МИНИСТЕРСТВО ПО РАЗВИТИЮ ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ И КОММУНИКАЦИЙ РЕСПУБЛИКИ УЗБЕКИСТАН

ТАШКЕНТСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ ИМЕНИ МУХАММАДА АЛ-ХОРАЗМИЙ

Кафедра
«ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА»

Методические указания

“ПРИЛОЖЕНИЯ ОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА”

для учащихся академических лицеев и профессиональных колледжей

ТАШКЕНТ 2017

Авторы: Чай З.С., Хаитметов А.А.
Методические указания "Приложения определенного интеграла" для учащихся академических лицеев и профессиональных колледжей.
ТУИТ, ТАШКЕНТ-2017

Ташкентский университет информационных технологий, 2017

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ..4

I. ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ И ЕГО СВОЙСТВА

1.1. Определенный интеграл. Формула Ньютона-Лейбница.........5

1.2. Основные свойства определенного интеграла........................6

1.3. Замена переменной и интегрирование по частямв определенном интеграле..11

1.4. Приближенное вычисление определенных интегралов (формула трапеций). 13

1.5. Несобственные интегралы..15

II. ПРИЛОЖЕНИЯ ОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА

2.1. Геометрические приложения определенного интеграла.........20

2.1.1. Вычисление площадей плоских фигур..............................20

2.1.2. Вычисление объема тела вращения...............................32

2.1.3. Вычисление длины дуги кривой....................................36

2.2. Приложения определённого интегралав решении физических и экономических задач...39

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ..........................43

ВВЕДЕНИЕ

Интегральное исчисление является важной частью математического анализа. Оно представляет большой интерес не только с точки зрения исследования функций, но и с точки зрения их прикладного характера.

Точное вычисление определенного интеграла по формуле Ньютона-Лейбница не всегда возможно. Тогда в таких случаях (и когда функция задана таблично) определенные интегралы вычисляют приближенно.

Определенные интегралы имеют широкий спектр приложений: с помощью них можно вычислять площади плоских фигур, объемы тел вращения в пространстве вычислять длину дуги кривой линии. Они широко применяются при решении многих физических и экономических задач.

Данное пособие можно использовать в учебном процессе как учащимися колледжей и лицеев, так и бакалаврами высших учебных заведений, молодыми специалистамии всеми желающими повысить свое математическое образование.

I. ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ И ЕГО СВОЙСТВА

1.1. Определенный интеграл. Формула Ньютона-Лейбница

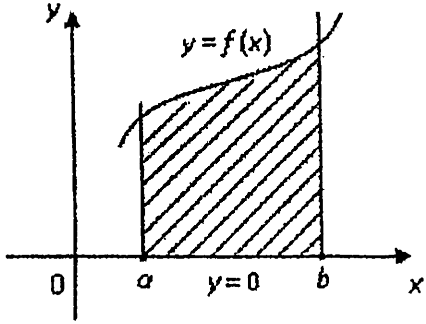
Пусть функция $f(x)$ определена на отрезке $[a,b]$ Разбиением отрезка $[a,b]$ назовем конечное множество точек $x_0, x_1, \ldots, x_n$, таких что $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$. Отрезки $[x_{k-1}, x_k]$ называются частичными отрезками, число

$\Delta = \max\limits_{k=1,n} \Delta x_k$, где $\Delta = x_k = x_k - x_{k-1}$ называется диаметром разбиения.

Выберем произвольно на каждом частичном отрезке точку $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$ построим сумму $\sum\limits_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k = f(\xi_2)\Delta x_2 + \ldots + f(\xi_n)\Delta x_n$, которая называется интегральной суммой или суммой Римана, соответствующей данному разбиению отрезка $[a,b]$ и выбору точек ξ_i. Рассмотрим предел интегральных сумм при стремлении диаметра разбиения к нулю, т.е. $\lim\limits_{\Delta \to 0} \sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$.

Если существует этот предел, не зависящий от способа разбиения отрезка и от выбора промежуточных точек ξ_i, то говорят, что функция $f(x)$ интегрируема по Риману на отрезке $[a,b]$ а сам предел называется определенным интегралом и обозначается $f(x)dx$ Число a называется нижним пределом, число b – верхним пределом интеграла, функция – подынтегральной функцией, выражение – подынтегральным выражением, а задача нахождении $\int\limits_a^b f(x)dx$ - интегрированием функции $f(x)$ на отрезке $[a,b]$.

Если $f(x)>0$ на $[a,b]$, то определенный интеграл $\int_a^b f(x)dx$ геометрически представляет собой площадь криволинейной трапеции – фигуры, ограниченной линиями $y=f(x)$, $x=a$, $x=b$, $y=0$ (рис. 10.1).



1.2. Основные свойства определенного интеграла

1. $\int_a^b f(x)dx=-\int_b^a f(x)dx$

2. $\int_a^a f(x)dx=0$

3. $\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx$

4. $\int_a^b (f_1(x)\pm f_2(x))dx=\int_a^b f_1(x)dx\pm\int_a^b f_2(x)dx$

5. $\int_a^b cf(x)dx=c\int_b^b f(x)dx$, где c- постоянная.

6. Если $f(x)\geq 0(f(x)\leq 0)$ для $x\in(a,b)$ и $a<b$, то $\int_a^b f(x)dx\geq 0\left(\int_a^b f(x)dx\leq 0\right)$

7. Если $f_1(x)\leq f_2(x)$ для $x\in(a,b)$ и $a<b$, то $\int_a^b f_1(x)dx\leq\int_a^b f_2(x)dx$.

8. Оценка определенного интеграла: если $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a,b]$ и $m\leq f()\leq M$ на $[a,b]$, где m, M – некоторые числа, то

$m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a).$

9. Если f(x) непрерывна на отрезке [a,b], то существует такая точка $\xi \in [a,b]$, что справедливо равенство $\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a)$ (теорема о среднем значении).

10. Если функция f(x)непрерывна и $\Phi(x) = \int_a^x f(t)dt$ то справедливо равенство $\Phi'(x) = f(x)$, т.е. производная определенного интеграла от непрерывной функции $f(x)$ по его переменному верхнему пределу x существует и равна значению подынтегральной функции при том же x.

11. Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$ и $F(x)$ – какая-либо первообразная для $f(x)$ на этом отрезке, то справедлива формула Ньютона-Лейбница $\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a).$

Пример 1.1. Вычислить интеграл $\int_0^2 x^2dx$ dx как предел интегральной суммы.

Решение. Так как $f(x) = x^2$, $a = 0$, $b = 2$, то разделим отрезок $[0,2]$ на n равных частей $\Delta x_k = \frac{b-a}{n} = \frac{2}{n}$ и выберем $\xi_k = x_k$. Получим

$$x_0 = 0, x_1 = \frac{2}{n}, x_2 = \frac{4}{n}, \dots, x_{n-1} = \frac{2n-2}{n}, x_n = \frac{2n}{n} = 2,$$

$$f(\xi_1) = \left(\frac{2}{n}\right)^2, f(\xi_2) = \left(\frac{4}{n}\right)^2, \dots, f(\xi_n) = \left(\frac{2n}{n}\right)^2, f(\xi_k)\Delta x_k = \left(\frac{2k}{n}\right)^2 \cdot \frac{2}{n} = \frac{2^3k^2}{n^3}.$$

Следовательно, $\int_0^2 x^2dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{2^3k^2}{n^3} = 2^3\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n}k^2$

Продифференцировав тождество $(x-1)(x^2 + x^3 + \dots + x^n) = x^{n+1} - x^2$ три раза по x и положив затем , x=1 можно найти, что $\sum_{k=1}^{n} k(k-1)=\frac{(n+1)n(n-1)}{3}$

и значит,

$$\sum_{k=1}^{n} k^2=\sum_{k=1}^{n} k(1+(k-1))=\sum_{k=1}^{n} k+\sum_{k=1}^{n} k(k-1)=\frac{(1+n)n}{2}+\frac{(n+1)n(n-1)}{3}=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Таким образом $\int_0^2 x^2dx=8\lim_{n\to\infty}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3}=8\lim_{n\to\infty}\frac{(1+\frac{1}{n})(2+\frac{1}{n})}{6}=\frac{8}{3}$

Пример 1.2. Оценить интеграл $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{dx}{2+5\cos^2 x}$

Решение. Поскольку $0\le\cos^2 x\le 1,$ то $\frac{1}{7}\le\frac{1}{2+5\cos^2 x}\le\frac{1}{2}$ и

$$\frac{1}{7}\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)\le\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{dx}{2+5\cos^2 x}\le\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right) \quad \text{или} \quad \frac{\pi}{84}\le\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{dx}{2+5\cos^2 x}\le\frac{\pi}{24}.$$

Пример 1.3. Вычислить среднее значение функции $y=\sqrt[3]{x}+\frac{1}{\sqrt[3]{x}}$ в интервале$(1,4)$.

Решение. Согласно теореме о среднем $\int_a^b f(x)dx=f(c)(b-a)$. Тогда

$f(c)=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$. В данном примере

$$f(c)=\frac{1}{4-1}\int_1^4\left(\sqrt[3]{x}+\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)dx=\frac{1}{3}\left(\frac{3}{4}x^{4/3}+\frac{3}{2}x^{2/3}\right)\Big|_1^4=\frac{1}{3}\left(\frac{3}{4}\cdot 4\sqrt[3]{4}+\frac{3}{2}\cdot 2\sqrt[3]{2}-\frac{3}{4}-\frac{3}{2}\right)=\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}-\frac{3}{4}$$

Пример 1.4. Решить уравнение $\int_{\frac{1}{2}}^{x}\frac{dx}{\arcsin x\sqrt{1-x^2}}=\ln 2$

Решение. $\int_{\frac{1}{2}}^{x}\frac{dx}{\arcsin x\sqrt{1-x^2}}=\int_{\frac{1}{2}}^{x}\frac{d(\arcsin x)}{\arcsin x}=\ln|\arcsin x|\Big|_{\frac{1}{2}}^{x}=\ln|\arcsin x|-\ln\frac{\pi}{6}$

Следовательно, имеем уравнение $\ln|\arcsin x| - \ln\frac{\pi}{6} = \ln 2$ откуда

Задачи на тему: Определенный интеграл. Формула Ньютона-Лейбница.

1. $\int_0^1 x\,dx$ **2.** $\int_0^1 x^2 dx$ **3.** $\int_0^1 e^x dx$

В задачах 4 – 9 оценить интегралы.

4. $\int_0^1 x(1-x)^2 dx$ **5.** $\int_0^2 \frac{x^2+5}{x^2+2}dx$ **6.** $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{\sin x}{x}dx$

7. $\int_1^2 \sqrt{8+x^3}\,dx$ **8.** $\int_4^5 \frac{\sin x}{1+x^4}dx$ **9.** $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sqrt{5+2\sin x}}$

В задачах 10 -12 найти среднее значение функции *y=f(x)* на заданном отрезке.

10. $f(x) = x^2$ на отрезке [4,5]

11. $f(x) = x^3 + 2x - 1$ на отрезке [0,1]

12. $f(x) = 5 - 2\sin x + 3\cos x$ на отрезке $[\frac{\pi}{2}, \pi]$.

