Z.T. XUDOYQULOV, I.M. BOYQUZIYEV,
O. ALLANOV, U.R. MARDIEV,
N.A. JABBAROV

KRIPTOGRAFIK USULLAR

O‘ZBEKISTON RESPUBLIKASI RAQAMLI
TEXNOLOGIYALAR VAZIRLIGI

MUHAMMAD AL-XORAZMIY NOMIDAGI
TOSHKENT AXBOROT TEXNOLOGIYALARI UNIVERSITETI

Z.T. XUDOYQULOV, I.M. BOYQUZIYEV, O.M. ALLANOV,
U.R. MARDIEV, N.A. JABBAROV

KRIPTOGRAFIK USULLAR

O‘zbekiston Respublikasi Oliy va o‘rta maxsus ta’lim vazirligi tomonidan o‘quv qo‘llanma sifatida tavsiya etilgan

"LESSON-PRESS" nashriyoti
TOSHKENT 2023

UDK: 004.056.5(075.8)
UDK: 003.26(075)
BBK: 32.973.26-018

Taqrizchilar:

G'ulomov SH.R. – PhD, dotsent, Muhammad al-Xorazmiy nomidagi Toshkent axborot texnologiyalari universiteti "Kiberxavfsizlik" fakulteti dekani.

Abduraximov B.F. – f.-m.f.d., professor, Mirzo Ulug'bek nomidagi O'zbekiston Milliy universiteti Amaliy matematika va kompyuter tahlili kafedrasi professori.

Kriptografik usullar: *O'quv qo'llanma* / Z.T.Xudoyqulov, I.M.Boyquziyev, O.M.Allanov, U.R.Mardiyev, N.A.Jabbarov; – T.: "LESSON-PRESS" nashriyoti, 2023. – 255 b.

O'quv qo'llanmada kriptografiyaning asosiy tushunchalari va atamalari, kriptografiyaning matematik asoslari, klassik shifrlar va ularning tahlili, psevdotasodifiy sonlar generatori va ularga asoslangan simmetrik oqimli shifrlash algoritmlari, simmetrik blokli shifrlash algoritmlari, ochiq kalitli kriptotizimlar, xesh funksiyalarni yaratish asosi va zamonaviy xesh funksiyalarning nazariy hamda amaliy asoslari, elektron raqamli imzo algoritmlari, yengil kriptografik tizimlar va post-kvant kriptografiyasi, kriptografik kalitlarni boshqarish va tarqatish asoslari muhokama etilgan.

O'quv qo'llanma 60612100– "Kiberxavfsizlik injiniringi" yo'nalishi bo'yicha ta'lim olayotgan talabalar uchun tavsiya etiladi, hamda faoliyati axborot xavfsizligini ta'minlash bilan bog'liq bo'lgan mutaxassislarning keng doirasi uchun ham foydali bo'lishi mumkin.

MUHAMMAD AL-XORAZMIY NOMIDAGI TOSHKENT AXBOROT TEXNOLOGIYALARI UNIVERSITETINING 2023 YIL 29 AVGUSTDAGI 895-22-SONLI BUYRUG'IGA ASOSAN NASHR QILISHGA RUXSAT BERILDI

ISBN 978-9910-05-006-0

MUQADDIMA

Hozirgi vaqtda axborot kommunikatsiya texnologiyalari sohasining jadal rivojlanishi turli manbalar orqali tez va osonlik bilan axborot almashish imkoniyatini taqdim etmoqda. Davlat tashkilotlari, tijorat korxonalari va boshqa nodavlat tashkilotlar jismoniy shaxslarga masofadan turib ko'rsatiladigan axborot xizmatlarini taqdim etmoqdalar va ulardan foydalanmoqdalar. To'lovlar tranzaksiyalari haqidagi ma'lumotlar, tashkilotga oid ma'lumotlar, shaxsiy ma'lumotlar kabi hamma uchun foydalanishga ruxsat etilmagan, ruxsati cheklangan ma'lumotlarning tarmoq bo'ylab uzatilishi, foydalanilayotgan axborot tizimiga ma'lum xavfsizlik talablarini shakllantirish zaruriyatini qo'yadi.

Shu sababli, axborotni qayta ishlash, saqlash, uzatish jarayonida uning xavfsizligini ta'minlash maqsadida, mazkur soha bilan shug'ullanuvchi xodimlarni jalb qilgan holda ishonchli himoya mexanizmlaridan foydalanishga alohida e'tibor berilmoqda. Ishonchli himoyani ta'minlashda matematik almashtirishlarga asoslangan, xavfsizligi isbotlanadigan mexanizmlardan biri – *kriptografiya*.

So'ngi yillarda mamlakatimizda kiberxavfsizlik hamda kriptologiya sohalarini rivojlantirishga katta ahamiyat berilmoqda. O'zbekiston Respublikasi Prezidentining 2022-yil 28-yanvardagi "2022-2026-yillarga mo'ljallangan Yangi O'zbekistonning taraqqiyot strategiyasi to'g'risida"gi PF 60-sonli farmoni bilan tasdiqlangan "2022–2026-yillarga mo'ljallangan Yangi O'zbekistonning taraqqiyot strategiyasi"da fuqarolarning axborot olish va tarqatish erkinligi borasidagi huquqlarini yanada mustahkamlash borasida bir qator vazifalar, jumladan, shaxsiy va sir saqlanishi lozim bo'lgan ma'lumotlarni Internet tarmog'ida oshkor qilish bilan bog'liq daxlsizlik huquqi buzilishining oldini olish va kiberjinoyatchilikning oldini olish tizimini yaratish vazifalari qo'yilgan. Shuningdek, 2020–2023 yillarga mo'ljallangan kiberxavfsizlikka doir milliy strategiya asosida Qonunchilik palatasi tomonidan 2022-yil 25-fevralda qabul qilingan va Senat tomonidan 2022-yil 17-martda ma'qullangan "Kiberxavfsizlik to'g'risida"gi qonun loyihasi ishlab chiqilgan. Qonunning asosiy maqsadi kiberxavfsizlik sohasidagi munosabatlarni tartibga solishdan iborat. Mazkur qonunda

kiberjinoyatlarning oldini olish va bartaraf etish bo‘yicha barcha zarur choralarni ko‘rish alohida ta‘kidlab o‘tilgan. Bundan tashqari, O‘zbekiston Respublikasi Prezidentining 2007 yil 3 aprelda qabul qilingan «O‘zbekiston Respublikasida axborotning kriptografik himoyasini tashkil etish chora-tadbirlari to‘g‘risida”gi PQ-614-son Qarorida belgilangan asosiy vazifalardan biri axborotni muhofaza qilish sohasida yuqori malakali kadrlarni tayyorlashdan iborat bo‘lib, buning uchun axborot xavfsizligi va kriptografiya yo‘nalishlarida davlat tilida ta’lim olayotgan talabalar, tadqiqotchilar va ilmiy xodimlar uchun mo‘ljallangan o‘quv qo‘llanmalar, darsliklar, uslubiy qo‘llanmalar va kitoblar chop etish dolzarb ahamiyat kasb etadi. Mazkur o‘quv qo‘llanma ana shu sohada bajarilgan ishlardan biri hisoblanadi.

Qo‘llanmaning birinchi bobida kriptografiyaning asosiy tushunchalari va klassik kriptografik algoritmlar, xususan, sodda o‘rniga qo‘yish va o‘rin almashtirish shifrlari, Vernam shifri, kodlar kitobi, Enigma mashinasi va ularning kriptotahlili haqida ma’lumotlar keltirilgan.

Ikkinchi bob asosan kriptografiyaning matematik asoslariga bag‘ishlangan hamda ehtimollar nazariyasi asoslari, axborot nazariyasi asoslari, murakkablik nazariyasi, sonlar nazariyasi va fundamental algebra asoslariga oid ma’lumotlar hamda AES blokli shifrlash algoritmi haqida ma’lumotlar keltirilgan.

Uchinchi bob simmetrik kriptotizimlarga bag‘ishlangan, mazkur bobda simmetrik blokli kriptotizimlar, DES simmetrik blokli shifrlash algoritmi, psevdotasodifiy sonlar generatori, oqimli shifrlarni qurish asoslari, A5/1 oqimli shifrlash algoritmi, RC4 oqimli shifrlash algoritmi, SEAL oqimli shifrlash algoritmi, WAKE oqimli shifrlash algoritmi va blokli shifrlash rejimlari haqida batafsil ma’lumotlar keltirilgan.

Qo‘llanmaning to‘rtinchi bobi asimmetrik kriptotizimlarga bag‘ishlangan bo‘lib, ochiq kalitli kriptotizimlar, kriptografik protokollar, kriptografik algoritmlarga qaratilgan hujumlar, tub sonlar va ularning ayrim xossalari, sonlarni tublikka tekshirishning birlamchi testlari, elliptik egri chiziqda nuqtalarni qo‘shish, elliptik egri chiziq nuqtasi tartibiga oid ma’lumotlar keltirilgan.

Beshinchi bobda kriptografik xesh funksiyalar, MD5 xesh funksiyasi, SHA1 xesh funksiyasi, O'z DSt 1106:2006 xesh funksiyasi, Ma'lumotlarni autentifikatsiyalash kodlari, HMAC algoritmi haqida batafsil ma'lumotlar keltirilgan.

Oltinchi bob elektron raqamli imzo va uning ishlash prinsipi, RSA algoritmiga asoslangan ERI, El-Gamal algoritmiga asoslangan ERI, ERI standartlari va ochiq kalitli shifrlardan foydalanish muammolariga oid ma'lumotlarga bag'ishlangan.

Yettinchi bob yengil kriptografiya, kvant va post-kvant kriptografiyasi deb nomlangan. Mazkur bobda yengil kriptografiya tushunchalari, yengil kriptografik algoritmlar, kvant kriptografiyasi, post-kvant kriptografiyasi tushunchalari haqida ma'lumotlar keltirilgan.

Sakkizinchi bob kriptografik kalitlarni boshqarish va kalitlarni taqsimlash algoritmlari haqidagi ma'lumotlarga bag'ishlangan.

I BOB. Kriptografiyaning asosiy tushunchalari va klassik kriptografiya

1.1. Kriptografiya va uning vazifalari

O‘z navbatida hozirgi elektronlashgan jamiyatda axborot xavfsizligiga erishish uchun ham ko‘plab texnik va huquqiy ko‘nikmalar talab etiladi. Shunday bo‘lsada, axborot xavfsizligining barcha yuqorida keltirilgan maqsadlariga yetarli darajada erishishning imkoni yo‘q. Aksariyat hollarda, axborot xavfsizligini ta’minlashda zarur bo‘lgan texnik ko‘nikmalar kriptografiya orqali ta’minlanadi.

Kriptologiya maqsadalari o‘zaro qarama-qarshi bo‘lgan ikki yo‘nalishga ega: kriptografiya va kriptoanaliz.

Kriptografiya axborot xavfsizligining maqsadlari: konfidensiallik, ma’lumot yaxlitligi, subyekt autentifikatsiyasi va xabar autentifikatsiyasi, bilan bog‘liq matematik usullarni o‘rganadi. Kriptografiya nafaqat axborot xavfsizligini ta’minlash vositasi, balki usullar to‘plami ham hisoblanadi. Kriptografiya 1.1-jadvalda keltirilgan axborot xavfsizligining quyidagi maqsadlariga erishishni kafolatlaydi:

1. Konfidensiallik – bu axborot mazmunini unga ega bo‘lishga vakolati bo‘lganlardan tashqari, barchadan saqlash xizmati hisoblanadi. Ko‘p hollarda maxfiylik tushunchasi konfidensiallik va shaxsiylikka sinonim sifatida ishlatiladi. Konfidensiallikni ta’minlashda fizik himoyalashdan tortib axborotni tushunarsiz holatga keltiruvchi matematik algoritmlargacha bo‘lgan yondashuvlardan foydalaniladi.

2. Ma’lumot yaxlitligi - ma’lumotlarni ruxsatsiz o‘zgartirishga qaratilgan xizmat bo‘lib, mazkur xizmatni kafolatlash uchun ruxsat etilmagan foydalanuvchilar tomonidan ma’lumotlarni modifikatsiyalanishini aniqlash kerak bo‘ladi. Ma’lumotlarni modifikatsiyalash o‘zida *qo‘shish, o‘chirish* va *almashtirish* kabi amallarni mujassamlashtiradi.

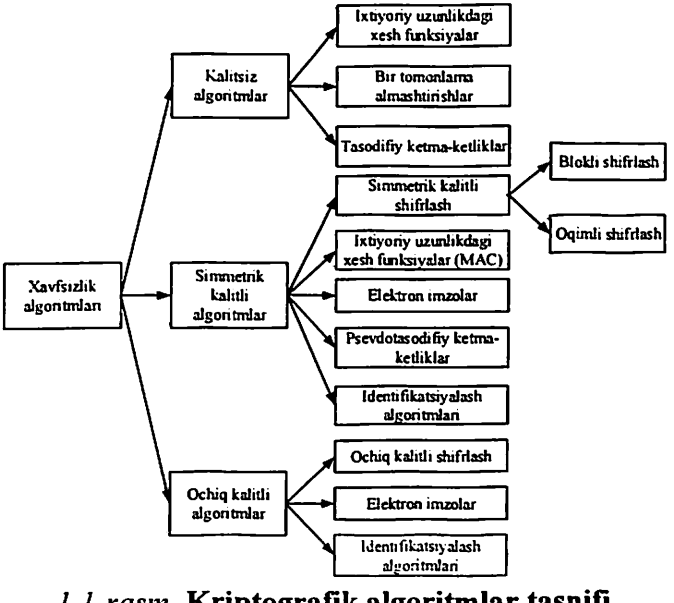
3. Autentifikatsiyalash xizmati identifikatsiyalashga aloqador bo‘lib, u ham subyekt ham ma’lumotning o‘zi uchun amal qiladi. Ma’lumot almashinuvchi ikki tomon bir-birini haqiqiyligini tasdiqlashi talab etilsa, aloqa kanalida uzatilayotgan axborotni uning manbasini, yaratilgan vaqti, ma’lumot tarkibi, yuborilgan vaqti va h.lar bo‘yicha

tasdiqlash kerak bo'ladi. Shu sababli, kriptografiyaning mazkur maqsadi ikki sinfga: subyektni autentifikatsiyalash va xabarni autentifikatsiyalashga ajratiladi.

4. Rad eta olmaslik xizmati avvalgi majburiyatlarni yoki harakatlarni rad etishga to'sqinlik qiladi. Ko'p holatlarda subyekt tomonidan muayyan harakatlarni amalga oshirilganligi inkor etilgani bois, nizolar kelib chiqadi. Mazkur muammolarni oldini olishda ishonchli uchinchi tomon ishtirokidagi biror muolaja talab etiladi.

Kriptografiyaning asosiy maqsadi ham nazariyada ham amaliyotda ushbu to'rtta vazifani yetarli darajada amalga oshirishdan iborat. Shuning uchun kriptografiyani aldash va boshqa zararli harakatlarni aniqlash va ulardan himoyalash haqidagi fan sifatida ham qarash mumkin.

Mazkur o'quv qo'llanma axborot xavfsizligini ta'minlashda foydalaniluvchi bir qancha asosiy kriptografik algoritmlarga bag'ishlangan bo'lib, 1.1-rasmda ularning umumiy holati aks ettirilgan. Ular haqida ushbu bobda qisqacha to'xtilib o'tilsa, keyingi boblarda ular haqida batafsil ma'lumotlar keltiriladi.



1.1-rasm. **Kriptografik algoritmlar tasnifi**

Keltirilgan kriptografik algoritmlar quyidagi omillar bo'yicha baholanishi kerak:

1. Xavfsizlik darajasi. Ushbu omilni miqdoriy qiymatini aniqlash murakkab bo'lib, qo'yilgan vazifani bajarish uchun zarur bo'lgan amallar soni (joriy vaqtda mavjud bo'lgan eng yaxshi usul va vositalardan foydalangan holda) bo'yicha beriladi.

2. Funksionallik. Axborot xavfsizligini turli maqsadlariga erishishda kriptografik algoritmlarni birlashtirish kerak bo'ladi. Berilgan maqsad uchun qaysi kriptografik algoritm eng samarali ekanligi uning xususiyati bilan belgilanadi.

3. Ishlash usuli. Kriptografik algoritmlar turli usul va ma'lumotlar bilan qo'llanilganda, turli xususiyatlarni namoyish etadi. Shuning uchun, bitta kriptografik algoritm ishlash uslubi yoki ishlatilishiga qarab turli funksiyalarni taqdim etishi mumkin.

4. Samaradorlik. Bu omil ma'lum bir ishlash rejimi uchun kriptografik algoritmning samaradorligini ko'rsatadi (masalan, shifrlash algoritmining darajasi bir sekundda shifrlanuvchi ma'lumot hajmi bilan belgilanishi mumkin).

5. Amalga oshirishning osonligi. Bu omil amalda kriptografik algoritmni amalga oshirishning murakkabligini anglatadi. Bu kriptografik algoritmni dasturiy yoki apparat ko'rinishda amalga oshirishning murakkabligini o'z ichiga olishi mumkin.

1.2. Kriptografik funksiyalar

Kriptografiya fani matematik bilimlarga asoslangan bo'lib, uning fundamental tushunchalaridan biri – *funksiya* hisoblanadi. Shuningdek, kriptografiyada funksiya tushunchasiga analog bo'lgan *akslantirish* va *almashtirish* tushunchalari ham ishlatiladi.

Funksiyalar

To'plam chekli sondagi ob'ektlardan iborat bo'lib, ular *elementlar* deb ataladi. Masalan, X to'plam a, b va c elementlardan iborat bo'lishi mumkin va shuning uchun $X = \{a, b, c\}$ shaklida belgilanadi.

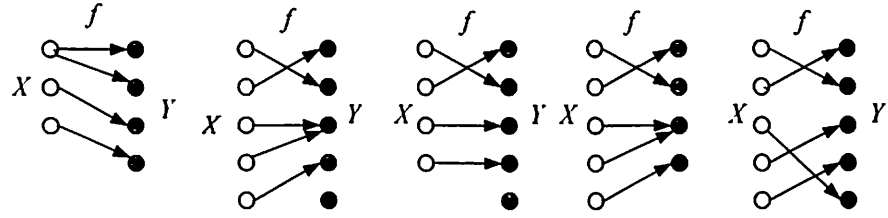
Funksiya ikkita to'plam, X va Y hamda X to'plamdagi har bir elementni Y to'plamdagi bir elementga bog'lovchi f qoida bilan belgilanadi. X to'plam funksiyaning *aniqlanish sohasi* deb atalsa, Y

to'plam funksiyaning *qiymatlar sohasi* deb ataladi. Agar X to'plamning elementi x bo'lsa (odatda $x \in X$ shaklida yoziladi) va unga mos qiymatlar sohasining elementi y bo'lsa, uni $y = f(x)$ shaklida ifodalash mumkin. X to'plamdan Y to'plamga akslantiruvchi f funksiyaning standart ifodasi $f: X \to Y$ shaklida ifodalanadi (1.2-rasm "b").

