УЗБЕКСКОЕ АГЕНТСТВО СВЯЗИ И ИНФОРМАТИЗАЦИИ
ТАШКЕНТСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ

Кафедра ТС и СК

ОСНОВЫ НАУЧНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

Методическое пособие для магистрантов специальности

5А522202 – Сети, узлы связи и распределение информации

Ташкент 2008

Введение

Методическое пособие к практическим занятиям по дисциплине “Основы научных исследований” для магистрантов направления образования по специальности 5A522202 “Сети узлы связи и распределение информации”. Пособие посвящается одной из составных частей научных исследований, проводимых в ходе выполнения магистерских диссертационных работах. В этой части работ магистранты приводят цифровые материалы, получаемые в ходе эксперимента. Основой эксперимента является научно поставленный опыт по испытанию того или иного параметра в точно учитываемых и управляемых условиях.

Магистрант кафедры ТС и СК чаще всего проводят исследования в системах массового обслуживания и проводят обработку результатов эксперимента, опираясь на теорию случайных ошибок. Поэтому им необходимо овладеть методом оценки случайных погрешностей в измерениях.

Анализ случайных погрешностей основывается на теории случайных ошибок дающей возможность с определенной гарантией вычислить действительное значение измеренной величины и оценить возможность ошибки.

Основу теории случайных ошибок составляет предположение о том, что при большом числе измерений случайные погрешности одинаковой величины, но разного знака встречаются реже, чем малые (вероятность появления погрешности уменьшается с ростом величины). При большом числе измерений (генеральная совокупность) истинное значение измеренной величины равно среднеквадратичному значению всех результатов измерений, а появление того или иного результата измерений как случайного события описывается нормальным законом распределения.

Из-за ограниченности ресурсов времени магистранты чаще всего прибегают при экспериментальных исследованиях к выборочной совокупности измерений. Для выборочной совокупности число измерений n ограничено. Обычно считают что если $n > 30$, то среднее значение данной совокупности измерений $\bar{X}$ достаточно близко приближается к его истинному значению с определенной вероятностью.

Данное пособие к практическим занятиям направленно на оценку полученных числовых значений испытываемых процессов при ограниченном числе опытов.

Ключевые слова дисциплины "Основы научных исследований"

Знание. Практика. Мышление. Понятие. Суждение. Гипотеза. Научная идея. Теория. Аксиома. Синтез. Анализ. Индукция. Дедукция. Исследование операций. Линейное программирование. Динамическое программирование. Марковский случайный процесс. Формула Литтла. Система массового обслуживания. Обработка данных экспериментальных исследований. Доверительный интервал. Доверительная вероятность. Коэффициент вариации. Функция Лапласа. Метод Стьюдента. Коэффициент Стьюдента. Критерий Кохрена. Критерий Фишера. Критерий Пирсона. Метод средних квадратов. Регрессионный анализ. Статистическое моделирование. Метод Монте-Карло. Теория поиска. Число Фибоначчи.

Практическое занятие №1
"Изучение результатов экспериментальных исследований".

Содержание практического занятия.

Изучение и анализ случайных погрешностей на основе теории случайных ошибок, приемов с определенной гарантией вычисления действительных значений измеряемой величины и оценка возможных ошибок.

Задание к практическому занятию.

При подготовки к практическому занятию следует изучить:

1) Теорию больших чисел, генеральную и выборочную совокупность;
2) Теорию случайных ошибок;
3) Определение интервальной оценки с помощью доверительной вероятности.

Техническое обеспечение проведения практического занятия.

Для выполнения и усвоения материала практического занятия должны быть:

1) Таблица П.1 интегральной функции Лапласа;
2) Таблица П.2 функции Стьюдента.

Порядок проведения практического занятия.

Практическое занятие рекомендуется проводить в следующей последовательности:

1. Изучить методическое указание к данной работе;
2. Характеристики распределения случайных величин: среднюю, дисперсию, коэффициент вариации.
3. Определение доверительной вероятности измеряемой величины;
4. Решить примеры, если заданы статистический ряд измерений (задание преподавателя);
5. Ответить на контрольные вопросы.

Содержание отчета.

В отчет привести резюме по выполненной работе.

Контрольные вопросы.

1. Назовите основные типы совокупности и дать определение.
2. Как определить точность измерений с использованием интегральной функции Лапласа.

“Изучение результатов экспериментальных исследований”.

1. Основы теории случайных ошибок и методов оценки случайных погрешностей в измерениях.

Анализ случайных погрешностей основывается на теории случайных ошибок, дающей возможность с определенной гарантией вычислить действительное значение измеренной величины и оценить возможные ошибки. Основу теории случайных ошибок составляют предположения о том,

- что при большом числе измерений случайные погрешности одинаковой величины, но разного знака встречаются одинаково часто;
- что большие погрешности встречаются реже, чем малые;
- что при большом числе измерений истинное значение измеряемой величины равно среднеарифметическому значению всех результатов измерений;
- что появление того или иного результата измерения как случайного события описывается нормальным законом распределения.

Различают **генеральную и выборочную** совокупность измерений.

- Генеральная совокупность – это все множество значений измерений X_i.
- Выборочная совокупность – ограниченное число изменений n. Обычно считают, что если $n > 30$, то среднее значение данной совокупности измерений $\bar{X}$ достаточно близко приближается к его истинному значению (бросание монет).

Теория случайных ошибок позволяет оценить точность и надежность измерения при данном количестве замеров, гарантирующее заданную (требуемую) точность и надежность измерений.

2. Интервальная оценка с помощью доверительной вероятности.

Для нормального закона распределения общей оценкой является дисперсия D и коэффициент вариации $K_в$

$$F(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}},$$

где $m=M[x]$; $D[x]=\sigma^2$; σ - среднеквадратическое отклонение.

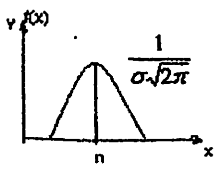

Рисунок 1.

Для большой выборки и нормального закона распределения общей оценочной характеристикой является дисперсия D и коэффициент вариации $К_в$.

$$D=\sigma^2=\sum_{u}^{n}(x_i-\bar{x})^2/(n-1); \qquad (1)$$

$$К_в=\frac{\sigma}{\bar{x}}.$$

Доверительная вероятность (достоверность) измерения – это вероятность того, что истинное значение измеряемой величины попадает в данный доверительный интервал, т.е. в зону $a \le x_д \le b$. Эта величина определяется в долях единицы или процентах. Доверительная вероятность определяется:

$$P_д=P\,[a \le x_д \le b]=\frac{1}{2}\left[\varphi(b-\bar{x})/\gamma-\varphi-(a-\bar{x})/\gamma\right] \qquad (2),$$

где $\varphi(t)$ – интегральная функция Лапласа

$$\varphi(t)=\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{t_i} e^{-t^2/2}dt \qquad (3),$$

где $t=\mu/\sigma$ - гарантийный коэффициент

$$\mu=b-\bar{x};\ \mu=-(a-\bar{x}) \qquad (4),$$

Если в качестве $P_д$=0,95, то устанавливается точность измерений (достоверный интервал 2μ) на основе соотношения $P_д=\varphi(\mu/\sigma)$. Тогда половина доверительного интервала равна:

$$\mu=\sigma\arg\varphi(P_д)=\sigma t \qquad (5),$$

где $\arg\varphi(P_д)$ – аргумент функции Лапласа, а при n<3 – функции Стьюдента (табл. П.2).

Доверительный интервал характеризует точность измерения данной величины данной выборки. Доверительная вероятность – достоверность измерения.

Пример 1.

Пусть выполнено 30 измерений нагрузки E=170 Эрл и вычисленном значении σ=3,1 Эрл, $D=\sigma^2$=9.

Требуемую точность измерений можно определить для разных уровней доверительной вероятности ($P_д$=0,9;0,95;0,99), приняв значения t по таблице интегральной функции Лапласа. В этом случае соответственно

$\mu=\pm 3{,}1*1{,}65=5{,}1$ (Эрл); $\mu=\pm 3{,}1*2{,}0=6{,}2$ (Эрл); $\mu=\pm 3{,}1*3{,}0=9{,}3$ (Эрл).

Следовательно, для данного средства и метода доверительный интервал возрастает примерно в 2 раза, если увеличить $P_д$ только на 10%.

Доверительный интервал. Таблица 1

t	1,65	1,70	1,75	1,80	1,85	1,90	1,95	2,00	2,25	2,50	3,0
$P_д$	0,90	0,91	0,92	0,93	0,94	0,94	0,945	0,995	0,97	0,98	0,99

Практическое занятие №2
"Определение достоверности измерений".

Содержание практического занятия.

Изучение приема определения доверительной вероятности $P_д$ если известны доверительный интервал μ.

Задание к практическому занятию.

При подготовки к практическому занятию следует изучить следующие вопросы:

1) Определение доверительных интервалов;
2) Определение доверительной вероятности;
3) Изучить приемы определения гарантийного коэффициента.