В задачах 13-84 вычислить интегралы.

13. $\int_1^6 \left(7 - x - \frac{6}{x}\right)dx$ **14.** $\int_1^3 (x+1)^2 dx$ **15.** $\int_0^2 \frac{2x-1}{2x+1}dx$

16. $\int_{-2}^1 (2 - x - x^2)dx$ **17.** $\int_0^1 (3x^3+1)^6 x^2 dx$ **18.** $\int_0^2 \frac{x}{(3x^2+1)^2}dx$

19. $\int\limits_{-1}^{27} \sqrt[3]{x}\,dx$ **20.** $\int\limits_{1}^{8} \left(4\sqrt[3]{x} - \frac{2}{\sqrt[3]{x}}\right)^2 dx$ **21.** $\int\limits_{\sqrt{3}}^{3} \frac{dx}{3+x^2}$

22. $\int\limits_{1}^{24} \frac{\left(1+\sqrt{x}\right)^3}{\sqrt{x}}\,dx$ **23.** $\int\limits_{3}^{7} \sqrt{x-3}\,dx$ **24.** $\int\limits_{2\sqrt{3}}^{6} \frac{dx}{12+x^2}$

25. $\int\limits_{0}^{\sqrt{5}} x\sqrt{x^2+4}\,dx$ **26.** $\int\limits_{0}^{0.5} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$ **27.** $\int\limits_{2}^{5} \frac{dx}{x^2+2x-3}$

28. $\int\limits_{1}^{\sqrt{5}} \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}\,dx$ **29.** $\int\limits_{0}^{1} \frac{2x-x^2-1}{x+1}\,dx$ **30.** $\int\limits_{2}^{5} \frac{dx}{x^2-4x}$

31. $\int\limits_{3}^{4} \frac{x^3+3}{x-2}\,dx$ **32.** $\int\limits_{\sqrt{6}}^{3\sqrt{2}} \frac{dx}{6+x^2}$ **33.** $\int\limits_{3}^{8} \frac{dx}{x^2-6x+34}$

34. $\int\limits_{1}^{2} \frac{dx}{x^2+x}$ **35.** $\int\limits_{-2}^{1} \frac{dx}{x^2+4x+13}$ **36.** $\int\limits_{3}^{8} \frac{dx}{x^2+4x+5}$

37. $\int\limits_{0}^{2} \frac{x+1}{x^2+2x+1}\,dx$ **38.** $\int\limits_{0}^{1} \frac{x}{1+x^4}\,dx$ **39.** $\int\limits_{0}^{\pi/4} \cos^3 x\,dx$

40. $\int\limits_{0}^{1} \frac{x^2}{\sqrt{4+x^6}}\,dx$ **41.** $\int\limits_{0}^{1} \frac{x^3}{1+x^8}\,dx$ **42.** $\int\limits_{0}^{\pi/4} \cos^3 2x\,dx$

43. $\int\limits_{0}^{1} \frac{dx}{\sqrt{6-4x-6x^2}}$ **44.** $\int\limits_{0}^{3.5} \frac{dx}{\sqrt{5+4x-x^2}}$ **45.** $\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/4} \sin^4 x\,dx$

46. $\int\limits_{0.75}^{2} \frac{dx}{\sqrt{2+3x-2x^2}}$ **47.** $\int\limits_{0}^{1} \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+2}}$ **48.** $\int\limits_{0}^{\pi/2} \cos^4 x\,dx$

49. $\int\limits_{0}^{1} \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$ **50.** $\int\limits_{0}^{\sqrt{3}} \frac{x}{\sqrt{4-x^2}}\,dx$ **51.** $\int\limits_{-\pi}^{\pi} \sin 3x \sin 7x\,dx$

52. $\int\limits_{0}^{\sqrt{5}} \frac{x}{\sqrt{x^2+4}}\,dx$ **53.** $\int\limits_{0}^{1} xe^{3x^2}\,dx$ **54.** $\int\limits_{-\pi}^{\pi} \sin x \cos x\,dx$

55. $\int\limits_{0}^{3} 2^x\,dx$ **56.** $\int\limits_{-1}^{0} x^2 9^{3+1}\,dx$ **57.** $\int\limits_{0}^{\pi/2} \sin x \cos^2 x\,dx$

58. $\int\limits_{0}^{0.5} 5^{\arcsin 2x} \frac{dx}{\sqrt{1-4x^2}}$ **59.** $\int\limits_{0}^{1} 9^{3\sqrt{x}+1} \frac{dx}{\sqrt{x}}$ **60.** $\int\limits_{0}^{\pi/2} \sin^2 x \cos x\,dx$

$61.\ \int\limits_0^1 e^{\sqrt{x}}\frac{dx}{\sqrt{x}}$ $\qquad$ $62.\ \int\limits_1^2 \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}dx$ $\qquad$ $63.\ \int\limits_{\pi/4}^{\pi/2}(1+\sin 4x)^2\cos 4x dx$

$64.\ \int\limits_0^1 e^{x+e^x}dx$ $\qquad$ $65.\ \int\limits_0^1 \frac{dx}{e^x+e^{-x}}$ $\qquad$ $66.\ \int\limits_0^{\pi}\sqrt[3]{3+2\cos x}\sin x dx$

$67.\ \int\limits_0^1 e^{5x^3+1}x^2dx$ $\qquad$ $68.\ \int\limits_{e^3}^{e^4}\frac{dx}{x\ln x}$ $\qquad$ $69.\ \int\limits_0^{\pi}\sin\frac{6x}{3}\cos\frac{x}{3}dx$

$70.\ \int\limits_1^e \frac{dx}{x(1+\ln^2 x)}$ $\qquad$ $71.\ \int\limits_1^e \frac{\ln^2 x}{x}dx$ $\qquad$ $72.\ \int\limits_{\pi/4}^{\pi/3}\frac{dx}{tgx\cos^2 x}$

$73.\ \int\limits_1^e \frac{\sqrt{1+\ln x}}{x}dx$ $\qquad$ $74.\ \int\limits_{-\pi}^{\pi}\sin x dx$ $\qquad$ $75.\ \int\limits_0^{\pi/2}\sin^3 x\sqrt{\cos x}dx$

$76.\ \int\limits_0^{\pi/4}\sin 4x dx$ $\qquad$ $77.\ \int\limits_0^{\pi/4}\sin^2 x dx$ $\qquad$ $78.\ \int\limits_1^{e^2}\frac{\cos(\ln x)}{x}dx$

$79.\ \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/4}\cos^2 x dx$ $\qquad$ $80.\ \int\limits_0^{\pi/4}\frac{dx}{\cos^2 3x}$ $\qquad$ $81.\ \int\limits_0^1 \frac{arctgx}{1+x^2}dx$

$82.\ \int\limits_0^{0.5}\frac{dx}{\cos^2 5x}$ $\qquad$ $83.\ \int\limits_0^{\pi/2}\sin^3 x dx$ $\qquad$ $84.\ \int\limits_0^{\pi/4}\frac{dx}{(arctgx+1)(1+x^2)}$

1.3. Замена переменной и интегрирование по частям в определенном интеграле

Если f(x)— непрерывная на отрезке [a,b] функция, а $x=\varphi(t)$ - непрерывно дифференцируемая функция на отрезке $[\alpha,\beta]$такая, что $\varphi[\alpha,\beta]=[a,b]$ и $\varphi(\alpha)=a,\varphi(\beta)=b$, то справедлива формула замены переменной в определенном интеграле

$$\int\limits_a^b f(x)dx=\int\limits_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt=\int\limits_\alpha^\beta f(\varphi(t))d\varphi(t)$$

Если функции $u = u(x)$ и $v = v(x)$ - непрерывно дифференцируемые на отрезке $[a,b]$ функции, то имеет место формула интегрирования по частям в *определенном интеграле* $\int_a^b udv = uv\Big|_a^b - \int_a^b vdu$

Если функция $f(x)$ - нечетная функция, то $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$ если $f(x)$ - четная функция, то $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx$, если $f(x)$ - периодическая функция периода T, то при любом $a \in R$ $\int_a^{a+T} f(x)dx = \int_0^T f(x)dx$

Пример 2.1. Вычислить интеграл $\int_1^2 x^3\sqrt{2x^2 - dx}$

Решение. Положим $\sqrt{2x^2-1} = t$ Тогда $x^2 = \frac{t^2+1}{2}, 2xdx = tdt$ Если $x = 1$, то $t = 1$; если $x = 2$, то $t = \sqrt{7}$ Таким образом,

$$\int_1^2 x^2\sqrt{2x^2-1}dx = \int_1^2 x^2\sqrt{2x^2-1}xdx = \frac{1}{2}\int_1^{\sqrt{7}} \frac{t^2+1}{2} t\cdot tdt = \frac{1}{4}\int_1^{\sqrt{7}} (t^4+t^2)dt =$$

$$= \frac{1}{4}(\frac{1}{5}t^5 + \frac{1}{3}t^3)\Big|_1^{\sqrt{7}} = \frac{1}{4}\left(\frac{49\sqrt{7}}{5} + \frac{7\sqrt{7}}{3} - \frac{1}{5} - \frac{1}{3}\right) = \frac{91\sqrt{7}}{30} - \frac{2}{15} =$$

$$= \frac{1}{30}(91\sqrt{7} - 4)$$

Пример 2.2. Вычислить интеграл $\int_5^{12} \frac{x}{\sqrt{x+4}}dx$

Решение. Положим $\sqrt{x+4} = t$ Тогда $x = t^2 - 4, dx = 2tdt$ Если $x = 5$, то $t=3$; если $x=12$, то $t=4$. Значит,

$$\int_5^{12} \frac{x}{\sqrt{x+4}}dx = 2\int_3^4 \frac{(t^2-4)tdt}{t} = 2\int_3^4 (t^2-4)dt = 2\left(\frac{t^3}{3} - 4t\right)\Big|_3^4 = 2\left(\frac{64}{3} - 16 - 9 + 12\right) = \frac{50}{3}$$

Пример 2.3. Вычислить интеграл $\int\limits_0^2 \frac{\sqrt{e^x}}{\sqrt{e^x+e^{-x}}}dx$

Решение. Сделаем замену $t=\sqrt{e^x}$ Тогда $e^x=t^2, x=2\ln t, dx=\frac{2dt}{t}$

и, если $x=0$, то $t=1$; если $x=2$, то $t=e$. Значит

$$\int\limits_0^2 \frac{\sqrt{e^x}}{\sqrt{e^x+e^{-x}}}dx = 2\int\limits_1^e \frac{tdt}{\sqrt{t^2+\frac{1}{t^2}}} = \ln\left|t^2+\sqrt{t^4+1}\right|\Big|_1^e = \ln\left(\frac{e^2+\sqrt{e^4+1}}{1+\sqrt{2}}\right)$$

Пример 2.4. Вычислить интеграл $\int\limits_{\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} xarctgxdx$.

