + a_0 x(t) = f(t)$$

Требуется найти решение этого дифференциального уравнения, удовлетворяющее начальным условиям:

$$x(0)=x_0;\quad x'(0)=x_0';\quad \dots\quad x^{(n-1)}(0)=x_0^{(n-1)}.$$

Если функция x(t) является решением этого дифференциального уравнения, то оно обращает исходное уравнение в тождество, значит функция, стоящая в левой части уравнения и функция f(t) имеет (по теореме единственности) одно и то же изображение Лапласа.

$$L\left[\sum_{k=0}^{n} a_k \frac{d^k x}{dt^k}\right]=L[f(t)]$$

Из теоремы о дифференцировании оригинала

$\{\, pF(p)-f(0)=f'(t)\,\}$ можно сделать вывод, что

$$L\left[\frac{d^k x}{dt^k}\right]=p^k L[x]-p^{k-1}x(0)-\dots-px^{(k-2)}(0)-x^{(k-1)}(0).$$

Тогда

$$a_n L\left[\frac{d^n x}{dt^n}\right]+\dots+a_0 L[x]=L[f].$$

Обозначим $L[x]=\bar{x}(p),\quad L[f]=F(p)$.

Получаем: $\bar{x}(p)[a_n p^n+a_{n-1}p^{n-1}+\dots+a_1 p+a_0]=a_n[p^{n-1}x_0+p^{n-2}x_0'+\dots+x_0^{(n-1)}]+$

$$+a_{n-1}[p^{n-2}x_0+p^{n-3}x_0'+\dots+x_0^{(n-2)}]+\dots+a_2[px_0+x_0']+a_1x_0+F(p).$$

Это уравнение называется **вспомогательным (изображающим)** или **операторным уравнением.**

Отсюда получаем изображение $\bar{x}(p)$, а по нему и искомую функцию *x(t)*.

Изображение получаем в виде: $\bar{x}(p)=\dfrac{F(p)}{R_n(p)}+\dfrac{\Psi_{n-1}(p)}{R_n(p)}$

Где $R_n(p)=a_n p^n+a_{n-1}p^{n-1}+\dots+a_1 p+a_0$;

$$\Psi_{n-1}(p)=a_1x_0+a_2(px_0+x_0')+a_3(p^2x_0+px_0'+x_0'')+\ldots+a_n(p^{n-1}x_0+p^{n-2}x_0'+\ldots+$$
$$+px_0^{(n-2)}+x_0^{(n-1)})$$

Этот многочлен зависит от начальных условий. Если эти условия нулевые, то многочлен равен нулю, и формула принимает вид:

$$\bar{x}(p)=\frac{F(p)}{R_n(p)}$$

Рассмотрим применение этого метода на примерах.

Пример 3.4. Решить уравнение $y''+4y=2;\qquad y(0)=y'(0)=0.$

Решение: Изображение искомой функции будем искать в виде:

$$\bar{y}=\frac{F(p)}{R_n(p)}$$

$$F(p)=L[f]=L[2]=\frac{2}{p};\qquad R_n(p)=1\cdot p^2+0\cdot p+4=p^2+4.$$

$$\bar{y}=\frac{2}{p(p^2+4)}=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{p}-\frac{p}{p^2+4}\right]$$

Находим оригинал, т.е. искомую функцию: $\bar{y}\doteqdot y=\frac{1}{2}(1-\cos 2x)$

Пример 3.5. Решить уравнение $y'-2y=0;\quad y(0)=1.$

Решение:

$$F(p)=L[f]=L[0]=0;\quad R_n(p)=p-2;\quad \Psi_{n-1}=a_1y_0=1;$$

$$\bar{y}=\frac{1}{p-2};$$

$$\bar{y}\doteqdot y=e^{2x};$$

Пример 3.6. Решить уравнение:

$$y'''-6y''+11y'-6y=0;\quad y(0)=0;\quad y'(0)=1;\quad y''(0)=0;$$

Решение:

$$F(p) = L[f] = L[0] = 0; \quad R_n(p) = p^3 - 6p^2 + 11p - 6;$$

$$\Psi_{n-1}(p) = a_1 y_0 + a_2(py_0 + y_0') + a_3(p^2 y_0 + py_0' + y_0'') = -6 + p.$$

Изображение искомой функции $\bar{y} = \dfrac{-6+p}{p^3 - 6p^2 + 11p - 6}$

Для нахождения оригинала необходимо разложить полученную дробь на элементарные дроби. Воспользуемся делением многочленов (знаменатель делится без остатка на $p - 1$):

$$
\begin{array}{r|l}
p^3 - 6p^2 + 11p - 6 & p - 1 \\
\cline{2-2}
-\;p^3 - p^2 \qquad\qquad & p^2 - 5p + 6 \\
\cline{1-1}
-5p^2 + 11p \quad\; & \\
-5p^2 + 5p \quad\; & \\
\cline{1-1}
6p - 6 & \\
6p - 6 & \\
\cline{1-1}
0 &
\end{array}
$$

В свою очередь $p^2 - 5p + 6 = (p-2)(p-3)$

Получаем: $p^3 - 6p^2 + 11p - 6 = (p-1)(p-2)(p-3)$.