Техническое обеспечение проведения практического занятия.

Для выполнения и усвоения материала практического занятия должны быть:

1) Таблицы П.1 интегральной функции Лапласа;
2) Таблицы П.2 коэффициенты Стьюдента.

Порядок проведения практического занятия.

Практическое занятие рекомендуется проводить в следующей последовательности:

1) Изучить методическое указание к данной работе;
2) Решить задачи по определению количества измерений в опыте;
3) Определить σ и D, если известны статистический ряд измерения телефонной нагрузки.

Содержание отчета.

В отчет привести анализ решения задачи по определению количества измерений при заданной доверительной вероятности.

Контрольные вопросы:

1) Что характеризуют коэффициенты: σ, D, $K_п$, $\bar{r}$, t, μ;
2) Как связаны коэффициенты μ, σ, D и $P_д$ между ними.

"Определение достоверности измерений".

1. Определение достоверности измерения.

Для установления доверительного интервала μ=7 Эрл по формуле (4) $t=\mu/\sigma$=7/3.1=2,26. По таблице П.1 для t=2,26 определяем $P_д$=0,97. Это означает, что в заданный доверительный интервал из 100 измерений не попадает только 3.

Значение $(1-P_д)$ называется уровнем значимости. Из него следует, что при нормальном законе распределения погрешность, превышающая доверительный интервал, будет встречаться один раз из $n_и$ измерений:

$$n_и = P_д / (1 - P_д) \tag{6}$$

2. Определение количества измерений в опыте.

По формуле (6) при $P_д$=0,9; $n_и$= 0,9 / (1- 0,9)=9 (измерений);

При $P_д$=0,95 и 0,99 – соответственно 19 и 367 измерений.

3. Определение минимального количества измерений.

Задача сводится к установлению минимального объема выборки (числа измерений) N_{min} при заданных значениях доверительного интервала 2μ и доверительной достоверности. При выполнении измерений необходимо знать их точность

$$\Delta = \sigma_0 / \bar{x} \tag{7}$$

где σ_0 - среднеарифметическое значение σ и равно

$$\sigma_0 = \sigma / \sqrt{n} \tag{8}$$

σ_0 называют средней ошибкой. Доверительный интервал ошибки измерения Δ определяется как

$$\mu = t\sigma_0 \tag{9}$$

Тогда доверительная вероятность ошибки измерения определяется по таблице П.1. Если требуется определить минимальное количество измерений, гарантирующих требуемые значения Δ и $P_д$, то их можно определить по формулам

$$\mu = \sigma / \sqrt{n}\, t \tag{10}$$

При N_{min}=n получаем:

$$Nmin = \sigma^2 t^2 / \sigma_0^2 = K_u^2 t^2 / \Delta^2 \tag{11}$$

где K_u - коэффициент вариации (изменчивости), % ;

Δ - точность измерения, %.

Для определения N_{min} применяется следующий порядок вычисления

1. Определяют $n=20 \div 50$.
2. Определяют среднеквадратическое отклонение по формуле:

$$D = \sigma^2 = \sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2/(n-1)$$

3. Устанавливается требуемая точность измерений Δ.
4. Устанавливается нормированное отклонение t (задается).
5. По формуле (11) определяют N_{min}.

Пример. Пусть N_{min}=25 измерений, Δ= 0,1 Эрл, предварительно вычисленное значение σ=0,4 Эрл. Гарантийный коэффициент:

$$t = \sqrt{n}\frac{\Delta}{\sigma}$$

$$t = \sqrt{25}\frac{0{,}1}{0{,}4} = \frac{5*0{,}1}{0{,}4} = 1{,}25.$$

По таблице П.1 находим при t=1,25 $P_д$ = 0,79. Погрешность, превышающая доверительный интервал 2μ=0,2 Эрл согласно формуле (6) будет встречаться один раз из 4-ех измерений:

$n_u = P_д / (1 - P_д) = 0{,}79/(1-0{,}79) = 3{,}37 \approx 4$

Это недопустимо. В связи с этим необходимо вычислить минимальное количество измерений с доверительной вероятностью $P_д$, равной $P_д$=0,9 и $P_д$=0,95. По формуле (11)

$N_{min} = 0{,}4^2 * 1{,}65^2/0{,}1^2 = 43$ измерения,

и 64 измерения при $P_д$=0,95, что значительно превышает установленные 25 измерений.

4. Кривые распределения Стьюдента.

Метод Стьюдента для нахождения границы доверительного интервала. Метод применяется при малых значениях n<30.

Для малой выборки доверительный интервал определяется:

$$\mu_{ст} = \sigma_0 \alpha_{ст} \tag{12}$$

$\alpha_{ст}$ - коэффициент Стьюдента - табулирован в зависимости от значений доверительной вероятности $P_д$, принимается по табл.2.

Коэффициент Стьюдента Таблица 2

n	$P_д$					
	0,80	0,90	0,95	0,99	0,995	0,999
2	3,080	6,31	12,71	63,70	127,30	637,20
4	1,638	2,35	3,188	5,84	7,50	12,94
8	1,415	1,90	2,36	3,50	4,03	5,40
10	1,383	1,83	2,26	3,25	3,69	4,78
12	1,368	1,80	2,20	3,11	3,50	4,49
14	1,35	1,77	2,16	3,01	3,37	4,22
18	1,33	1.74	2,11	2,90	3,22	3,96
20	1,32	1,73	2,09	2,86	3,17	3,88
30	1,31	1,70	2,04	2,75	3,15	3,65

Зная $\mu_{ст}$ можно вычислить действительное значение изучаемой величины для малой выборки.

$$x_д= \bar{x} \pm \mu_{ст} \quad (13).$$

Можно и по-иному решать задачу. По n известным измерениям малой выборки необходимо определить доверительную вероятность $P_д$ при условии, что погрешность среднего значения не выйдет за пределы $\pm \mu_{ст}$.

Задача решается последовательно:

1) вычисляется $\bar{x}$ - среднее значение;
2) $\sigma_0=\sigma / \sqrt{n}$;
3) $\alpha_{ст}=\mu_{ст}/\sigma_0$;
4) с помощью величин $\alpha_{ст}$, известного n и табл.2 определяют $P_д$.

Пример.

1) $\bar{x}= 74,83$; n=18;
2) σ=6,58;
3) σ_0=6,58 * $\sqrt{18}$= 6,58 * 4,2=27,9;

Для $P_д$=0,9 $\mu_{ст}= \sigma_0\alpha_{ст}$=27,9 * 1,74=48,5; t= μ/σ =48,5/6,5=7,46;
Для $P_д$=0,8 $\mu_{ст}= \sigma_0\alpha_{ст}$=27,9 * 1,33=37,10; t= μ/σ =37,1/6,5=5,7;
Для $P_д$=0,95 $\mu_{ст}= \sigma_0\alpha_{ст}$=27,9 * 2,11=58,8; t= μ/σ =58,8/6,5=9,0;
Для $P_д$=0,99 $\mu_{ст}= \sigma_0\alpha_{ст}$=27,9 * 2,9=80,91; t= μ/σ =80,91/6,5=12,4.

Половина доверительного интервала равна $\mu=\sigma$ t, т.о.

1) μ=6,58 * 5,7=37,5; 2) μ=6,58 * 7,46=49.

Практическое занятие №3
"Исключение грубых ошибок ряда"

Содержание практического занятия

Изучение вопроса определения минимального количества измерений при выборочной совокупности при заданной точности измерения - Δ

Задание к практическому занятию.

При подготовки к занятию необходимо изучить вопросы:

1) Определение минимально объема выборки, при заданном значениях доверительного интервала 2μ;
2) Изучить формулы определения точности измерения Δ и таблицу доверительной вероятности ошибок измерения.

Техническое обеспечение проведения практического занятия.

1) Таблица П.1 доверительного интервала для $P_д$;
2) Таблица П.2 коэффициента Стьюдента.

Порядок проведения практического занятия.

Практическое занятие рекомендуется проводить в следующей последовательности:

1) Изучить приемы использования формул $\Delta=\sigma_0/\bar{x}$, $\sigma_0=\sigma/\sqrt{n}$, $\mu=t\sigma_0$, $N\min=\sigma^2t^2/\sigma_0^2=K_u^2t^2/\Delta^2$;
2) Решить примеры (по заданию преподавателя) при заданных n=30-50 и определить N_{min}.

Содержание отчета.

В отчет привести пример решения задачи, если задано n=30-50 и определение погрешности, превышающей доверительный интервал 2μ.

Контрольные вопросы.

1) Дайте характеристику кривых распределения Стьюдента;
2) Найдите, используя таблицу коэффициента Стьюдента, действительное значение изучаемой величины для малой выборки $x_д=\bar{x}\pm\mu_{ст}$.

Исключение грубых ошибок ряда.