Решение. Так как подынтегральная функция – четная, то

$$\int\limits_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} xarctgxdx = 2\int\limits_0^{\sqrt{3}} xarctgxdx = \left[u=arctgx, dv=xdx, du=\frac{dx}{1+x^2}, v=\frac{x^2}{2}\right]=$$

$$=2\left(\frac{x^2arxtgx}{2}\Big|_0^{\sqrt{3}} - \frac{1}{2}\int\limits_0^{\sqrt{3}}\frac{x^2}{1+x^2}dx\right) = x^2arctgx\Big|_0^{\sqrt{3}} - \int\limits_0^{\sqrt{3}}\frac{(x^2+1)-1}{x^2+1}dx=$$

$$=\pi-\sqrt{3}+\frac{\pi}{3}=\frac{4\pi}{3}-\sqrt{3}$$

$$\ln|arcinx| = \ln\frac{\pi}{3}, \arcsin x = \ln\frac{\pi}{3}(m.к.x>\tfrac{1}{2}), x=\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

1.4. Приближенное вычисление определенных интегралов (формула трапеций).

Точное вычисление определенного интеграла по формуле Ньютона– Лейбница не всегда возможно. . В этих случаях, а также в случае, когда подынтегральная функция задана табличным способом, определенные интегралы вычисляют приближенно.

Формула трапеций относится к одной из простейших формул приближенного вычисления определенных интегралов и имеет вид $\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n}\left(\frac{y_0+y_n}{2}+\sum_{i=1}^{n-1} y_i\right)$, где n – число частей, на которые разбивается отрезок $[a,b]$; $a = x_0 < x_1 < ... < x_{n-1} < x_n = b; y_i = f(x_i)(i = \overline{0,n})$ - значения подынтегральной функции в точках разбиения отрезка $[a,b]$. Заметим, что число n выбирается произвольно, и чем больше n, тем с большей точностью получим значение интеграла.

Если функция $f(x)$ имеет непрерывную вторую производную $f''(x)$ на отрезке $[a,b]$, то абсолютная погрешность формулы трапеций выражается неравенством $\Delta(n) \le \frac{(b-a)^3}{12n^2}M_2$, где $M_2 = \max\limits_{x\in[a,b]}[f''(x)]$

Пример 3.1. По формуле трапеций, приняв $n=5$ вычислить $\int_0^1 \frac{dx}{2+x}$ и оценить абсолютную погрешность полученных результатов.

Решение. В данном случае $f(x) = \frac{1}{2+x}, \frac{b-a}{n} = 0{,}2$ и $x_k = x_0 + 0{,}2k(k = \overline{1,5})$. Находим

$$x_0 = 0; x_1 = 0{,}2; x_2 = 0{,}4; x_3 = 0.6; x_4 = 0{,}8; x_5 = 1; y_0 = f(x_0) = \frac{1}{2+0} = 0{,}5; y_1 = f(x_1)\frac{1}{2{,}2};$$

$$y_2 = f(x_2) = \frac{1}{2{,}4}; y_3 = f(x_3) = \frac{1}{2{,}6}; y_4 = f(x_4) = \frac{1}{2{,}8}; y_5 = f(x_5) = \frac{1}{3}.$$

По формуле трапеций получаем

$$\int_0^1 \frac{dx}{2+x} \approx 0{,}2\left(\frac{0{,}5+0{,}333}{2}+0{,}4545+0{,}4167+0{,}3846+0{,}3571\right) \approx 0{,}2\cdot 2{,}0296 \approx 0{,}4059$$

Оценим абсолютную погрешность. Для этого находим $f'(x) = -\frac{1}{(2+x)^2}; f''(x) = \frac{2}{(2+x)^3}; f'''(x) = -\frac{6}{(2+x)^4}$, т.е. критической точки на отрезке *[0,1]* функция $\frac{2}{(2+x)^3}$ не имеет. Поэтому, чтобы найти наибольшее значение функции $|f''(x)|$ на отрезке *[0,1]* надо сравнить значения $f''(x)$ на концах данного отрезка: $f''(0)=\frac{1}{4}, f''(1)=\frac{2}{27}$. Значит,

$$M_2=\max_{x\in[0,1]}|f''(x)|=\frac{1}{4}, \text{ и } \Delta(5)\le\frac{1}{300}\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{1200}\approx 0{,}00083<0{,}001$$

Пример 3.2. На сколько частей нужно разбить промежуток интегрирования, чтобы по формуле трапеций с точностью до 0,001 вычислить интеграл $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\frac{x}{2}dx$

Решение. Число отрезков n, на которые нужно разбить промежуток интегрирования, найдем из неравенства $\frac{(b-a)^3M_2}{12n^2}\le\varepsilon$ из которого $n\ge\sqrt{\frac{(b-a)^3M_2}{12\varepsilon}}$

Поскольку $f(x)=\cos\frac{x}{2}; f'(x)=-\frac{1}{2}\sin\frac{x}{2}; f''(x)=-\frac{1}{4}\cos\frac{x}{2}$,

то $M_2=\max\limits_{x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]}|f''(x)|=\max\limits_{0\le x\le\frac{\pi}{2}}\left|-\frac{1}{4}\cos\frac{x}{2}\right|=\frac{1}{4}$

Значит, $n\ge\sqrt{\frac{\pi^3}{8\cdot4\cdot12\cdot0{,}001}}=\sqrt{80{,}623}, n\ge 9.$

1.5. Несобственные интегралы

Интегралы с бесконечными пределами интегрирования и интегралы от неограниченных функций называются *несобственными интегралами*.

Пусть функция $y=f(x)$ непрерывна на промежутке $[a;+\infty]$ и интегрируема на любом конечном его отрезке $(a;b]\, a<b$. Тогда несобственным интегралом с бесконечным верхним пределом называется предел $\lim\limits_{b\to+\infty}\int\limits_a^b f(x)dx$ который обозначается символом $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$

т.е. $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx=\lim\limits_{b\to+\infty}\int\limits_a^b f(x)dx.$

Если предел существует и конечен, то несобственный интеграл называется *сходящимся*, в противном случае – *расходящимся*.

Аналогично определяются несобственные интегралы на промежутках $(-\infty;b]$ и $(-\infty;+\infty)$: $\int\limits_{-\infty}^{b} f(x)dx=\lim\limits_{a\to-\infty}\int\limits_a^b f(x)dx,$

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=\lim_{a\to-\infty}\int\limits_a^c f(x)dx+\lim_{b\to+\infty}\int\limits_c^b f(x)dx.$$

Если сходятся оба интеграла в правой части последней формулы, то интеграл $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ называется *сходящимся*, и *расходящимся*, если хотя бы один из них расходится.

Если *f(x)* непрерывна для всех *x* отрезка *[a,b]*, кроме точки *c*, в которой *f(x)* имеет разрыв II рода, то по определению

$$\int\limits_a^b f(x)dx=\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_a^{c-\varepsilon} f(x)dx+\lim_{\delta\to 0}\int\limits_{c+\delta}^{b} f(x)dx,$$

где ε и δ изменяются независимо друг от друга.

Несобственный интеграл $\int\limits_a^b f(x)dx$ $(f(c)=+\infty, a<c<b)$ называется сходящимся, если оба предела в правой части равенства существуют, и расходящимся, если не существует хотя бы один из них.

В случае *c=a* или *c=b* получаем $\int\limits_a^b f(x)dx=\lim\limits_{\delta\to 0}\int\limits_{a+\varepsilon}^b f(x)dx$ $(\varepsilon>0)$ или

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\delta \to 0} \int_a^{b-\delta} f(x)dx \quad (\delta > 0)$$

При исследовании сходимости несобственных интегралов пользуются одним из признаков сравнения.

1. Если функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ определены на промежутке $[a;+\infty)$ интегрируемы на отрезке $[a, A]$ где $A \geq a$ и $0 \leq f(x) \leq \varphi(x)$ для всех $x \geq a$ то из сходимости интеграла $\int_a^{+\infty} \varphi(x)dx$ следует сходимость интеграла $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ а из расходимости интеграла $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ вытекает расходимость интеграла $\int_a^{+\infty} \varphi(x)dx$ (признак сравнения).

2. Пусть на промежутке $[a;+\infty)$ определены две положительные функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ интегрируемые на любом конечном промежутке [a,b]. Тогда, если существует конечный предел $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = L > 0$, то интегралы $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ и $\int_a^{+\infty} \varphi(x)dx$

сходятся или расходятся одновременно (предельный признак сравнения).

3. Если интеграл $\int_a^{+\infty} |f(x)| dx$ сходится, то сходится и интеграл $\int_a^{+\infty} f(x)dx$.

В этом случае интеграл $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ называется ***абсолютно сходящимся***.

4. Если при $x \to +\infty$ функция $f(x)>0$ является бесконечно малой порядка по сравнению с $\frac{1}{x}$, то интеграл $\int\limits_{a}^{+\infty} f(x)dx$ сходится при, $\alpha > 1$и расходится при $\alpha \le 1$. На практике часто для сравнения используется функция $\varphi(x) = \frac{1}{x^2}$ Известно, что $\int\limits_{a}^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$ сходится при, $\alpha > 1$ и расходится при$\alpha \le 1$.

Аналогичные признаки сходимости можно указать и для интегралов от разрывных функций. Для сравнения в признаке 4^0 используют интеграл $\int\limits_{a}^{b} \frac{dx}{(b-x)^\alpha} (\alpha > 0)$ или $\int\limits_{a}^{b} \frac{dx}{(x-a)^\alpha}$, который сходится при $\alpha < 1$ и расходится при $\alpha \ge 1$.

Пример 1. Вычислить интеграл $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{arctg3x}{2+9x^2} dx$ или установить его расходимость.

Найдем

Решение.

$$\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{arctg3x}{1+9x^2} dx = \lim_{a \to +\infty} \frac{1}{3} \int\limits_{1}^{a} arctg3xd(arctg3x) = \lim_{a \to +\infty} \left(\frac{arctg^2 3x}{6} \Big|_1^a \right) =$$

$$= \lim_{a \to +\infty} \frac{1}{6} (arctg^2 3a - arctg^2 3) = \frac{1}{6} \left(\left(\frac{\pi}{2} \right)^2 - arctg^2 3 \right) \approx 0{,}15.$$

Данный интеграл сходится и приближенно равен 0,15.

Пример 2. Вычислить интеграл $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+1)(x^2+4)}$ или установить его расходимость.