Тогда: $\bar{y} = \dfrac{-6+p}{p^3 - 6p^2 + 11p - 6} = \dfrac{A}{p-1} + \dfrac{B}{p-2} + \dfrac{C}{p-3}$;

Определим коэффициенты A, B и C.

$$A(p-2)(p-3) + B(p-1)(p-3) + C(p-1)(p-2) = -6 + p$$

$$Ap^2 - 5Ap + 6A + Bp^2 - 4Bp + 3B + Cp^2 - 3Cp + 2C = -6 + p$$

$$p^2(A + B + C) - p(5A + 4B + 3C) + 6A + 3B + 2C = -6 + p$$

$$\begin{cases} A + B + C = 0 \\ 5A + 4B + 3C = -1 \\ 6A + 3B + 2C = -6 \end{cases} \quad \begin{cases} C = -A - B \\ 2A + B = -1 \\ 4A + B = -6 \end{cases} \quad \begin{cases} C = -A - B \\ B = -1 - 2A \\ 2A - 1 = -6 \end{cases} \quad \begin{cases} A = -\dfrac{5}{2} \\ B = 4 \\ C = -\dfrac{3}{2} \end{cases}$$

тогда $\bar{y} = \dfrac{11-6p}{p^3-6p^2+11p-6} = \dfrac{-\frac{5}{2}}{p-1} + \dfrac{4}{p-2} + \dfrac{-\frac{5}{2}}{p-3};$

$$\bar{y} \doteqdot y = -\frac{5}{2}e^x + 4e^{2x} - \frac{3}{2}e^{3x};$$

Приемы операционного исчисления можно также использовать для решения систем дифференциальных уравнений.

Пример 3.7. Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} x' = 3x + 4y \\ y' = 4x - 3y \end{cases}; \qquad x(0) = y(0) = 1$$

Решение: Обозначим $\bar{x}(p)$, $\bar{y}(p)$ - изображения искомых функций и решим вспомогательные уравнения:

$$\begin{cases} L[x'] = 3L[x] + 4L[y] \\ L[y'] = 4L[x] - 3L[y] \end{cases}; \quad \begin{cases} p\bar{x}(p) - x(0) = 3\bar{x}(p) + 4\bar{y}(p) \\ p\bar{y}(p) - y(0) = 4\bar{x}(p) - 3\bar{y}(p) \end{cases}$$

Решим полученную систему алгебраических уравнений.

$$\begin{cases} \bar{x}(p) = \dfrac{4\bar{y}(p)+1}{p-3} \\ p\bar{y}(p) - 1 = 4\dfrac{4\bar{y}(p)+1}{p-3} - 3\bar{y}(p) \end{cases}; \quad \begin{cases} \bar{y}(p) = \dfrac{p+1}{p^2-25} \\ \bar{x}(p) = \dfrac{p^2+4p-21}{(p^2-25)(p-3)} \end{cases};$$

$$\bar{x}(p) = \frac{(p+7)(p-3)}{(p^2-25)(p-3)} = \frac{p+7}{p^2-25} = \frac{p}{p^2-25} + \frac{7}{p^2-25};$$

$$\bar{x}(p) \doteqdot x(t) = ch5t + \frac{7}{5}sh5t;$$

$$\bar{y}(p) = \frac{p}{p^2-25} + \frac{1}{p^2-25};$$

$$\bar{y}(p) \doteqdot y(t) = ch5t + \frac{1}{5}sh5t;$$

Если применить к полученным результатам формулы

$$chz = \frac{e^{z} + e^{-z}}{2}; \quad shz = \frac{e^{z} - e^{-z}}{2};$$

то ответ можно представить в виде:

$$\begin{cases} x = \frac{6}{5}e^{5t} - \frac{1}{5}e^{-5t} \\ y = \frac{3}{5}e^{5t} + \frac{2}{5}e^{-5t} \end{cases};$$

Как видно, гиперболические функции в ответе могут быть легко заменены на показательные.

Пример 3.8. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x' = 5x + 2y \\ y' = 2x + 2y \end{cases} \quad \text{при } x(0) = y(0) = 1$$

Решение: Составим систему вспомогательных уравнений:

$$\begin{cases} L[x'] = 5L[x] + 2L[y] \\ L[y'] = 2L[x] + 2L[y] \end{cases}; \quad \begin{cases} p\bar{x}(p) - x(0) = 5\bar{x}(p) + 2\bar{y}(p) \\ p\bar{y}(p) - y(0) = 2\bar{x}(p) + 2\bar{y}(p) \end{cases};$$

$$\begin{cases} \bar{x}(p) = \dfrac{2\bar{y}(p) + 1}{p - 5} \\ p\bar{y}(p) = \dfrac{4\bar{y}(p) + 2}{p - 5} + 2\bar{y}(p) + 1 \end{cases}; \quad \begin{cases} \bar{y}(p) = \dfrac{p - 3}{(p-1)(p-6)} \\ \bar{x}(p) = \dfrac{p}{(p-1)(p-6)} \end{cases};$$

$$\bar{y}(p) = \frac{A}{p-1} + \frac{B}{p-6} = \frac{2}{5}\frac{1}{p-1} + \frac{3}{5}\frac{1}{p-6} \doteq \frac{2}{5}e^{t} + \frac{3}{5}e^{6t};$$

$$\bar{x}(p) = \frac{C}{p-1} + \frac{D}{p-6} = -\frac{1}{5}\frac{1}{p-1} + \frac{6}{5}\frac{1}{p-6} \doteq -\frac{1}{5}e^{t} + \frac{6}{5}e^{6t};$$

Если обозначить $C_1 = -\frac{1}{5}$; $C_2 = \frac{3}{5}$; то из полученного частного решения системы можно записать и общее решение:

$$\begin{cases} x = C_1 e^{t} + 2C_2 e^{6t} \\ y = -2C_1 e^{t} + C_2 e^{6t} \end{cases}$$

При рассмотрении нормальных систем дифференциальных уравнений этот пример был решен традиционным способом. Как видно, результаты совпадают.

Отметим, что операторный способ решения систем дифференциальных уравнений применим к системам порядка выше первого, что очень важно, т.к. в этом случае применение других способов крайне затруднительно.

4.1. Основные определения.

Определение 4.1. Сумма членов бесконечной числовой последовательности $u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$ называется **числовым рядом**.

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$$

При этом числа $u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$ будем называть членами ряда, а u_n – общим членом ряда.

Определение 4.2. Суммы $S_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$, $n = 1, 2, \ldots$ называются **частными (частичными) суммами** ряда.