В процессе обработки экспериментальных данных следует исключить грубые ошибки ряда. Наиболее простой способ исключения ошибок является правило 3-х сигм: разброс случайных величин от среднего значения не должно превышать

$$x_{max,min} = \bar{x} \pm 3\sigma \qquad (13')$$

Наиболее достоверными методами считаются методы, базируемые на использовании доверительного интервала. При малых выборках критерии их поведения вычисляются по формулам:

$$\beta_1 = (x_{max} - \bar{x}) / \sigma\sqrt{(n-1)/n} \ ;$$
$$\beta_2 = (\bar{x} - x_{min}) / \sigma\sqrt{(n-1)/n} \ ; \qquad (14),$$

где x_{max} и x_{min} – наибольшее и наименьшее значения из n измерений. В таблице 3 в зависимости от доверительной вероятности приведены максимальные значения β_{max}, возникающие вследствие статистического разброса. Если $\beta_1 > \beta_{max}$, то значение x_{max} необходимо исключить из статистического ряда как грубую погрешность. При $\beta_1 > \beta_{max}$ - исключить величину x_{min}.

Критерии появления грубых ошибок Таблица П.3

n	β_{max} при $P_д$			n	β_{max} при $P_д$		
	0,90	0,95	0,99		0,90	0,95	0,99
3	1,41	1,41	1,41	18	2,40	2,58	2,90
6	1,89	2,00	2,13	20	2,45	2,62	2,96
9	2,10	2,24	2,46	25	2,54	2,72	3,07
10	2,15	2,29	2,54	30	2,61	2,79	3,16
14	2,30	2,46	2,76	40	2,72	2,90	3,28

Приближенная оценка доверительного интервала $\mu_{ст}$ и действительное значение измеряемой величины $x_д$.

Для этого:

1) по формуле (1) найти $D = \sigma^2$;
2) по формуле (7) найти $x_i - \bar{x}$;
3) принять доверительную вероятность $P_д$;
4) найти доверительный интервал $\mu_{ст}$ по формуле (12);
5) окончательно установить величину $x_д$ по формуле (13).

Определение границ доверительных интервалов.

В этом случае границы доверительного интервала определяют по формуле:

$$\mu_{ст} = \sqrt{\sigma_0^2 \alpha_{см} + [\frac{\alpha_{см}}{3}]^2} \qquad (15)$$

Пример. Имеется 18 измерений. Проведем их обработку по таблице 4.

Результаты измерений и их отработка

Таблица 4

x_i	$x_i - \bar{x}$	$x_i - \bar{x}'$	$(x_i - \bar{x}')^2$	x_i	$x_i - \bar{x}$	$x_i - \bar{x}'$	$(x_i - \bar{x}')^2$
67	-8	-7,83	64	75	0	0,17	0
67	-8	-7,83	64	76	1	1,17	1
68	-7	-6,83	49	77	2	2,17	4
68	-7	-6,83	49	78	3	3,17	9
69	-6	-5,83	36	79	4	4,17	16
70	-5	-4,83	25	80	5	5,17	25
71	-4	-3,83	16	81	6	6,17	36
73	-2	-1,83	4	82	7	7,17	49
74	-1	-0,83	1	92	17	17,27	289

Если анализ средств и результатов измерений показал, что систематических ошибок не обнаружено, то можно вычислить, не содержат ли измерений грубых ошибок. При этом можно применить формулу

$$\bar{x} = \bar{x}' + (x_i - \bar{x}')/n \qquad (16),$$

где $\bar{x}'$ - среднее произвольное число.

Так для вычисления $\bar{x}$ принимаем (исходя из таблицы результатов измерений) $\bar{x}'$=75. Тогда

$\bar{x}$= 75-3/18=74,83 , а

$$(x - x_i)^2 = \sum(x_i - \bar{x}) - \frac{(x_i - \bar{x}')^2}{n} = 737 - 3^2/18 = 736{,}5 \ ,$$

и по формуле (1)

$$\sigma = 736{,}5/(18-1) = 6{,}58 \text{ и}$$

$$К_в = 6{,}58/74{,}83 * 100\ \% = 8{,}8\ \%$$

Следовательно, по формуле (14)

$$\beta_1 = (92 - 74{,}83)/6{,}58\sqrt{\frac{18-1}{18}} = 2{,}68$$

Для определения грубых ошибок при измерении можно пользоваться таблицей 3. Критерий появления грубых ошибок для $P_д$ =0,99 по таблице П.3

n	β_{max} при $P_д$		
	0,90	0,95	0,99
15	2,33	2,49	2,80
16	2,35	2,52	2,84
17	2,38	2,55	2,87
18	2,40	2,58	2,90
19	2,43	2,60	2,93
20	2,45	2,62	2,93

β_{max}=2,90. Поскольку 2,68< β_{max}, измерение 92 не является грубым промахом. Если $P_д$ =0,95, β_{max}=2,58, то значение 92 следует исключить 2,68>2,58. Если применить правило 3-х сигм, то $x_{max,min}$=74,83±3*6,58=94,6 и 55,09 , т.е. измерение 92 следует оставить.

В случае, когда измерение 92 исключается, то среди 17 измерений находят $\bar{x}$=73,8 σ=5,15. Среднеквадратическое отклонение для всей серии измерений при n=18 $\sigma_0 = 6{,}58/\sqrt{18} = 1{,}55$; при n=17 $\sigma_0 = 5{,}15/\sqrt{17} = 1{,}25$. Поскольку n<30, то ряд относится к малой выборке и доверительный интервал вычисляется с применением коэффициента Стьюдента $\alpha_{ст}$. По таблице П.2 принимается $P_д$=0,95 и тогда $\alpha_{ст}$=2,11 при n=18; $\alpha_{ст}$=2,12 при n=17.

Доверительный интервал при n=18 $\mu_{ст}$=± 1,55 * 2,11=3,2;

при n=17 $\mu_{ст}$=± 1,25 * 2,12=2,7.

Действительное значение изучаемой величины

при n=18 $x_д$=74,8±3,2=71,6÷78,0;

при n=17 $x_д$=73,8±2,7=71,1÷76,5.

Относительная погрешность результатов серий измерений: $\delta = \frac{\mu_{ст}}{\bar{x}} * 100\%$

при n=18 δ=(3,2*100)/74,8=4,3%;

при n=17 δ=(2,7*100)/73,8=3,7%.

Т.о., если принять x_i=92 за грубый промах, то погрешность измерения уменьшается с 4,3% до 3,7%.

Практическое занятие №4.
"Определение минимального количества измерений при их заданной точности".

Содержание практического занятия.

Изучения вопроса определения минимального количества измерений при их заданной точности.

Задание к практическому занятию.

Изучить вопросы определения границ доверительных интервалов. Привести приближенную оценку доверительного интервала $\mu_{ст.}$ и значение измеряемой величины $x_д$

Техническое обеспечение проведения практического занятия

1) Таблица доверительного интервала для $P_д$;
2) Таблица П.2 коэффициента Стьюдента.

Порядок проведения практического занятия.

Практическое занятие рекомендуется проводить в следующей последовательности:

1) Определить коэффициенты $D=\sigma^2$;
2) Прием нахождения $\bar{x}$;
3) Принять доверительную вероятность $P_д$
4) Определить доверительный интервал $\mu_{ст}$;
5) Окончательно установить величину $x_д$

Содержание отчета.

В отчете приветсти пример решения задачи по определению минимального количества измерений при их заданной точности.

Контрольные вопросы.

1) Определите границы доверительных интервалов для статистического ряда n=18 (x_i - данные согласовать с преподавателем)

Определение минимального количества измерений при их заданной точности.

Для этого определяют по серии опытов σ, и по формуле

$$N_{min} = \sigma^2 t^2/\sigma_0^2 = K_u^2 t^2/\Delta^2$$

В рассматриваемом случае σ=6,58; $K_в$=8,91%. Если задана точность $\Delta=5\%$ и 3% при доверительной вероятности $P_д$=0,95 $\alpha_{ст}$=2,11. Следовательно:

$$\text{при } \Delta=5\% \quad N_{min}=(8{,}91^2 * 2{,}11^2)/5^2=14;$$
$$\text{при } \Delta=3\% \quad N_{min}=(8{,}91^2 * 2{,}11^2)/3^2=40.$$

Так что, требование повышения точности измерения приводит к значительному увеличению повторяемости опыта. q=n-1

О достоверности данных, полученных в опытах.

Пусть средняя нагрузка по ГТС $Y_1=\bar{Y}_1\pm\sigma_1=20\pm0{,}5$ Эрл., а после измерения $Y_2=\bar{Y}_2\pm\sigma_2=23\pm0{,}6$ Эрл. Прирост нагрузки составляет 15%. Это увеличение относительно небольшое, его можно отнести за счет разброса опытных данных. В этом случае следует провести проверку на достоверность экспериментальных данных по условию $\frac{\bar{x}}{\sigma_1}\geq3$.

В нашем случае проверяется разница $\bar{x}=|Y_1-Y_2|=3$ Эрл.

Ошибка измерения равна $\sigma_0=\sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2}$,

поэтому $(Y_1-Y_2)/\sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2}$ =3,0/$\sqrt{0{,}25+0{,}36}=3{,}84>3$.