Решение. Разложив подынтегральную функцию, находим:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+1)(x^2+4)} =$$

$$= \frac{1}{3} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+1} - \frac{1}{3} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+4} = \frac{1}{3} \int\limits_{-\infty}^{0} \frac{dx}{1+x^2} - \frac{1}{3} \int\limits_{0}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} - \frac{1}{3} \int\limits_{-\infty}^{0} \frac{dx}{x^2+4} - \frac{1}{3} \int\limits_{0}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+4} =$$

$$=\frac{1}{3}\lim_{a\to-\infty}\int_a^0\frac{dx}{1+x^2}+\frac{1}{3}\lim_{b\to+\infty}\int_0^b\frac{dx}{1+x^2}-\frac{1}{3}\lim_{a\to-\infty}\int_a^0\frac{dx}{x^2+4}-\frac{1}{3}\lim_{b\to+\infty}\int_0^b\frac{dx}{x^2+4}=\frac{1}{3}\lim_{a\to-\infty}\left(arctgx\Big|_a^0\right)+$$

$$+\frac{1}{3}\lim_{b\to+\infty}\left(arctgx\Big|_0^b\right)-\frac{1}{3}\lim_{a\to-\infty}\left(\frac{1}{2}arctg\frac{x}{2}\Big|_a^0\right)-\frac{1}{3}\lim_{b\to+\infty}\left(\frac{1}{2}arctg\frac{x}{2}\Big|_0^b\right)=\frac{1}{3}\left(0-\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)+$$

$$+\frac{1}{3}\left(\frac{\pi}{2}-0\right)-\frac{1}{6}\left(0-\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)-\frac{1}{6}\left(\frac{\pi}{2}-0\right)=\frac{\pi}{6}.$$

Данный интеграл сходится и равен $\frac{\pi}{6}$

Пример 3. Исследовать сходимость интеграла $\int_0^{\pi/2}\frac{\sin^2 x}{\cos x}dx$.

Решение. Подынтегральная функция имеет бесконечный разрыв при $x=\frac{\pi}{2}$. Следовательно,

$$\int_0^{\pi/2}\frac{\sin^2 x}{\cos x}dx.=\lim_{\varepsilon\to0}\int_0^{\pi/2-\varepsilon}\frac{\sin^2 xdx}{\cos x}=\left[\frac{\sin^2 x}{\cos x}=\frac{\sin^2 x\cos x}{\cos^2 x}=-\cos x+\frac{\cos x}{1-\sin^2 x}\right]=$$

$$=\lim_{\varepsilon\to0}\left(\int_0^{\pi/2-\varepsilon}(-\cos)dx+\int_0^{\pi/2-\varepsilon}\frac{\cos x}{1-\sin^2 x}dx\right)=-\lim_{\varepsilon\to0}\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sin x-1}{\sin x+1}\right|\Big|_0^{\pi/2-\varepsilon}=$$

$$=-\lim_{\varepsilon\to0}\sin\left(\frac{\pi}{2}-\varepsilon\right)-\frac{1}{2}\lim_{\varepsilon\to0}\ln\left|\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\varepsilon\right)-1}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\varepsilon\right)+1}\right|=-1-\frac{1}{2}\cdot\infty$$

Интеграл расходится.

Пример 4. Исследовать сходимость интеграла $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{1+x^8}$.

Решение. Подынтегральная функция $f(x)=\frac{1}{1+x^8}$ в промежутке интегрирования меньше, чем $\varphi(x)=\frac{1}{x^8}$ Исследуем на сходимость $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^8}$:

$$\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^8}=\lim_{a\to+\infty}\int_1^a x^{-8}dx=\lim_{a\to+\infty}\left(-\frac{1}{7x^7}\Big|_1^a\right)=\lim_{a\to+\infty}\left(\frac{1}{7}-\frac{1}{7a^7}\right)=\frac{1}{7},$$ т.е. интеграл $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^8}$

сходится, а, значит, и $\int\limits_{1}^{+\infty}\frac{dx}{1+x^8}$ также сходится на основании признака сравнения.

Пример 5. Исследовать сходимость интеграла $\int\limits_{1}^{+\infty}\frac{\cos x}{x^3}dx.$

Решение. Так как $\frac{\cos x}{x^3}\le\frac{|\cos x|}{x^3}\le\frac{1}{x^3}$ и

$\int\limits_{1}^{+\infty}\frac{dx}{x^3}=\lim\limits_{a\to+\infty}\int\limits_{1}^{a}x^{-3}dx=\lim\limits_{a\to+\infty}\left(-\frac{1}{2x^2}\Big|_1^a\right)=\lim\limits_{a\to+\infty}\left(-\frac{1}{2a^2}+\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}$, то интеграл $\int\limits_{1}^{+\infty}\frac{dx}{x^3}$ сходится, а тогда, согласно признаку сравнения, сходится и интеграл $\int\limits_{1}^{+\infty}\frac{|\cos x|dx}{x^3}$.

Следовательно, на основании признака 3^0 интеграл $\int\limits_{1}^{+\infty}\frac{\cos x}{x^3}dx.$ сходится.

II. ПРИЛОЖЕНИЯ ОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА

2.1. Геометрические приложения определенного интеграла

2.1.1. Вычисление площадей плоских фигур

Если непрерывная кривая задана в прямоугольных координатах уравнением

$y=f(x)(f(x)\ge 0,\forall x\in[a,b])$ то площадь плоской фигуры, ограниченной этой кривой, прямыми $x = a$, $x = b$ и осью Ox (рис.2), вычисляется по формуле

$S=\int\limits_{a}^{b}f(x)dx$, причем $S\ge 0$.

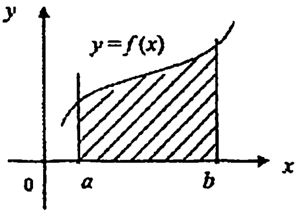


Рис. 2

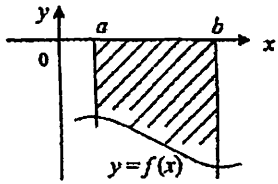


Рис. 3

Если $f(x) \le 0, \forall x \in [a,b]$ (рис.3), то в это случае $S = \left| \int\limits_a^b f(x)dx \right| = -\int\limits_a^b f(x)dx$.

Площадь криволинейной трапеции, ограниченной прямыми $y = c, y = d$, непрерывной кривой $x = g(y)$ $(g(y) \ge 0, \forall y \in [c,d])$ и осью Oy (рис.4), вычисляется по формуле $S = \int\limits_c^d g(y)dy$.

Если криволинейная трапеция ограничена кривыми $y = f_1(x), y = f_2(x)$ $(f_1(x) \le f_2(x), \forall x \in [a,b])$ рис.5. то ее площадь равна $S = \int\limits_a^b (f_2(x) - f_1(x))dx$.

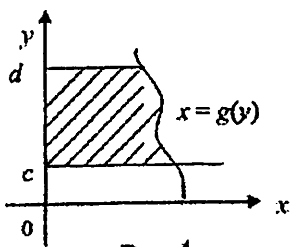


Рис. 4

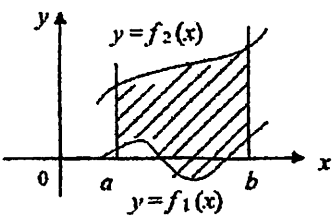


Рис. 5

Если криволинейная трапеция ограничена прямыми $y = c$, $y = d$ и кривыми

$x = g_1(y)$, $x = g_2(y)$ $\quad (g_1(y) \le g_2(y), \forall y \in [c,d])$(рис.6.) то ее площадь

вычисляется по формуле $S = \int\limits_c^d (g_2(y) - g_1(y))dy$.

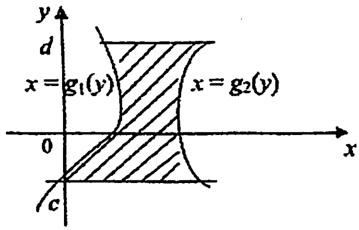


Рис. 6

Площадь криволинейной трапеции, ограниченной прямыми $x = a$, $x = b$, осью Ox и кривой, заданной параметрическими уравнениями $x = x(t)$, $y = y(t)$, $t \in [t_1, t_2]$, находится по формуле $S = \int\limits_{t_1}^{t_2} y(t)x'(t)dt$ при условии, что $x = x(t)$ строго возрастает на$[t_1, t_2]$. Если же x = $x(t)$-строго убывающая на $[t_1, t_2]$, функция, то $S = -\int\limits_{t_1}^{t_2} y(t)x'(t)dt$

Пример 4.1. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями

$y = \sin x$ $\;y = 0$ $\quad (0 \le \pi \le \pi/4)$(рис.7.)

Решение. Данная фигура является криволинейной трапецией, прилегающей к оси Ox, поэтому ее площадь

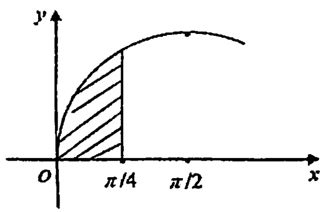


Рис.7

$$S=\int_0^{\pi/4}\sin x\,dx=-\cos x\Big|_0^{\pi/4}=-\sin\frac{\pi}{4}+1=1-\frac{\sqrt{2}}{2}\text{(кв.ед.)}.$$

Пример 4.2. Найти площадь фигуры, ограниченной окружностью $x^2+y^2=1$, касательной к ней в точке $\left(\frac{\sqrt{2}}{2};\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ и осью Ox (рис.8).

Решение. Уравнение касательной имеет вид $y-y_0=k(x-x_0)$, где угловой коэффициент $k=y'\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\Big|_{x=\frac{\sqrt{2}}{2}}=-1$. Следовательно $y-\frac{\sqrt{2}}{2}=-(x-\frac{\sqrt{2}}{2})\Rightarrow y=-x+\sqrt{2}$ искомое уравнение касательной. Касательная пересекает ось Ox в $B(\sqrt{2};0)$. Найдем площадь заштрихованной фигуры ABC:

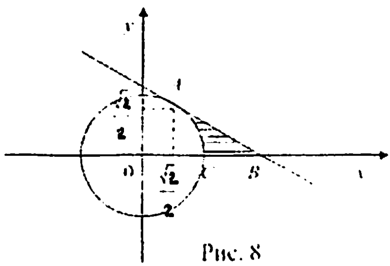


Рис. 8

$$S=\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\sqrt{2}}(-x+\sqrt{2})dx-\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{1}\sqrt{1-x^2}\,dx=\left(-\frac{1}{2}x^2+\sqrt{2}x\right)\Big|_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\sqrt{2}}-\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{1}\sqrt{1-x^2}\,dx=[x=\sin t],$$

если $x=\frac{\sqrt{2}}{2}$, то $t=\frac{\pi}{4}$; если x=1 то $t=\frac{\pi}{2}$

$$=-1+2+\frac{1}{4}-1-\int_{\pi/4}^{\pi/2}\cos^2 t\,dt=\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\int_{\pi/4}^{\pi/2}(1+\cos 2t)dt=$$

$$=\frac{1}{4}-\frac{1}{2}t\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}-\frac{1}{4}\sin 2t\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}=\frac{4-\pi}{8}\text{(кв.ед.)}.$$

Пример 4.3. Найти площадь фигуры, ограниченной кривыми $y = 2x-x^2$, $y = x-2$ (рис.9).

Решение.