Ta'rif 1.2.1. Agar Y qiymatlar sohasining har bir elementi X aniqlanish sohasida eng ko'pi bilan bir elementga mos kelsa, u holda bu funksiya *1-1 (birga bir yoki injektiv) funksiya* deb ataladi (1.2-rasm "c").

Ta'rif 1.2.2. Agar Y qiymatlar sohasining har bir elementi X aniqlanish sohasida eng kamida bir elementiga mos kelsa, u holda bu funksiya *ustiga (ko'pga bir* yoki *surjektiv) funksiya* deb ataladi (1.2-rasm "d"). Agar $f: X \to Y$ funksiya surjektiv bo'lsa, $Im(f) = Y$ shaklida belgilanadi.

Ta'rif 1.2.3. Agar f funksiya ham injektiv ham surjektiv bo'lsa, u holda bu funksiya *bijektiv* funksiya deb ataladi (1.2-rasm "d").



1.2-rasm. **Funksiyalarning tasvirlanishi**

Ta'rif 1.2.4. Agar f funksiya X to'plamdan Y to'plamga akslantiruvchi bijektiv funksiya bo'lsa, u holda Y to'plamdan X to'plamga akslantiruvchi g bijektiv funksiyani olish mumkin: har bir $y \in Y$ uchun $g(y) = x$ aniqlanadi. Bu yerda, $x \in X$ va $f(x) = y$. Olingan g funksiya f funksiyaning *teskarisi (yoki inversi)* deb ataladi va $g = f^{-1}$ shaklida belgilanadi.

Bir tomonlama funksiyalar. Funksiyalarning shunday turlari mavjudki, ular kriptografiyada muhim o'rin tutadi. Ulardan biri *bir tomonlama* funksiyadir.

Ta'rif 1.2.5. Agar f funksiya barcha $x \in X$ uchun oson hisoblanarli, biroq, barcha $y = Im(f)$ lar uchun $f(x) = y$ shartni qanoatlantiruvchi $x \in X$ larni topish imkonsiz bo'lsa, u holda f funksiya X to'plamdan Y to'plamga akslantiruvchi *bir tomonlama funksiya* deb ataladi.

Misol 1.2.1. $X = \{1,2,3,\dots,16\}$ va barcha $x \in X$ lar uchun $f(x) = r_x$ o'rinli bo'lsin. Bu yerda, $r_x = 3^x mod 17$ ga teng bo'lsin. U holda funksiya qiymatlari quyidagicha bo'ladi:

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
$f(x)$	3	9	10	13	5	15	11	16	14	8	7	4	12	2	6	1

Yuqorida keltirilgani kabi 1 dan 16 gacha bo'lgan sonlar uchun f funksiya qiymatini hisoblash oson. Biroq, berilgan 7 uchun yuqoridagi jadvaldan foydalanmasdan $f(x) = 7$ shartni qanoatlantiruvchi x elementni topish imkonsiz hisoblanadi.

Misol 1.2.2. Tub sonlar birdan katta musbat butun sonlar bo'lib, faqat bir va o'ziga bo'linadi. Tub bo'lgan $p = 48611$ va $q = 53993$ sonlar bo'lsa, u holda $n = p * p = 2624653723$ ga teng. Shuningdek, $X = \{1,2,3,\dots,n-1\}$ ga teng bo'lsin. Aniqlanish sohasi X bo'lgan f funksiya $f(x) = r_x$ ga teng bo'lib, bu yerda $r_x = x^3 mod n$ ga teng. Masalan, $2489991^3 = 5881949859 * n + 1981394214$ bo'lgani bois, $f(2489991) = 1981394214$ ga teng. $f(x)$ funksiyani hisoblash juda oson bo'lib, uning teskarisini aniqlash juda murakkab. Ayniqsa, n noma'lum bo'lganda mazkur muammo yanada murakkablashadi.

Qopqonli bir tomonlama funksiyalar

Ta'rif 1.2.6. Berilgan ixtiyoriy $y \in Im(f)$ uchun $x \in X$ ni topishda ba'zi ortiqcha axborotni (tuzoqli axborot) taqdim qiluvchi qo'shimcha xususiyatga ega bir tomonlama $f: X \to Y$ funksiyaga qopqonli bir tomonlama funksiya deb ataladi.

1.2.2 misol qopqonli bir tomonlama funksiyani aks ettiradi. Qo'shimcha axborot, $n = 2624653723$ (ya'ni, $p = 48611$ va $q = 53993$, har biri 5 xonali sondan iborat) ma'lum bo'lganda, funksiyani invertini hisoblash oson. 2624653723 sonini hisoblash vositasidan foydalanmasdan faktorlash esa murakkab. Albatta, buni zamonaviy kompyuterlar yordamida osonlik bilan hisoblash mumkin. Boshqa

tomondan, p va q sonlari yetarlicha katta tanlansa (masalan, har biri 100 xonadan iborat), hozirgi kundagi hisoblash kompyuterlari yordamida ham ushbu muammoni yechish murakkab hisoblanadi. Ushbu muammo *butun sonni faktorlash* deb nomlanadi.

Bir tomonlama va qopqonli bir tomonlama funksiyalar ochiq kalitli kriptografiyaning asosi hisoblanadi. Ushbu funksiyalarni kriptografik himoyada qo'llanilishini ko'rib chiqqanda ularning ahamiyat yanada aniq bo'ladi.

O'rin almashtirish funksiyalari

O'rin almashtirishlar turli kriptografik tuzilmalarda keng qo'llaniluvchi funksiya hisoblanadi.

Ta'rif 1.2.7. S chekli sondagi elementlar to'plami berilgan bo'lsin. U holda p *o'rin almashtirish* funksiyasi S to'plamdan o'ziga akslantiruvchi, $p: S \to S$ (boshqacha aytganda, aniqlanish va qiymatlar sohasi teng) bijektiv funksiyadir.

Misol 1.2.3. Faraz qilaylik $S = \{1,2,3,4,5\}$ va o'rin almashtirish funksiyasi $p: S \to S$ quyidagicha bo'lsin:

$p(1) = 3, p(2) = 5, p(3) = 4, p(4) = 2, p(5) = 1.$

O'rin almashtirish funksiyasi yuqoridagi kabi yoki quyida keltirilgan massiv kabi akslantirilishi mumkin:

$$p = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Bu yerda, massivning yuqori qatori o'rin almashtirishning aniqlanishi sohasini ko'rsatsa, pastki qatori qiymatlar sohasini ko'rsatadi.

O'rin almashtirish funksiyasi bijektiv bo'lgani bois, unga teskari bo'lgan funksiya mavjud. Agar o'rin almashtirish funksiyasi p yuqoridagi kabi berilgan bo'lsa, massiv qatorlari o'rnini almashtirish va birinchi qatorni tartiblash orqali p ning teskarisini hosil qilish mumkin:

$$p^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 4 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Involyutiv funksiyalar

Kriptografiyada keng qo'llaniluvchi funksiyalardan yana biri *involyutiv* funksiyalar bo'lib, o'zining teskarisiga teng bo'ladi.

Ta'rif 1.2.8. Agar S chekli elementdan iborat to'plam va f esa S dan S ga akslantiruvchi bijektiv funksiya bo'lsin. $f = f^{-1}$ shart bo'lsa, f

funksiya *involyutiv* deb ataladi. Ushbu tenglikni barcha $x \in S$ lar uchun $f(f(x)) = x$ shaklida ham yozish mumkin.

Misol 1.2.4. Faraz qilaylik $S = \{1,2,3,4,5\}$ ga teng bo'lsin. U holda quyidagi f funksiyani $f: S \to S$ involyutiv deb aytish mumkin:

$f(1) = 4, f(2) = 2, f(3) = 5, f(4) = 1, f(5) = 3.$

1.3. Kriptografiyaning asosiy tushunchalari va atamalari

Har bir fanni o'rganishdan oldin uning asosiy tushunchalarini bilish talab qilinadi. Quyida keyingi bayonlarda ishlatiluvchi asosiy atamalarga oydinlik kiritiladi.

Alfavit deganda axborotni ifodalashda ishlatiluvchi belgilarning chekli to'plami tushuniladi. Zamonaviy kriptotizimlarda ko'pincha atigi ikkita simvoldan (0, 1) iborat ikkilik alfavit, $A = \{0,1\}$, ishlatiladi. Shuningdek, o'ttiz oltita belgidan (harfdan) iborat o'zbek tili alfavitini, o'ttiz ikkita belgidan (harfdan) iborat rus tili alfavitini, yigirma sakkizta belgidan (harfdan) iborat lotin alfavitini, ikki yuzi ellik oltita belgidan iborat ASCII kompyuter belgilarining alfavitini ham misol sifatida keltirish mumkin.

Matn yoki *xabar* – alfavit elementlaridan tartiblangan nabor. *Ochiq matn* (plaintext, P) – shifrlashga atalgan dastlabki xabar. *Shifrmatn* (cipher text, C) – ochiq matnni shifrlash natijasi.

Kalit (key, K), yoki kriptoo'zgaruvchi (cryptovariable) – o'zgartirishlar oilasidan birini tanlashni ta'minlovchi kriptografik algoritmning qandaydir parametrlarining muayyan qiymati.

Shifrlash (encryption, enciphering) – ochiq matnni shifrmatnga o'zgartirish jarayoni, ya'ni, $E_K: P \to C$ kabi belgilanib, u bijektiv funksiya hisoblanadi.

Rasshifrovkalash (decryption, deciphering) – shifrmatnni ochiq matnga o'zgartiruvchi teskari jarayon, ya'ni, $D_K: C \to P$ kabi belgilanib, u ham bijektiv funksiya hisoblanadi. Shifrlash va rasshifrovkalash bir – biriga teskari tushunchalar bo'lgani bois, $D_K = E_K^{-1}$ tenglikni yozish mumkin. Shifrlash algoritmi turiga qarab shifrlash va rasshifrovkalash jarayonida foydalanilgan kalitlar o'zaro teng yoki turlicha bo'lishi mumkin.

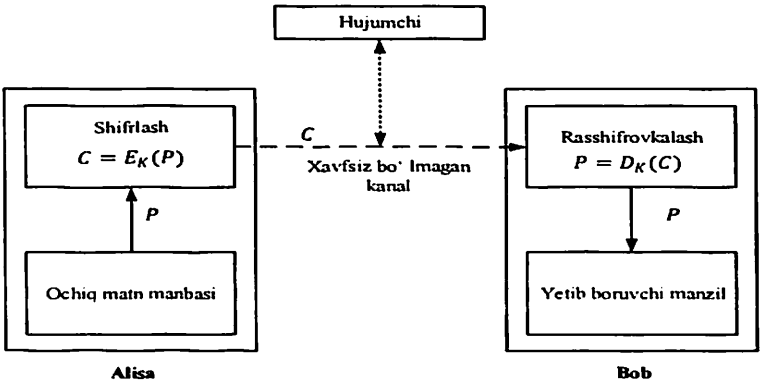
Deshifrlash (breaking) – kalitni bilmasdan turib shifrmatn bo'yicha ochiq matnni tiklash jarayoni.

Rasshifrovkalash bilan deshifrlash orasidagi tafovutga e'tibor qarataylik: agar rasshifrovkalash kriptografik algoritmdan foydalanilganda standart shtatli muolaja hisoblansa, deshifrlash, ko'proq kriptotahlilga taalluqli, kriptotizimni buzishdir. "Shifrlash" umumiy atamasi shifrlash va rasshifrovkalash jarayonini bildiradi.

Shifrlash jarayonidan axborotni konfidensialligini ta'minlash maqsadida foydalanilish mumkin. Ikki tomon, Alisa va Bob, o'rtasida dastlab kalit K (faraz qilinsin, shifrlash va rasshifrovkalash uchun bir xil kalitdan foydalanilgan bo'lsin) maxfiy tarzda yetkazilgan bo'lsin. Agar Alisa P ochiq matnni yubormoqchi bo'lsa, u holda $C = E_K(P)$ qiymatni hisoblaydi va Bobga yuboradi. Bob C ni qabul qilishi bilan $P = D_K(C)$ ni hisoblaydi va haqiqiy ochiq matn P ni tiklaydi.

Shifrlash va rasshifrovkalash jarayonida kalitdan foydalanilganiga e'tibor qarataylik. Nima uchun shunchaki biror shifrlash funksiyasi va unga mos rasshifrovkalash funksiyasidan foydalish mumkin emas? Shifrlash va rasshifrovkalash funksiyasida kalitdan foydalanishdan asosiy maqsad har bir ma'lumot uchun ularni qayta loyihalashdan qochishdir. Ya'ni, faqat shifrlash va unga mos rasshifrovkalash funsiyasidan foydalanilganda agar buzg'unchi ularni aniqlasa, yangi shifrlash/ rasshifrovkalash funksiyasini loyihalash talab etiladi. Agar kalitdan foylanilgan bo'lsa, unda faqat kalitni almashtirishning o'zi yetarli bo'ladi.

Umumiy holda shifrlashga asoslangan ikki tomon orasida tashkil qilingan aloqaning umumiy ko'rinishi 1.3-rasmda keltirilgan.



1.3-rasm. **Shifrlashga asoslangan ikki tomon o'rtasida tashkil etilgan aloqa sxemasi**

Yuqorida keltirilgan shifrlashga asoslangan aloqa sxemasida quyidagi ishtirokchilar mavjud:

- *subyekt* yoki *tomon* axborotni jo'natuvchi, qabul qiluvchi va o'zgartiruvchi foydalanuvchi yoki uning nomidan ishlovchi elektron qurilma. 1.3-rasmdagi Alisa va Bob keltirilgan aloqa sxemasi uchun subyekt sifatida xizmat qiladi. Subyekt sifatida shaxs, hisoblash mashinasi va h. xizmat qilishi mumkin.

- *jo'natuvchi* ikki tomon o'rtasida tashkil qilingan aloqa sxemasida axborotni qonuniy uzatuvchi subyekt hisoblanib, 1.3-rasmda Alisa sifatida aks ettirilgan.

- *qabul qiluvchi* ikki tomon o'rtasida tashkil qilingan aloqa sxemasida axborotni qonuniy qabul qiluvchi subyekt hisoblanib, 1.3-rasmda Bob sifatida aks ettirilgan.

- *hujumchi* ikki tomon o'rtasida tashkil qilingan aloqa sxemasida jo'natuvchi ham, qabul qiluvchi ham bo'lmagan, biroq, jo'natuvchi va qabul qiluvchi o'rtasida ta'minlangan axborot xavfsizligini buzishga harakat qiluvchi ikki tomonlama aloqada bo'lgan subyekt. Ushbu subyektning hujumchidan tashqari ko'plab nomlari, xakker, buzg'unchi, g'araz niyatli va h. mavjud. Ikki tomon o'rtasida tashkil qilingan aloqa sxemasida hujumchi ham jo'natuvchi ham qabul qiluvchi rolida bo'lishi mumkin.

Bundan tashqari, tomonlar o'rtasida o'rnatilgan aloqa kanali ham kriptografiyada muhim ahamiyatga ega. Aloqa kanallariga oid quyidagi tushunchalar mavjud:

- *kanal* - axborotni boshqa tomonga yetkazish vositasi;

- *fizik xavfsiz kanal* yoki *xavfsiz kanal* – hujumchi fizik kira olmaydigan kanal;

- *himoyalanmagan kanal* – axborot nisbatan qonuniy foydalanish huquqiga ega tomonlardan tashqari tomonlar ham axborotni o'zgartirishi, o'qishi, o'chirishi va kiritishi mumkin bo'lgan kanal;

- *himoyalangan kanal* – hujumchiga axborotni o'zgartirish. o'qish. o'chirish va kiritish imkoniyatini taqdim etmagan kanal.

Kriptotizimni ikki tarkibli algoritm va kalitdan iborat ekanligiga asoslangan holda *Kerkgoff prinsipini* eslatib o'tish lozim. Ushbu

prinsipga binoan faqat kalit sir saqlanishi, shifrlash algoritmi esa ochiq bo'lishi lozim. Bu degani, agar niyati buzuq algoritmni bilgan taqdirda ham tizim obro'sizlanmaydi. Kalitni esa almashtirish mumkin. Klod Shennon ushbu prinsipni "Dushman tizimni biladi" deb ta'riflagan.

Ta'rif 1.3.1. Belgilangan vaqt ichida hujumchi rasshifrovkalash kalitini bilmasdan shifrmatndan ochiq matnni tiklay olmasa bunday shifrlash sxemasi *bardoshli* deb aytiladi.

Kriptotizimlarni buzish usullari *kriptotahlil* (cryptoanalysis)ni o'rganish predmeti hisoblanadi. Kriptografiya va kriptotahlil uzviy bog'langanliklari sababli, ularni ko'pincha birgalikda yagona fan – *kriptologiya* (cryptology) (*kryptos* - mahfiy, *logos*- ilm) sifatida qabul qilinadi.

Kriptotizim (cryptosystem) – ochiq matnni, har biri mos algoritm va kalit orqali aniqlanuvchi, shifrmatnga qaytariluvchan o'zgartirishlar oilasi.

Kriptografik usullar umumiy xususiyatlari bo'yicha ikki turga, *simmetrik* va *ochiq kalitli* bo'linadi. Ular bilan keyingi bo'limlarda tanishib chiqiladi.

1.4. Klassik o'rniga qo'yish va o'rin almashtirish shifrlari

O'rniga qo'yishga asoslangan ko'plab shifrlar mavjud bo'lib, oddiy holda ochiq matn belgisini uning alfavitdagi o'rnini n taga siljitishdan hosil bo'lgan belgiga almashtirish orqali xarabni shifrlash usulini qarab chiqsak. Masalan, $n = 3$, o'rniga qo'yish akslantirishi kalit sifatida xizmat qiladi:

Ochiq matn: a b c d e f g h i j k l m n o p q r s t u v w x y z
Shifrmatn: D E F G H I J K L M N O P Q R S T U V W X Y Z A B C

Shartli holatda, ochiq matnni kichik harflarda va shifrmatnni katta harflarda ifodalandi. Bu yerda, kalitni "3" ga teng qarash mumkin. Chunki, mazkur holda siljish soni aslida kalit hisoblanadi.