Следовательно, полученный прирост нагрузки является достоверным.

Практическое занятие №5
"Повторяемость опытов в определенных пределах измерений с заданной доверительной вероятностью".

Содержание практического занятия.

Если имеются данные нескольких опытов (серии), то вычислив дисперсию D_i можно определить воспроизводимость опытов.

Задание к практическому занятию.

Изучить вопросы воспроизводимости опытов, с помощью критерия Кохрена.

Техническое обеспечение проведения практического занятия

1) Таблица П.4 критерии Кохрена $K_{кт}$;
2) Таблица П.2 коэффициента Стьюдента;
3) Таблица П.1 интегральной функции Лапласа.

Порядок проведения практического занятия.

Практическое занятие рекомендуется проводить в следующей последовательности:

1) Определить $K_{кт}=\max D_i/\sum_{1}^{n} D_i$ для каждой серии опытов;
2) Определить зависимости доверительного интервала от доверительной вероятности прит заданных σ;
3) Определить достоверности измерения для доверительного интервала μ.

Содержание отчета.

В отчете приветсти пример решения задачи.

Контрольные вопросы.

1) Укажите метод определения грубых ошибок ряда измерений.
2) Укажите приближенную оценку доверительного интервала $\mu_{ст.}$ и действительное значение измерений величины $x_д$

"Повторяемость опытов в определенных пределах измерений с заданной доверительной вероятностью"

Суть проверки сводится к следующему. Имеется несколько опытов (серий). Для каждой серии вычисляют среднеарифметическое значение $\bar{x}_i$ (n – число измерений в одной серии, принимаемое от 3 до 5). Затем вычисляют дисперсию D_i. Чтобы оценить воспроизводимость, рассчитывают критерий Кохрена (расчетный)

$$K_{кр}=\max D_i / \sum_{1}^{m} D_i \qquad (16)$$

где $\max D_i$ - наибольшее значение дисперсий из числа рассматриваемых параллельных серий m;

$\sum_{1}^{m} D_i$ - сумма дисперсий m серий. Число опытов $m=3 \div 5$.

Опыты считаются воспроизводимыми при

$$K_{кр} \le K_{кт} \qquad (17)$$

где $K_{кт}$ - табличное значение критерия Кохрена.

Критерии Кохрена $K_{кт}$ при $P_д=0,95$ Таблица 5

m	q=n-1								
	2	3	4	5	6	8	10	16	36
2	0,97	0,97	0,90	0,87	0,85	0,81	0,78	0,73	0,66
3	0,93	0,79	0,74	0,70	0,76	0,63	0,60	0,54	0,47
4	0,76	0,68	0,62	0,59	0,56	0,51	0,48	0,43	0,36

Принимается табличное значение в зависимости от $P_д$ и числа степеней свободы q=n-1. Здесь m – число серий опытов; n – число измерений в серии.
Пример. Проведено 3 серии опытов по измерению тлф. нагрузки. Результаты измерений показаны в таблице 6.

Результаты измерений тлф. нагрузки и их обработка Таблица 6

Серии опытов	Измерение величин и повторяемости					Вычисление	
	1	2	3	4	5	$\bar{x}_i$	D_i
1	7	9	6	8	4	6,8	2,96
2	9	7	8	6	5	7,0	2,0
3	8	8	7	9	8	8,0	0,4

В каждой серии выполнялось 5 измерений. Тогда по формуле (16)

$$K_{кр}=\frac{2,96}{2,96+2,0+0,4}=0,55$$

Вычисляем число степеней свободы $q=n-1=5-1=4$.

Так, для $m=3$ и $q=4$ согласно таблице значений критерий Кохрена $K_{кт}=0,74$. Так как $0,55<0,74$, то измерение нагрузки в эксперименте следует считать воспроизводимым. Если бы оказалось наоборот, т.е. $K_{кр}> K_{кт}$, то необходимо было бы увеличить число серий m или число измерений n.

Контрольные вопросы.

1. Определить зависимость доверительного интервала от доверительной вероятности $P_д$, если задана σ =3,1 Эрл. (По таблице). $\mu=\sigma t$.
2. Определить достоверность измерения для доверительного интервала $\mu=7$ (формула $\mu=\sigma t$), формула $n_н= P_д / (1- P_д)$.
3. Определить количество измерений в опыте по формуле $n_н= P_д / (1- P_д)$ при $P_д$=0,90;0,95;0,99.
4. Определить минимальное количество измерений N_{min}, если дано $\Delta=\sigma_0/\bar{x}$; $\sigma_0=\sigma/\sqrt{n}$; $\mu=t\sigma_0$; $\mu=\sigma/\sqrt{n}\,t$.
5. Нахождение границы доверительного интервала по Стьюденту (таблица) $\mu_{ст}=\sigma_0\alpha_{ст}$.
6. Методы исключения грубых ошибок ряда измерений. $x_{max,min}=\bar{x}\pm 3\sigma$.
7. Приближенная оценка доверительного интервала $\mu_{ст}$ и действительное значение измеряемой величины $x_д$.
8. Определение границ доверительных интервалов.
9. Определение минимального количества измерений при их заданной точности. $N_{min}=\sigma^2 t^2/\sigma_0^2 = K_u^2 t^2/\Delta^2$
10. Определение достоверности данных, полученных в опытах.
11. Показать повторяемость опытов, воспроизводимости опытов по системе Кохрена $K_{кр}\le K_{кт}$; $K_{кр}=\max D_i / \sum_1^m D_i$.

Практическое занятие №6
“Опытные критерии Фишера для определения ошибок аппроксимации опытных данных”.

Содержание практического занятия.

Изучение механизма установления адекватности - определения ошибки аппроксимации опытных данных. Для этого рассчитывают опытное значение критерии Фишера – $K_{фэ}$. И сравнить с теоретическим (табличным) $K_{фт}$ принимаемым при требуемой доверительной вероятности $P_д$.

Задание к практическому занятию.

При подготовке к практическому занятию изучить вопросы:

1) Ознакомиться с формулой вычисления опытных критериев Фишера;
2) Ознакомиться с таблицей критерии Фишера;
3) Изучить приемы вычисления дисперсии .

Техническое обеспечение проведения практического занятия

1) Таблица П.5 критерии Фишера ;
2) Таблица П.2 коэффициента Стьюдента;
3) Таблица П.6 Критерии Пирсона.

Порядок проведения практического занятия.

Практическое занятие рекомендуется проводить в следующей последовательности:

1) Определить опытные критерии Фишера $K_{фэ}$;
2) Определить дисперсию адекватности $Д_а$;
3) Определить среднюю дисперсию всего эксперимента $Д_{ср}$;
4) По таблице определить теоретическое значение критериев Фишера.

Содержание отчета.

В отчете привести расчеты по определению адекватности выборок методами критериев Фишера и Пирсона.

Контрольные вопросы.

1) Чем отличаются критерии Фишера от критериев Пирсона;
2) Как вычислить критерии согласия по Пирсону..

Опытные критерии Фишера для определения ошибки аппроксимации опытных данных

Критерия Фишера. Установления адекватности – это определение ошибки аппроксимации опытных данных. Для этого необходимо рассчитать экспериментальное (опытное) значение критерии Фишера – $К_{фэ}$ и сравнить с теоретическим с табличным – $К_{фт}$, принимаемым при требуемой доверительной вероятности $Р_д$ (обычно $Р_д$=0,95). Если $К_{фэ} < К_{фт}$ – модель адекватна; если $К_{фэ} \geq К_{фт}$ – модель не адекватна. Опытные критерии Фишёра вычисляют по формуле

$$К_{фэ}=Д_э/Д_{ср} \tag{1}$$

где $Д_э$ – дисперсия адекватности; $Д_{ср}$ – средняя дисперсия всего эксперимента, определяющаяся как

$$Д_э=\frac{\sum_1^n(У_{iт}-\overline{У_{iэ}})}{n-d} \tag{2}$$

$$Д_{ср}=\frac{\sum_1^m \sum_1^n(У_{iт}-\overline{У_{cэ}})^2}{nm} \tag{3}$$

где,

$У_{iт}$ – теоретическое значение функции для каждого измерения;

$У_{iэ}$ – экспериментальное значение функции;

$\overline{У}_{iэ}$ – среднее экспериментальное значение функции из m серий измерений;

n – количество измерений в одном опыте (одной серии или количество опытов)

d – число коэффициентов уравнения теоретической регрессии.

Значение $К_{эт}$ принимается по таблице для достоверной вероятности $Р_д$=0,95 и число степеней свободы q_1=n-d; q_2=n(m-1). В уравнении (2) $У_{iт}$ вычисляют по теоретической регрессии для фактора x_i; $\overline{У_{iэ}}$ - как среднее из m серий измерений т.е.

$$\overline{У_{iэ}}=\frac{1}{m}(У_{1э}+У_{2э}+....+У_{mэ}) \tag{4}$$

Критерий Фишера Таблица 8

q_1	Значении $К_{фт}$ при $Р_д$=0,95 для различных q_2									
	1	2	3	4	5	6	12	24	27	36
1	16	19	21	22	23	23	24	24	24	25
.										