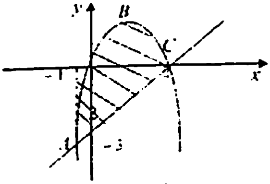


Рис. 9

Найдем точки пересечения данных кривых. Для этого решим систему уравнений:

$$\begin{cases} y = 2x - x^2, \\ y = x - 2. \end{cases} \quad 2x - x^2 = x - 2,\ x^2 - x - 2 = 0,\ x_1 = -1,\ y_1 = -3,\ x_2 = 2,\ y_2 = 0.$$

Следовательно, кривые пересекаются в точках A (-1; -3) и C (2;0). Таким образом, искомая площадь фигуры ABC

$$s = \int_{-1}^{2}\left(2x - x^2 - x + 2\right)dx = \int_{-1}^{2}(-x^2 + x + 2)dx = \left(-\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{3}x^2 + 2x\right)\Big|_{-1}^{2} =$$

$$= -\frac{8}{3} + 2 + 4 - \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + 2 = \frac{9}{2}(кв.ед.).$$

Пример 4.4. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $y^2 = 3x + 4$, $x - y - 2 = 0$ (рис. 10).

Решение.

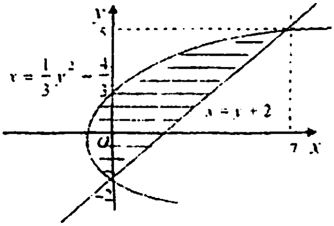


Рис. 10

Найдем точки пересечения кривых: $\begin{cases} y^2 = 3x + 4, \\ x = y + 2. \end{cases}$

$y^2 = 3(y + 2) + 4$, $y^2 - 3y - 10 = 0$. $y_1 = -2$, $y_2 = 5$.

Находим площадь фигуры:

$$S\int_{-2}^{5}(y + 2 - \frac{1}{3}y^2 - \frac{4}{3})dy = \int_{-2}^{5}(-\frac{1}{3}y^2 + y + \frac{10}{3})dy = \left(-\frac{1}{9}y^3 + \frac{1}{2}y^2 + \frac{10}{3}y\right)\Bigg|_{-2}^{5} = \frac{343}{18}$$

Пример 4.5. Найти площадь фигуры, ограниченной астроидой $x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$ (рис.11).

Решение. Вычислим площадь S_1 ее части, ограниченной дугой AB, и результат увеличим в 4 раза. Если $x = 0$, то $t = \frac{\pi}{2}$; если $x = a$, то $t=0$.

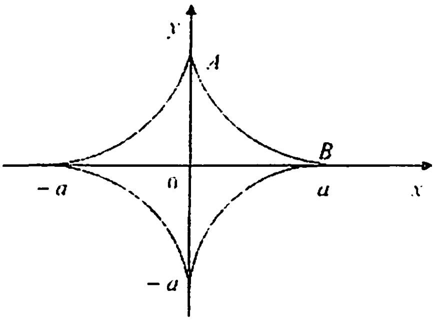


Рис. 11

$$S_1 = \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} a\sin^3 t \cdot 3a\cos^2 t(-\sin t)dt = 3a^2\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sin^4 t \cdot \cos^2 t dt =$$

$$= 3a^2\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1 - \cos 2t}{2}\right)^2\left(\frac{1 + \cos 2t}{2}\right)dt = \frac{3}{8}a^2\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}(\cos^3 2t - \cos^2 2t - \cos 2t + 1)dt =$$

$$= \frac{3}{16}a^2\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}(1 - \sin^2 2t)d(\sin 2t) - \frac{3}{8}a^2\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1 + \cos 4t}{2}dt - \frac{3}{16}a^2\sin 2t\Big|_{0}^{\frac{\pi}{2}} + \frac{3}{8}a^2 t\Big|_{0}^{\frac{\pi}{2}} =$$

$$= \frac{3}{16}a^2 \sin 2t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{16}a^2 \sin^3 2t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{3}{16}a^2 t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{3}{64}a^2 \sin 4t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{3\pi a^2}{16} =$$

$$= -\frac{3a^2\pi}{32} + \frac{3\pi a^2}{16} = \frac{3\pi a^2}{32}.$$

$$S = 4S_1 = \frac{3\pi a^2}{8} \text{(кв.ед.)}.$$

Искомая площадь

Задачи на тему: Геометрические приложения определенного интеграла

В задачах 1-122 найти площадь фигуры, ограниченной заданными линиями.

1. $y = 2x - x^2$, $y = 0$.
2. $y = 3x + 18 - x^2$, $y = 0$.
3. $y = 4x - x^2$ и осью OX.
4. $y = x^2 + 1$, $y = 2$.
5. $y = 0$, $y = 2x^2 + 1$, $x = -1$, $x = 1$.
6. $y = x^2$, $y = x + 2$.
7. $y = x^2 - x$, $y = 3x$.
8. $y = x^2 - 2x + 3$, $y = 3x - 1$.
9. $y = \frac{1}{3}x^2 - 2x + 4$, $y = 10 - x$.
10. $y = x$, $y = 2x - x^2$.
11. $y = 7x - 2x^2$, $x + y = \frac{7}{2}$.
12. $y = x^2$, $y = 0$, $x = 3$.
13. $y = 2(1 - x)$, $y = 1 - x^2$, $x = 0$.
14. $y = x^2$, $y = 2 - x$, $y = 0$.
15. $y = 0$, $y = 4(x - 2)$, $y = (x - 1)^2$.
16. $x = 0$, $y = -2x + 4$, осью OX и $y = x^2 + 1$.
17. $y = 0$, $x = 0$, $y = -x + 1$, $y = 2 - x^2$.

18. $y=x^2,\quad y=1+\frac{3}{4}x^2.$

19. $y=x^2,\quad y=2x-x^2.$

20. $y=x^2-2x+2,\quad y=2+4x-x^2.$

21. $y=x^2+2,\quad y=1-x^2,\quad x=0,\quad x=1.$

22. $y=x^3-3x^2-9x+1,\quad x=0,\quad y=6\ (x<0).$

23. $x^2=4y,\quad x+y=3.$

24. $y^2=8x,\quad 2x-3y+8=0.$

25. $y=x^2,\quad y=3x-4.$

26. $y=x^2-2x+3,\quad y=4-2x.$

27. $y=0,\quad y=-x+2,\quad y=\sqrt{x}.$

28. $y=x^2,\quad y=2\sqrt{2x}.$

29. $y=\sqrt{x},\quad y=\sqrt{4-3x},\quad y=0.$

30. $y=x^2,\quad y=x.$

31. $y=x^2,\quad y=2x,\quad y=x.$

32. $y^2=2x,\quad y^2=4x-x^2.$

33. $y^2=(x-1)^2.$

34. $y=-x^2+6x-5$ и осями координат.

35. $y=\frac{1}{2}x^2,\quad y=2-\frac{3}{2}x.$

36. $y=-x^2,\quad y=x^2-2x-4.$

37. $y=\sqrt{x},\quad y=x-2,\quad x=0.$

38. $y=-x^2,\quad x+y+2=0.$

39. $4y=x^2,\quad 2y-6x+x^2=0.$

40. $y=x^2+1,\quad 2y=x^2,\quad y=5.$

41. $y^2=2x,\quad y^2=4x-x^2.$

42. $y^2+8x=16,\quad y^2-24x=48.$

43. $y=x^2-6x+9,\quad 4x-y-12=0.$

44. $y=x^2-2x,\quad y=3.$

45. $y=\frac{x^2}{2}-x+2,\quad y=x,\quad x=0.$

46. $y=-x^2+4x-3,\quad y=0.$

47. $y^2=6x,\quad x^2+y^2=16.$

48. $x^2=2y,\quad x^2+y^2=8.$

49. $y^2=2x+4,\quad x=0.$

50. $y=3-2x-x^2,\quad y=0.$

51. $y=x^2,\quad y=2-x^2.$

52. $y=x^2+4x,\quad y=x+4.$

53. $y=6x-x^2,\quad y=0.$

54. $y^2=1-x,\quad x=-3.$

55. $y=x^2-6x+10,\quad y=6x-x^2,\quad x=-1.$

56. $y=x^2-6x+7,\quad y=x+1.$

57. $y=-x^2+6x-5,\quad y=x-5.$

58. $y=x^2-6x+7,\quad y=-x+7.$

59. $y=-x^2-6x-5,\quad y=x+1.$

60. $y=x^2+2,\quad y=x+2.$

61. $y=x^2+1,\quad x+y=3.$

62. $y^2=9x,\quad y=x+2.$

63. $y^2=4x,\quad x^2=4y.$

64. $y^2=2x+1,\quad y=x-1.$

65. $y=9-x^2,\quad y=0.$

66. $y^2-4y=5-x,\quad x=0.$

67. $y=2x-x^2,\quad y=-x.$

68. $y^2=9x,\quad x^2=9y.$

69. $xy=2,\quad x+2y=5.$

70. $y=-x^2,\quad y=2e^x,\quad x=0,\quad x=1.$

71. $y=e^x,\quad y=0,\quad x=2.$

72. $y=x^3,\quad y=\sqrt{x}.$

73. $y=\dfrac{1}{x},\quad x=1,\quad x=2,\quad y=0.$

74. $y=\dfrac{1}{x^2},\quad y=0,\quad x=\dfrac{1}{2},\quad x=\dfrac{5}{2}.$

75. $y=\dfrac{4}{x^2},\quad x=1,\quad y=x-1.$

76. $y=\dfrac{5}{x},\quad y=6-x.$

77. $xy=3,\quad x+y=4.$

78. $y=\dfrac{6}{x},\quad y=5-x.$

79. $y=\dfrac{5}{x},\quad y=6-x,\quad x=6.$

80. $y=\dfrac{1}{x},\quad y=x,\quad x=2.$

81. $y=\dfrac{9}{x},\quad y=x,\quad x=9,\quad y=0.$

82. $y=2\sqrt{x},\quad x=0,\quad y-6=0.$

83. $y=x^2,\quad y=\sqrt[3]{x}.$

84. $y=x^2,\quad y=0,\quad x=4,\quad y=\dfrac{x^2}{x-2}.$

85. $y=\dfrac{-x^2+3x-1}{x}$, $x=1$, $x=2$ и осью Ox.

86. $y=e^{-x}$, $x=0$, $y=0$, $x=3$.

87. $y=2^x$, $y=2$, $x=0$.

88. $y=2^{x-3}+1$, $y=2^{3-x}+1$, $y=\dfrac{3}{2}$.

89. $y=|\log_2 x|$, $y=0$, $x=\dfrac{1}{2}$, $x=2$.

90. $y=\ln x$, $x=e$, $y=0$.

91. $y=1-e^x$, $x=2$, $y=0$.

92. $y=1-e^x$, $y=1-e^2$, $x=0$.

93. $y=e^x$, $x=-1$, $x=0$.

94. $y^2=4-x$, $x=0$.

95. $x^2+y^2=4$, $y=2x-x^2 (x\geq 0, y\geq 0)$, $x=0$.

96. $y+x=3$, $x^2+y^2=9$.

97. $x+y=3$, $x=\sqrt{9-y^2}$.

98. $y=\cos x$, $y=1+\dfrac{2}{\pi}x$, $x=\dfrac{\pi}{2}$.

99. $y=\sin x$, $y=0$, $0\leq x\leq \pi$.

100. $y=\sin 2x$, $y=1$, $x=0 (x\geq 0)$.

101. $y=\sin 6x$, $x=0$, $x=\pi$ и осью Ox.