"3" ga teng bo'lgan kalit bilan quyidagi ochiq matnni shifrlash uchun yuqoridagi jadvaldan foydalaniladi.

"simple substitutuioncipher"

Ochiq matn belgilari jadvaldagi birinchi satrdan topilib, unga mos shifr matn belgilari pastki satrdan olinadi. Boshqacha aytganda, shifrmatn

belgilarini hosil qilish uchun ochiq matn belgilari chapga 3 belgiga siljitiladi. Natijaviy shifr matn ko'rinishi esa quyidagicha bo'ladi:

"VLPSOHVXEVWLWXWXLRQFLSKHU"

Rasshivrovkalashda, shifrmatn belgilari yuqoridagi jadvalning ikkinchi satridan olinib, unga mos ochiq matn belgilari esa birinchi satrdan olinadi. Boshqacha aytganda, rasshivrovkalash uchun shifrmatn belgilari o'nga uch belgiga siljitiladi. Ushbu siljitishga asoslangan sodda o'rniga qo'yish usuli Sezar shifri deb ataladi.

Kalit sifatida faqat 3 emas, ixtiyoriy musbat butun son bo'lishi mumkin. Alfavitning uzunligini 25 ga tengligini inobatga olib, bo'lishi mumkin bo'lgan kalitlarni $n \in \{0, 1, 2, \ldots, 25\}$ ligini bilish qiyin emas. Faraz qilaylik, buzg'unchi shifrmatn, "amkzmbumaaiom"ni, tutib oldi. Shundan so'ng, agar sodda o'rniga qo'yish usulidan foydalanilganini bilsa, u holda 26 ta kalitlarni barchasini sinab ko'radi va ochiq matnni biror ma'noli so'zni anglatishini tekshirib ko'radi. Agar shifr haqiqatda siljitishga asoslangan bo'lsa, ochiq matnni topish uchun o'rtacha 13 ta urinishni amalga oshirishi talab etiladi.

Buzg'unchi tomonidan ko'rsatilgan sondagi urinishlarni amalga oshirish "qo'pol kuch hujumi" (Brute force attack) deb ataladi. Mazkur hujum mos kalitni topish va xabarni aniqlash uchun yetarlicha ko'p vaqt va hisoblash resursini talab qiladi. Boshqacha aytganda, mazkur hujumda kalitning bo'lishi mumkin bo'lgan barcha variantlari tekshirib chiqiladi.

Mazkur hujumga qarshi bardoshlikni ta'minlashda kalitni uzunligini to'g'ri tanlash muhim hisoblanadi. Faraz qilaylik, buzg'unchida sekundiga 2^{40} ta kalitni testdan o'tkazuvchi kompyuter (yoki kompyuterlar guruhi) mavjud bo'lsin. U holda 2^{56} (yoki 56 bitli kalitning barcha variantlari) ga teng kalit sohasini testlashda 2^{16} sekund yoki 18 soatga yaqin vaqt talab etilsa, 2^{64} ga teng kalit sohasi uchun yarim yildan ko'proq vaqt va 2^{128} ga teng kalit sohasi uchun $9 * 10^{30}$ dan ortiq yil talab etiladi. Shuning uchun hozirgi zamonaviy simmetrik kriptografik tizimlarda kalit uzunligi kamida 128 bit bo'lishi talab etiladi.

Yuqoridagi misolda kalit sifatida siljishlar soni olingani va alfavit uzunligining kichkinaligi bois kalit qisqa vaqtda aniqlangan. Mazkur holda kalit sifatida siljishlar sonining o'rniga 26 ta belgilarning ixtiyoriy

almashinishini olish mumkin. Masalan, quyida keltirilgan alfavitni siljitishga asoslanmagan, almashtirish tartibi kalit sifatida xizmat qilishi mumkin:

Ochiq matn: a b c d e f g h i j k l m n o p q r s t u v w x y z
Shifrmatn: Z P B Y J R G K F L X Q N W V D H M S U T O I A E C

Umumiy holda alfavitni ixtiyoriy almashtirish kalit sifatida xizmat qilishi mumkin va bunda $26! \approx 2^{88}$ ta turli kalitlar bo'lishi mumkin. Mazkur kalit sohasini barcha variantlarini aniqlash uchun yuqorida keltirilgan buzg'unchi kompyuteri 8,9 million yildan ortiq vaqt talab qiladi.

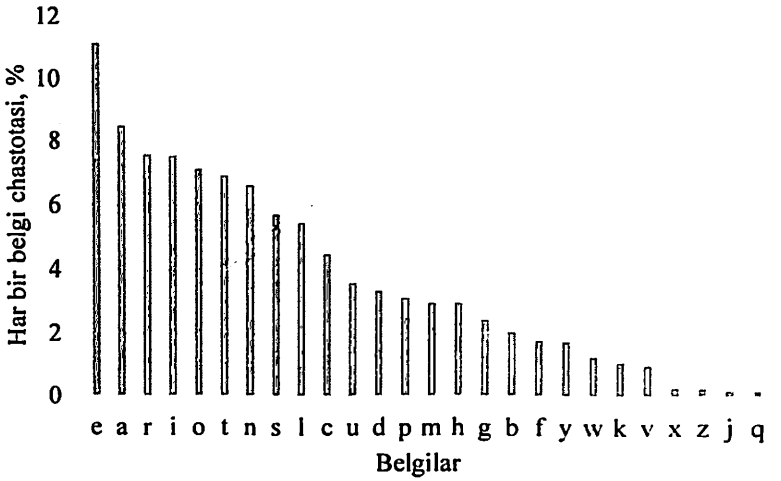
Sodda o'rniga qo'yish shifrlarining kriptotahlili

Faraz qilaylik, buzg'unchi tomonidan quyidagi shifrmatn tutib olingan. Bundan tashqari, buzg'unchi shifrmatnni sodda o'rniga qo'yish usuli asosida hosil qilinganini va kalit sifatida alfavitning ixtiyoriy o'rin almashtirish holati bo'lishi mumkinligini biladi.

PBFPVYFBQXZTYFPBFEQJHDXXQVAPTPQJKTOYQWIPBWLX
TOXBTFXCQWA
XBVCXQWAXFQJVWLEQNTOZQGGQLFXQWAKVWLXQWAE
BIPBFXFQVXGTVJV
WLBTPQWAEBFPBFHCVLXBQUFEWLXGDPEQVPQGVPPBFTI
XPFHXZHVFAG
FOTHFEFBQUFTDHZBQPOTHXTYFTODXQHFTDPTOGHFQPB
QWAQJJTODXQH
FOQPWTBDHHIXQVAPBFZQHCFWPFHPBFIPBQWKFABVYYD
ZBOTHPBQPQJT
QOTOGHFQAPBFEQJHDXXQVAVXEBQPEFZBVFOJIWFFACFC
CFHQWAUVWFL
QHGFXVAFXQHFUFHILTTAVWAFFAWTEVDITDHFHFQAITIX
PFHXAFQHEFZ
QWGFLVWPTOFFA

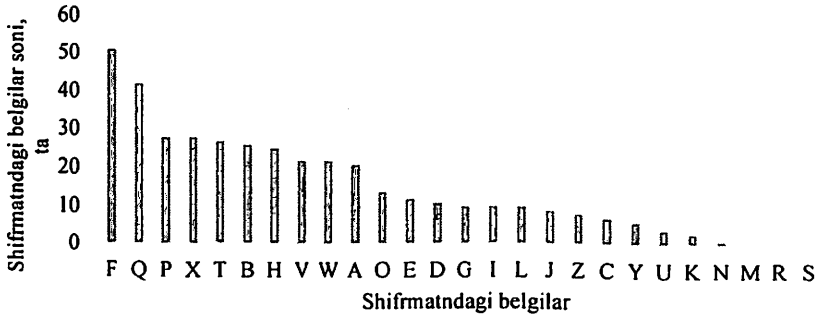
Mazkur holda bo'lishi mumkin bo'lgan 2^{88} kalitlarni tekshirib ko'rish usuli samarasiz hisoblanadi. Faraz qilaylik, Ingliz alfavitidan foydalanilgan bo'lsin. Boshqa tomondan tajriba o'tkazish orqali Ingliz tili uchun harflarni so'zlarda paydo bo'lish chastotasini aniqlash mumkin

(buni Internet tarmog'i orqali osonlik bilan topish ham mumkin). Quyidagi 1.4-rasmda Concise Oxford Dictionary (9-nashr, 1995 yil) manbasida Ingliz alfavitidagi belgilarning takrorlanish chastotalari keltirilgan.



1.4-rasm. **Ingliz alfavitidagi belgilarning takrorlanish chastotalari**

Shunga o'xshash yuqorida keltirilgan shifrmatndagi belgilarning chastotalarini ham osonlik bilan hisoblash mumkin. Hisoblashdan olingan natijalar 1.5-rasmda keltirilgan.



1.5-rasm. **Shifrmatndagi belgilar va ularning soni**

1.5-rasmda keltirilgan shifrmatndagi belgilar chastotasidan ko'rish mumkinki, "F" harfi shifrmatnda eng ko'p qatnashgan va u 1.4-rasmda

keltirilgan Ingliz alfavitida eng yuqori chastotaga ega bo'lgan "E" harfiga mos keladi. Shu sababli, buzg'unchi shifrmatndagi "F" harfining o'rniga "E" harfini qo'yadi. Shu tartibda, biror ma'noli so'z hosil bo'lgunga qadar almashtirish amalga oshiriladi. Mazkur kriptotahlil usuli kalitning barcha variantlarini sinab ko'rishga qaraganda samarali hisoblanadi.

Sodda o'rin almashtirish shifri

Mazkur qismda sodda o'rin almashtirish akslantirishi hisoblangan – klassik ikki tomonlama o'rin almashtirish usuli bilan tanishib chiqiladi. Ushbu shifrlash usulida ochiq matn dastlab berilgan o'lchamdagi ikki o'lchovli massivga yoziladi. Shifrlash uchun satrlar va ustunlarning o'rni biror kalitga ko'ra almashtiriladi. Masalan, "`ochiqmatnlar`" ochiq matnini 3×4 o'lchamli massivga quyidagicha yozaylik:

$$\begin{bmatrix} o & c & h & i \\ q & m & a & t \\ n & l & a & r \end{bmatrix}$$

Shundan so'ng, satrlarni $(1,2,3) \rightarrow (3,2,1)$ tartibda va ustunlarni esa $(1,2,3,4) \rightarrow (4,2,1,3)$ tartibda almashtirish natijasida quyidagilarni olish mumkin:

$$\begin{bmatrix} o & c & h & i \\ q & m & a & t \\ n & l & a & r \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} n & l & a & r \\ q & m & a & t \\ o & c & h & i \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} r & l & n & a \\ t & m & q & a \\ i & c & o & h \end{bmatrix}$$

Yuqoridagilardan kelib chiqib, shifmatnni "RLNATMQAICOH" ga tengligini bilish mumkin. Mazkur holda shifrlash kaliti sifatida massivning o'lchami hamda satrlar va ustunlarni almashtirish tartibi xizmat qiladi.

Rasshifrovkalash uchun esa shifrmatn dastlab 3×4 massiv shaklida ifodalanadi. Shundan so'ng, ustunlar $(4,2,1,3)$ tarzida raqamlanib, $(1,2,3,4)$ tartibida qaytadan tartiblanadi. Xuddi shunga o'xshash, satrlar $(3,2,1)$ tarzida raqamlanib, $(1,2,3)$ tartibida qaytadan tartiblanadi:

$$\begin{bmatrix} R & L & N & A \\ T & M & Q & A \\ I & C & O & H \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} N & L & A & R \\ Q & M & A & T \\ O & C & H & I \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} O & C & H & I \\ Q & M & A & T \\ N & L & A & R \end{bmatrix}$$

Oxirgi massiv ko'rinishidan esa, ochiq matnni "`ochiqmatnlar`" ga tengligini bilish mumkin. Mazkur shifrlash usuli o'rniga qo'yishga

asoslangan usullarga nisbatan afzallik va kamchiliklarga ega. Masalan, ochiq matn va shifmatnda bir xil belgilarning bo'lishi uning kamchiligi hisoblansa, ochiq matnga oid statistik ma'lumotlarga asoslangan kriptotahlil usullariga (masalan, chastotalar bo'yicha tahlil) bardoshligi uning afzalligi hisoblanadi.

Vernam shifri

Bir martali bloknot (one time pad) yoki "Vernam shifri" nomi bilan tanilgan kriptotizim *bardoshli* shifrlash algoritmi hisoblanib, tarixda keng foydalanilgan bo'lsada, ko'p hollarda amalga oshirishning imkoniyati mavjud bo'lmagan. Uning bir martali deb atalishiga asosiy sabab, undagi *kalitning (bloknotning)* bir marta foydalanilishi bo'lib, uni aksariyat hollarda amalga oshirishning imkoni bo'lmaydi. Masalan, ushbu shifrlash algoritmini tushuntirish uchun 8 ta simvoldan iborat bo'lgan alfavitni olaylik. Olingan alfavit simvollari va unga mos bo'lgan binar qiymatlar 1.1 - jadvalda keltirilgan. Alifbo simvollari va ularga mos bit qiymatlari barcha uchun ochiq va sir saqlanmaydi (ASCII jadvali kabi).

1.1-jadval

Alfavit simvollari va unga mos bo'lgan binar qiymatlar

Belgilar	B	E	I	L	O	P	S	T
Binar qiymat	000	001	010	011	100	101	110	111

Faraz qilaylik, biror qonuniy foydalanuvchi A bir martali bloknotdan foydalangan holda "POSSIBLE" matnini shifrlab, o'z sherigi B tomonga jo'natishi talab etilsin. Ushbu ochiq matnni binar qiymatdagi ko'rinishi quyidagicha bo'ladi:

P	O	S	S	I	B	L	E
101	100	110	110	010	000	011	001

Bir martali bloknot usulida shifrlashda ochiq matn uzunligiga teng bo'lgan tasodifiy tanlangan kalitdan foydalaniladi. Ochiq matnga kalitni XOR amali orqali shifrmatn hosil qilinadi (R – *ochiq matn*, K – *kalit* va S – *shifrmatn* deb belgilansa): $C = P \oplus K$. XOR amali ($\oplus$) binar amal hisoblanib, quyida keltirilgan:

$0 \oplus 0 = 0$
$0 \oplus 1 = 1$
$1 \oplus 0 = 1$
$1 \oplus 1 = 0$

Jadvaldan, $x \oplus y \oplus y = x$ tenglik o'rinligini ko'ramiz. Shuning uchun bir martali parol bilan rasshifrovkalash uchun shifrmatnga kalitni XOR amalida bajarilishining o'zi yetarli hisoblanadi: $P = C \oplus K$.

Faraz qilaylik, A tomon jadvaldagi ochiq matn uzunligiga teng bo'lgan quyidagi kalitga ega bo'lsin:

111 101 110 101 111 100 000 101

A tomon ushbu kalit asosida shifrmatnni quyidagicha hisoblaydi:

	P	O	S	S	I	B	L	E
Ochiq matn:	101	100	110	110	010	000	011	001
Kalit:	111	101	110	101	111	100	000	101
Shifrmatn:	010	001	000	011	101	100	011	100
	I	E	B	L	P	O	L	O

A tomonidan jo'natilgan shifrmatn B tomonda bir xil kalitdan foydalanib osongina rasshifrovkalanadi:

	I	E	B	L	P	O	L	O
Shifrmatn:	010	001	000	011	101	100	011	100
Kalit:	111	101	110	101	111	100	000	101
Ochiq matn:	101	100	110	110	010	000	011	001
	P	O	S	S	I	B	L	E

Ushbu shifrlash algoritmi uchun quyidagi ikki holatni qarab chiqish muhim: faraz qilaylik, A tomonning dushmani M A tomon quyidagi kalitdan foydalangan deb biladi:

101 111 000 101 111 100 000 101 110 000

Agar M dushman ushbu kalitni B tomonga uzata olsa, u holda B tomon shifrmatnni quyidagicha rasshifrovkalaydi:

	S	R	L	H	H	H	T	H	S	R
Shifrmatn:	110	101	100	001	110	110	111	001	110	101
"Kalit":	101	111	000	101	111	100	000	101	110	000
"Ochiq matn":	011	010	100	100	001	010	111	100	000	101

K I L L H I T L E R

Agar *B* tomon kriptografiyadan xabari bo'lmasa, u holda *A* tomonning qarori muhokamaga sabab bo'ladi.

Ikkinchi holat: faraz qilamiz *A* foydalanuvchi dushmani *M* tomonidan qo'lga olindi va shifrmatnga ega bo'ldi. Dushman shifrmatnni o'qiy olmaydi va shuning uchun *A* tomondan uning kalitini talab etadi. *A* tomon o'zini har ikkala tomonga "o'ynashini" aytib, shifrmatni rasshifrovkalash kaliti deb quyidagini aytadi:

111 101 000 011 101 110 001 011 101 101

Ushbu kalit orqali dushman *M* shifrmatnni rasshifrovkalaganda quyidagi ochiq matn hosil bo'ladi:

	S	R	L	H	H	H	T	H	S	R
Shifrmatn:	110	101	100	001	110	110	111	001	110	101
"Kalit":	111	101	000	011	101	110	001	011	101	101
"Ochiq matn":	001	000	100	010	011	000	110	010	011	000
	H	E	L	I	K	E	S	I	K	E

Agar dushman kriptografiya haqida ma'lumotga ega bo'lmasa, ushbu ochiq matnga ishonadi va *A* tomonni qo'yib yuboradi.

Yuqoridi keltirilgan misollar bir martali bloknot shifrini *bardoshli* ekanini ko'rsatadi. Bir martali bloknotda agar kalit tasodifiy tanlansa va bir marta foydalanilgan taqdirda hujumchi shifrmatndan ochiq matn haqida biror axborotga ega bo'la olmaydi (albatta ma'lumotning uzunligidan tashqari). Ya'ni, berilgan shifrmatn uchun mos "kalit" yordamida shifrmatn uzunligidagi ixtiyoriy "ochiq matnlar"ni generatsiyalash mumkin va bunda barcha ochiq matnlar bir xil o'xshashlikka ega bo'ladi. Shuning uchun shifrmatndan ochiq matn haqida biror foydali axborotni olishning imkoni yo'q. Kriptografiya nuqtai nazardan shifrmatnlar o'zidan ortiq ma'lumotni bera olmaydi.

Buning uchun albatta, bir martali bloknotdan to'g'ri foydalanish, kalitni tasodifiy tanlash, undan bir marta foydalanilish hamda faqat A va B tomonlarga ma'lum bo'lishi talab etiladi.