Таким образом, возможно рассматривать последовательности частичных сумм ряда $S_1, S_2, \ldots, S_n, \ldots$

Определение 4.3. Ряд $u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$ называется **сходящимся**, если сходится последовательность его частных сумм. **Сумма сходящегося ряда** – предел последовательности его частных сумм.

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S, \qquad S = \sum_{n=1}^{\infty} u_n.$$

Определение 4.4. Если последовательность частных сумм ряда расходится, т.е. не имеет предела, или имеет бесконечный предел, то ряд называется **расходящимся** и ему не ставят в соответствие никакой суммы.

4.2. Свойства сходящихся рядов.

1) Сходимость или расходимость ряда не нарушится если изменить, отбросить или добавить конечное число членов ряда.

2) Рассмотрим два ряда $\sum u_n$ и $\sum Cu_n$, где С – постоянное число.

Теорема 4.1. *Если ряд $\sum u_n$ сходится и его сумма равна S, то ряд $\sum Cu_n$ тоже сходится, и его сумма равна CS. ($C \neq 0$)*

3) Рассмотрим два ряда $\sum u_n$ и $\sum v_n$. **Суммой или разностью** этих рядов будет называться ряд $\sum (u_n \pm v_n)$, где элементы получены в результате сложения (вычитания) исходных элементов с одинаковыми номерами.

Теорема 4.2. *Если ряды $\sum u_n$ и $\sum v_n$ сходятся и их суммы равны соответственно S и σ, то ряд $\sum (u_n \pm v_n)$ тоже сходится и его сумма равна S + σ.*

$$\sum (u_n + v_n) = \sum u_n + \sum v_n = S + \sigma$$

Разность двух сходящихся рядов также будет сходящимся рядом.
Сумма сходящегося и расходящегося рядов будет расходящимся рядом.
О сумме двух расходящихся рядов общего утверждения сделать нельзя.

При изучении рядов решают в основном две задачи: исследование на сходимость и нахождение суммы ряда.

4.2.1. Необходимый признак сходимости ряда. Критерий Коши.

Критерий Коши (необходимые и достаточные условия сходимости ряда)

Для того, чтобы последовательность $a_1, a_2, ..., a_n, ...$ была сходящейся, необходимо и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon > 0$ существовал такой номер N, что при n > N и любом p > 0, где p – целое число, выполнялось бы неравенство:

$$|a_{n+p} - a_n| < \varepsilon.$$

Доказательство. (необходимость)

Пусть $a_n \to a$, тогда для любого числа $\varepsilon > 0$ найдется номер N такой, что неравенство

$|a - a_n| < \frac{\varepsilon}{2}$ выполняется при n>N. При n>N и любом целом p>0 выполняется также неравенство $|a - a_{n+p}| < \frac{\varepsilon}{2}$. Учитывая оба неравенства, получаем:

$$|a_{n+p} - a_n| = |(a_{n+p} - a) + (a - a_n)| \le |a_{n+p} - a| + |a - a_n| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Необходимость доказана. Доказательство достаточности рассматривать не будем.

Сформулируем **критерий Коши для ряда.**

Для того, чтобы ряд $u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$ ***был сходящимся необходимо и достаточно, чтобы для любого*** $\varepsilon > 0$ ***существовал номер N такой, что при n>N и любом p>0 выполнялось бы неравенство***

$$|u_{n+1} + u_{n+2} + \ldots + u_{n+p}| < \varepsilon.$$

Однако, на практике использовать непосредственно критерий Коши не очень удобно. Поэтому как правило используются более простые признаки сходимости:

1) Если ряд $\sum u_n$ сходится, то необходимо, чтобы общий член u_n стремился к нулю. Однако, это условие не является достаточным. Можно говорить только о том, что если общий член не стремится к нулю, то ряд точно расходится. Например, так называемый гармонический ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ является расходящимся, хотя его общий член и стремится к нулю.

Пример 4.1. Исследовать сходимость ряда $\frac{1}{2} + \frac{2}{5} + \frac{3}{8} + \ldots + \frac{n}{3n-1} + \ldots$

Решение: Найдем $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{n}{3n-1} = \lim\limits_{n \to \infty} \frac{1}{3 - \frac{1}{n}} = \frac{1}{3} \ne 0$ – необходимый признак сходимости не выполняется, значит ряд расходится.

2) Если ряд сходится, то последовательность его частных сумм ограничена.

Однако, этот признак также не является достаточным.

Например, ряд 1-1+1-1+1-1+ ... +$(-1)^{n+1}$+... расходится, т.к. расходится последовательность его частных сумм в силу того, что

$$S_n = \begin{cases} 0, & \text{при четных } n \\ 1, & \text{при нечетных } n \end{cases}$$

Однако, при этом последовательность частных сумм ограничена, т.к. $|S_n| < 2$ при любом n.

4.3. Ряды с неотрицательными членами.

При изучении знакопостоянных рядов ограничимся рассмотрением рядов с неотрицательными членами, т.к. при простом умножении на -1 из этих рядов можно получить ряды с отрицательными членами.

Теорема 4.3. *Для сходимости ряда* $\sum u_n$ *с неотрицательными членами необходимо и достаточно, чтобы частные суммы ряда были ограничены.*

4.3.1. Признак сравнения рядов с неотрицательными членами.

Пусть даны два ряда $\sum u_n$ и $\sum v_n$ при u_n, $v_n \geq 0$.

Теорема 4.4. Если $u_n \leq v_n$ при любом n, то из сходимости ряда $\sum v_n$ следует сходимость ряда $\sum u_n$, а из расходимости ряда $\sum u_n$ следует расходимость ряда $\sum v_n$.