.									
5	6.6	5.8	5.4	5.2	5.1	5.0	4.7	4.5	4.5	4.4
6	6.0	5.1	4.8	4.5	4.4	4.3	4.0	3.8	3.75	3.7
.									
.									

Результаты эксперименты и оценка адекватности его теоретического представления m=5, n=7

Таблица 9

№ Опытов	x_i	Измеренные значение $У_b$ в серии					Среднее значение $У_b = \sum_1^n У_b / m$	$У_b$	$У_{iT} - \bar{У}_b$	$(У_b - У_b)^2$	$\sum_1^m \frac{(У_b - У_b)^2}{m}$
		m_1 $У_{1э}$	m_2 $У_{2э}$	m_3 $У_{3э}$	m_4 $У_{4э}$	m_5 $У_{5э}$					
1	0,2	12	17	15	14	16	14,8	16	1,2	1,44	4,4
2	0,3	23	21	24	25	23	23,2	24	0,8	0,64	2,4
3	0,4	30	34	31	35	35	33,0	32	1,0	1,00	3,8
4	0,5	38	43	40	39	42	40,04	40	0,4	0,16	3,6
5	0,6	52	47	48	49	40	47,2	48	0,8	0,64	16,4
6	0,7	59	58	55	54	53	55,8	56	0,2	0,04	5,4
7	0,8	62	66	62	61	63	62,8	64	1,8	1,44	4,4
										$\sum$ 5,32	$\sum$ 40,4

Задача. Пусть получено теоретическое выражение У=80x и для его подтверждение проведен эксперимент.

В каждой из 5 серии (повторностей, m=5) выполнено по 7 измерений (n=7) результат эксперимента приведены в таблице 9. По этим данным можно установить пригодность, тех адекватностей теоретических выражений. С этой целью по формуле (2) определяется дисперсия адекватности

$$Д_а = 5,32/(7-1) = 0,89.$$

Здесь d=1, поскольку в выражении У=80x один значащий член x.

Дисперсия $Д_{ср}$ вначале вычисляется построчно для m строк Для первой строки

$Д_1 = \sum (У_{iT} - У_b)^2 / m = 1/5\,[(12-16)^2 + (17-16)^2 + (15-16)^2 + (14-16)^2] = 4,4.$

$Д_2 = \sum\ 1/5[(23-24)^2 + (21-24)^2 + (24-24)^2 + (25-24)^2 + (23-24)^2] = 2,4.$

Тогда средняя дисперсия всего эксперимента составит по формуле (16)

$Д_{ср} = \sum_1^n Д_i / n = 40,4/7 = 5,77.$

После этого по формуле (1) посчитается $К_{фэ} = 0,89/5,77 = 0,15.$

Теоретические значения критерии Фишера можно принять по данным таблицам 8. При следующих степенях свободы: q_1=7-1=6 и q_2=7(5-1)=27. $К_{фт}$=3,75. Так как $К_{фэ}$=0,15< $К_{фт}$=3,75. То модель адекватна, те полученная математическая модель с достоверной вероятности 95% хорошо описывает изучаемый процесс. Критерии Фишера принимается для определения адекватности малых выводов. Для больших выборок целесообразно принимать критерии Пирсона.

Упражнение

Проведено измерение телефонной нагрузки $У_{iT}$ в Эрл. На станции в течении часа через каждые 0,1часа.

Таблица 10

Номер опыта	x_i	Серия измерения					
		$У_{1э}$	$У_{2э}$	$У_{3э}$	$У_{4э}$	$У_{5э}$	
1.	0,0	0	0	0	0	0	
2.	0,2	11	10	9	12	8	
3.	0,3	18	19	20	21	22	
4.	0,4	45	40	38	30	25	
5.	0,5	40	45	50	55	60	
6.	0,6	50	55	60	65	70	
7.	0,7	55	60	65	70	75	
8.	0,8	80	70	60	90	85	

1. Подтвердить с помощью экспериментальных данных Таблица 10 теоретические выражение У=100x (1) на основе критерии Фишера.

Критерии Пирсона. В больших выборках целесообразно применить критерии Пирсона Критерии Фишера обычно применять для определения адекватности малых выборок. По критерии Пирсона гипотеза о законе распределения подтверждается, если соблюдается условие.

$$P(x^2,q)>\alpha= 1-\varphi(x) \tag{5}$$

Где α - уровень значимости, который равен 0,10; x – критерии согласия Пирсона; q – число степеней свободы, равен:

$$q=m-s \tag{6}$$

где m – количество серий измерений; s – const, s=2
тогда x^2 – вычисляется по формуле

$$x^2=\sum_1^m (У_{эi}-У_{Ti})^2/У_{Ti} \tag{7}$$

Значения критерии Пирсона

x^2	Значения критерия Пирсона $P(x^2,q)$ при числе степеней свободы q							
	1	2	3	4	5	6	7	8
1	0,317	0,606	0,801	0,909	0,962	0,985	0,994	0,998
2	0,157	0,367	0,572	0,735	0,849	0,919	0,959	0,981
2,56					0,774	0,806	0,885	0,934
3	0,083	0,223	0,391	0,557	0,700			

По данным эксперимента строится экспериментальные кривой частот $У_{эi}=f(x)$ и эту кривую аппроксимируется какой то теоретической кривой (закон Пуассона нормальным, показательным и т.д.)

Например. Пусть проведено испытание (измерение) и получен результат: 1, 23, 50, 82, 58, 28, 2 Эрл.

По характеру изменения нагрузку результаты похожи на нормальный закон распределения.

Тогда этот теоретический нормальный закон распределения имеет вид в этих же точках 1,27,57,80,57,27,1. Как показано на рисунке 1.

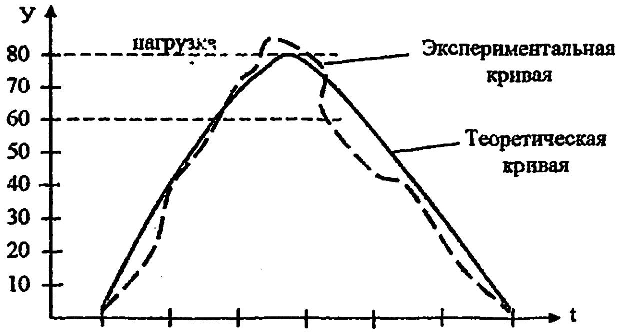

Рис. 1

По формуле (19) вычисляет критерий согласия

$$X_э^2=\frac{(1-1)^2}{1}+\frac{(23-27)^2}{27}+\frac{(50-57)^2}{57}+\frac{(82-80)^2}{80}+\frac{(58-57)^2}{57}+\frac{(28-27)^2}{27}+\frac{(2-1)^2}{1}=2{,}56$$

по количеству серии m=7. Константа нормального закона распределен s=2. Тогда q=7-2=5. По данным таблицы определяем $P(x^2,q)=P(2.56,5)=0{,}774$.

Это свидетельствует о том, что адекватность удовлетворяется, поскольку

0,774>0,10.

Практическое занятие №7
"Методы графической обработки результатов измерений"

Содержание практического занятия.

При обработки результатов измерений и наблюдений используются методы графической обработки изображений, которые позволяют лучше понять физическую сущность исследуемого процесса.

Задание к практическому занятию.

При подготовке к практическому занятию следует освоить:

1) Этапы процесса подбора эмпирических формул;
2) Метод выравнивания кривой, построенной по экспериментальным точкам, линейной функции;
3) Изучить графический метод выравнивания.

Техническое обеспечение проведения практического занятия

1) Таблица П.5 критерии Фишера;
2) Таблица П.6 критерии Пирсона.

Порядок проведения практического занятия.

Практическое занятие рекомендуется проводить в следующей последовательности:

1) Этап. Данные измерения наносить на сетку прямоугольных координат и соединить точки плавной кривой и выбрать один из видов формул;
2) Этап. Выбрать параметры (формы), которые наилучшим образом соответствовали бы принятой формуле;
3) Выбрать один из методов аппроксимации.

Содержание отчета.

В отчете привести пример подбора эмпирических формул. Решить задачу аппроксимации методом средних квадратов.

Контрольные вопросы.

1) Покажите приемы решения задачи выравнивания методом средних квадратов;
2) Графический метод выравнивания.

Методы графической обработки результатов измерений

При обработке результатов измерений и наблюдений используются методы графической обработки изображений, которые дают наглядные представления о результатах эксперимента, позволяет лучше понять физическую сущность исследуемого процесса, выявить общий характер функциональной зависимости изучаемых величин, установить наличие максимума или минимума функций.

Метод подбора формул.