Bir martali bloknot yuqori bardoshlikni ta'minlashiga qaramasdan, har doim undan foydalanilmaydi. Sababi, har bir ochiq matn uchun uning uzunligiga teng bo'lgan tasodifiy kalitni (bloknotni) generatsiyalash va

uni qabul qiluvchiga xavfsiz uzatishning kafolati yo'q. Agar ochiq matn uzunligidagi kalitni (bloknotni) xavfsiz uzatishning imkoniyati mavjud bo'lsa, u holda kalitning o'rniga ochiq matnni uzatish foydali emasmi? Uni shifrlashdan nima ma'no?

Bir martali bloknot usulidan tarixda cheklangan uzunlikdagi ma'lumotlarni shifrlashda qisman foydalanilgan bo'lsada, hozirgi kundagi katta hajmli ma'lumotlarni uzatish uchun bir martali bloknotni to'liq amaliy tomondan qo'llab bo'lmaydi.

Bir martali bloknotda kalitlardan faqat bir marta foydalanishdan maqsad nima? Faraz qilaylik, quyidagi ikki ochiq matn P_1 va P_2 bitta kalit K dan foydalanib shifrlangan: $C_1 = P_1 \oplus K$ va $C_2 = P_2 \oplus K$. Kriptografiyada ushbu holatni "xavflilik" deb ataladi va bir martali bloknot xavfli holatda deb tushuniladi. Ya'ni, foydalanilgan kalit ortiq muammo tug'dirmaydi:

$$C_1 \oplus C_2 = P_1 \oplus K \oplus P_2 \oplus K = P_1 \oplus P_2.$$

Mazkur holda shifrmatn haqiqiy ochiq matn xususida ba'zi axborotni oshkor qiladi. Agar bir kalitdan foydalanib ko'p marta shifrlash amalga oshirilsa, bu katta xavfga olib kelishi mumkin. Mazkur holat quyidagi misolda ko'rib chiqilgan. Faraz qilaylik, quyidagi ikkita ochiq matn berilgan bo'lsin (belgilarning binar kodi yuqoridagi jadvaldagi kabi):

$P_1 = LIKE = 100\ 010\ 011\ 000$ va $P_2 = KITE =$ $011\ 010\ 111\ 000$.

Har ikkala ochiq matn yagona kalit $K = 110\ 011\ 101\ 111$ yordamida shifrlangan va shifrmatnlar quyidagiga teng bo'lgan:

	L	I	K	E
P_1:	100	010	011	000
K:	110	011	101	111
C_1:	010	001	110	111
	I	H	S	T

va

	K	I	T	E
P_2:	011	010	111	000
K:	110	011	101	111

C_2:	101	001	010	111
	R	H	I	T

Agar hujumchi kriptotahlil bilan yaqindan tanish bo'lsa va har ikkala ochiq matn bir xil kalit yordamida shifrlanganini bilsa, mos o'rindagi shifrmatn simvollari bir xilligi bois ochiq matnlardagi 2- va 4-simvollarning bir xilligini osongina aniqlaydi. Bundan tashqari, hujumchi taxminiy P_1 ochiq matn oladi va uni to'g'riligini P_2 ochiq matn bilan tekshirib ko'radi. Faraz qilaylik, hujumchi birinchi ochiq matn sifatida $P_1 = KILL = 011\ 010\ 100\ 100$ ni olgan bo'lsin. Bu holda u ochiq matnga mos taxminiy kalitni quyidagicha hisoblaydi:

	K	I	L	L
Taxminiy P_1:	011	010	100	100
C_1:	010	001	110	111
Taxminiy K:	001	011	010	011

Olingan kalit K yordamida esa ikkinchi shifrmatndan ochiq matnni hisoblaydi:

C_2:	101	001	010	111
Taxminiy K:	001	011	010	111
Taxminiy P_2:	100	010	000	100
	L	I	E	L

Hisoblangan kalit K ikkinchi ochiq matn P_2 uchun mos bo'lmagani sababli, hujumchi taxmin qilgan birinchi ochiq matni P_1 ni noto'g'riligini biladi. Shu tarzda davom etib, hujumchi qachonki birinchi ochiq matnni $P_1 = LIKE$ tarzida taxmin qila olsa, ikkinchi ochiq matnni to'g'ri $P_2 = KITE$ topa oladi.

Venona loyihasi

Vennona loyihasi bir martalik bloknot bilan bog'liq real hayotiy misolni o'zida aks ettiradi. 1930 va 1940 yillarda Sovet ittifoqi josuslari AQShga bir martalik bloknot bilan "tashrif buyurishgan". Josuslar xabarlarni bir martalik bloknotdan foydalanib, shifrlangan ko'rinishda Moskvaga yuborishgan. Josuslar juda muvaffaqqiyatli faoliyat yuritgan, ularning xabarlari o'sha paytda AQShdagi yuqori tashkilotlar tomonidan o'rganilgan. Josuslarning asosiy e'tibor markazida birinchi atom

bombasining yaratilish rejasi bo'lgan. Rozenberglar, Aljer Xiss va boshqa ko'plab taniqli va hech kim bilmagan josuslar Venona xabarlarini jo'natishda ishtirok etishgan.

Josuslar yaxshi o'qitilgan va hech qachon kalitdan qayta foydalanmagan. Shunga qaramay tutib olingan ko'plab shifrmatnlar oxir oqibat AQSh kriptoanalitiklari tomonidan deshifrlangan. Agar bir martalik bloknot isbotlangan xavfsizlikka ega bo'lsa, "qanday qilib bunday bo'lishi mumkin?" degan savol tug'ilishi aniq. Buning asosiy sababi kalitlarni generatsiyalash usulida kamchilik mavjudli bo'lgan. Boshqarcha aytganda, kalitlar ma'lum uzunlik takrorlangan. Natijada, Venona shifrmatnlarini ochish imkonini bergan.

Kodlar kitobi

Kodlar kitobi ko'rinishidagi klassik shifrlash birinchi jahon urushi davrida ommalashgan. Kodlar kitobi lug'atga o'xshash bo'lib, so'zlar (ochiq matn so'zlari)dan va unga mos bo'lgan kod so'zlar (shifrmatn)dan tashkil topgan. Shifrlash uchun ushbu kodlar kitobidan zarur bo'lgan so'z aniqlanadi va unga mos bo'lgan kod so'z shifrmatn sifatida olinadi. Rasshifrovkalashda esa ushbu jarayonning teskarisi amalga oshiriladi. Ya'ni, kodlar kitobidan shifrmatndagi kod so'z topiladi va ochiq matn sifatida unga mos bo'lgan so'z tanlanadi. Birinchi jahon urushi davrida Nemislar tomonidan foydalanilgan kodlar kitobi na'munasi quyidagi jadvalda keltirilgan.

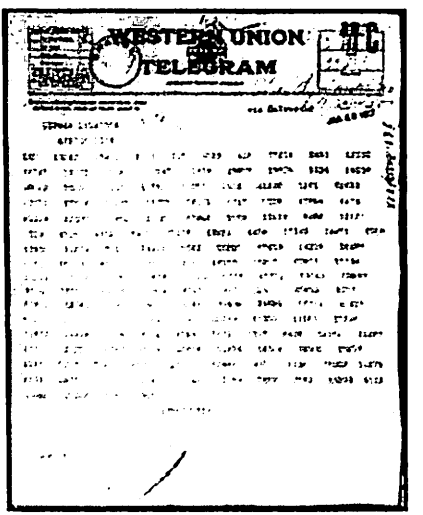
1.2-jadval

Kodlar kitobidan olingan na'muna

Ochiq matn	Shifrmatn
Februar	13605
fest	13732
finanzielle	13850
folgender	13918
Frieden	17142
Friedenschluss	17149
⋮	⋮

Masalan, "Februar" so'zini shifrlash uchun butun so'z 5 ta simvoldan iborat kod so'z 13605 bilan almashtirilgan. Kodlar kitobi shifrlash uchun, rasshifrovkalash uchun esa kod so'zlar ustuni bo'yicha tartiblangan kod so'zlar kitobidan foydalanilgan. Kod so'zlar kitobi o'rniga qo'yish akslantirishiga asoslangan bo'lib, bunda bir simvol emas balki butun so'z, ba'zida esa butun ibora o'rniga kod so'z qo'yilgan.

1.2-jadvalda keltirilgan kod so'zlar mashhur Zimmerman telegrammini shifrlash uchun foydalanilgan. 1917 yil birinchi jahon urushi davrida, Germaniya tashqi ishlar vaziri Artur Zimmerman Germaniyaning Meksikadagi elchisiga shifrlangan ko'rinishdagi telegramma yuboradi. 1.6-rasmda keltirilgan shifrlangan xabar Britaniyaliklar tomonidan tutib olinadi. Bu vaqtda Britaniya va Fransiya Germaniya bilan urush va AQSh bilan betaraf holatida edi.



1.6-rasm. **Zimmerman telegrammasi**

Ruslar Nemislarning kodlar kitobini zararlangan versiyasini tiklab, uni Britaniyaga yuboradi. Murakkab tahlillardan so'ng, Britaniyaliklar Zimmerman telegrammasi yozilgan vaqtidagi kodlar kitobining bo'shliqlarini to'ldirishadi va uni deshifrlashadi. Telegrammada aytilishicha, Germaniya hukumati cheklanmagan suvosti urushi boshlashni rejalashtirayotgani va bu AQSh bilan urushga olib kelishi mumkinligi haqida mulohazalar borligi bayon etilgan. Shu sababli,

Zimmerman o‘z elchisiga Meksikani AQShga nisbatan urushda Germaniya ittifoqchisi bo‘lishga undashi kerakligini aytadi. Xususan, Meksikani Texas, Yagni Meksika va Arizona shtatlaridagi hududlarini qaytarib olishga undagan. AQShda ushbu telegramma oshkor bo‘lgandan so‘ng, jamoatchilik Germaniyaga qarshi turadi. Shundan so‘ng, AQSh urushga kiradi. Zimmerman telegrammasini to‘liq deshifrlangan ko‘rinishi 1.7-rasmda keltirilgan.

We intend to begin on the first of February unrestricted submarine warfare. We shall endeavor in spite of this to keep the United States of America neutral. In the event of this not succeeding, we make Mexico a proposal of alliance on the following basis: make war together, make peace together, generous financial support and an understanding on our part that Mexico is to reconquer the lost territory in Texas, New Mexico, and Arizona. The settlement in detail is left to you. You will inform the President of the above most secretly as soon as the outbreak of war with the United States of America is certain, and add the suggestion that he should, on his own initiative, invite Japan to immediate adherence and at the same time mediate between Japan and ourselves. Please call the President's attention to the fact that the ruthless employment of our submarines now offers the prospect of compelling England in a few months to make peace.
Signed, ZIMMERMANN

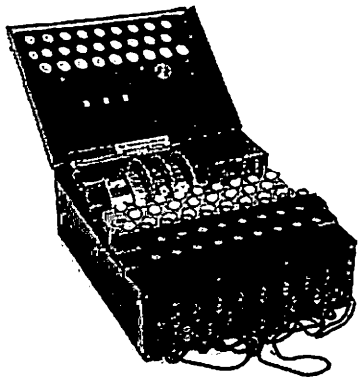
1.7-rasm. **Zimmerman telegrammining rasshifrovkalangan ko‘rinishi**

Enigma mashinasi

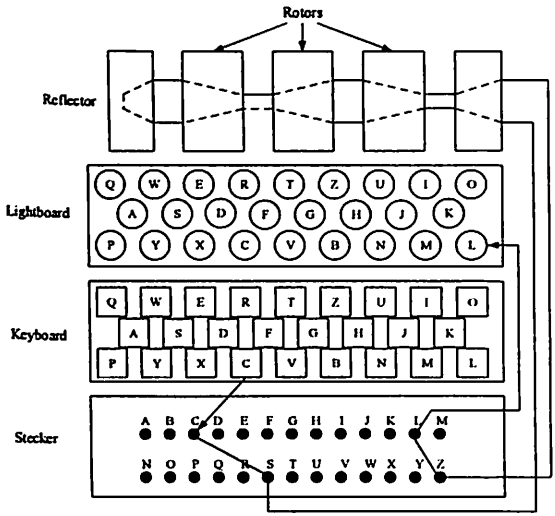
Enigma mashinasi Natsislar Germaniyasi tomonidan ikkinchi jahon urushi davrida foydalanilgan. Enigma mashinasi dastlab tijorat maqsadida Artur Sherbius tomonidan yaratilgan. Enigma mashinasi 1920 yilda patentlangan bo‘lsada, vaqt o‘tishi bilan rivojlanishda davom etdi. Xususan, Germaniya hukumati tomonidan foydalanilgan versiya haqiqiy versiyadan katta farq qiladi.

Umumiy miqdorda 100 000 dan ortiq Enigma mashinasi ishlab chiqilgan bo‘lsa, shularning 40 000 dan ortig‘i ikkinchi jahon urushi davrida to‘g‘ri keladi. Ushbu bo‘limda nemis harbiylari tomonidan foydalanilgan Enigma mashinasining ishlash tartibi bilan tanishib chiqiladi.

Enigma mashinasining umumiy ko‘rinishi va kriptografik tashkil etuvchilari 1.8-rasmda keltirilgan.



a) Enigma mashinasining ko‘rinishi



b) Enigma mashinasi kriptografik tashkil etuvchilari

1.8-rasm. **Enigma mashinasi**

Enigma mashinasi urush davrida ittifoqchilar tomonidan “buzilgan”. Nemislar Enigmani buzilmas deb o‘ylashgan. Biroq, uning buzilgani ma’lum bo‘lganidan so‘ng undan hayotiy masalalarni yechishda foydalanishda davom etganlar. Enigma mashinasining buzilishi ikkinchi jahon urishining natijasiga qanday ta’sir qilgani aniq bo‘lmasada, Yevropada urushni bir yil oldin tugashiga va millionlab insonlarning hayotini saqlab qolishiga sabab bo‘lgani haqiqat hisoblanadi.

Rasmda ko'rsatilgani kabi Enigma mashinasi klaviatura (keyboard) – mexanik tugmalar doskasi hamda shifrmatn belgisini ko'rsatuvchi yorug'lik doskasidan (lightboard) iborat. Bundan tashqari, eski telefon uzib-ulagichlariga o'xshash, belgilar juftini bog'lovchi kabel mavjud old panel (nimischada "stecker" deb atalgan), uchta rotordan (rotors) iborat.

Xabarni shifrlashdan oldin operator qurilmani ishga tayyorlashi zarur bo'lgan. Bu jarayon rotorlarni dastlabki sozlanishlari va steckerni ulanishini o'z ichiga olib, kalit sifatida xizmat qilgan.

Shundan so'ng xabar klaviatura orqali kiritilgan va unga mos shifmatn yorug'lik doskasida paydo bo'lgan. Hosil bo'lgan shifrmatn radio orqali ovozda uzatilgan.

Rasshifrovkalash uchun qabul qiluvchi tomondan ham mashinani bir xil sozlashi talab etilgan. Shundan so'ng, shifmatn klaviatura orqali kiritilgan va unga mos ochiq matn belgilari yorug'liq doskasida paydo bo'ladi.

Endi esa 1.8b – rasmda keltirilgan tashkil etuvchilar bo'yicha Enigma mashinasi ishlashini batafsil ko'rib o'tsak. Xabarni shifrlash uchun, xabar belgilari klaviatura orqali kiritiladi. Dastlab belgi stecker orqali o'tib, navbati bilan 3 ta rotordan va undan so'ng reflektordan o'tadi. Shundan so'ng, reflektordan qaytgan belgi uchta rotordan o'tib, stecker orqali yorug'lik doskasida shifrmatn sifatida taqdim etiladi. Har bir rotor va reflektor 26 ta belgini o'rin almashinishini ta'minlovchi qattiq-simlardan tashkil topgan. Rotorning tuzilishi bilan quyida tanishib chiqiladi.

Yuqorida keltirilgan rasmda stecker kabellari $C \rightarrow S$ shaklida ulangani bois, klaviatura yordamida kiritilgan C harfi S belgisiga almashadi. Shundan so'ng, S harfi rotorlardan va reflektor orqali o'tib, yana rotorlardan qaytadan o'tadi. 1.8-rasmdagi holat uchun, S belgisi Z ga almashtiriladi. Steckerda L va Z belgilar o'zaro bog'langani bois, natijada L belgisi yoritish oynasida paydo bo'ladi.

Keyingi tushuntirishlar uchun quyidagi belgilanishlarni qabul qilamiz:

- $R_r = o'ngda\ joylashgan\ rotor$;
- $R_m = o'rtada\ joylashgan\ rotor$;

- $R_l = chapda\ joylashgan\ rotor$;
- $T = reflektor$;
- $S = stecker$.

Keltirilgan belgilanishlar bilan 1.8-rasmdagi holat uchun x belgiga mos bo'lgan y shifrmatn belgisini quyidagicha ifodalash mumkin:

$$y = S^{-1}R_r^{-1}R_m^{-1}R_l^{-1}R_lR_mR_rS(x) = (R_lR_mR_rS)^{-1}T(R_lR_mR_r)S(x) \quad (3.1)$$

Agar Enigma mashinasi yuqorida ifodalangani kabi bo'lsa, u dastlabki sozlanishga bog'liq holda oddiy o'rniga qo'yish akslantirishini amalga oshiradi. Biroq, har bir ochiq matn belgisi bosilganda o'ngda joylashgan rotor qadami bittaga siljisa, qolgan rotorlar ham adometerga o'xshash (o'ngda joylashgan rotor har 26 ta siljiganda o'rtadagi bittaga, o'rtadagi har 26 ta siljiganda chapdagi bittaga) siljiydi. Reflektorni o'zgarmas rotor kabi tasavvur etish mumkin. Ya'ni, harflarni almashtiradi, biroq, siljimaydi. Xulosa qilib aytganda, uchta rotor qiymatlari turlicha bo'ladi, reflektor va stecker qiymatlari esa o'zgarmaydi.

Enigma o'rniga qo'yish shifri hisoblansada, sezar kabi oddiy tuzilishga ega emas. Adometr ta'siri sababli, o'rniga qo'yish holati belgidan-belgiga almashib boradi. Shuning uchun, uni ko'p alfavitli o'rniga qo'yish shifri deb atash mumkin.