Доказательство. Обозначим через S_n и σ_n частные суммы рядов $\sum u_n$ и $\sum v_n$. Т.к. по условию теоремы ряд $\sum v_n$ сходится, то его частные суммы ограничены, т.е. при всех n $\sigma_n <$ M, где M – некоторое число. Но т.к. $u_n \le v_n$, то $S_n \le \sigma_n$ то частные суммы ряда $\sum u_n$ тоже ограничены, а этого достаточно для сходимости.

Пример 4.2. Исследовать на сходимость ряд

$$\frac{1}{\ln 2}+\frac{1}{\ln 3}+\ldots+\frac{1}{\ln n}+\ldots$$

Решение: Так как $\frac{1}{\ln n}>\frac{1}{n}$, а гармонический ряд $\sum\frac{1}{n}$ расходится, т расходится и ряд $\sum\frac{1}{\ln n}$.

Пример 4.3. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n2^n}$.

Решение: Так как $\frac{1}{n2^n}<\frac{1}{2^n}$, а ряд $\sum\frac{1}{2^n}$ сходится (как убывающая геометрическая прогрессия), то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n2^n}$ тоже сходится.

Также используется следующий признак сходимости:

Теорема 4.5. *Если* $u_n>0$, $v_n>0$ *и существует предел* $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}=h$, *где* h *– число, отличное от нуля, то ряды* $\sum u_n$ *и* $\sum v_n$ *ведут одинаково в смысле сходимости.*

4.3.2. Признак Даламбера.

(Жан Лерон Даламбер (1717 – 1783) – французский математик)

Если для ряда $\sum u_n$ *с положительными членами существует такое число q<1, что для всех достаточно больших n выполняется неравенство*

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}\le q,$$

то ряд $\sum u_n$ *сходится, если же для всех достаточно больших n выполняется условие*

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1,$$

то ряд $\sum u_n$ *расходится.*

Предельный признак Даламбера.

Предельный признак Даламбера является следствием из приведенного выше признака Даламбера.

Если существует предел $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n} = \rho$, *то при* $\rho < 1$ *ряд сходится, а при* $\rho > 1$ *– расходится. Если* $\rho = 1$, *то на вопрос о сходимости ответить нельзя.*

Пример 4.4. Определить сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}$

Решение:

$$u_n = \frac{n}{2^n}; \quad u_{n+1} = \frac{n+1}{2^{n+1}}; \qquad \lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)2^n}{2^{n+1}n} = \frac{n+1}{2n} = \frac{1+\frac{1}{n}}{2} = \frac{1}{2} < 1$$

Вывод: ряд сходится.

Пример 4.5. Определить сходимость ряда $1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\ldots+\frac{1}{n!}+\ldots$

Решение:

$$u_n = \frac{1}{n!}; \quad u_{n+1} = \frac{1}{(n+1)!}; \quad \lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{n!}{(n+1)!} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1} = 0 < 1$$

Вывод: ряд сходится.

4.3.3. Признак Коши. (радикальный признак)

Если для ряда $\sum u_n$ *с неотрицательными членами существует такое число* $q<1$, *что для всех достаточно больших* n *выполняется неравенство*

$$\sqrt[n]{u_n} \le q$$

то ряд $\sum u_n$ *сходится, если же для всех достаточно больших* n *выполняется неравенство*

$$\sqrt[n]{u_n} \ge 1,$$

то ряд $\sum u_n$ *расходится.*

Следствие 4.1. Если существует предел $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n} = \rho$ то при $\rho<1$ ряд сходится, а при $\rho>1$ ряд расходится.

Пример 4.6. Определить сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{2n^2+1}{3n^2+5}\right)^n$

Решение:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{2n^2+1}{3n^2+5} = \lim_{n\to\infty}\frac{2+\frac{1}{n^2}}{3+\frac{5}{n^2}} = \frac{2}{3} < 1$$

Вывод: ряд сходится.

Пример 4.7. Определить сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$

Решение:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right) = 1.$$

Т.е. признак Коши не дает ответа на вопрос о сходимости ряда. Проверим выполнение необходимых условий сходимости. Как было сказано выше, если ряд сходится, то общий член ряда стремится к нулю.

$$\lim_{n\to\infty}u_n = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e \ne 0$$

таким образом, необходимое условие сходимости не выполняется, значит, ряд расходится.

4.3.4. Интегральный признак Коши.

Если $\varphi(x)$ – непрерывная положительная функция, убывающая на промежутке $[1;\infty)$, *то ряд* $\varphi(1)+\varphi(2)+\ldots+\varphi(n)+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}\varphi(n)$ *и несобственный интеграл* $\int_1^{\infty}\varphi(x)dx$ *одинаковы в смысле сходимости.*

Пример 4.8. Ряд $1+\frac{1}{2^\alpha}+\frac{1}{3^\alpha}+\ldots+\frac{1}{n^\alpha}+\ldots$ сходится при $\alpha>1$ и расходится $\alpha\le1$ т.к. соответствующий несобственный интеграл $\int_1^{\infty}\frac{dx}{x^\alpha}$ сходится при $\alpha>1$ и расходится $\alpha\le1$. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^\alpha}$ называется **обобщенным гармоническим рядом.**

Следствие 4.2. Если $f(x)$ и $\varphi(x)$ – непрерывные функции на интервале (a, b] и $\lim\limits_{x\to a+0}\frac{f(x)}{\phi(x)}=h,\quad h\neq0,$ то интегралы $\int_a^b f(x)dx$ и $\int_a^b\varphi(x)dx$ ведут себя одинаково в смысле сходимости.

При использовании компьютерной версии "*Курса высшей математики*" возможно запустить программу, исследующую на сходимость числовые ряды по всем рассмотренным выше признакам. Достаточно ввести общий член ряда и нажать Enter. Все признаки будут проверяться по очереди.

4.4. Знакопеременные ряды. Знакочередующиеся ряды.

4.4.1. Знакочередующиеся ряды.