102. $y=\cos x$, $y=0$, $x=\dfrac{3\pi}{4}$, $x=\dfrac{\pi}{4}$.

103. $y=2-|2-x|$, $y=\dfrac{3}{x}$.

104. $y=\dfrac{|4-x^2|}{4}$, $y=7-|x|$.

105. $x=12\cos t+5\sin t$, $y=5\cos t-12\sin t$.

106. Одной аркой циклоиды $x=3(t-\sin t)$, $y=3(1-\cos t)$ и осью Ox $(0\leq t\leq 2\pi)$.

107. $x = 3\cos t, \quad y = 2\sin t$ (эллипс).

108. $y = 2x^2 - 8x$ касательной к этой параболе в ее вершине и осью ординат.

109. $y^2 = -x - 16$ и касательными к этой параболе, проведенными из начала координат.

110. $y = x^2 + 4x + 9$ и касательными к ней, проведенными в точках с абсциссами $x_1 = -3$ и $x_2 = 0$.

111. $y = 1 + 4x - x^2$ и касательными к ней, проведенными в точках с точках с абсциссами $x_1 = 0$ и $x_2 = 3$.

112. $xy=3$ и прямой, проходящей через точки (1;4), (0,5;6)

113. $y = x^2 + 10$ и касательными к этой параболе, проведенными из точки (0;1).

114. $y = 2x^2$, осью Ox и касательной к кривой $y = 2x^2$ в точке $(x_0; y_0)$, где $x_0 = 2$.

115. $y = x^2 - x + 2$ и касательной к кривой $y = \ln x + 3$ в точке с абсциссой $x = 1$.

116. $y = e^{3x}$, $x = 3$ и прямой являющейся касательной к линии $y = e^{3x}$ в точке с абсциссой $x = 0$.

117. $y = \cos x \left(0 \le x \le \frac{\pi}{2} \right)$, $y = 0$, $x = 0$ и прямой являющейся касательной к линии $y = \cos x$ в точке $x = \frac{\pi}{4}$

118. К эллипсу проведена касательная в точке. Найти площадь криволинейного треугольника ABC, где – вершина эллипса, а B – точка пересечения касательной с осью Ox.

119. $y = x^2$ и нормалью к ней, проведенной через точку параболы с абсциссой $x = 1$.

120. $y = 2x^2$ и нормалью к ней в точке (2;2).

121. Найти площадь криволинейного четырехугольника, ограниченного дугами эллипсов

122. Круг $x^2 + y^2 \leq 75$ разделен гиперболой $\frac{x^2}{12} - \frac{y^2}{100} = 1$ на три части.

Найти площадь средней части.

2.1.2. Вычисление объема тела вращения

Объем тела, образованного вращением криволинейной трапеции, ограниченной кривой $y=(x)$, осью Ox и прямыми $x=a$, $x=b$, вокруг оси Ox (рис.12), находится по формуле $V=\pi\int_a^b y^2dx=\pi\int_a^b f^2(x)dx$.

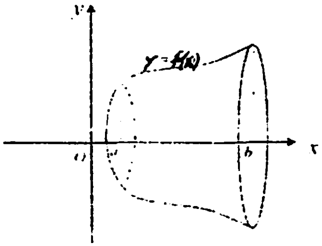


Рис. 12

Если вокруг оси Ox вращается фигура, ограниченная кривыми $y=f_1(x)$, $y=(x)$, $(0\le f_1(x)\le f_2(x), x\in[a,b])$ и прямыми x=a, x=b, то объем тела вращения вычисляется по формуле $V=\pi\int_a^b\left(f_2^2(x)-f_1^2(x)\right)dx$.

Объем тела, образованного вращением вокруг оси Oy криволинейной трапеции, ограниченной кривой $x=g(y)$, осью Oy и прямыми $y=c$, $y=d$ (рис.13), определяется по формуле $V=\pi\int_c^d x^2dy=\pi\int_c^d g^2(y)dy$.

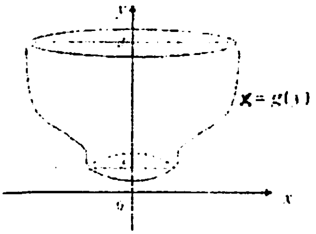


Рис.13

Если фигура ограничена кривыми $x=g_1(y)$, $x=g_2(y)$, $(0\le g_1(y)\le g_2(y)$, $y\in[c,d])$ и прямыми $y=c$, $y=d$, то объем тела, полученный при вращении этой фигуры вокруг оси Oy, можно найти по формуле $V=\pi\int_c^d\left(g_2^2(y)-g_1^2(y)\right)dy$.

Пример 1. Найти объем тела, образованного при вращении вокруг оси Ox фигуры, ограниченной линиями $xy=9$, $y=0$, $x=3$, $x=6$ (рис.14).

Решение. Находим

$$V=\pi\int_3^6\left(\frac{9}{x}\right)^2dx=81\pi\int_3^6 x^{-2}dx=\frac{-81\pi}{x}\bigg|_3^6=81\pi\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{3}\right)=\frac{27}{2}\pi.$$

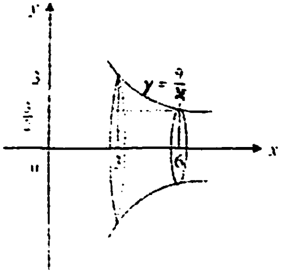


Рис. 14

Пример 2. Найти объем тела, образованного при вращении вокруг оси Ox фигуры, ограниченной линиями $4y=x^2$, $x+4y-12=0$ (рис.15).

Решение. Найдем точки пересечения кривых. Для этого решим систему уравнений $\begin{cases}4y=x^2,\\4y+x-12=0,\end{cases}$ $\begin{cases}y=\dfrac{x^2}{4},\\x^2+x-12=0,\end{cases}$ $\begin{cases}y=\dfrac{x^2}{4},\\x_1=-4, x_2=3.\end{cases}$

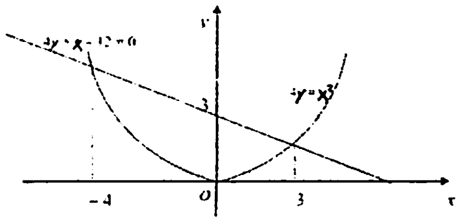


Рис.15

Следовательно,

$$V=\pi\int_{-4}^{3}\left(\left(3-\frac{x}{4}\right)^2-\left(\frac{x^2}{4}\right)^2\right)dx=\pi\int_{-4}^{3}\left(9-\frac{3}{2}x+\frac{x^2}{16}-\frac{x^4}{16}\right)dx=$$

$$=\pi\left(9x-\frac{3}{2}x^2+\frac{1}{48}x^3-\frac{1}{80}x^5\right)\bigg|_{-4}^{3}=\pi\left(27-\frac{27}{4}+\frac{9}{16}-\frac{243}{80}+36+12+\frac{4}{3}+\frac{64}{5}\right)=54\frac{37}{120}\pi.$$

Пример 3. Найти объем тела, образованного вращением вокруг оси Oy фигуры, ограниченной линиями $xy=5$, $y=1$, $y=5$ и осью Oy (рис. 16).

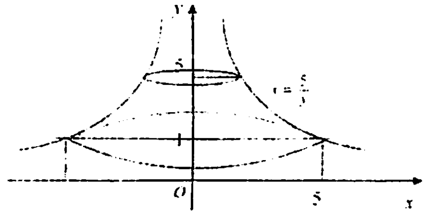


Рис.16

Решение.

Искомый объем

$$V=\pi\int_1^5\left(\frac{5}{y}\right)^2dy=25\pi\int_1^5 y^{-2}dy=\frac{-25\pi}{y}\bigg|_1^5=-25\pi\left(\frac{1}{5}-1\right)=20\pi.$$

Пример 4. Найти объем тела, образованного вращением вокруг оси $y=\arccos\dfrac{x}{6}$, $y=\arccos\dfrac{x}{2}$, $y=0$ (рис. 17).

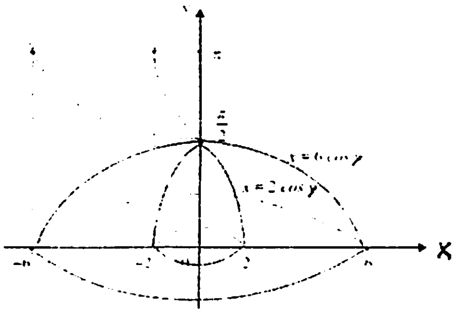


Рис17.

Решение.

Так как $y=\arccos\dfrac{x}{6}$, то $|x|\le 6$ и $x=6\cos y$; $y\in[0;\pi]$, при $x=0$ $y=\dfrac{\pi}{2}$.

Аналогично для $y=\arccos\dfrac{x}{2}$, $|x|\le 2$, $x=2\cos y$; $y\in[0;\pi]$.

Значит,

$$V=\pi\int_0^{\pi/2}\left((6\cos y)^2-(2\cos y)^2\right)dy=32\pi\int_0^{\pi/2}\cos^2 y\,dy=16\pi\int_0^{\pi/2}(1+\cos 2y)dy=8\pi^2$$

В задачах 1-51 найти объем тела, образованного при вращении вокруг оси Ox фигуры ограниченной данной кривыми.

1. $y^2=6x, y=0, x=3$ 2. $4xy=25, y=0, x=\frac{5}{2}, x=5$ 3. $y^2=x, x^2=y$

4. $x^2=4y, x^3=8y$ 5. $y=\frac{1}{x}, y=x, y=0, x=2$ 6. $y=2x^2, 8y=(x-2)^2, y=0$

7. $y^2=2x, y=2, x=0$ 8. $y=\frac{x^2}{8}+1, x-y+7=0$ 9. $2y^2=x^3, x=4$

10. $xy=4, x=1, x=4, y=0$ 11. $x=(y-1)^2, x=0, y=2$ 12. $x=y^2, x=1, y=0$

13. $xy=-2, x=1, x=2, y=0$ 14. $y^2=(x+4)^3, x=0$ 15. $y=4x-x^2, y=x$

16. $y=x^3, x=2, x=2, y=0$ 17. $y=-x^2+5x-6, y=0$

18. $y=4x-2x^2, y=2x-x^2$ 19. $y=x^3+2, x=1,, y=1$

20. $y=2x-x^2, x+y-2=0, x=0$ 21. $x^2=1-y, x=0, x=\sqrt{y-2}, x=1$

22. $y=x^3, y\sqrt{x}$ 23. $y=x^2, y=1, x=2$ 24. $y=2x-x^2, y=-x+2$

25. $y=\frac{64}{x^2+16}, x^2=8y$ 26. $(2y-5)^2=10x, x=0, y=5$

27. $y=2x^2, y=2-\log_2 x, x=0, y=0$ 28. $y=\sqrt{xe^x}, x=1, y=0$

29. $y=xe^x, x=1, y=0$ 30. $y=\sin 2x, 0\le x\le \pi/2, y=0$

31. $y=\sin x, x=\frac{\pi}{2}, y=0$ 32. $y=3\sin x, y=\sin x, 0\le x\le \pi$

33. $y=\cos x, y=\sin x, y=0, 0\le x\le \pi/2$ 34. $y=5\cos x, y=\cos x, 0\le x\le \pi/2$

35. $y=\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right), y=x^2$ 36. $y=\frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}\right), x=\pm a, y=0$

37. $y^2+x^4=x^2$ 38. $x^2-y^2=a^2, y=2a(a>0)$ 39. $y^2=2ax, x=a$

40. $xy=a^2, y=0, x=a, x=2a$ 41. $y^2=2px, y=0, x=a$

42. $2py=x^2, 2py=(x-a)^2, y=0$ 43. $(y-a)^2=ax, x=0, y=2a$

44. $x^2-y^2=a^2, x=\pm 2a$ 45. $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1, x^2-\frac{y^2}{15}=1 (x\ge 0)$

46. $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{25}=1, \frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{9}=-1$ 47. $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1, x=a+h$

48. $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=-1, |x|=h$ 49. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

50. $(x-R)^2+(y-R)^2=R^2, x=0, y=0 (x\le R, y\le R)$ 51. $x=a\cos t, y=b\sin t$

В задачах 1-34 найти объем тела, образованного при вращении вокруг оси Ox фигуры, ограниченной данными кривыми.