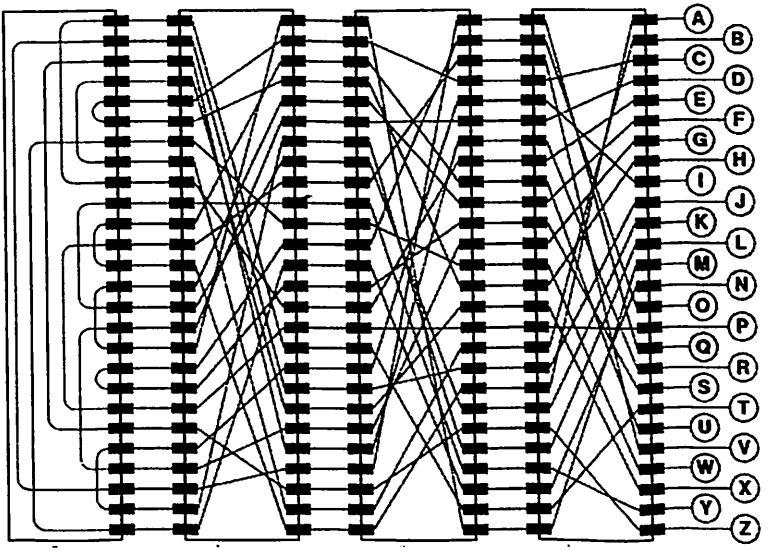
Enigma kalit maydon

Enigma shifrining kriptografik nuqtai-nazaridan muhim komponentlari stecker, uchta rotor va reflektor. Biror xabarni shifrlash va rasshifrovkalashda ushbu komponentlarning dastlabki sozlanishi Enigma kalitini tashkil qiladi. Kalitni tashkil qilgan o'zgaruvchan sozlanishlar quyidagilar:

1. Rotorlarni tanlash.

2. O'ng tomonda joylashgan ikki rotordagi harakatlanuvchi xalqaning holati. Bu xalqa rotorning tashqi tomonini (26 ta belgi bilan belgilangan) xalqaning ichki tomoniga (simli almashtirish amalga oshirilgan) moslab aylantirishga imkon beradi. Bu xalqalarni siljishi adometr hodisasini yuzaga kelishiga sabab bo'ladi (1.9-rasm).

3. Har bir rotorning dastlabki holati.
4. Steckerda bog'lanishlar soni va holati.
5. Reflektorni tanlash.



1.9-rasm. **Rotorlar va reflektorning bog'lanishi**

Yuqorida aytilganidek, har bir rotor 26 belgidan iborat alfavitni o'rnini almashtirishni amalga oshiradi. Harakatlanuvchi xalqalar ushbu 26 ta belgiga mos bo'lgan biror holatda o'rnatiladi.

Har bir rotor undagi *A* dan *Z* gacha belgilangan 26 ta holatdan biriga o'rnatiladi. Stecker eski ko'rinishdagi telefonga o'xshash bo'lib, har biri alfavit belgilari bilan belgilangan 26 ta "chuqur"chadan iborat. Stecker 0-13 oraliqdagi kabellardan iborat bo'lishi mumkin va ularning har biri bir juft chuqurlarni bog'laydi. Reflektor 26 ta belgining almashinishini ta'minlaydi va bunda biror belgi o'ziga almashmaydi. Shuning uchun, reflektorni 13 ta kabeldan iborat bo'lgan stecker sifatida qarash mumkin.

Enigma mashinasi 3 ta rotordan iboratligi va ularning har biri 26 ta belgidan iboratligi uchun, rotorlarni joylashtirish va tanlash holatlarining umumiy soni quyidagiga teng:

$$26! \cdot 26! \cdot 26! \approx 2^{265}.$$

Bundan tashqari, ikki harakatlanuvchi xalqalarning o'rnatish holati – adometr holatini qachon yuz berishini aniqlovchi - $26 \cdot 26 \approx 2^{9.4}$ ga teng bo'ladi.

Har bir rotorlar dastlabki holat sifatida 26 ta belgidan biriga o'rnatilishi mumkinligi bois, rotorlarni sozlashning $26 \cdot 26 \cdot 26 = 2^{14.1}$ varianti mavjud bo'ladi. Biroq, ushbu raqam yuqorida hisoblangan 2^{265} qiymat ichida bo'lgani bois, inobatga olinmaydi.

Eng so'ngi muhim tashkil etuvchi hisoblangan steckerni qarasak. Faraz qilaylik, $F(p)$ kattalik steckerdagi p ta kabellarni ulashning turli yo'llari sonini ifodalasin. U holda quyidagi tenglikni yozish mumkin:

$$F(p) = \binom{26}{2p}(2p-1)(2p-3)\cdots 1.$$

Bu yerda, $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ ga teng.

p ning turli qiymatlari uchun $F(p)$ kattalik qiymatlari quyidagi jadvalda keltirilgan (3.3-jadval).

1.3-jadval

Steckerdagi kombinatsiyalar soni

$F(0) = 2^0$	$F(1) \approx 2^{8.3}$
$F(2) \approx 2^{15.5}$	$F(3) \approx 2^{21.7}$
$F(4) \approx 2^{27.3}$	$F(5) \approx 2^{32.2}$
$F(6) \approx 2^{36.5}$	$F(7) \approx 2^{40.2}$
$F(8) \approx 2^{43.3}$	$F(9) \approx 2^{45.6}$
$F(10) \approx 2^{47.1}$	$F(11) \approx 2^{47.5}$
$F(12) \approx 2^{46.5}$	$F(13) \approx 2^{42.8}$

Yuqoridagi jadvaldan ko'ringani kabi, eng ko'p kombinatsiya 11 ta kabel holati uchun bo'ladi. Yuqorida aytilgani kabi, 13 ta kabel mavjud stecker reflektorga yekvivalent hisoblanadi. Natijada, $F(13) \approx 2^{42.8}$ turli reflektor mavjud bo'ladi.

Barcha olingan natijalarni birlashtirishdan Enigma mashinasi uchun kalit maydonini hisoblash mumkin:

$$2^{265} \cdot 2^{9.4} \cdot 2^{48.9} \cdot 2^{42.8} \approx 2^{366}.$$

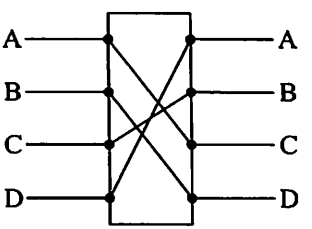
Boshqacha aytganda, Enigma shifrining kalit maydoni 366 bitli kalitga ekvivalent. Zamonaviy simmetrik shifrlash uchun kamida 128 bitli

kalit uzunligini yetarli bo'lishidan, Enigma shifrini yetarlicha bardoshlikka egaligini ko'rish mumkin.

Rotorlar

Rotordan foydalanilgan shifrlash mashinalari XX asrning birinchi yarmida juda ko'p foydalanilgan bo'lib, Enigma ular orasida eng mashhuridir. Shunga o'xshash mashinaga Amerikalar tomonidan foydalanilgan Sigaba shifrini ham misol keltirish mumkin.

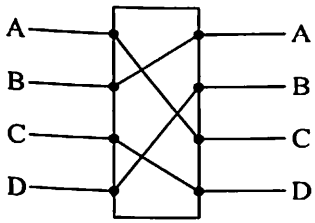
Soddalik uchun rotorni A dan D gacha belgilangan 4 ta belgidan iborat deb qaraylik. Agar signalni chapdan o'nga harakatlanadi deb qarasak, 3.7-rasmda keltirilgan rotor $ABCD$ dan $CDBA$ ga almashtirishni amalga oshiradi. Ya'ni, $A \to C$, $B \to D$, $C \to B$ va $D \to A$ ga almashadi. Teskari almashtirish esa mazkur holat uchun $DCAB$ ga teng bo'ladi. Boshqacha aytganda, rotordan signalni o'ngdan chapga utkazish orqali amalga oshiriladi. Bu ajoyib xususiyat bo'lib, shifrlashda foydalanilgan qurilma yordamida rasshifrovkalash amalga oshiriladi. Ya'ni, Enigma mashinasi o'zining teskarisiga ega bo'lib, faqat bir xil dastlabki sozlanishlarni talab qiladi.



1.10-rasm. **Rotor**

Faraz qilaylik, rotor 1.10-rasmda keltirilgani kabi bir qadamga siljigan bo'lsin. Shuni eslatib o'tish kerakki, tasvirdagi to'rtburchak shaklining o'zi rotor bo'lib, u aylanadi. Ichidagi kabel bilan bog'langan qism esa aylanmaydi. Ushbu misolda, faraz qilaylik rotor yuqoriga siljigan bo'lsin. Ya'ni, B belgisining yangi holati A, va h. A belgisining yangi holati esa D bo'ladi. 1.10-rasmda keltirilgan rotorning yuqorida bir qadamga siljishidan hosil bo'lgan holati 1.11-rasmda keltirilgan.

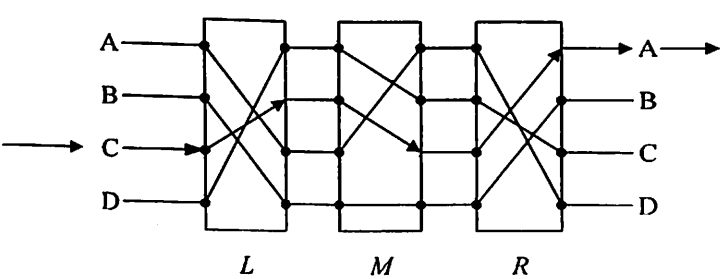
Siljishdan keyingi natijaviy holat $CADB$ ga teng va bu 1.10-rasmdagi kabi $CDBA$ ga teng emas.



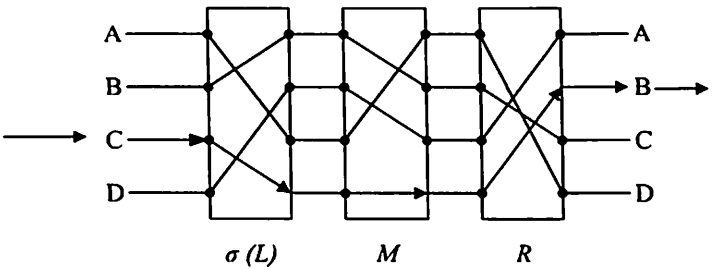
1.11-rasm. **Siljigan rotor**

Umuman olganda, almashtirishda rotorning siljishini aniqlash murakkab emas. Bu yerda muhimi, belgini qancha qadam bilan siljiganidir. Masalan, $CDBA$ almashtirishda, qadamlar quyidagiga teng: A belgisi C ga almashgani bois, qadam 2 ga, B esa D ga almashgani bois qadam 2 ga, C belgisi B ga almashgani bois qadam 3 ga va D belgisi A ga almashgani bois qadam 1 ga teng. Umumiy qilib aytganda, $CDBA$ holatga almashinish qadamlari $(2, 2, 3, 1)$ ga teng. 3.8-rasmda keltirilgan siklik siljishdan keyin hosil bo'lgan almashinish qadamlari esa $(2, 3, 1, 2)$ ga teng.

Yuqorida aytilgani kabi rotorlardan foydalanishning asosiy afzalligi soddalik bilan turli almashtirishlarni amalga oshirishdan iborat. Ko'p sonli rotorlardan foydalanish bilan esa ko'p sonli almashtirishlarni hosil qilish mumkin. Masalan, 1.12-rasmda C belgisi A ga almashgan. L rotorning siljishi, $\sigma(L)$ orqali belgilanib, natijasida C belgisi B ga almashadi (1.13-rasm). Ya'ni, bir rotorning o'zgarishi butun almashtirishga ta'sir qiladi.



1.12-rasm. **Uchta rotor**



1.13-rasm. ***L*** **rotorning siljishi**

Uchta rotordan iborat sxemada, *ABCD* belgilarni siklik ravishda jami 64 ta almashtirish holati mavjud. Mazkur holda, takrorlanishlar kuzatiladi. Unikal almashtirishlar soni esa 24 ga teng bo'ladi.

Enigma mashinasiga hujum. Enigma mashinasiga nisbatan amalga oshirilgan birinchi samarali kriptotahlil Marian Reevskiy boshchiligidagi polshalik kriptotahlilchilar tomonidan amalga oshirilgan. Biroq, ular duch kelgan asosiy muammo bu - qaysi rotordan foydalanilganini bilishmagan. Biroq, yuqori matematik bilim va ba'zi josuslik ma'lumotlari yordamida shifrmatndan rotorlar almashinish tartibini aniqlashgan.

1939 yilda fashistrlar Polshani bosib olganidan so'ng, Marian Reevskiy boshchiligidagi kriptotahlilchilar guruhi Fransiyaga ko'chib o'tishadi. Fransiya ham fashistlar tomonidan bosib olinganidan so'ng, o'z tadqiqotlarini Vichi Fransiyada davom ettiradilar. Marian Reevskiy boshchiligidagi kriptotahlilchilar tomonidan erishilgan yutuqlar, britaniyalik kriptotahlilchilarga borib yetgan. Shundan so'ng, tarkibida Gordon Velchman va kompyuter kashfiyotchisi Alan Turing bo'lgan kriptotahlilchilar guruhi Enigma mashinasini tahlil qilishni boshladilar.

Ushbu bo'limda keltirilgan Enigma mashinasining tahlili Alan Turing tomonidan amalga oshirilgan versiyaga o'xshash, biroq, soddalashgan ko'rinishidir. Ushbu hujumda ma'lum ochiq matnlar (o'sha davrda "crib" deb atalgan) talab qilingan.

Amalga oshirilgan tahlilning asosiy g'oyasi dastlab stekerni inobatga olmagan holatda, kalitni bashorat qilishdan iborat. Mazkur holatda, mavjud variantlar soni 2^{30} dan kichik bo'ladi. Ularning har biri uchun cribdan ochiq ma'lumot tiklanib, noto'g'ri bo'lgan variantlar tashlab yuboriladi. Ushbu hisoblashni amalga oshirish hozirgi zamondagi

EHM uchun oson bo‘lsada, ikkinchi jahon urushi davridagi texnologiyalar uchun imkonsiz bo‘lgan. Faraz qilaylik, ochiq matn va unga mos shifrmatn quyidagicha bo‘lsin (1.4-jadval). Ushbu ma’lumotdan quyidagi keltiriladigan hujumni tushuntirishda foydalaniladi.

1.4-jadval

Enigma shifri uchun ma’lum ochiq matnga misol

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23
Ochiq matn	O	B	E	R	K	O	M	M	A	N	D	O	D	E	R	W	E	H	R	M	A	C	H	T
Shifrmatn	Z	M	G	E	R	F	E	W	M	L	K	M	T	A	W	X	T	S	W	V	U	I	N	Z

x belgining stekerdan o‘tganidan keyingi natijasi $S(x)$ ga teng bo‘lsin. U holda, x ning stekerdan teskari yo‘nalishga o‘tishi $S^{-1}(x)$ ga teng bo‘ladi. Berilgan dastlabki sozlanish uchun, faraz qilaylik i bosqich uchun almashtirish P_i ga teng bo‘lsin. Ya’ni, bu yerda P_i almashtirish uchta rotordan va reflektordan o‘tish, rotorlardan teskari yo‘nalishda qayta o‘tishni o‘z ichiga oladi. U holda (1.1) tenglikdan foydalangan holda, umumiy almashtirishni quyidagicha yozish mumkin (bu yerda, soddalik uchun R_l, R_m, R_r larning i qadamdagi bog‘lanishlari inobatga olinmadi):

$$P_i = S^{-1}R_r^{-1}R_m^{-1}R_l^{-1}TR_lR_mR_rS$$

P_i almashtirish uchun teskari P_i^{-1} almashtirish ham mavjud. Bundan tashqari, har bir belgi bosilganidan so‘ng almashtirish o‘zgarib turadi. Ya’ni, P_i almashtirish bosqich i ga bog‘liq bo‘ladi.

Taqdim etilayotgan hujumda ma’lum ochiqmatn va unga mos shifrmatndagi “siklni” aniqlash mumkin. Faraz qilaylik, 1.4-jadvaldagi 8-ustunni olaylik. Ochiq matn belgisi A steker orqali, so‘ng P_8 almashtirish va so‘ngra S^{-1} orqali o‘tib, shifrmatn belgisi M ni hosil qiladi. Ya’ni, $S^{-1}P_8S(A) = M$. Ushbu tenglikdan esa $P_8S(A) = S(M)$ tenglikni yozish mumkin.

1.4-jadvalda keltirilgan ma'lum ochiq matnlar yordamida quyidagiga ega bo'lamiz:

$$P_8S(A) = S(M)$$
$$P_6S(M) = S(E) \qquad (1.1)$$
$$P_{13}S(E) = S(A)$$

Ushbu sikllarni birlashtirish orqali esa siklni aniqlash mumkin:

$$S(E) = P_6P_8P_{13}S(E) \qquad (1.2)$$

Faraz qilaylik, stekerni inobatga olmagan holda biror dastlabki sozlanishni tanlaylik. U holda, ushbu sozlanishga tegishli barcha P_i va P_i^{-1} lar ma'lum bo'ladi. Shundan so'ng, faraz qilaylik, stekerda E va G belgilar o'zaro ulangan bo'lsin, $S(E) = G$. Agar mashinaning sozlanishi faraz qilinganidek va steker yuqorida keltirilgani kabi bo'lsa, (1.2) tenglikdan quyidagiga ega bo'linadi:

$$G = P_6P_8P_{13}(G) \qquad (1.3)$$

Agar $S(E)$ uchun barcha 26 ta holat sinab ko'rilsa va (1.3) tenglik hech qachon o'rinli bo'lmasa, u holda rotor sozlanishlari noto'g'ri bo'ladi va tanlov qisqartiriladi. Bu bilan rotorning sozlanishlar variantini kamaytirish va bittaga tushirish mumkin. Biroq, agar (1.2) tenglikni qanoatlantiruvchi $S(E)$ topilgan taqdirda ham, rotorlarning joriy sozlanishini bilib bo'lmaydi. Bundan tashqari, $S(E)$ ni aniqlashdagi barcha variantlar 26 ga tengligi bois, ularning har biri uchun, tasodifiy bo'lganda (1.2) tenglikni qanoatlantiruvchi holatni aniqlash ehtimoli 1/26 ga teng bo'ladi. Natija esa, bir siklda kalitni topishdagi hisoblashlar soni kamaymaganini ko'rsatadi.