Знакочередующийся ряд можно записать в виде:

$$u_1-u_2+u_3-u_4+\ldots+(-1)^{n+1}u_n+\ldots$$

где $u_n>0,\quad n=1,2,3,\ldots$

Признак Лейбница.

Если у знакочередующегося ряда

$u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + ... + (-1)^{n+1}u_n + ...$ *абсолютные величины* u_i *убывают* $u_1 > u_2 > u_3 > ...$ *и общий член стремится к нулю* $u_n \to 0$ *то ряд сходится.*

4.4.2. Абсолютная и условная сходимость рядов.

Рассмотрим некоторый знакопеременный ряд (с членами произвольных знаков).

$$u_1 + u_2 + ... + u_n + ... = \sum_{n=1}^{\infty} u_n \qquad (1)$$

и ряд, составленный из абсолютных величин членов ряда (1):

$$u_1 + u_2 + ... + u_n + ... = \sum_{n=1}^{\infty} u_n \qquad (2)$$

Теорема 4.6. *Из сходимости ряда (2) следует сходимость ряда (1).*

Доказательство. Ряд (2) является рядом с неотрицательными членами. Если ряд (2) сходится, то по критерию Коши для любого $\varepsilon > 0$ существует число N, такое, что при $n > N$ и любом целом $p > 0$ верно неравенство:

$$|u_{n+1}| + |u_{n+2}| + ... + |u_{n+p}| < \varepsilon$$

По свойству абсолютных величин:

$$|u_{n+1} + u_{n+2} + ... + u_{n+p}| \le |u_{n+1}| + |u_{n+2}| + ... + |u_{n+p}| < \varepsilon$$

$$|u_{n+1} + u_{n+2} + ... + u_{n+p}| < \varepsilon$$

То есть по критерию Коши из сходимости ряда (2) следует сходимость ряда (1).

Определение 4.5. Ряд $\sum u_n$ называется **абсолютно сходящимся**, если сходится ряд $\sum |u_n|$.

Очевидно, что для знакопостоянных рядов понятия сходимости и абсолютной сходимости совпадают.

Определение 4.6. Ряд $\sum u_n$ называется **условно сходящимся**, если он сходится, а ряд $\sum |u_n|$ расходится.

4.4.3. Признаки Даламбера и Коши для знакопеременных рядов.

Пусть $\sum u_n$ - знакопеременный ряд.

Признак Даламбера. Если существует предел $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \rho$, то при $\rho < 1$ ряд $\sum u_n$ будет абсолютно сходящимся, а при $\rho > 1$ ряд будет расходящимся. При $\rho = 1$ признак не дает ответа о сходимости ряда.

Признак Коши. Если существует предел $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|u_n|} = \rho$, то при $\rho < 1$ ряд $\sum u_n$ будет абсолютно сходящимся, а при $\rho > 1$ ряд будет расходящимся. При $\rho = 1$ признак не дает ответа о сходимости ряда.

Свойства абсолютно сходящихся рядов.

1) **Теорема 4.7.** *Для абсолютной сходимости ряда* $\sum u_n$ *необходимо и достаточно, чтобы его можно было представить в виде разности двух сходящихся рядов с неотрицательными членами.*

Следствие 4.3. Условно сходящийся ряд является разностью двух расходящихся рядов с неотрицательными стремящимися к нулю членами.

2) В сходящемся ряде любая группировка членов ряда, не изменяющая их порядка, сохраняет сходимость и величину ряда.

3) Если ряд сходится абсолютно, то ряд, полученный из него любой перестановкой членов, также абсолютно сходится и имеет ту же сумму.

Перестановкой членов условно сходящегося ряда можно получить условно сходящийся ряд, имеющий любую наперед заданную сумму, и даже расходящийся ряд.

4) **Теорема 4.8.** *При любой группировке членов абсолютно сходящегося ряда (при этом число групп может быть как конечным, так и бесконечным и число членов в группе может быть как конечным, так и бесконечным) получается сходящийся ряд, сумма которого равна сумме исходного ряда.*

5) Если ряды $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ сходятся абсолютно и их суммы равны соответственно S и σ, то ряд, составленный из всех произведений вида $u_i v_k$, $i,k=1,2,...$ взятых в каком угодно порядке, также сходится абсолютно и его сумма равна $S \cdot \sigma$ - произведению сумм перемножаемых рядов.

Если же производить перемножение условно сходящихся рядов, то в результате можно получить расходящийся ряд.

5.1. Основные определения.

Определение 5.1. **Частными (частичными) суммами** функционального ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ называются функции

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} u_k(x), \quad n = 1,2,\ldots$$

Определение 5.2. Функциональный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ называется **сходящимся** в точке ($x=x_0$), если в этой точке сходится последовательность его частных сумм. Предел последовательности $\{S_n(x_0)\}$ называется **суммой ряда** $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ в точке x_0.

Определение 5.3. Совокупность всех значений x, для которых сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ называется **областью сходимости** ряда.

5.2. Равномерная сходимость.

Определение 5.4. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ называется **равномерно сходящимся** на отрезке [a,b], если равномерно сходится на этом отрезке последовательность частных сумм этого ряда.

Теорема 5.1. (Критерий Коши равномерной сходимости ряда)

Для равномерной сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ необходимо и достаточно, чтобы для любого числа $\varepsilon>0$ существовал такой номер $N(\varepsilon)$, что при $n>N$ и любом целом $p>0$ неравенство

$$\left|u_{n+1}(x) + u_{n+2}(x) + \ldots + u_{n+p}(x)\right| < \varepsilon$$

выполнялось бы для всех x на отрезке [a,b].

Теорема 5.2. (Признак равномерной сходимости Вейерштрасса)

(Карл Теодор Вильгельм Вейерштрасс (1815 – 1897) – немецкий математик)

Ряд** $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ **сходится равномерно и притом абсолютно на отрезке [a,b], если модули его членов на том же отрезке не превосходят соответствующих членов сходящегося числового ряда с положительными членами :

$$M_1 + M_2 + ... + M_n + ...$$

т.е. имеет место неравенство

$$|u_n(x)| \le M_n$$

Еще говорят, что в этом случае функциональный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ **мажорируется** числовым рядом $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$.