1. $y=2x-x^2, y=0$ 2. $y^2=4x, y=x$ 3. $y^2=4-x, x=0$

4. $y=x^2, 8x=y^2$ 5. $x=y^2, x=1, y=0$ 6. $y=x^3, x=2, y=0$

7. $xy=4, x=1, x=2$ и осью Ox **8.** $y^3=4x^2, y=2$ **9.** $y=x^3, x=0, y=8$

10. $xy=4, y=0, x=3, x=7$ **11.** $8y=3(x-1)^2, 8y=3$ **12.** $y^2=(x+4)^3, x=0$

13. $y=x\sqrt{-x}, x=-4, y=0$ **14.** $x^2-y^2=4, y=\pm 2$

15. $3y=9-x^2, x+y-3=0$ **16.** $4y=4-x^2, 2y=3\sqrt{4-x^2}$

17. $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{2}, x=0, y=0$ **18.** $y=\arccos\frac{x}{5}, y=\arccos\frac{x}{3}, y=0$

19. $x^2+y^2=6$ **20.** $x^2+y^4=y^2$ **21.** $x^{2/3}+y^{2/3}=a^{2/3}$

22. $y=\arcsin x, y=\pm\frac{\pi}{2}, x=0$ **23.** $\frac{x^2}{5}+\frac{y^2}{4}=1$ **24.** $y=\arcsin x, y=0, x=1$

25. $y=\sin x, 0\le x\le\frac{\pi}{2}, y=1, x=0$ **26.** $y=\cos x, 0\le x\le 2\pi, y=1$

27. $y=e^x+6, y=e^{2x}, x=0$ **28.** $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{a}, x=0, y=0$

29. $xy=k^2, y=0, x=a, x=b (0<a<b)$ **30.** $2py=(x-a)^2, 2py=a^2$

31. $y=a-\frac{x^2}{a}, x+y=a$ **32.** $x^2+y^2=a^2$

33. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ **34.** $x=a(t-\sin t), y=a(1-\cos t)$

35. Плоскость, перпендикулярная к оси параболоида вращения, отсекает от него сегмент, радиус основания которого r и высота h. Найти объем сегмента.

36. Определите объем бочки, высота которой равна h, диаметр каждого из оснований – d, диаметр среднего сечения – D. Осевые сечения боковой поверхности являются параболами с вершинами на окружности среднего сечения.

2.1.3. Вычисление длины дуги кривой

Если дуга кривой задана уравнением $y=f(x)(a\le x\le b)$ и функция $f(t)$ имеет непрерывную производную в промежутке $[a;b]$, то длина дуги кривой, содержащейся между двумя точками с абсциссами $x=a, x=b$, вычисляется по формуле $l=\int_a^b\sqrt{1+(f'(x))^2}dx=\int_a^b\sqrt{1+y'^2}dx$.

Если кривая уравнением $x=g(y)$ в промежутке $[c;d]$ и функция $x=g(y)$ имеет непрерывную производную в этом промежутке, то длина дуги кривой определяется по формуле $l=\int\limits_c^d\sqrt{1+(g'(y))^2}dy=\int\limits_c^d\sqrt{1+y'^2}dy.$

Пример 1. Найти длину дуги линии $y=\ln\frac{1}{\sin x}$ от $x=\frac{\pi}{3}$ до $x=\frac{2\pi}{3}$.

Решение. Поскольку $y=\ln\frac{1}{\sin x}, y'=-ctgx,$ то

$$l=\int\limits_{\pi/3}^{2\pi/3}\sqrt{1+\frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}}dx=\int\limits_{\pi/3}^{2\pi/3}\frac{dx}{\sin x}=\int\limits_{\pi/3}^{2\pi/3}\frac{\sin x dx}{\sin^2 x}=\int\limits_{\pi/3}^{2\pi/3}\frac{d(\cos x)}{\cos^2 x-1}=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\cos x-1}{\cos x+1}\right|\Bigg|_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}}=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\ln 3-\ln\frac{1}{3}\right)=\ln 3\approx 1{,}0986.$$

Пример 2. Вычислить длину дуги параболы $y^2=8x$ от вершины до точки *A (8; 8).*

Решение. Из уравнения параболы $x=\frac{y^2}{8}, x'=\frac{y}{4}$ и у изменяется от 0 до 8, следовательно,

$$l=\int\limits_0^8\sqrt{1+\frac{y^2}{16}}dy=\frac{1}{4}\int\limits_0^8\sqrt{16+y^2}dy=\left[u=\sqrt{16+y^2}, dv=dy, du=\frac{ydy}{\sqrt{16+y^2}}, v=y\right]=$$

$$=\frac{y}{4}\sqrt{16+y^2}\Big|_0^8-\frac{1}{4}\int\limits_0^8\frac{y^2}{\sqrt{16+y^2}}dy=8\sqrt{5}-\frac{1}{4}\int\limits_0^8\frac{(16+y^2)}{\sqrt{16+y^2}}dy+4\int\limits_0^8\frac{dy}{\sqrt{y^2+16}}=$$

$$=8\sqrt{5}-\frac{1}{4}\int\limits_0^8\sqrt{16+y^2}dy+4\ln\left|y+\sqrt{16+y^2}\right|\Big|_0^8=8\sqrt{5}-\frac{1}{4}\int\limits_0^8\sqrt{16+y^2}dy+4\ln(2+\sqrt{5}).$$

Мы получили уравнение, относительно $\int\limits_0^8\sqrt{16+y^2}dy$, из которого найдем,

что $\int\limits_0^8\sqrt{16+y^2}dy=16\sqrt{5}+8\ln(2+\sqrt{5})$ и, значит,

$$l=\frac{1}{4}\int\limits_0^8\sqrt{16+y^2}dy=4\sqrt{5}+2\ln(2+\sqrt{5}).$$

$x=(t^2-2)\sin t+2t\cos t,$

Пример 3. Найти длину дуги линии $y=(2-t)\cos t+2t\sin t(0\le t\le\pi).$

Решение. Найдем $x'(t)=8\cos t-6\sin t, y'(t)=6\cos t+8\sin t,$

$$\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2}=\sqrt{64\cos^2 t-96\sin t\cos t+36\sin^2 t+36\cos^2 t+96\sin t\cos t+64\sin^2 t}=$$

$$=\sqrt{100}=10.$$

Следовательно, $l=\int\limits_0^{\pi/2}\sqrt{(x'(t))^2+(y''(t))^2}dt=10\int\limits_0^{\pi/2}dt=10t\Big|_0^{\pi/2}=5\pi.$

Задачи на тему: Вычисление длины дуги кривой. В задачах 1-45 найти длину дуги кривой.

1. $x^2+y^2=a^2$.

2. $y=\frac{x^2}{4}(0\le x\le 2)$.

3. $y=4-x^2$ между точками пересечения её с осью Ox.

4. $y=4-\frac{x^2}{2}(y\ge 0)$.

5. $x=y^2(0\le x\le 1)$.

6. $y^2=x^3$ от начала координат до точки $(5;5\sqrt{5})$.

7. $y^2=4x$ от вершины до точки $(1;2)$.

8. $y=2x^{3/2}(0\le x\le 11)$.

9. $y=\frac{4}{5}x^{5/4}(0\le x\le 9)$.

10. $y=\sqrt{2x-x^2}-1(\frac{1}{4}\le x\le 1)$.

11. $y=\frac{x}{4}\sqrt{2-x^2}(0\le x\le 1)$.

12. $x=\frac{2}{3}\sqrt{(y-1)^3}(0\le x\le 2\sqrt{3})$.

13. $y^2=x^2$ от точки (0;0)до точки (4;8)

14. $2y=x^2-4(-2\le x\le 2)$.

15. $y=\frac{2}{3}x\sqrt{x}(0\le x\le 3)$.

16. $y=\frac{1}{2}x^2(0\le x\le 1)$.

17. $y=\frac{2}{3}\sqrt{(y-1)^3}(0\le x\le 2\sqrt{3})$.

18. $y^2=x^3$ от точки (0;0) до точки(4;8)

19. $2y=x^2-4(-2\le x\le 2)$.

20. $y=\frac{2}{3}x\sqrt{x}(0\le x\le 3)$.

21. $y=\frac{1}{2}x^2(0\le x\le 1)$.

22. $y^2=x^3$, отсекаемой прямой $x=5$

23. $y=2\sqrt{x}(0\le x\le 1)$.

24. $x=\frac{2}{3}y^{3/2}(0\le y\le 3)$.

25. $2y=x^2-3$ отсеченной осью Ox.

26. $y^2=(x+1)^3$ отсеченной прямой $x=4$.

27. $9y^2=x(x-3)^2$ между точками пересечения с осью Ox.

28. $y=\frac{x^2}{2}-\frac{\ln x}{4}(1\le x\le 3)$.

29. $y=\ln x(2\sqrt{2}\le x\le 2\sqrt{6})$.

30. $y=e^x(0\le x\le \ln 7)$.

31. $y=\ln(1-x^2)$ от начала координат до точки $(\frac{1}{2};\ln\frac{3}{4})$.

32. $x=\ln\cos y(0\le y\le \frac{\pi}{3})$.

33. $y=\ln\sin x(\frac{\pi}{3}\le x\le \frac{2\pi}{3})$.

34. $y=\arcsin e^x(-\ln 7\le x\le -\ln 2)$.

35. $y=\arcsin e^{-x}(0\le x\le 1)$.

36. $y=\ln(2\cos x)$ между смежными точками пересечения с осями координат$(Oy;Ox)$.