В процессе эксперимента получается статистический ряд измерений двух величин, которые каждому значению функции y_1, y_2, y_3,…,y_n соответствует определенное значение аргумента x_1,x_2,…,x_n. На основе экспериментальных данных можно подобрать алгебраические выражения функции:

$$Y=f(x) \ldots$$

Y=f(x) - называются эмпирическими формулами.

Эмпирические формулы являются приближенным выражениями аналитических формул, и позволяют заменить точные аналитические выражений, приближенными.

1. Метод подбора эмпирических формул.

Процесс подбора эмпирических формул состоит из 2 этапов:

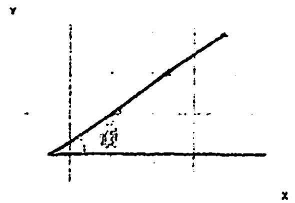

Рисунок 1.

1 этап: данные измерений, наносят на сетку, прямоугольных координат, соединяют точки плавной кривой и выбирают один вид формулы.

2 этап: вычисляют параметры формулы, которые наилучшим образом соответствовали бы принятой формуле.

Часто применяют метод выравнивания, заключающийся в том, что кривую, построенную по экспериментальным точкам, представляют линейной функцией. Для этого применяют метод выравнивании, заключающийся в том что кривую, построенную по точкам, представляют линейной функцией, как показано на рисунке 1.

Пример: Подобрать эмпирическую формулу следующих измерений, которые приведены в таблице 11. Подбор эмпирических формул необходимо начинать с самых простых выражений. Так, результаты измерений многих явлений аппроксимируются простейшими эмпирическими уравнениями в виде:

$$y=a+bx... \qquad (1)$$

Где a и b – коэффициенты.

При графическом определении коэффициентов a и b обязательно чтоб прямая (1) строилась на координатной сетке, у которой началом является точка $x=0$ и $y=0$, как показано на рисунке 2. Для расчета необходимо точки y_i и x_i принимать на крайних участках прямой. При решении задачи в уравнение (1) подставляют координаты двух крайних точек, взятых с графика рисунка 3. Получают систему двух уравнении, из которых вычисляют коэффициенты a и b. Для решения данного примера выбираем координаты крайних точек и подставляем в уравнение (1). Тогда получим систему уравнений:

$$y-x=\bar{y}+r^*(\frac{\delta y}{\delta x})^*(x-\bar{x}) \qquad (2)$$

Откуда b = 41.9/6 = 6.98; a=12.1 - 6.98 = 5.12. Таким образом, эмпирическая формула примет вид.

$$y=5.12+6.98x \qquad (3)$$

Таблица 11

Y	12,1	19,2	25,4	33,3	40,5	46,4	54,3
X	1	2	33	4	5	6	7

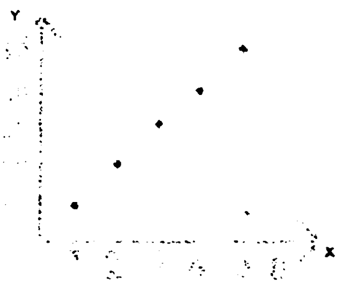

Рисунок 2

2. Графический метод выравнивания.

Пусть, необходимо подобрать эмпирическую формулу для следующих измерений.

Таблица 12

Y	15.2	20.6	27..4	36.7	44.2	66	87.4	117.5
X	1	1.5	2	2 5	3	3.5	4	4.

Если экспериментальный график имеет вид, показанный на рис.3, то необходимо использовать выражение вида:

$$y=ae^{bx} \tag{4}$$

После логарифмирования выражения (4) имеет вид:

$$lgy=lga+bxlge$$

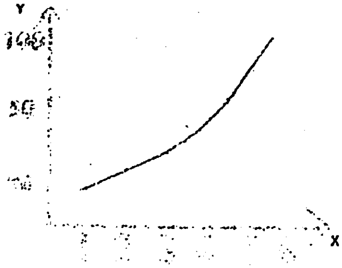

Рисунок 3

То есть в полулогарифмических координатах выражение для у представляет собой прямую линию, которая показана на рис.4

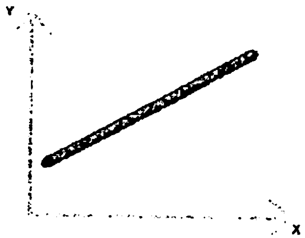

Рисунок 4

Решение:
подстановка в уравнение координатных точек даст:
$lg15.2=lga+blge$;
$lg117.5= lga+4.5*blge$, следовательно:
$lga+blge=1,183$; $lga+4.5blge=2,070$,
откуда:
B=0.887/(3.5lge)=0,579;
$lga=1,183-0,254=0.929$, a=1.85.
Окончательный вид эмпирической формулы:

$$y=1{,}85*e^{0{,}579x}... \quad (5)$$

3.Подпор эмпирических формул.

При подборе эмпирических формул широко используются полиномы.

$$Y=A_0+A_1x+A_2x^2+A_3x^3+\ldots A_nx^{n\ldots(n)}, \quad (6)$$

где A_0, $A_1\ldots$ A_n постоянные коэффициенты.

Полиномами можно аппроксимировать любые результаты измерений, если они графически выражаются непрерывными функциями. Для аппроксимации необходимо определить коэффициент А, для этого применяют метод **средних и наименьших квадратов**.

3.1 Метод средних квадратов основан на следующем положении. По экспериментальным точкам можно построить несколько плавных кривых. Наименьшей будет та кривая, у которой разностные отклонения оказываются наименьшими, т.е. $\sum E=0$. Порядок расчета коэффициентов полинома сводится следующему:

1. Определятся число членов ряда (6), число членов не более 3-4.
2. В принятое выражение последовательно подставляют координаты Х и У экспериментальных точек и получают систему из m уравнений.
3. Каждое уравнение приравнивается к соответствующему отклонению

$$\left.\begin{array}{l} A_0+A_1X_1+A_2X_1^2+A_3X_1^3+\ldots+A_nX_1^n-У_1=E_1 \\ A_0+A_1X_2+A_2X_2^2+A_3X_2^3+\ldots+A_nX_2^n-У_2=E_2 \\ A_0+A_1X_m+A_2X_m^2+A_3X_m^3+\ldots+A_nX_m^n-У_m=E_m \end{array}\right\} \quad (7)$$

Число точек, т.е. число уравнений, должно быть больше или равно числам коэффициентов А, что позволяет решить (вычислить) путём решения системы (7). Для примера пусть выполнено семь измерений, которые приведены в таблице 13

Таблица 13

X	4	5	6	7	8	9	10
У	10.2	6.7	4.8	3.6	2.7	2.1	1.7

Для подбора эмпирической формулы можно выбрать полином :

$$У=A_0+A_1x+A_2X^2 \quad (8)$$

Путём подстановки в это уравнение значений измерений определим систему начальных уравнений, их можно разделить на 3 группы 1…2; 3…4; 5…7; в виде:

$$\left.\begin{array}{l}1. A_0+4A_1+16A_2-10.2=E_1\\2. A_0+5A_1+25A_2-6.7=E_2\\3. A_0+6A_1+36A_2-4=E_3\\4. A_0+7A_1+49A_2-3.6=E_4\\5. A_0+8A_1+64A_2-2.7=E_5\\6. A_0+9A_1+81A_2-2.1=E_6\\7. A_0+10A_1+100A_2-1.7=E_7\end{array}\right\} \quad (9)$$

$$\left.\begin{array}{l}\text{1 группа } 2A_0+9A_1+41A_2=16.9\\\text{2 группа } 2A_0+13A_1+851A_2=8.4\\\text{3 группа } 3A_0+27A_1+24A_2=6.5\end{array}\right\} \quad (10)$$

Решение этой системы и нахождение А0 А1 и А2 дает возможность получить эмпирическую формулу:

$$У=126,168-5,22X+0,28X^2=26,17-5,22X-0,8X^2$$

3.2 Пример применения метода среднего квадрата.

Метод применяется также и для различных кривых после их выравнивания. Пусть, имеется 8 измерений

X	2	6	9	12	15	18	21	24
У	57.6	41.9	31.0	22.7	16.6	12.2	8.9	6.5

Анализ показывает, что эти данные позволяют применить формулу:

$$У=Ae^{-BX} \quad (11)$$

Проведём выравнивание путём замены переменных У=lgY, X=X/2,303, тогда, У=А+ВХ, где А=lga, B=b. Так как необходимо определить 2 параметра, то все измерения делятся на 2 группы по 4 измерения, это приведёт к следующим уравнениям:

$$\begin{array}{ll}1,7604 = A+3/2,303B & 1,2201 = A+15/2,303B\\1,6222 = A+6/2,303B & 1,0864 = A+18/2,303B\\1,4914 = A+9/2,303B & 0,9494 = A+21/2,303B\\\underline{1,3560 = A+12/2,303B} & \underline{0,8129 = A+24/2,303B}\\6,2366 = 4A+30/2,303B & 4,0688 = 4A+78/2,303B\end{array}$$

После суммирования по группам можно получить систему 2х уравнений с 2-мя переменными: А, В, решение которых даёт: А=1,8952; а=78,56; В=-0,1037; b=-0,1037. окончательно $У=78,56e^{-01036x}$

Практическое занятие №8
"Регрессионный анализ".