Пример 5.1. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^3}$.

Решение: Так как $|\cos nx| \le 1$ всегда, то очевидно, что $\left|\frac{\cos nx}{n^3}\right| \le \frac{1}{n^3}$.

При этом известно, что обще гармонический ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$ при $\alpha=3>1$ сходится, то в соответствии с признаком Вейерштрасса исследуемый ряд равномерно сходится и притом в любом интервале.

Пример 5.2. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^3}$.

Решение: На отрезке [-1,1] выполняется неравенство $\left|\frac{x^n}{n^3}\right| \le \frac{1}{n^3}$ т.е. по признаку Вейерштрасса на этом отрезке исследуемый ряд сходится, а на интервалах $(-\infty,-1) \cup (1,\infty)$ расходится.

1) Теорема о непрерывности суммы ряда.

Если члены ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ *- непрерывные на отрезке* $[a,b]$ *функции и ряд сходится равномерно, то и его сумма* $S(x)$ *есть непрерывная функция на отрезке* $[a,b]$.

2) Теорема о почленном интегрировании ряда.

Равномерно сходящийся на отрезке $[a,b]$ *ряд с непрерывными членами можно почленно интегрировать на этом отрезке, т.е. ряд, составленный из интегралов от его членов по отрезку* $[a,b]$, *сходится к интегралу от суммы ряда по этому отрезку.*

$$\int_{\alpha}^{\beta} \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\alpha}^{\beta} u_n(x)dx; \quad \alpha,\beta \in [a,b]$$

3) Теорема о почленном дифференцировании ряда.

Если члены ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ *сходящегося на отрезке* $[a,b]$ *представляют собой непрерывные функции, имеющие непрерывные производные, и ряд, составленный из этих производных* $\sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x)$ *сходится на этом отрезке равномерно, то и данный ряд сходится равномерно и его можно дифференцировать почленно.*

$$\frac{d}{dx}\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{du_n(x)}{dx}$$

На основе того, что сумма ряда является некоторой функцией от переменной x, можно производить операцию представления какой – либо функции в виде ряда (разложения функции в ряд), что имеет широкое применение при интегрировании, дифференцировании и других действиях с функциями.

5.3. Степенные ряды.

5.3.1. Основные понятия и определения.

Определение 5.5. Степенным рядом называется ряд вида

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n$$

Для исследования на сходимость степенных рядов удобно использовать признак Даламбера.

Пример 5.3. Исследовать на сходимость ряд $x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \ldots + \frac{x^n}{n} + \ldots$

Решение: Применяем признак Даламбера:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{x^{n+1}}{n+1}}{\frac{x^n}{n}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{xn}{n+1}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{x}{1+\frac{1}{n}}\right| = |x|.$$

Получаем, что этот ряд сходится при $|x| < 1$ и расходится при $|x| > 1$.

Теперь определим сходимость в граничных точках 1 и -1.

При $x = 1$: $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots$ ряд расходится (гармонический ряд).

При $x = -1$: $-1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots$ ряд сходится по признаку Лейбница.

5.3.2. Теоремы Абеля.

(Нильс Хенрик Абель (1802 – 1829) – норвежский математик)

Теорема 5.3. *Если степенной ряд*

$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n$ *сходится при* $x = x_1$, *то он сходится и притом абсолютно для всех* $|x| > |x_1|$.

Доказательство. По условию теоремы, так как члены ряда ограничены, то

$$|a_n x_1^n| \le k,$$

где k- некоторое постоянное число. Справедливо следующее неравенство:

$$|a_n x^n| = |a_n x_1^n| \left|\frac{x}{x_1}\right|^n \le k \left|\frac{x}{x_1}\right|^n$$

Из этого неравенства видно, что при $x<x_1$ численные величины членов нашего ряда будут меньше (во всяком случае не больше) соответствующих членов ряда правой части записанного выше неравенства, которые образуют геометрическую прогрессию. Знаменатель этой прогрессии $\left|\frac{x}{x_1}\right|$ по условию теоремы меньше единицы, следовательно, эта прогрессия представляет собой сходящийся ряд.

Поэтому на основании признака сравнения делаем вывод, что ряд $\sum|a_n x^n|$ сходится, а значит ряд $\sum a_n x^n$ сходится абсолютно.

Таким образом, если степенной ряд $\sum a_n x^n$ сходится в точке x_1, то он абсолютно сходится в любой точке интервала длины $2|x_1|$ с центром в точке $x = 0$.

Следствие 5.1. Если при $x = x_1$ ряд расходится, то он расходится для всех $|x| > |x_1|$.

Таким образом, для каждого степенного ряда существует такое положительное число R, что при всех x таких, что $|x| < R$ ряд абсолютно сходится, а при всех $|x| > R$ ряд расходится. При этом число R называется **радиусом сходимости**. Интервал $(-R, R)$ называется **интервалом сходимости**.

Отметим, что этот интервал может быть как замкнутым с одной или двух сторон, так и не замкнутым.

Радиус сходимости может быть найден по формуле:

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n-1}}{a_n}\right|$$

Пример 5.4. Найти область сходимости ряда $x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\ldots$

Решение: Находим радиус сходимости

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n-1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{1}{(n-1)!}}{\frac{1}{n!}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{n!}{(n-1)!}\right|=\lim_{n\to\infty}|n|=|\infty|$$

Следовательно, данный ряд сходится при любом значении x. Общий член этого ряда стремится к нулю.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x^n}{n!}=0.$$

Теорема 5.4. Если степенной ряд $\sum a_n x^n$ сходится для положительного значения $x=x_1$, то он сходится равномерно в любом промежутке внутри $(-|x_1|;|x_1|)$.