37. $y=\sqrt{x-x^2}-\arccos\sqrt{1-x}\left(\frac{11}{36}\le x\le\frac{15}{16}\right).$ 38. $y=\sqrt{1-x^2}+\arcsin x\left(0\le x\le\frac{9}{16}\right).$

39. $x=R(\cos t+t\sin t), y=R(\sin t-t\cos t)(0\le t\le \pi).$

40. Одной арки циклоиды $x=a(t-\sin t), y=a(1-\cos t).$

41. $x=a\cos^3 t, y=a\sin^3 t$ *(астроида).* 42. $x^{2/3}+y^{2/3}=a^{2/3}$ *(астроида).*

43. $x=a\cos t, y=a\sin t.$ 44. $y=\frac{a}{2}(e^{x/a}+e^{-x/a})(0\le x\le a).$

45.Доказать, что длина эллипса $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b).$ равна длине синусоиды $v=\sqrt{a^2-b^2}\sin\left(\frac{x}{b}\right)(0\le x\le 2\pi b).$

2.2. Приложения определенного интеграла в решении физических и экономических задач.

Если непрерывная функция $f(t)$ характеризует производительность труда рабочего в зависимости от времени t, то объем продукции, произведенной рабочим за промежуток времени от t_1 до t_2, выражается формулой $V=\int_{t1}^{t2} f(t)dt.$

Если в функции Кобба-Дугласа затраты труда считать линейно зависимыми от времени, а затраты капитала неизменными, то объем продукции V за T лет равен $V=\int_0^T(\alpha t+\beta)e^{\gamma t}dt.$

Если проценты по вкладу начисляются непрерывно и их характеризует функция $y=f(t)$, а удельная норма процента равна i, то дисконтированный доход K за время T составляет $K=\int_0^T f(t)e^{-it}dt.$

Скорость оттока рабочей силы в момент времени T можно определить при помощи уравнения восстановления $L(t)=f(t)+\int_{t0}^T f(t)L(T-t)dt,$

Где $f(t)$- доля тех, кто был вначале (при $t=t_0$) и покинул предприятие в настоящий момент, при $t=T; L(T-t)$ -скорость оттока людей, пришедших кому-то 141 на смену; $f(t)L(T-t)$ - полная скорость оттока заместителей, покидающих предприятие в настоящий момент.

Общую сумму S текущих издержек обращения и капиталовложений, сводимых к текущим затратам, можно определить по формуле $S=\int_0^{+\infty} f(t)dt$

Если материальная точка движется прямолинейно со скоростью $v=v(t)$ то пройденный ею за промежуток времени от t_1 до t_2 путь $S=\int_{t1}^{t2} v(t)dt$.

Пример 5.1. Найти среднее значение издержек $K(x)=3x^2+4x+2$, выраженных в денежных единицах, если объем продукции х меняется от 0 до 3 единиц. Указать объем продукции, при котором издержки принимают среднее значение.

Решение. Согласно теореме о среднем значении, $f(\xi)=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$ называется средним значением функции на отрезке $[a;b]$.

В нашем случае

$$f(\xi)=\frac{1}{3}\int_0^3(3ч^2+4x+2)dx=\frac{1}{3}(x^3+2x^2+2x)\Big|_0^3=\frac{1}{3}(27+18+6)=17(ден.ед.),$$

т.е. среднее значение издержек равно 17. Определим, при каком объеме издержки принимают это значение. Для этого решим уравнение $3x^2+4x+2=17 \Leftrightarrow 3x^2+4x-15=0$

Так как объем продукции не может быть отрицательной величиной, то $\xi=x=\frac{5}{3}(ед.продукции)$.

Пример 5.2. Найти объем продукции, произведенной рабочим за третий час рабочего времени, если производительность труда описывается функцией $f(t)=3t^2-2t+1$.

Решение. $V=\int_2^3(3t^2-2t+1)dt=(t^3-t^2+t)\Big|_2^3=15$

Пример 5.3. Определить скорость оттока рабочей силы, если $t_0=0;\ T=5;\ f(t)=0{,}24;\ f(t)L(T-t)=e^{-t/2}(5-t)$.

Решение. Так как $L(t)=f(t)+\int_{t0}^{T} f(t)L(T-t)dt$, то

$$L(t)=0{,}24)+\int_0^{5T} e^{-t/2}(5-t)dt=\left[u=5-t, dv=e^{-t/2}dt, du=-dt, v=\int_0^5 e^{-t/2}dt=-2e^{-t/2}\right]=$$

$$=0{,}24-2e^{-t/2}(5-t)\Big|_0^5-2\int_0^5 e^{-t/2}dt=0{,}24+10+4e^{-t/2}\Big|_0^5=6.\backslash 24+4e^{-5/2}\approx 6{,}547$$

Пример 5.4. Определить общую сумму текущих затрат, если функция, характеризующая текущие издержки обращения и капиталовложения, имеет вид $f(t)=\dfrac{10}{t^2+2t+5}$

Решение. $S=\int\limits_0^{+\infty}\dfrac{10}{t^2+2t+5}=\lim\limits_{a\to+\infty}\int\limits_0^a\dfrac{10}{(t+1)^2+2^2}dt=10\lim\limits_{a\to+\infty}\dfrac{1}{2}arctg\dfrac{t+1}{2}\Big|_0^a=$

$=5\lim\limits_{a\to+\infty}(arctg\dfrac{a+1}{2}-arctg\dfrac{1}{2})=5(\dfrac{\pi}{2}-arctg\dfrac{1}{2})\approx 5(1,57-0,46)\approx 5,55.$

Пример 5.5. Скорость движения точки $v=\dfrac{1}{2}t^3 м/с$. Найти путь S, пройденный точкой за время T = 5 с. после начала движения. Чему равна средняя скорость движения за этот промежуток?

Решение. $S=\int\limits_0^5\dfrac{1}{2}t^3dt=\dfrac{1}{8}t^4\Big|_0^5=78{,}125 м,\quad v_{ср.}=\dfrac{S}{T}=\dfrac{78{,}125}{5}=15{,}625 м/с.$

Задачи на тему: Приложения определенного интеграла n в решении физических и экономических задач.

В задачах 1-8 найти среднее значение издержек *K(x)*, выраженных в денежных единицах, если объем продукции x изменяется от x_1до x_2. Указать объем продукции, при котором издержки принимают среднее значение.

1. $K(x)=2x^2+3x+1,\ x_1=0,\ x_2=4.$
2. $K(x)=6x^2+4x+1,\ x_1=0,\ x_2=5.$
3. $K(x)=e^x+2,\ x_1=0,\ x_2=4.$
4. $K(x)=2x^2+3x+4,\ x_1=2,\ x_2=5.$
5. $K(x)=2^{x+1}+4,\ x_1=1,\ x_2=5.$
6. $K(x)=3x^2+4x+1,\ x_1=1,\ x_2=4.$
7. $K(x)=3^x+1,\ x_1=0,\ x_2=3.$
8. $K(x)=6x^2+2x+1,\ x_1=1,\ x_2=3.$

В задачах 1-6 найти объем произведенной продукции за указанные промежутки времени, если производительность труда описывается заданной функцией времени.

1. $f(t)=\dfrac{t^2+3t}{(t+1)(t^2+1)}$ за первый час работы.
2. $f(t)=32+28t-9t^2$ за первый половину восьмичасового рабочего дня.
3. $f(t)=\dfrac{3}{3t+2}+5$ за пятый час работы.
4. $f(t)=\dfrac{3}{4t+5}+4$ за третий час работы.

5. $f(t)=-0{,}00625t^2+0{,}05t+0{,}5$ за восьмичасовой рабочий день.

6. $f(t)=32+4t-3t^2$ за третий четвертый часы работы.

В задачах 1-10 найти объем произведенной продукции, если задана функция Кобба-Дугласа $g(t)$ и указан временной промежуток.

1. $g(t)=(14+t)e^t$ за три года.
2. $g(t)=(10+t)e^{5t}$ за один год.
3. $g(t)=(25+t)e^{10t}$ за пять лет.
4. $g(t)=(3+t)e^{2t}$ за два год.

5. Определить дисконтированный доход K, если:

а) процентная ставка – 8%, первоначальные вложения – 10млн. р., прирост – 1 млн р. ежегодно. Сток – 3 годы:

б) процентная ставка – 7%, первоначальные вложения – 10млн. р., прирост – 1 млн р. ежегодно. Сток – 6 годы:

с) процентная ставка – 2%, первоначальные вложения – 3млн. р., прирост – млн р. ежегодно. Сток – 10 лет.

6.Определить скорость оттока рабочей силы, если:

а) $f(t)L(T-t)=\dfrac{t}{\sqrt{t^2+1}}$; $f(t)=0{,}29$; $t_0=0$; $T=3$;

б) $f(t)L(T-t)=\sin t\cos t$; $f(t)=0{,}21$; $t_0=0$; $T=6$;

в) $f(t)L(T-t)=\dfrac{e^t}{\sqrt{e^t+1}}$; $f(t)=0{,}26$; $t_0=0$; $T=4$;

г) $f(t)L(T-t)=3t+2\sqrt{t}$; $f(t)=0{,}75$; $t_0=0$; $T=16$;

7. Найти общую сумму текущих затрат, если функция, характеризующая текущие издержки обращения и капиталовложения, имеет вид:

а) $f(t)=\dfrac{t}{t^2+1}$; б) $f(t)=\dfrac{1}{t^2+t+1}$; в) $f(t)=\dfrac{4}{(t+1)\sqrt{t+1}}$;

а) $f(t)=e^{-2t}$; б) $f(t)=\dfrac{5}{(t+4)^3}$; в) $f(t)=3e^{-4t}$;

8.Скорость движения тела задана формулой $v=\sqrt{1+2t}$ м/с. Найти путь, пройденный телом за первые 10с. после начала движения.

9.Скорость точки $v=0{,}1t^3$ м/с. Найти путь S, пройденный точкой за промежуток времени *T=10c.*, протекший от начала движения. Чему равна средняя скорость движения за этот промежуток?

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Д.Письменный "Конспект лекций по высшей математике. Полный курс", Айрис-пресс, 2005
2. Пискунов Н.С. "Дифференциальное и интегральное исчисление для ВТУЗов" -М.: Наука, в 2х частях, 2001.
3. Claudio Canuto, Anita Tabacco "Mathematical Analysis", Italy, Springer, I-part, 2008, II-part, 2010.
4. Бугров Я.С., Никольский С.М. Дифференциальные уравнения. Кратные интегралы. Рады. Функции комплексного переменного. - Наука, 1997.

Дополнительная литература.

1. techliberary.ru
2. www.Ziyonet.uz
3. www.tuit.uz
4. www.Math.uz

Методические указания “Приложение определенного интеграла” для учащихся академических лицеев и профессиональных коллежей

Обсуждено на заседании кафедры «Высшая математика» от 22.03.2017г № 38.

Рассмотрено на заседании методического совета факультета Програмнный инжиниринг от 28.03.2017г № 8.

Рассмотрено на заседании методического совета ТУИТ от 20.04.2017г № 7(98).

Главный редактор **доц. Р.Р. Рахматов**

Составители **доц. Чай З.С.**
асс. Хаитметов А.А.

Корректор **Абдуллаева С. Х.**

Объем 60х80 1/16
Отпечатано. Тираж-20
Заказ-№137

Ташкентский университет информационных технологий
Центр печати «ALOQACHI»
г. Ташкент, ул. Амира Темура, 108.