Biroq, hisoblash jarayonida $S(E)$ bilan bog'liq qo'shimcha sikl qo'shilsa, uning (1.2) tenglik bilan kombinatsiyasi yordamida bo'lishi mumkin bo'lgan rotorlar sozlanishi sonini kamaytirish mumkin. Faraz qilaylik, quyidagi 4 ta tenglikdan, $S(E) = P_3P_{14}^{-1}P_7P_6^{-1}S(E)$ ni hosil qilish mumkin:

$$S(E) = P_3S(R)$$
$$S(W) = P_{14}S(R)$$
$$S(W) = P_7S(M)$$
$$S(E) = P_6S(M)$$

Agar, aytaylik $S(E) = G$ deb faraz qilsak, u holda ikkita tenglik o'rinli bo'lishi kerak. $S(E)$ uchun hanuz 26 ta tanlov mavjud, biroq, 2 ta sikl bilan. Shu sababli, har ikkalasining tasodifiy bo'lish ehtimoli $(1/26)^2$ ga teng bo'ladi. Shuning uchun, $S(E)$ da 2 ta sikl bilan, mashinani sozlanishlar sonini (ya'ni, kalitlar sonini) 26 martaga kamaytirish mumkin. Ushbu kuzatishlar asosida Enigma mashinasiga hujumni osonlik bilan amalga oshirish mumkin.

Shuni alohida ta'kidlash lozimki, agar rotor sozlanishlari kuzatishlar natijasida aniqlansa, barcha P_0, P_1, P_2, ... va P_0^{-1}, P_2^{-1}, P_2^{-1}, ... almashtirishlar ma'lum bo'ladi. Shundan so'ng, agar $S(E)$ uchun taxminiy qiymatlar aniqlansa, barcha sikl tenglamalarini to'g'riligini tekshirish mumkin bo'ladi. $S(E)$ noto'g'ri faraz qilinganida esa, sikl tenglamasini qanoanlantirish ehtimoli 1/26 ga teng bo'ladi. Biroq, sikllar soni n ga teng bo'lganda, sikl tenglamalarini qanoatlantirish ehtimoli $(1/26)^n$ ga teng bo'ladi. Shu sababli, n siklga ega $S(E)$ bilan, bo'lishi mumkin bo'lgan rotor sozlanishlari sonini 26^{n-1} martaga kamaytirish mumkin. Rotor sozlanishlarining umumiy soni 2^{30} ga tengligini inobatga olib, yetarli sondagi sikl bilan rotor sozlanishlarining bo'lishi mumkin bo'lgan sonini birga tushirish, ya'ni kalitni topish mumkin.

Nazorat savollari

1. Axborot xavfsizligi va uning asosiy tushunchalari.
2. Kriptografik funksiyalar va ularning turlari.
3. Kriptografiyaning asosiy tushunchalari.
4. Simmetrik kalitli shifrlash algoritmlari va xesh funksiyalarga oid asosiy tushunchalar.
5. Ochiq kalitli kriptotizimlar va ularning vazifalari.
6. Zamonaviy kriptografiyaning bo'limlari.
7. Simmetrik kalitli shifrlarda foydalanilgan akslantirishlar.
8. Kriptografik protokol va uning vazifasi.
9. Kriptografik kalitlarni boshqarish bo'limi va unga oid asosiy muolajalar.
10. Kriptografik algoritmlarga qaratilgan hujum turlari.
11. Kriptotahlil fan sohasi va uning maqsadi.
12. Axborotni himoyalashda kriptografiyaning o'rnini asoslang.

13. Bir tomonlama funksiya va uning xususiyatlari.
14. Klassik shifrlarda foydalanilgan asosiy akslantirishlarni ayting.
15. Chastotalar bo'yicha tahlil qaysi akslantirishga qaratilgan.
16. Vernam shifri va uning bardoshligi haqida gapiring.
17. Venona loyihasi haqida ayting.
18. Kodlar kitobi asosida ma'lumotlarni shifrlash tartibini tushuntiring.
19. Zimmerman telegrami va u bilan bog'liq hodisalar to'g'risidan ayting.
20. Enigma mashinasi va uning tuzulishini tushuntiring.
21. Enigma shifrining kalit maydoni haqida gapiring.
22. Rotor nima va uning Enigma mashinasidagi ahamiyati.
23. Enigma mashiasiga qarshi amalga oshirilgan hujumlar haqida gapiring.

II BOB. Kriptografiyaning matematik asoslari va AES blokli shifrlash algoritmi

2.1. Ehtimollar nazariyasi asoslari

Ushbu bo'lim kriptografiyaning matematik asosiga bag'ishlanadi. Shu sababli, ularni boshlashdan oldin umumiy standart ko'rinishdagi belgilanishlarni keltirish maqsadga muvofiq:

- $\mathbb{Z}$ - *butun sonlar to'plamini* ifodalaydi: $\{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$.
- $\mathbb{Q}$ - *ratsional sonlar to'plamini* ifodalaydi: $\left(\frac{a}{b} \middle| a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0\right)$.
- $\mathbb{R}$ - *real sonlar to'plamini* ifodalaydi.
- π – matematik o'zgarmas, $\pi \approx 3.14159$.
- e – natural logarifm asosi, $e \approx 2.71828$.
- $[a, b]$ – belgilanish $a \leq x \leq b$ shartni qanoatlantiruvchi x butun sonni ifodalaydi;
- $\lfloor x \rfloor$ – belgilanish x ga teng yoki undan kichik eng katta butun sonni ko'rsatadi. Masalan, $\lfloor 5.2 \rfloor = 5$ va $\lfloor -5.2 \rfloor = -6$.
- $\lceil x \rceil$ - belgilanish x ga teng yoki undan katta eng kichik butun sonni ko'rsatadi. Masalan, $\lceil 5.2 \rceil = 6$ va $\lceil -5.2 \rceil = -5$.
- $[x]$ – belgilanish x ning butun qismini ko'rsatadi. Masalan, $[5.2] = 5$, va $[5.8] = 5$.
- Agar A chekli to'plam bo'lsa, A dagi elementlar soni $|A|$ bilan belgilanadi.
- $a \in A$ – element a ning to'plam A ga tegishligini anglatadi.
- $A \subseteq B$ – to'plam A to'plam B ning qism to'plami ekanligini anglatadi.
- $A \subset B$ - to'plam A to'plam B ning mos qismto'plami, ya'ni: $A \subseteq B$ va $A \neq B$.
- A va B to'plamlarning *kesishmasi* bo'lgan to'plam $A \cap B = \{x \mid x \in A \; va \; x \in B\}$ bilan belgilanadi.
- A va B to'plamlarning *birlashmasi* bo'lgan to'plam $A \cup B = \{x \mid x \in A \; yoki \; x \in B\}$ bilan belgilanadi.
- A va B to'plamlarning *farqi* bo'lgan to'plam $A - B = \{x \mid x \in A \; va \; x \notin B\}$ bilan belgilanadi.

- A va B to'plamlarning Dekart ko'paytmasi $A \times B = \{(a,b)|a \in A \; va \; b \in B\}$ bilan belgilanadi. Masalan, $\{a_1, a_2\} \times \{b_1, b_2, b_3\} = \{(a_1, b_1), (a_1, b_2), (a_1, b_3), (a_2, b_1), (a_2, b_2), (a_2, b_3)\}$.

- *Funksiya* yoki *akslantirish* $f: A \longrightarrow B$ - A to'plamning har bir a elementini B to'plamning aniq bir b elementiga o'zlashtiruvchi qoida. Agar $a \in A$ element $b \in B$ elementga akslantirlsa, b element a elementning *aksi*, a element esa b elementning *asli* deb ataladi va $f(a) = b$ shaklida ifodalanadi. A to'plam f funksiyaning *aniqlanish sohasi*, B to'plam esa f funksiyaning *qiymatlar sohasi* deb ataladi.

- Agar B to'plamdagi har bir element A to'plamda ko'p bilan bir elementning aksi bo'lsa, $f: A \longrightarrow B$ funksiya *birga-bir (1-1* yoki *injektiv)* funksiya deb aytiladi. Shuning uchun $f(a_1) = f(a_2)$ deyilganda $a_1 = a_2$ nazarda tutiladi.

- Agar har bir $b \in B$ kamida bitta $a \in A$ ning aksi bo'lsa, u holda $f: A \longrightarrow B$ - *ustiga (*yoki *surjektiv)* funksiya deyiladi.

- Agar $f: A \longrightarrow B$ funksiya ham birga-bir ham ustiga funksiya bo'lsa, u holda *bijektiv* funksiya funksiya deb ataladi. Agar f funksiya A va B to'plamlar orasida bijektiv bo'lsa, u holda $|A| = |B|$ tenglik o'rinli. Agar f funksiya A va o'zining o'rtasida bijektiv bo'lsa, f funksiya A to'plamda *o'rin almashtirish funksiyasi* deb aytiladi.

- $\ln x - x$ ning natural logarifmi, ya'ni, e asosga ko'ra x ning logarifmi.

- $\lg x$ - 2 asosga ko'ra x ning logarifmi.

- $\exp(x)$ - e^x eksponent funksiya.

- $\sum_{i=1}^{n} a_1$ ifoda $a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ yig'indini ifodalaydi.

- $\prod_{i=1}^{n} a_i$ ifoda $a_1 \cdot a_2 \cdots\cdots a_n$ ko'paytmani ifodalaydi.

- Musbat n soni uchun $n! = n(n-1)(n-2) \cdots 1$ - faktorial funksiyasini ifodalaydi. Shartli holatda, $0! = 1$ ga teng.

Ehtimollar nazariyasi asoslari

Ta'rif 2.1.1. Tajriba – bu ma'lum natijalar to'plamidan birini beruvchi protsedura bo'lib, mumkin bo'lgan individual natijalar *oddiy hodisalar* deb ataladi. Barcha mumkin bo'lgan natijalar to'plami esa *na'munalar maydoni* deb ataladi.

Mazkur bo'limda faqat chekli sondagi natijalarga ega bo'lgan - *diskret* na'munalar maydoni ko'rib chiqiladi. Faraz qilaylik, S na'munalar maydonidagi oddiy hodisalar $s_1, s_2, \dots, s_n$ kabi belgilansin.

Ta'rif 2.1.2. S maydonda P *ehtimollik taqsimoti* – manfiy bo'lmagan va yig'indisi 1 ga teng bo'lgan $p_1, p_2, \dots, p_n$ sonlar ketma – ketligi bo'lib, p_i kattalik tajriba natijasini s_i hodisa bo'lishi ehtimolini ko'rsatadi.

Ta'rif 2.1.3. Hodisa E na'munalar maydoni S ning qism to'plami bo'lsin. E hodisaning paydo bo'lish *ehtimoli* - $P(E)$ kabi belgilanib, E hodisaga tegishli bo'lgan barcha s_i sodda hodisalarning p_i ehtimolliklarining yig'indisi hisoblanadi. Agar $s_i \in S$ bo'lsa, $P(\{s_i\})$ ehtimollikni $P(s_i)$ kabi belgilash mumkin.

Ta'rif 2.1.4. Agar E hodisa bo'lsa, unga *teskari hodisa* $\bar{E}$ kabi belgilanadi va E ga tegishli bo'lmagan sodda hodisalar to'plamini ifodalaydi.

Faraz qilaylik, $E \subseteq S$ hodisa bo'lsin.

I. $0 \le P(E) \le 1$. Bundan tashqari, $P(S) = 1$ va $P(\emptyset) = 0$ (bu yerda, $\emptyset$ - bo'sh to'plam).

II. $P(\bar{E}) = 1 - P(E)$.

III. Agar S maydondagi natijalar teng darajada bo'lsa, u holda $P(E) = \frac{|E|}{|S|}$ o'rinli.

Ta'rif 2.1.5. Agar $P(E_1 \cap E_2) = 0$ o'rinli bo'lsa, u holda ikki E_1 va E_2 hodisalar bir-birini inkor etuvchi deb ataladi. Ya'ni, ikkita hodisadan birining sodir bo'lishi, boshqasining sodir bo'lish ehtimolini inkor qiladi.

Faraz qilaylik, E_1 va E_2 ikki turli hodisa bo'lsin. U holda quyidagilar o'rinli:

I. Agar $E_1 \subseteq E_2$ bo'lsa, u holda $P(E_1) \le P(E_2)$ o'rinli bo'ladi.

II. $P(E_1 \cup E_2) + P(E_1 \cap E_2) = P(E_1) + P(E_2)$. Shu sababli, agar E_1 va E_2 lar bir-birini inkor etuvchi bo'lsa, u holda $P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2)$ o'rinli bo'ladi.

Shartli ehtimollik

Ta'rif 2.1.6. Faraz qilaylik, E_1 va E_2 lar $P(E_2) > 0$ ehtimolikka ega bo'lgan ikki turli hodisa bo'lsin. Berilgan E_2 hodisa paydo bo'lganda E_1

hodisaning paydo bo'lishining *shartli ehtimoli* $P(E_1|E_2)$ kabi belgilanadi va u quyidagiga teng:

$$P(E_1|E_2) = \frac{P(E_1 \cap E_2)}{P(E_2)}$$

Ta'rif 2.1.7. Agar $P(E_1 \cap E_2) = P(E_1)P(E_2)$ bo'lsa, E_1 va E_2 hodisalar *mustaqil* deb aytiladi.

Yuqoridagi ta'rifdan kelib chiqib, agar E_1 va E_2 hodisalar mustaqil bo'lsa, u holda $P(E_1|E_2) = P(E_1)$.va $P(E_2|E_1) = P(E_2)$ o'rinli bo'ladi.

Bayes teoremasi. Agar E_1 va E_2 lar $P(E_2) > 0$ ehtimolikka ega ikki turli hodisa bo'lsa, u holda quyidagi tenglik o'rinli:

$$P(E_1|E_2) = \frac{P(E_1)P(E_2|E_1)}{P(E_2)}$$

Binomial taqsimot

Binomial koeffitsient xususiyatlari. Faraz qilaylik, n va k manfiy bo'lmagan butun sonlar bo'lsin. U holda quyidagilar o'rinli bo'ladi:

I. $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.

II. $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.

III. $\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}$.

Tug'ulgan kun muammosi

Musbat m, n $(m \geq n)$ butun sonlar uchun, $m^{(n)}$ butun son quyidagicha hisoblanadi:

$$m^{(n)} = m(m-1)(m-2)\cdots(m-n+1).$$

m, n $(m \geq n)$ manfiy bo'lmagan butun sonlar bo'lsin. *Ikkinchi turdagi Stirling raqami* - $\left\{ {m \atop n} \right\}$ kabi belgilanib, quyidagiga teng:

$$\left\{ {m \atop n} \right\} = \frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}k^m,$$

Bu yerda, $\left\{ {0 \atop 0} \right\} = 1$ holat bundan mustasno.

$\left\{ {m \atop n} \right\}$ belgilanish m ob'ektlar to'plamini n bo'sh bo'lmagan qismto'plamlarga bo'lish yo'llari sonini ifodalaydi.

Klassik bandlik muammosi. Ko'zada 1 dan m gacha raqamlangan m ta sharcha mavjud. Faraz qilaylik, ko'zadan aralashtirish yo'li birin-ketin n ta sharcha tortib olindi va ularning raqamlari qayd etildi. Bu holda, turli t sharning tanlanish ehtimoli quyidagiga teng:

$$P_1(m,n,t) = \begin{Bmatrix} n \\ t \end{Bmatrix} \frac{m^{(t)}}{m^n}, \qquad 1 \le t \le n.$$

Tug'ulgan kun muammosi ham klassik muammoning bir xususiy holati hisoblanadi.

Tug'ulgan kun muammosi. Ko'zada 1 dan m gacha raqamlangan m ta sharcha mavjud. Faraz qilaylik, ko'zadan birin-ketin aralashtirish yo'li bilan n ta sharcha tortib olindi va ularning raqamlari qayd etildi.

I. Tanlashdagi kamida bir marta takrorlanish ehtimoli (ya'ni, kamida ikkita sharcha tanlanganda) quyidagiga teng:

$$P_2(m,n) = 1 - P_1(m,n,n) = 1 - \frac{m^{(n)}}{m^n}, \qquad 1 \le n \le m. \qquad (2.1)$$

Agar $n = O(\sqrt{m})$ (2.3 bo'limga qarang) va $m \longrightarrow \infty$, u holda:

$$P_2(m,n) \to 1 - \exp\left(-\frac{n(n-1)}{2m} + O\left(\frac{1}{\sqrt{m}}\right)\right) \approx 1 - \exp\left(-\frac{n^2}{2m}\right)$$

II. $m \longrightarrow \infty$ inobatga olib, bir xil sharcha takrorlanishidan oldingi kutiladigan tanlashlar soni $\sqrt{\frac{\pi m}{2}}$ ga teng bo'ladi.

Yuqoridagi holatni nima uchun *tug'ulgan kun muammosi* deb atalishiga qisqacha izoh bersak. 23 kishilik xonada kamida 2 kishining tug'ulgan kuni bir xil bo'lish ehtimoli $P_2(365,23) \approx 0.507$ ga teng bo'lib, u yetarlicha katta hisoblanadi. Bundan tashqari, $P_2(365,n)$ miqdor n ning ortishi bilan tez ko'payadi; masalan, $P_2(365,30) \approx 0.706$.

Axborot nazariyasi asoslari

Faraz qilaylik, X tasodifiy o'zgaruvchi bo'lib, $P(X = x_i) = p_i$ ehtimollikga ega $x_1, x_2, \dots, x_n$ chekli sondagi qiymatlar to'plamidan iborat bo'lsin. Bu yerda, har bir i $(1 \le i \le n)$ uchun $0 \le p_i \le 1$ o'rinli va $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$ ga teng. Shuningdek, Y va Z lar ham tasodifiy o'zgaruvchi bo'lib, chekli sondagi qiymatlar to'plamidan iborat.

Informatsiyaning statistik nazariyasi K.Shennon tomonidan batafsil o'rganilgan.

Yuz berish extimolligi birga yaqin bo'lgan tez-tez uchraydigan xodisa xususida xabar paydo bo'lsa, bunday xabarning qabul qiluvchi uchun informativligi kam bo'ladi. Huddi shunday, yuz berish ehtimolligi nulga yaqin bo'lgan xabarning ham informativligi kam bo'ladi.

Xodisalarga qandaydir tajribaning natijasi sifatida qarash mumkinki, bunday tajribaning barcha natijalari ansamblni, ya'ni hodisalarning to'liq guruhini tashkil etadi. K.Shennon tajriba jarayonida paydo bo'luvchi xodisaning *noaniqligi* tushunchasini kiritdi va uni *entropiya* deb atadi.

Ansambl entropiyasi uning noaniqligining va demak informativligining miqdoriy o'lchovi bo'lib, tajribaning har bir mumkin bo'lgan natijalari ehtimolligi to'plamining o'rtacha funksiyasi sifatida ifodalanadi.

Ta'rif 2.2.1. X o'zgaruvchining *noaniqligi* yoki *entropiyasi* $H(X) = -\sum_{i=1}^{n} p_i \lg p_i = \sum_{i=1}^{n} p_i \lg(\frac{1}{p_i})$ kabi belgilanib, shartli ravishda, agar $p_i = 0$ bo'lsa, $p_i \lg p_i = p_i \lg(\frac{1}{p_i}) = 0$ tenglik o'rinli.