Действия со степенными рядами.

1) Интегрирование степенных рядов.

Если некоторая функция $f(x)$ определяется степенным рядом: $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n$, то интеграл от этой функции можно записать в виде ряда:

$$\int f(x)dx=\int\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n dx=\sum_{n=0}^{\infty}\int a_n x^n dx=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}x^{n+1}+C$$

2) Дифференцирование степенных рядов.

Производная функции, которая определяется степенным рядом, находится по формуле:

$$f'(x) = \frac{d}{dx}\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d}{dx}\left(a_n x^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1}$$

3) Сложение, вычитание, умножение и деление степенных рядов.

Сложение и вычитание степенных рядов сводится к соответствующим операциям с их членами:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \pm \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n \pm b_n) x^n$$

Произведение двух степенных рядов выражается формулой:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \cdot \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

Коэффициенты c_i находятся по формуле:

$$c_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \ldots + a_{n-1} b_1 + a_n b_0$$

Деление двух степенных рядов выражается формулой:

$$\frac{\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n}{\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n x^n} = \sum_{n=0}^{\infty} q_n x^n$$

Для определения коэффициентов q_n рассматриваем произведение $\sum\limits_{n=0}^{\infty} q_n x^n \cdot \sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n x^n = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, полученное из записанного выше равенства и решаем систему уравнений:

$$\begin{cases} a_0 = q_0 b_0 \\ a_1 = q_0 b_1 + q_1 b_0 \\ a_2 = q_0 b_2 + q_1 b_1 + q_2 b_0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_n = q_0 b_n + q_1 b_{n-1} + \ldots + q_n b_0 \end{cases}$$

5.4. Ряды Тейлора и Маклорена

5.4.1. Разложение функций в степенные ряды.

Разложение функций в степенной ряд имеет большое значение для решения различных задач исследования функций, дифференцирования, интегрирования, решения дифференциальных уравнений, вычисления пределов, вычисления приближенных значений функции.

Возможны различные способы разложения функции в степенной ряд. Существует способ разложения в степенной ряд **при помощи алгебраического деления.** Это – самый простой способ разложения, однако, пригоден он только для разложения в ряд алгебраических дробей.

Пример 5.5. Разложить в ряд функцию $\frac{1}{1-x}$.

Решение: Суть метода алгебраического деления состоит в применении общего правила деления многочленов:

$$
\begin{array}{l|l}
1 & 1-x \\
\cline{2-2}
\underline{1-x} & 1+x+x^2+x^3+\ldots \\
\quad x & \\
\quad \underline{x-x^2} & \\
\qquad x^2 & \\
\qquad \underline{x^2-x^3} & \\
\qquad\quad x^3 & \\
\qquad \ldots\ldots\ldots\ldots &
\end{array}
$$

Если применить к той же функции формулу Маклорена

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+R_n(x),$$

то получаем: $f'(x)=\dfrac{1}{(1-x)^2}$; $f'(0)=1$;

$$f''(x)=\frac{2}{(1-x)^3};\quad f''(0)=2;$$

$$f'''(x)=\frac{2\cdot3}{(1-x)^4};\quad f'''(0)=3!;$$

....

$$f^{(n)}(x)=\frac{n!}{(1-x)^{n+1}};\quad f^{(n)}(0)=n!;$$

Итого, получаем: $f(x)=1+x+x^2+...+x^n+...$

Рассмотрим способ разложения функции в ряд **при помощи интегрирования.**

С помощью интегрирования можно разлагать в ряд такую функцию, для которой известно или может быть легко найдено разложение в ряд ее производной.

Находим дифференциал функции $df(x)=f'(x)dx$ и интегрируем его в пределах от 0 до x.

$$\int_0^x df(x)=\int_0^x f'(x)dx;\qquad f(x)\Big|_0^x=\int_0^x f'(x)dx;$$

$$f(x)=f(0)+\int_0^x f'(x)dx;$$

Пример 5.6. Разложить в ряд функцию $f(x)=\ln(1+x)$.

Решение: Разложение в ряд этой функции по формуле Маклорена было рассмотрено выше.

Теперь решим эту задачу при помощи интегрирования.

При $f(0)=0$, $f'(x)=\dfrac{1}{1+x}$ получаем по приведенной выше формуле:

$$\ln(1+x)=\int_0^x\frac{1}{1+x}dx$$

Разложение в ряд функции $\frac{1}{1+x}$ может быть легко найдено способом алгебраического деления аналогично рассмотренному выше примеру.

$$\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-x^3+x^4-...+(-1)^n x^n+...$$

Тогда получаем:

$$\ln(1+x)=\int_0^x \frac{1}{1+x}dx=\int_0^x \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n=\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^x (-1)^n x^n=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

Окончательно получим:

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+...+(-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1}+...$$

Пример 5.7. Разложить в степенной ряд функцию *arctgx*.

Решение: Применим разложение в ряд с помощью интегрирования.

$$f(x)=arctgx; \quad f(0)=0; \quad f'(x)=\frac{1}{1+x^2}; \quad arctgx=\int_0^x \frac{1}{1+x^2}dx$$

Подинтегральная функция может быть разложена в ряд методом алгебраического деления:

$$\begin{array}{rl|l}
- & 1 & 1+x^2 \\ \cline{3-3}
 & \underline{1+x^2} & 1-x^2+x^4-... \\
- & -x^2 & \\
 & \underline{-x^2-x^4} & \\
 & x^4 & \\
- & \underline{x^4+x^6} & \\
 & .... &
\end{array}$$

$$\frac{1}{1+x^2}=1-x^2+x^4-...+(-1)^n x^{2n}+...$$

тогда

$$arctgx = \int_0^x \frac{1}{1+x^2}dx = \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}dx = \sum_{n=0}^{\infty}\int_0^x (-1)^n x^{2n}dx = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

Окончательно получаем:

$$arctgx = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - ... + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + ...$$

5.4.2. Решение дифференциальных уравнений с помощью степенных рядов.