Содержание практического занятия.

Изучение механизма связей между переменными x и y, когда эта связь не в полнее определенная, при которой одному значению x соответствует несколько значений y. Суть анализа такой связи сводится к установлению тесных связей между ними.

Задание к практическому занятию.

При подготовке к практическому занятию следует изучить приемы составления уравнений 1-ого и 2-ого порядка между переменными x и y. Составление уравнения регрессии прямой.

Техническое обеспечение проведения практического занятия

1) Таблица П.5 критерии Фишера;
2) Таблица П.3 появления грубых ошибок;
3) Таблица П.4 критерии Кохрена $K_{кт}$;
4) Таблица П.6 критерии Пирсона.

Порядок проведения практического занятия.

Практическое занятие рекомендуется проводить в следующей последовательности:

1) Составления уравнения регрессионной прямой для заданного статистического ряда парных измерений x и y;
2) Оценить сходимость экспериментальной и теоретической регрессии;

Содержание отчета.

В отчете привести резюме выполненной работы.

Контрольные вопросы.

1) Что такое регрессионный анализ;
2) Как составляются уравнения регрессии;
3) Покажите метод решения уравнения регрессии.

Регрессионный анализ

Под регрессионным анализом понимают исследование закономерностей связей между процессами, которые зависят от многих факторов.

Часто между переменными X и У существует связь, но не вполне определённая, при которой одному значению X соответствует несколько значений У. В таких случаях связь называют регрессивной. Суть этого анализа сводится к установлению уравнения регрессии, т.е. виды кривой между случайными величинами (аргументом X и функцией У), оценки тесноты связей между ними, достоверность и адекватность – результаты измерений. Рис.1.

С помощью N-мерного пространства (уравнениями 2-го порядка можно установить связь между переменными X и У):

$$У=b_0+\sum^n_1 b_i x_i+\sum^n_1 b_i x_i x+\sum^n_1 b_{ii} x_i^2 \qquad (1)$$

Здесь:

У – это отклик многофакторных переменных; X_i – это независимые факторы, b_i – коэффициенты регрессии, характеризующие влияние фактора X_i на функцию У(цели). При соблюдении условия наименьших квадратов.

$\sum(У_i-ý)^2=min$, где $У_i$ – фактические координаты ý – среднее значение ординаты с абсциссой X, тогда поле коррекции аппроксимируется уравнением прямой У=A+BX. Линию регрессии рассчитывают из условий наименьших квадратов. При это кривая AB из рис 1 выравнивает значения постоянных коэффициентов A и B, т.е. коэффициентов уравнения регрессии. Их вычисляют по выражениям:

$$\left.\begin{aligned} &b=(n\sum x\, У-\sum x \sum У)/(n\sum x^2-(\sum x)^2)^2 \\ &a=y-bx=\sum У/n-b^*\sum x/n \end{aligned}\right\} , \qquad (2)$$

где n-число измерений.

Критерий близости коррекционной зависимости между x и y к линейной функциональной зависимости является коэффициент парной или просто коэффициент корреляции *r*, показывающий степень тесноты связи x и y и определяемый отношением:

$$r=\frac{n\sum x_i y_i-\sum x_i y_i}{\sqrt{n\sum x_i^2-(\sum x_i)^2][n\sum y_i^2-(\sum y_i)^2]}} , \qquad (3)$$

где n – число измерений.

Значение коэффициента измерений всегда меньше единицы, при r= 1.0 x и y связаны линейными функциональными зависимостями с каждому значению x соответствует одно значение y. Если r < 1, то линейной связи не существует. При r = 0 линейная, но может существовать нелинейная

Рисунок 5.

регрессия. Обычно считают тесноту удовлетворительной при $r \geq 0.5$; хорошей при r=0.8…0.85. Для определения процента разброса (изменчивости) искомой функции y от относительно ее среднего значения, определяемого изменчивостью фактора x, вычисляют коэффициент детерминации:

$$К_д = r^2 \ldots \qquad (4)$$

Уравнение регрессии прямой можно представить выражением:

$$y - x = \overline{y} + r*\left(\frac{\delta y}{\delta x}\right)*(x - \overline{x}) \qquad (5)$$

Пример:

Имеется статистический ряд парных измерений. Таблица 15

X	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y	8	11	14	16	21	26	27	32	34	41

Требуется определить:

1) уравнение прямолинейной регрессии;
2) определить степень достоверности;
3) оценить тесноту связей X и Y.

Расчет целесообразно вести в табличной форме

Исходя из расчетных данных таблицы 16 определяем

$\overline{x}$ = 55/10 = 5,5; $\overline{y}$ = 230/10 = 23; δy = 1054/10=105.4; δx=82.5/10=8.25.

$$r = \frac{10*1558 - 55*230}{\sqrt{(10*385 - 55^2)(10*6344 - 230^2)}}$$

$$b = \frac{10*1558 - 55*230}{10*385 - 55^2} = 3.55, \quad a = \frac{230}{10} - 3.55\frac{55}{10} = 3.48$$

Тогда уравнение регрессии имеет вид:

$$y = 3.48 + 3.55x \ldots \qquad (6)$$

Расчет уравнения регрессии. Таблица 16

y	x	x-x	y-y	$(x-x)^2$	$(y-y)^2$	X^2	Y^2	xy	(x-x)*(y-y)
8	1	-4.5	-15	20.25	225	1	64	8	67.6
11	2	-3.5	-12	12.25	144	4	121	22	42.9
14	3	-2.5	-9	6.25	81	9	196	42	22.5
16	4	-1.5	-7	2.25	49	16	256	64	10.5
21	5	-0.5	-2	0.25	4	25	441	105	1.0
26	6	0.5	3	0.25	9	36	676	156	1.5
27	7	1.5	4	2.25	16	49	729	189	6.0
32	8	2.5	9	6.25	81	64	1024	256	22.5
34	9	3.5	11	12.25	121	81	1156	306	31.5
41	10	4,5	18	20.25	324	100	1981	410	81.0
230	55	-	-	82,50	1054	385	6344	1558	286,0

В таблице 17 приведены сходимости экспериментальной и теоретической регрессии. Как видно из таблицы 17(расчетов) сходимость оказалась хорошей.

Коэффициент детерминации, вычисленной из формулы(4) составляет Кд=$0,99^2 = 0,98$, что означает что 98% разброса определяет изменчивость x и 2% другими причинами, т.е. изменчивость функции y почти характеризуется разбросом фактора x.

Сходимость экспериментальной и теоретической регрессии. Таблица 17

y	8	11	14	16	21	26	27	32	24	41
$y_э$	7.1	10.6	14.2	17.7	21.8	24.8	28.3	31.9	35.4	39.0

Приложение.

Таблица П.1
Интегральная функция Лапласа

t	Pд	t	Pд	t	Pд
0,00	0,0000	0,75	0,5467	1,50	0,8664
0,05	0,0399	0,80	0,5763	1,55	0,8789
0,10	0,0797	0,85	0,6047	1,60	0,8904
0,15	0,1192	0,90	0,6319	1,65	0,9011
0,20	0,1585	0,95	0,6579	1,70	0,9109
0,25	0,1974	1,00	0,6827	1,75	0,9199
0,30	0,2357	1,05	0,7063	1,80	0,9281
0,35	0,2737	1,10	0,7287	1,85	0,9357
0,40	0,3108	1,15	0,7419	1,90	0,9426
0,45	0,3473	1,20	0,7699	1,95	0,9488
0,50	0,3829	1,25	0,7887	2,00	0,9545
0,55	0,4177	1,30	0,7064	2,25	0,9756
0,60	0,4515	1,35	0,8230	2,50	0,9876
0,65	0,4843	1,40	0,8385	3,00	0,9973
0,70	0,5161	1,45	0,8529	4,00	0,9999

Таблиа П.2

Коэффициент Стъюдента $\alpha_{ст}$

n	рд					
	0,80	0,90	0,95	0,99	0,995	0,999
2	3,080	6,31	12,71	63,70	127,30	637,20
3	1,886	2,92	4,30	9,92	14,10	31,60
4	1,638	2,35	3,188	5,84	7,50	12,94
5	1,533	2,13	2,77	4,60	5,60	8,61
6	1,476	2,02	2,57	4,03	4,77	6,86
7	1,440	1,94	2,45	3,71	4,32	9,96
8	1,415	1,90	2,36	3,50	4,03	5,40
9	1,397	1,86	2,31	3,36	3,83	5,04
10	1,383	1,83	2,26	3,25	3,69	4,78
12	1,363	1,80	2,20	3,11	3,50	4,49
14	1,350	1,77	2,16	3,01	3,37	4,22
16	1,341	1,75	2,13	2,95	3,29	4,07
18	1,333	1,74	2,11	2,90	3,22	3,96
20	1,328	1,73	2,09	2,86	3,17	3,88
30	1,316	1,70	2,04	2,75	3,20	3,65
40	1,306	1,68	2,02	2,70	3,12	3,55
50	1,298	1,68	2,01	2,68	3,09	3,50
60	1,290	1,67	2,00	2,66	3,06	3,46
∞	1,282	1,64	1,96	2,58	2,81	9,29