Entropiyaning xususiyatlari. Faraz qilaylik, X kattalik n ta qiymatdan iborat o'zgaruvchi bo'lsin. U holda quyidagilar o'rinli:

I. $0 \leq H(X) \leq \lg n$;

II. Faqat i ning biror qiymati uchun $p_i = 1$ va qolgan barcha $i \neq j$ uchun $p_j = 0$ bo'lsa, $H(X) = 0$ ga teng bo'ladi (ya'ni, natijaning noaniqligi yo'q).

III. Faqat i ning $(1 \leq i \leq n)$ har bir qiymati uchun $p_i = 1/n$ o'rinli bo'lsa, $H(X) = \lg n$ ga teng bo'ladi.

Birlashma entropiya statistik bog'langan xabarlarning birgalikda paydo bo'lish entropiyasini hisoblashda ishlatiladi.

Ta'rif 2.2.2. X va Y larning *birlashma entropiyasi* quyidagiga teng:

$$H(X,Y) = -\sum_{x,y} P(X = x, Y = y) \lg\big(P(X = x, Y = y)\big),$$

bu yerda, yig'indi x va y larni mos holda X va Y larning qiymatlari sohasida tegishligini bildiradi. Ifodani ixtiyoriy sondagi tasodifiy o'zgaruvchilar uchun ham ifodalash mumkin.

Agar X va Y lar tasodifiy o'zgaruvchilar bo'lsa, u holda $H(X,Y) \leq H(X) + H(Y)$ shart faqat va faqat X va Y lar mustaqil bo'lganda o'rinli bo'ladi.

Entropiyalarni jamlash qoidasiga muvofiq ikkita mazmun jihatidan turli (mustaqil) kitoblardagi informatsiya miqdori – alohida kitoblardagi informatsiya miqdorlarining yig'indisiga teng. Agar bir kitob ikkinchi kitobning qismini o'z ichiga olsa, ushbu ikki kitobdagi informatsiya miqdori alohida kitoblardagi informatsiya miqdorlarining yig'indisiga teng bo'lmaydi, balki undan kam bo'ladi. Bu holda informatsiya miqdorini o'lchashda *shartli entropiya* tushunchasidan foydalaniladi. Shartli entropiyani hisoblashda shartli ehtimolliklar u yoki bu ko'rinishda ishlatiladi.

Ta'rif 2.2.3. Agar X va Y lar tasodifiy o'zgaruvchilar bo'lsa, *berilgan $Y = y$ uchun X ning shartli entropiyasi* quyidagicha ifodalanadi:

$$H(X|Y = y) = -\sum_x P(X = x|Y = y) \lg(P(X = x|Y = y)),$$

bu yerda, yig'indi x qiymat X ning qiymatlari sohasida tegishligini bildiradi.

Shartli entropiya quyidagi xususiyatlarga ega:

I. $H(X|Y)$ miqdor Y hodisa kuzatilganidan so'ng X ning noma'lumlik darajasi miqdorini o'lchaydi.

II. $H(X|Y) \geq 0$ va $H(X|X) = 0$.

III. $H(X,Y) = H(X) + H(Y|X) = H(Y) + H(X|Y)$.

$H(X|Y) \leq H(X)$ shart faqat va faqat X va Y lar mustaqil bo'lganda o'rinli bo'ladi.

Murakkablik nazariyasi

Murakkablik nazariyasining *asosiy maqsadi* hisoblash muammolarini ularni yechish uchun zarur bo'lgan resurslarga qarab tasniflash mexanizmlari bilan ta'minlashdir. Bunda, tasniflash biror hisoblash modeliga bog'liq bo'lmasdan, muammoni ichki farqini o'lchashi kerak bo'ladi. O'lchashdagi resurslar sifatida vaqt, saqlash uchun xotira hajmi, tasodifiy bitlar, protsessorlar soni va h. bo'lishi mumkin. Biroq, aksariyat holda vaqtga yoki ba'zida xotira hajmiga asosiy e'tibor beriladi.

Ta'rif 2.3.1. Algoritm – bu o'zgaruvchan kirishni qabul qiluvchi va chiqish bilan to'xtovchi yaxshi ishlab chiqilgan hisoblash muolajasi.

Yuqoridagi ta'rifda keltirilgan "yaxshi ishlab chiqilgan hisoblash muolajasi" tushunchasi matematik jihatdan aniq emas. Hisoblashlarni Turing mashinasi (Turing machine), xotiradan ixtiyoriy foydalanishli mashina (Random-access machine) yoki mantiqiy sxema (Boolean circuits) yordamida amalga oshirish mumkin bo'lsada, biror dasturlash tilida yozilgan ixtiyoriy kirishni qabul qiluvchi va chiqish qiymati bilan to'xtovchi kompyuter dasturi ko'rinishida yozilgan algoritm sifatida qarash bir muncha qulay hisoblanadi. Mazkur holda, qo'yilgan muammoni yechuvchi eng samarali (tezkor) algoritmni topish muhimdir. Mazkur muammoni yechish uchun algoritm sarflagan vaqti qo'yilgan muammoning "o'lchamiga" bog'liq bo'ladi. Bundan tashqari, algoritmlarni solishtirish jarayonida bir xil vaqt birliklaridan foydalanish ham talab etiladi.

Ta'rif 2.3.2. Kirish *o'lchami* – kirish qiymatini biror kodlash sxemasi yordamida ikkilik ko'rinishda aks ettirishda zarur bo'lgan bitlarning umumiy soni. Ba'zida, kirish o'lchami kirishdagi elementlar soniga teng bo'ladi.

Masalan:

- musbat n sonini ikkilik ko'rinishda taqdim etishdagi bitlar soni $1 + \lfloor \lg n \rfloor$ ga teng. Ya'ni, $n = 7$ bo'lsa, $1 + \lfloor \lg 7 \rfloor = 1 + \lfloor 2.807 \rfloor = 1 + 2 = 3$ ga teng bo'ladi.
- agar f eng katta darajasi k bo'lgan ko'phad bo'lsa va uning koeffitsientlari musbat, n dan katta bo'lmagan butun sonlar bo'lsa, u holda f ning o'lchami $(k + 1) \lg n$ ga teng bo'ladi.
- agar A matritsa r qator va s ustundan iborat bo'lsa va elementlari n dan katta bo'lmagan musbat butun sonlar bo'lsa, u holda A ning bitdagi uzunligi $rs \lg n$ ga teng bo'ladi.

Ta'rif 2.3.3. Algoritmning biror kirish qiymati uchun *ishlash vaqti* - bajariluvchi bazaviy amallar yoki "qadam" lar soniga teng.

Bu yerda, odatda "qadam" sifatida katta bo'lmagan amallar qaralsa, ba'zida esa taqqoslash, mashina komandalari (Machine Instructions),

mashina takti (Machine clock cycle), modul bo'yicha ko'paytirish va h.lar olinishi mumkin.

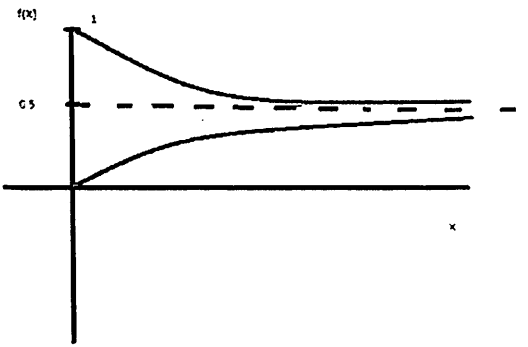
Ta'rif 2.3.4. Algoritm *ishlashining eng yomon vaqti* – funksiyani ixtiyoriy kirish qiymatida ishlash vaqtining eng yuqori chegarasi bilan belgilanadi.

Ta'rif 2.3.5. Algoritm *ishlashining o'rtacha vaqti* – funksiyani ixtiyoriy kirish qiymatida ishlash vaqtining o'rtacha qiymati bilan belgilanadi.

Asimptotik belgilanishlar

Algoritmning ishlash vaqtini aniqlash aksariyat hollarda murakkab hisoblanadi. Bunday vaziyatda, ishlash vaqtini taxminiy qiymat bilan hisoblashga to'g'ri keladi. Mazkur holda qurilmaga, amalga oshirilgan algoritmga bog'liqsiz holda algoritmning samaradorligini baholash zarur bo'ladi. *Asimptotik tahlil* ushbu imkoniyatni taqdim etib, algoritmning ishlash vaqtini ifodalovchi matematik vosita hisoblanadi.

Norasmiy ravishda *asimptotik* atamasi qiymatga yoki egri chiziqqa ixtiyoriy yaqinlashishni anglatadi (ya'ni, biror chegara olinganligi sababli). Berilgan E egri chiziqqa asimptotik bo'lgan chiziq yoki A egri chiziq – E ning *asimptotasi* deyiladi. Masalan, 2.1-rasmda $y = 0.5$ chiziqqa asimptotik bo'lgan ikkita egri chiziq aks ettirilgan. Birinchisi [0,1] kamayish tartibida bo'lsa, ikkinchisi [0,0] dan o'sish tartibida.



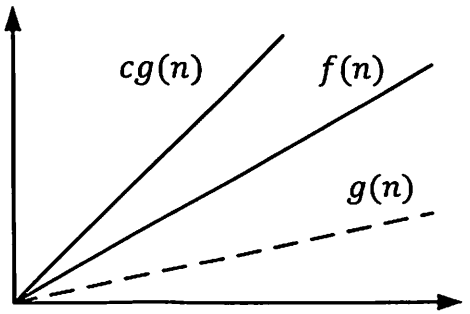
2.1-rasm. **Asimptotik egri chiziqlar**

Asimptotik tahlil cheklangan xatti harakatlarni tavsiflash usuli. Masalan, n ning qiymati juda katta bo'lgan holat uchun $f(n)$ funksiya

xususiyatlarini olaylik. Agar $f(n) = n^2 + 3n$ shaklida bo'lsa va n ning qiymati juda katta bo'lganda, ifodadagi $3n$ had n^2 hadga nisbatan ahamiyatini yo'qotadi. Yoki, $n \to \infty$ uchun $f(n)$ funksiya n^2 ga asimptotik ekvivalent deb aytish mumkin va bu odatda $f(n) \sim n^2$ shaklida belgilanadi.

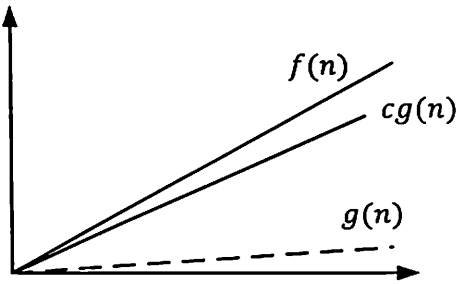
Keyinchalik foydalanish uchun faqat butun musbat sonlar uchun aniqlangan va manfiy bo'lmagan qiymatlarni qaytaruvchi funksiyalar (f va g) qaraladi.

Asimptotik yuqori chegara (katta O belgilanishi). Agar barcha $n \geq n_0$ lar uchun $0 \leq f(n) \leq cg(n)$ shartni qanoatlantiruvchi musbat o'zgarmas c va musbat butun son n_0 mavjud bo'lsa, $f(n) = O(g(n))$ o'rinli. Bu yerda, $f(n) = O(g(n))$ ning ma'nosi o'zgarmasga ko'paytirilgan hol uchun f funksiya $g(n)$ ga nisbatan tezkor asimptotik emas. Algoritm ishlashining eng yomon vaqtini hisoblashda asimptotik yuqori chegaradan foydalaniladi (2.2-rasm).



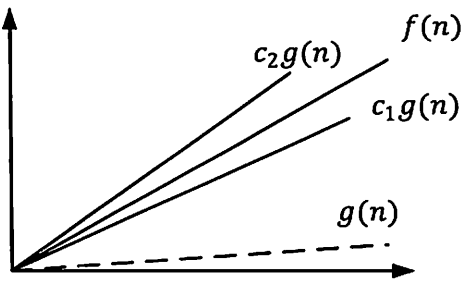
2.2-rasm. **Katta *O* belgilanishi**

Asimptotik quyi chegara (Ω belgilanish). Agar barcha $n \geq n_0$ lar uchun $0 \leq cg(n) \leq f(n)$ shartni qanoatlantiruvchi musbat o'zgarmas c va musbat butun son n_0 mavjud bo'lsa, $f(n) = \Omega(g(n))$ o'rinli. Bu yerda, $f(n) = \Omega(g(n))$ ning ma'nosi $f(n)$ funksiya o'zgarmasga ko'paytirilgan hol uchun kamida $g(n)$ kabi tez o'sishini anglatadi. Algoritm ishlashining eng yaxshi vaqtini hisoblashda asimptotik quyi chegaradan foydalaniladi (2.3-rasm).



2.3-rasm. **Ω belgilanish**

Asimptotik qat'iy chegara (Θ belgilanish). Agar barcha $n \geq n_0$ lar uchun $c_1 g(n) \leq f(n) \leq c_2 g(n)$ shartni qanoatlantiruvchi musbat o'zgarmas c_1, c_2 va musbat butun son n_0 mavjud bo'lsa, $f(n) = \Theta(g(n))$ o'rinli (2.4-rasm).



2.4-rasm. **Θ belgilanish**

Kichik o belgilanishi. Agar barcha $n \geq n_0$ larda $0 \leq f(n) < cg(n)$ shartni qanoatlantiruvchi musbat o'zgarmas $c > 0$ uchun musbat $n_0 > 0$ o'zgarmas mavjud bo'lsa, $f(n) = o(g(n))$ o'rinli. Bu yerda, $f(n) = o(g(n))$ ning ma'nosi $g(n)$ funksiya $g(n)$ uchun asimptotik qat'iy bo'lmagan yuqori chegara. Ya'ni, n ning qiymati ortishi bilan $f(n)$ funksiyaning $g(n)$ ga bog'liqligi kamayib boradi.

Yuqoridagi belgilanishlar qator xususiyatlarga ega. Ixtiyoriy $f(n)$, $g(n)$, $h(n)$ va $l(n)$ funksiyalar uchun quyidagilar o'rinli:

1. Agar faqat va faqat $g(n) = \Omega(f(n))$ o'rinli bo'lsa, $f(n) = O(g(n))$ o'rinli bo'ladi.

2. Agar faqat va faqat $f(n) = O(g(n))$ va $f(n) = \Omega(g(n))$ o'rinli bo'lsa, $f(n) = \Theta(g(n))$ o'rinli bo'ladi.

3. Agar $f(n) = O(h(n))$ va $g(n) = O(h(n))$ bo'lsa, u holda $(f + g)(n) = O(h(n))$ o'rinli bo'ladi.

4. Agar $f(n) = O(h(n))$ va $g(n) = O(l(n))$ bo'lsa, u holda $(f \cdot g)(n) = O(h(n)l(n))$ o'rinli bo'ladi.

5. *(Reflektivlik)* $f(n) = O(f(n))$.

6. *(Tranzitivlik)* Agar $f(n) = O(g(n))$ va $g(n) = O(h(n))$ bo'lsa, $f(n) = O(h(n))$ o'rinli bo'ladi.

Asimptotik tahlil algoritmlarning ishlash vaqtlarini hisoblashda foydalanilib, quyida misol sifatida "Chiziqli qidirish (Linear Search)" algoritmi uchun qo'llanilgan. Algoritmni baholashni quyidagi holatlarda ko'rib chiqamiz:

1) Algoritm ishlashining eng yomon vaqti.
2) Algoritm ishlashining o'rtacha vaqti.
3) Algoritm ishlashining eng yaxshi vaqti.

"Chiziqli qidirish" algoritmi *C* dasturlash tilida quyidagicha amalga oshirilgan bo'lsin:

```
#include <bits/stdc++.h>
using namespace std;
// arr[] ichidan x ni chiziqli qidirish.
// Agar x bor bo'lsa, uning joylashgan o'rni
qaytariladi,
// aks holda -1 qaytariladi.
int search(int arr[], int n, int x)
{
int i;
for (i = 0; i < n; i++) {
    if (arr[i] == x)
        return i;
}
return -1;
}
```

```
// Foydalanish kodi
int main()
{
int arr[] = { 1, 10, 30, 15 };
int x = 30;
int n = sizeof(arr) / sizeof(arr[0]);
cout << x << " element "
    << search(arr, n, x) << " o'rinda
joylashgan";
getchar();
return 0;
}
```

Algoritm ishlashining eng yomon vaqti. Algoritm ishlash vaqtining eng yomon vaqtini bilish uchun asimptotik yuqori chegarani hisoblash zarur bo'ladi. Chiziqli qidiruvda algoritm ishlashining eng yomon vaqti izlanayotgan x element to'plamda mavjud bo'lmaganida yuz beradi. Boshqacha aytganda, x element to'plamda mavjud bo'lmaganida algoritm barcha elementlar bilan taqqoslashni amalga oshiradi. Shuning uchun chiziqli qidiruv algoritmining eng yomon ishlash vaqti $O(n)$ ga teng bo'ladi.

Algoritm ishlashining o'rtacha vaqti. Algoritm ishlashining o'rtacha vaqtini hisoblash uchun, barcha kirishlar uchun vaqtlarni aniqlash va ularni o'rtachasini hisoblash talab etiladi. Buning uchun esa, qidirilayotgan elementlarning taqsimlanishini bilish shart. Agar chiziqli qidirishda izlanuvchi barcha elementlarni tekis taqsimot qonuniga bo'ysinadi deb faraz qilsak, barcha holatlarni yig'ish va uni $(n + 1)$ ga bo'lishning o'zi yetarli bo'ladi:

$$T = \frac{\sum_{i=1}^{n+1} \theta(i)}{n+1} = \frac{\theta((n+1)*(n+2)/2)}{n+1} = O(n).$$

Algoritm ishlashining eng yaxshi vaqti. Algoritm ishlash vaqtining eng yomon vaqtini bilish uchun asimptotik quyi chegarani hisoblash zarur bo'ladi. Ya'ni, amalga oshiriluvchi minimal amallar sonini bilish talab

etiladi. Chiziqli qidirishda mazkur holat izlanayotgan element birinchi o'rinda joylashganda yuzaga keladi. Mazkur holatda, amallar soni o'zgarmas bo'ladi (n ga bog'liq bo'lmaydi) hamda $\Omega(1)$ ga teng bo'ladi.

2.2. Sonlar nazariyasi

Mazkur bo'limda ko'rib o'tiladigan amallar butun sonlar (butun sonlar to'plami $\mathbb{Z}$ bilan belgilanib, $\{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$ sonlardan iborat) ustida amalga oshiriladi.