С помощью степенных рядов возможно интегрировать дифференциальные уравнения.

Рассмотрим линейное дифференциальное уравнение вида:

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + p_2(x)y^{(n-2)} + ... + p_n(x)y = f(x)$$

Если все коэффициенты и правая часть этого уравнения разлагаются в сходящиеся в некотором интервале степенные ряды, то существует решение этого уравнения в некоторой малой окрестности нулевой точки, удовлетворяющее начальным условиям.

Это решение можно представить степенным рядом:

$$y = c_0 + c_1x + c_2x^2 + c_3x^3 + ...$$

Для нахождения решения остается определить неизвестные постоянные c_i.

Эта задача решается **методом сравнения неопределенных коэффициентов**. Записанное выражение для искомой функции подставляем в исходное дифференциальное уравнение, выполняя при этом все необходимые действия со степенными рядами (дифференцирование, сложение, вычитание, умножение и пр.)

Затем приравниваем коэффициенты при одинаковых степенях x в левой и правой частях уравнения. В результате с учетом начальных условий получим систему уравнений, из которой последовательно определяем коэффициенты c_i.

Отметим, что этот метод применим и к нелинейным дифференциальным уравнениям.

Пример 5.8. Найти решение уравнения $y'' - xy = 0$ с начальными условиями $y(0) = 1, y'(0) = 0$.

Решение: Решение уравнения будем искать в виде

$$y = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \ldots$$

$$y' = c_1 + 2c_2 x + 3c_3 x^2 + 4c_4 x^3 + \ldots$$

$$y'' = 2c_2 + 6c_3 x + 12c_4 x^2 + 20c_5 x^3 + \ldots$$

Подставляем полученные выражения в исходное уравнение:

$$(2c_2 + 6c_3 x + 12c_4 x^2 + 20c_5 x^3 + \ldots) - (c_0 x + c_1 x^2 + c_2 x^3 + c_3 x^4 + \ldots) = 0$$

$$2c_2 + x(6c_3 - c_0) + x^2(12c_4 - c_1) + x^3(20c_5 - c_2) + x^4(30c_6 - c_3) + \ldots = 0$$

Отсюда получаем: $2c_2 = 0$

$$6c_3 - c_0 = 0$$
$$12c_4 - c_1 = 0$$
$$20c_5 - c_2 = 0$$
$$30c_6 - c_3 = 0$$

....

Получаем, подставив начальные условия в выражения для искомой функции и ее первой производной:

$$c_0 = 1$$
$$c_1 = 0$$

Окончательно получим:

$$c_0 = 1; \quad c_1 = 0; \quad c_2 = 0; \quad c_3 = \frac{1}{6}; \quad c_4 = 0; \quad c_5 = 0; \quad c_6 = \frac{1}{180}; \quad \ldots$$

Итого: $y = 1 + \frac{x^3}{6} + \frac{x^6}{180} + \ldots$

Существует и другой метод решения дифференциальных уравнений с помощью рядов. Он носит название **метод последовательного дифференцирования.**

Рассмотрим тот же пример. Решение дифференциального уравнения будем искать в виде разложения неизвестной функции в ряд Маклорена.

$$y = y(0) + \frac{y'(0)}{1!}x + \frac{y''(0)}{2!}x^2 + \frac{y'''(0)}{3!}x^3 + \dots$$

Если заданные начальные условия $y(0)=1$, $y'(0)=0$ подставить в исходное дифференциальное уравнение, получим, что $y''(0)=0$.

Далее запишем дифференциальное уравнение в виде $y''=xy$ и будем последовательно дифференцировать его по x.

$$y''' = y + xy'; \qquad y'''(0) = y(0) = 1;$$
$$y^{IV} = y' + y' + xy''; \quad y^{IV}(0) = 0;$$
$$y^{V} = 2y'' + y'' + xy'''; \quad y^{V}(0) = 0;$$
$$y^{VI} = 3y''' + y''' + xy^{IV}; \quad y^{VI}(0) = 4;$$

....

После подстановки полученных значений получаем:

$$y = 1 + \frac{x^3}{6} + \frac{x^6}{180} + \dots$$

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Д.Письменный "Конспект лекций по высшей математике. Полный курс", Айрис-пресс, 2005
2. Пискунов Н.С. "Дифференциальное и интегральное исчисление для ВТУЗов" -М.: Наука, в 2х частях, 2001.
3. Claudio Canuto, Anita Tabacco "Mathematical Analysis", Italy, Springer, I-part, 2008, II-part, 2010.
4. Бугров Я.С., Никольский С.М. Дифференциальные уравнения. Кратные интегралы. Рады. Функции комплексного переменного. - Наука, 1997.
5. Н.Ш.Кремера "Высшая математика для экономистов " 3-е изд.-, М.:-2007-479с.

Дополнительная литература.

1. techliberary.ru
2. www.Ziyonet.uz
3. www.tuit.uz
4. www.Math.uz

"Методические указания к решению задач и упражнений по высшей математике. Часть 2 "

Обсуждено на заседании кафедры
«Высшая математика» от 22.03.2017 г, №38

Рассмотрено на заседании методического совета
факультета Программный инжиниринг от 28.03.2017 г, №8.

Рассмотрено на заседании методического
совета ТУИТ от 20.04.2017 г, № 7(98).

Составители: Чай З.С.
Шойимэрдонов С.К.

Главный редактор: Р.Р. Рахматов

Корректор: Абдуллаева С. Х.

Формат 60x84 1/16. Печ.лист 5,5.
Заказ №213. Тираж 20.
Отпечатано в «Редакционно издательском»
отделе при ТУИТ.
Ташкент ул. Амир Темур, 108.