Таблица П.3
Критерий появления грубых ошибок

n	β_{max} при $p_д$		
	0,90	0,95	0,99
3	1,41	1,41	1,41
4	1,64	1,69	1,72
5	1,79	1,87	1,96
6	1,89	2,00	2,13
7	1,97	2,09	2,26
8	2,04	2,17	2,37
9	2,10	2,24	2,46
10	2,15	2,29	2,54
11	2,19	2,34	2,61
12	2,23	2,39	2,66
13	2,26	2,43	2,71
14	2,30	2,46	2,76
15	2,33	2,49	2,80
16	2,35	2,52	2,84
17	2,38	2,55	2,87
18	2,40	2,58	2,90
19	2,43	2,60	2,93
20	2,45	2,62	2,96
25	2,54	2,72	3,07
30	2,61	2,79	3,16
35	2,67	2,85	3,22
40	2,72	2,90	3,28
45	2,76	2,95	3,33
50	2,80	2,99	3,37

Таблица П.4

Критерий Кохрена $K_{кт}$ при $p_Д = 0,95$

m	Q=n-1									
	1	2	3	4	5	6	8	10	16	36
2	0,99	0,97	0,93	0,90	0,87	0,85	0,81	0,78	0,73	0,66
3	9,97	0,93	0,79	0,74	0,70	0,76	0,63	0,60	0,54	0,47
4	9,90	0,76	0,68	0,62	0,59	0,56	0,51	0,48	0,43	0,36
5	0,84	0,68	0,60	0,54	0,50	0,48	0,44	0,41	0,36	0,26
6	0,78	0,61	0,53	0,48	0,44	0,42	0,38	0,35	0,31	0,25
7	0,72	0,56	0,48	0,43	0,39	0,37	0,34	0,31	0,27	0,23
8	0,68	0,51	0,43	0,39	0,36	0,33	0,30	0,28	0,24	0,20
9	0,64	0,47	0,40	0,35	0,33	0,30	0,28	0,25	0,22	0,18
10	0,60	0,44	0,37	0,33	0,30	0,28	0,25	0,23	0,20	0,16
12	0,57	0,39	0,32	0,29	0,26	0,24	0,22	0,20	0,17	0,14
15	0,47	0,33	0,27	0,24	0,22	0,20	0,18	0,17	0,14	0,11
20	0,39	0,27	0,22	0,19	0,17	0,16	0,14	0,14	0,11	0,08
24	0,34	0,29	0,19	0,16	0,15	0,14	0,12	0,11	0,09	0,07
30	0,29	0,20	0,16	0,14	0,12	0,11	0,10	0,09	0,07	0,06
40	0,24	0,16	0,12	0,10	0,09	0,08	0,07	0,07	0,06	0,04
60	0,17	0,11	0,08	0,07	0,06	0,06	0,05	0,05	0,04	0,02
120	0,09	0,06	0,04	0,04	0,03	0,03	0,02	0,02	0,02	0,01

Таблица П.5

Критерий Фишера

x^2	Значение $k_{фт}$ при $p_Д=0$, для зарличных q_2								
	1	2	3	4	5	6	12	24	36
1	16	19	21	22	23	23	24	24	25
2	18	19	19	19	19	19	19	19	19
3	10	9,6	9,3	9,1	9,0	8,9	8,7	8,6	8,5
4	7,7	6,9	6,6	6,4	6,3	6,2	5,9	5,8	5,6
5	6,6	5,8	5,4	5,2	5,1	5,0	4,7	4,5	4,4
6	6,0	5,1	4,8	4,5	4,4	4,3	4,0	3,8	3,7
7	5,6	4,7	4,4	4,1	4,0	3,9	3,6	3,4	3,2
8	5,3	4,5	4,1	3,8	3,7	3,6	3,3	3,1	2,9
9	5,1	4,3	3,9	3,6	3,5	3,4	3,1	2,9	2,7
10	5,0	4,1	3,7	3,5	3,3	3,2	2,9	2,7	2,5
11	4,8	4,0	3,6	3,4	3,2	3,1	2,8	2,6	2,4
12	4,8	3,8	3,5	3,3	3,1	3,0	2,7	2,5	2,3
13	4,7	3,8	3,4	3,2	3,0	2,9	2,6	2,4	2,2
14	4,6	3,7	3,3	3,1	3,0	2,9	2,5	2,3	2,1
15	4,5	3,7	3,3	3,1	2,9	2,8	2,5	2,3	2,1
16	4,5	3,6	3,2	3,0	2,9	2,7	2,4	2,2	2,0
17	4,5	3,6	3,2	3,0	2,8	2,7	2,4	2,2	2,0
18	4,4	3,6	3,2	2,9	2,8	2,7	2,3	2,1	1,9
19	4,4	3,5	3,1	2,9	2,7	2,6	2,3	2,1	1,8
20	4,4	3,5	3,1	2,9	2,7	2,6	2,3	2,1	1,8
22	4,3	3,4	3,1	2,8	2,7	2,6	2,2	2,0	1,8
26	4,2	3,4	3,0	2,7	2,7	2,4	2,1	1,9	1,7
30	4,2	3,3	2,9	2,7	2,5	2,4	2,1	1,9	1,7
60	4,0	3,2	2,9	2,5	2,4	2,3	1,9	1,7	1,4
	3,8	3,0	2,6	2,4	2,2	2,1	1,8	1,5	1,0

Таблица П.6
Критерий Пирсона

x^2	Значение критерия Пирсона (x_2, q) при числе степеней свободы q							
	1	2	3	4	5	6	7	8
1	0,317	0,606	0,801	0,909	0,962	0,985	0,994	0,998
2	0,157	0,367	0,572	0,735	0,849	0,919	0,959	0,981
3	0,083	0,223	0,391	0,557	0,700	0,806	0,885	0,934
4	0,045	0,135	0,261	0,406	0,549	0,767	0,079	0,854
5	0,025	0,083	0,171	0,287	0,415	0,543	0,660	0,757
6	0,013	0,049	0,111	0,199	0,306	0,423	0,539	0,647
7	0,008	0,030	0,071	0,135	0,220	0,320	0,428	0,536
8	0,004	0,018	0,046	0,091	0,156	0,238	0,332	0,433
9	0,002	0,011	0,020	0,061	0,109	0,173	0,252	0,342
10	0,001	0,006	0,018	0,040	0,075	0,124	0,188	0,265
11	0,000	0,004	0,011	0,026	0,051	0,088	0,138	0,201
12	-	0,002	0,007	0,017	0,034	0,062	0,100	0,151
13	-	0,001	0,004	0,011	0,023	0,043	0,072	0,111
14	-	0,000	0,002	0,007	0,014	0,029	0,036	0,059
15	-	-	0,001	0,004	0,010	0,020	0,030	0.042

Таблица П.7

Коэффициент для вычисления предельно допустимой ошибки измерения

n	Значение q при $p_д$			
	0,95	0,98	0,99	0,995
2	15,56	38,97	77,96	779,7
3	4,97	8,04	11,46	36,5
4	3,56	5,08	6,58	14,46
5	3,04	4,10	5,04	9,43
6	2,78	3,64	4,36	7,41
7	2,62	3,36	3,96	6,37
8	2,51	3,18	3,71	5,73
9	2,43	3,05	3,54	5,31
10	2,37	2,96	3,41	5,01
12	2,29	2,83	3,23	4,62
14	2,24	2,74	3,12	4,37
16	2,20	2,68	3,04	4,20
18	2,17	2,64	3,00	4,07
20	2,15	2,60	2,93	3,98
	1,96	2,33	2,58	3,29

Литература

1. Саати Т. Математические методы исследования операций. Воен.издат, М, 1968
2. Шнепс М.А. Системы распределения информации. Методы расчета. М. «Связь», 1979
3. Основы научных исследований под редакцией проф. В.И. Крутова. М. «Высшая школа», 1989
4. Безир Х. и др. Цифровая коммутация. М. «Радио и связь», 1984
5. Венцель Е.С. Исследование операций. М. «Наука», 1980

Оглавление

Основы научных исследований

Методическое пособие для магистрантов направлений образования: 5А522202 – "Сети, узлы связи и распределение информации".

Рассмотрен и одобрен на заседании кафедры ТС и СК
Протокол № 5 от "30.10.2007
Рекомендован к тиражированию в НМС ТУИТ
Протокол № 7 от "20.03.2008

Автор издания: Сон В.М.

Редактор Гультураев Н.Х.

Корректор Павлова С.И.

Формат 60x84 1/16
Заказ № 334. Тираж - 50

Отпечатано в Издательско полиграфическом центре «ALOQACHI» при ТУИТ
Ташкент ул. Амир Темура, 108