Ta'rif 2.4.1. Faraz qilaylik, a, b butun sonlar bo'lsin. U holda, agar $b = ac$ shartni qanoatlantiruvchi biror c soni mavjud bo'lsa, *a soni b ni bo'luvchisi* (bo'ladi) deb aytiladi va u $a|b$ kabi belgilanadi.

Masalan, $18 = (-3)(-6)$ ekanligidan $-3|18$ deb yozish mumkin.

Qoida 2.4.1. Sonlarni bo'lishda, $a, b, c \in \mathbb{Z}$ lar uchun quyidagi xususiyatlar o'rinli:

1. $a|a$.

2. Agar $a|b$ va $b|c$ bo'lsa, u holda $a|c$ o'rinli.

3. Agar $a|b$ va $a|c$ bo'lsa, u holda $x, y \in \mathbb{Z}$ lar uchun $a|(bx + cy)$ o'rinli.

4. Agar $a|b$ va $b|a$ bo'lsa, u holda $a = \pm b$.

Ta'rif 2.4.2. Agar a, b $(b \geq 1)$ butun sonlar bo'lsa, u holda a ni b ga bo'lganda bo'linma q ga va qoldiq r ga teng:

$$a = qb + r, \qquad 0 \leq r < b.$$

Bundan tashqari, q va r lar unikal. Bo'linmadagi qoldiq $a\ mod\ b$ shaklida, bo'linma esa $a\ div\ b$ shaklida belgilanadi.

Qoida 2.4.2. Faraz qilaylik, $a, b \in \mathbb{Z}$ va $b \neq 0$. U holda $a\ div\ b = \lfloor a/b \rfloor$ va $a\ mod\ b = a - b\lfloor a/b \rfloor$.

Masalan, agar $a = 73$, $b = 17$ bo'lsa, u holda $q = 4$ va $r = 5$ ga teng. Shuning uchun, $73\ mod\ 17 = 5$ va $73\ div\ 17 = 4$.

Ta'rif 2.4.3. Agar $c|a$ va $c|b$ bo'lsa, u holda c soni a va b sonlarining *umumiy bo'luvchisi* deb aytiladi.

Ta'rif 2.4.4. Agar quyidagi shartlar o'rinli bo'lsa, manfiy bo'lmagan d soni a va b butun sonlarining *eng katta umumiy bo'luvchi (EKUB, greatest common divisor - gcd)* deb aytiladi va $d = gcd(a, b)$ kabi belgilanadi.

1) d soni a va b sonlarining umumiy bo'luvchisi;

2)har doim $c|a$ va $c|b$ bo'lsa, u holda $c|d$ bo'ladi.

Boshqacha aytganda, $gcd(a,b)$ soni a va b ni bo'luvchi eng katta musbat butun son. Xususiy holda, $gcd(0,0) = 0$ ga teng.

Masalan, 12 va 18 sonlarining umumiy bo'luvchilari $\{\pm1, \pm2, \pm3, \pm6\}$ va $gcd(12,18) = 6$ ga teng.

Ta'rif 2.4.5. Agar quyidagi shartlar o'rinli bo'lsa, manfiy bo'lmagan d soni a va b butun sonlarining *eng kichik umumiy karralisi (EKUK, least common multiple - lcm)* deb aytiladi va $d = lcm(a,b)$ kabi belgilanadi.

1)$a|d$ va $b|d$;

2)har doim $a|c$ va $b|c$ bo'lsa, u holda $d|c$ bo'ladi.

Boshqacha aytganda, $lcm(a,b)$ soni a va b ga bo'linuvchi eng kichik qiymatni ko'rsatadi.

Qoida 2.4.3. Agar a va b lar musbat butun sonlar bo'lsa, u holda $lcm(a,b) = a \cdot b/\gcd(a,b)$ ga teng bo'ladi.

Masalan, $\gcd(12,18) = 6$ bois, $lcm(12,18) = 12 \cdot \frac{18}{6} = 36$ ga teng bo'ladi.

Ta'rif 2.4.6. Agar $\gcd(a,b) = 1$ shart o'rinli bo'lsa, u holda ikki a va b sonlar *o'zaro tub sonlar* deb ataladi.

Ta'rif 2.4.7. $p \geq 2$ butun son *tub* deyiladi, agar uning bo'luvchilari faqat 1 va p bo'lsa. Aks holda, p soni *murakkab son* deb aytiladi.

Qoida 2.4.4. Agar p tub son bo'lsa va $p|ab$ o'rinli bo'lsa, u holda $p|a$ yoki $p|b$ (yoki har ikkalasi) o'rinli bo'ladi.

Qoida 2.4.5. Tub sonlar soni cheksiz.

Qoida 2.4.6. Faraz qilaylik, x dan kichik tub sonlar soni $\pi(x)$ ga teng bo'lsin. U holda quyidagi tenglik o'rinli:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\pi(x)}{x/\ln x} = 1.$$

Masalan, $x = 10^{10}$ uchun $\pi(x) = 455\,052\,511$ ga tengligi bois, $\lfloor x/\ln x \rfloor = 434\,294\,481$ o'rinli bo'ladi.

Qoida 2.4.7. x dan kichik tub sonlar soni $\pi(x)$ ga teng bo'lsin. U holda $x \geq 17$ uchun $\pi(x) > \frac{x}{\ln x}$ shart va $x > 1$ uchun $\pi(x) < 1.25506\frac{x}{\ln x}$ shart o'rinli bo'ladi.

Qoida 2.4.8. Har bir $n \geq 2$ butun sonni tub sonlarning daraja ko'rinishidagi ko'paytmasi shaklida ifodalash mumkin:

$$n = {p_1}^{e_1} {p_2}^{e_2} \cdots {p_k}^{e_k}$$

Bu yerda, p_i – bir biridan farqli tub sonlar va e_i – musbat butun sonlar.

Qoida 2.4.9. Agar har bir $e_i \geq 0$ va $f_i \geq 0$ uchun $a = {p_1}^{e_1} {p_2}^{e_2} \cdots {p_k}^{e_k}$, $b = {p_1}^{f_1} {p_2}^{f_2} \cdots {p_k}^{f_k}$ o'rinli bo'lsa, u holda quyidagilarlar o'rinli bo'ladi:

$$\gcd(a,b) = {p_1}^{\min(e_1,f_1)} {p_2}^{\min(e_2,f_2)} \cdots {p_k}^{\min(e_k,f_k)} \text{ va}$$
$$lcm(a,b) = {p_1}^{\max(e_1,f_1)} {p_2}^{\max(e_2,f_2)} \cdots {p_k}^{\max(e_k,f_k)}.$$

Masalan, $a = 4864 = 2^8 \cdot 19, b = 3458 = 2 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 19$. U holda $\gcd(4864, 3458) = 2 \cdot 19 = 38$ va $lcm(4864, 3458) = 2^8 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 19 = 442624$.

Ta'rif 2.4.8. Faraz qilaylik, $n \geq 1$ uchun $[1, n]$ oraliqda n bilan o'zaro tub bo'lgan sonlar miqdori $\phi(n)$ kabi belgilansin. ϕ funksiya *Eylerning fi (phi) funksiyasi* deb ataladi.

Qoida 2.4.10. Eylerning fi funksiya quyidagi xususiyatlar o'rinli:

1)Agar p tub son bo'lsa, u holda $\phi(p) = p - 1$ ga teng.

2)Eylerning fi funksiyasi multiplikativ. Ya'ni, agar $\gcd(m, n) = 1$ bo'lsa, u holda $\phi(mn) = \phi(m) \cdot \phi(n)$ o'rinli.

3)Agar $n = {p_1}^{e_1} {p_2}^{e_2} \cdots {p_k}^{e_k}$ bo'lsa, u holda $\phi(n) = n(1 - \frac{1}{p_1})(1 - \frac{1}{p_2}) \cdots (1 - \frac{1}{p_k})$ ga teng bo'ladi.

Qoida 2.4.11. $n \geq 5$ bo'lgan barcha butun sonlar uchun $\phi(n) > \frac{n}{6 \ln \ln n}$ shart o'rinli bo'lib, $\phi(n)$ funksiya uchun quyi chegarani aniqlaydi.

Qoida 2.4.12. Faraz qilaylik, a va b manfiy bo'lmagan sonlar n dan kichik yoki unga teng bo'lsin. n son b ni ikkilik ko'rinishda taqdim etish uchun kerak bo'lgan bitlar soni $\lfloor \lg n \rfloor + 1$ ga teng bo'ladi va bu son $\lg n$ yaqin. Butun sonlar ustida bajariluvchi to'rt asosiy amallar: qo'shish, ayirish, ko'paytirish va bo'lish, uchun bit amallarining soni quyidagi jadvalda keltirilgan.

2.1-jadval

Amallar va ularning bitlar soni

Amallar	Bit amallari soni
Qo'shish: $a + b$	$O(\lg a + \lg b) = O(\lg n)$
Ayirish: $a - b$	$O(\lg a + \lg b) = O(\lg n)$
Ko'paytirish: $a \cdot b$	$O((\lg a) \cdot (\lg b)) = O((\lg n)^2)$
Bo'lish: $a = qb + r$	$O((\lg q) \cdot (\lg b)) = O((\lg n)^2)$

Qoida 2.4.13. Agar a va b musbat butun sonlar $a > b$ shartni qanoatlantirsa, u holda $\gcd(a, b) = \gcd(b, a \bmod b)$ o'rinli.

Algoritm 2.4.1. **(Ikki butun son uchun EKUBni hisoblashning Evklid algoritmi)**

KIRISH: $a \geq b$ shartni qanoatlantiruvchi a va b musbat butun sonlar

ChIQISH: a va b ning EKUBi

1. $b \neq 0$ holat uchun quyidagilar bajarilsin:

1.1. $r \leftarrow a \bmod b, a \leftarrow b, b \leftarrow r.$

2. a ni qaytarish.

Qoida 2.4.14. EKUBni hisoblashning Evklid algoritmining ishlash vaqti $O((\lg n)^2)$ bit amallari sonini tashkil qiladi.

Masalan, Algoritm 2.4.1 algoritm asosida $\gcd(4864, 3458) = 38$ tengligini ko'rish mumkin:

$4864 = 1 \cdot 3458 + 1406$

$3458 = 2 \cdot 1406 + 646$

$1406 = 2 \cdot 646 + 114$

$646 = 5 \cdot 114 + 76$

$114 = 1 \cdot 76 + 38$

$76 = 2 \cdot 38 + 0$

Shuningdek, yuqorida keltirilgan Evklid algoritmini ikki butun son a va b ni EKUBi bo'lgan d ni va $ax + by = d$ tenglikni qanoatlantiruvchi x va y butun sonlarini topish uchun "kengaytirish" mumkin.

Algoritm 2.4.2. **(Kengaytirilgan Evklid algoritmi)**

KIRISH: $a \geq b$ shartni qanoatlantiruvchi a va b musbat butun sonlar

CHIQISH: $d = \gcd(a, b)$ va $ax + by = d$ tenglikni qanoatlantiruvchi x va y butun sonlari

1. Agar $b = 0$ bo'lsa, u holda $d \leftarrow a$, $x \leftarrow 1$, $y \leftarrow 0$ va (d, x, y) qaytarilsin.
2. Quyidagilar o'rnatilsin: $x_2 \leftarrow 1, x_1 \leftarrow 0, y_2 \leftarrow 0, y_1 \leftarrow 1$.
3. $b > 0$ uchun quyidagilar bajarilsin:

3.1. $q \leftarrow \lfloor a/b \rfloor, r \leftarrow a - qb, x \leftarrow x_2 - qx_1, y \leftarrow y_2 - qy_1$.

3.2. $a \leftarrow b, b \leftarrow r, x_2 \leftarrow x_1, x_1 \leftarrow x, y_2 \leftarrow y_1$ va $y_1 \leftarrow y$.

2. Quyidagilar o'rnatilsin: $d \leftarrow a$, $x \leftarrow x_2$, $y \leftarrow y_2$ va (d, x, y) ni qaytarilsin.

Qoida 2.4.15. Kengaytirilgan Evklid algoritmining ishlash vaqti $O((\lg n)^2)$ bit amallari sonini tashkil qiladi.

Masalan, 2.4.2 algoritm yordamida $a = 4864$ va $b = 3458$ sonlari uchun $\gcd(4864, 3458) = 38$ va $(4864)(32) + (3458)(-45) = 38$ ni hisoblash mumkin:

q	r	x	y	a	b	x_2	x_1	y_2	y_1
-	-	-	-	4864	3458	1	0	0	1
1	1406	1	-1	3458	1406	0	1	1	-1
2	646	-2	3	1406	646	1	-2	-1	3
2	114	5	-7	646	114	-2	5	3	-7
5	76	-27	38	114	76	5	-27	-7	38
1	38	32	-45	76	38	-27	32	38	-45
2	0	-91	128	38	0	32	-91	-45	128

n butun son bo'yicha modul (mod n). Faraz qilaylik n musbat butun son bo'lsin.

Ta'rif 2.4.9. Agar a va b lar butun sonlar bo'lsa, u holda a soni $b \bmod n$ soniga *kongurent* deb aytiladi hamda agar $(a - b)$ soni n ga bo'linsa, $a \equiv b (mod\ n)$ shaklida belgilanadi.

Masalan. $24 - 9 = 3 \cdot 5$ bo'lgani bois $24 \equiv 9\ (mod\ 5)$ o'rinli. Yoki, $-11 - 17 = -4 \cdot 7$ bo'lgani bois $-11 \equiv 17\ (mod\ 7)$ o'rinli bo'ladi.

Kongurentlik xususiyatlari. Barcha $a, a_1, b, b_1, c \in \mathbb{Z}$ lar uchun quyidagilar o'rinli:

1)Agar faqat va faqat a hamda b sonlarini n ga bo'lganda bir xil qoldiq qolsa $a \equiv b \ (mod\ n)$ tenglik o'rinli bo'ladi.

2)(*akslantirish xususiyati*) $a \equiv a \ (mod\ n)$.

3)(*simmetriklik xususiyati*) Agar $a \equiv b \ (mod\ n)$ bo'lsa, u holda $b \equiv a \ (mod\ n)$ o'rinli bo'ladi.

4)(*tranzitivlik xususiyati*) Agar $a \equiv b \ (mod\ n)$ va $b \equiv c \ (mod\ n)$ bo'lsa, u holda $a \equiv c \ (mod\ n)$ o'rinli bo'ladi.

5)Agar $a \equiv a_1 \ (mod\ n)$ va $b \equiv b_1 \ (mod\ n)$ bo'lsa, u holda $a + b \equiv a_1 + b_1 \ (mod\ n)$ va $ab \equiv a_1 b_1 \ (mod\ n)$ o'rinli.

Ta'rif 2.4.10. n butun son bo'yicha modul $\mathbb{Z}_n$ kabi belgilanib, $\{0, 1, 2, \dots, n-1\}$ sonlar to'plamidan iborat bo'ladi. $\mathbb{Z}_n$ da qo'shish, ayirish va ko'paytirish $mod\ n$ bo'yicha amalga oshiriladi.

Masalan, $\mathbb{Z}_{25} = \{0, 1, 2, \dots, 24\}$ bo'lsin. U holda, $\mathbb{Z}_{25}$ da $13 + 16 = 29 \equiv 4 \ (mod\ 25)$ bo'lgani bois, $13 + 16 = 4$ bo'ladi.

Ta'rif 2.4.11. Faraz qilaylik $a \in \mathbb{Z}_n$ bo'lsin. $mod\ n$ bo'yicha a sonining *multiplikativ teskarisi* $x \in \mathbb{Z}_n$ bo'lib, $ax \equiv 1 \ (mod\ n)$ shart o'rinli bo'ladi. Agar x mavjud bo'lsa, u holda u unikal va a ning teskarisi mavjud deyiladi. a ning teskarisi a^{-1} kabi belgilanadi.

Ta'rif 2.4.12. Faraz qilaylik $a, b \in \mathbb{Z}_n$ bo'lsin. $mod\ n$ bo'yicha a ni b ga bo'lish a va b^{-1} ni $mod\ n$ bo'yicha ko'paytirishga teng bo'lib, faqat b soni $mod\ n$ bo'yicha teskarisiga ega bo'lsa joiz bo'ladi.

Qoida 2.4.16. Faraz qilaylik $a \in \mathbb{Z}_n$ bo'lsin. U holda, faqat va faqat $\gcd(a, n) = 1$ bo'lsa, a ning teskarisi mavjud deyiladi.

Masalan, $\mathbb{Z}_9$ uchun 1, 2, 4, 5, 7 va 8 sonlarining teskarisi mavjud. Xususan, $4 \cdot 7 \equiv 1 \ (mod\ 9)$ sababli $4^{-1} = 7$ ga teng.

Qoida 2.4.17. Faraz qilaylik $d = \gcd(a, n)$ bo'lsin. Faqat va faqat b soni d ga bo'linsa, $ax \equiv b \ (mod\ n)$ tenglik x yechimga ega bo'ladi. Bu yerda, d ning qiymati $[0, n-1]$ oraliqda yotadi.

Qoida 2.4.18. (Qoldiqlar haqida Xitoy teoremasi, (Chinese remainder theorem, CRT). Agar $n_1, n_2, \dots, n_k$ butun sonlari juftlikka nisbatan o'zaro tub bo'lsa, u holda quyidagi tengliklar:

$$x \equiv a_1 \ (mod\ n_1)$$
$$x \equiv a_2 \ (mod\ n_2)$$
$$\vdots$$
$$x \equiv a_k \ (mod\ n_k)$$

yagona $n = n_1 n_2 \cdots n_k$ modul yechimiga ega bo'ladi.

Qoida 2.4.19. (Gauss algoritmi). Qoldiqlar haqida Xitoy teoremasidagi $x = \sum_{i=1}^{k} a_i N_i M_i \ mod\ n$ teng. Bu yerda, $N_i = {}^{n}/_{n_i}$ va $M_i = N_i^{-1} \ mod\ n_i$ ga teng. Ushbu hisoblashda $O((\lg n)^2)$ bit amali talab etiladi.

Masalan, 5, 7, 9 va 11 ga bo'lganda qoldiq 1, 2, 3 va 4 bo'ladigan x sonni toping. Mazkur holda quyidagi tenglamalar sistemasini yechish talab qilinmoqda:

$$x \equiv 1 \ (mod\ 5)$$
$$x \equiv 2 \ (mod\ 7)$$
$$x \equiv 3 \ (mod\ 9)$$
$$x \equiv 4 \ (mod\ 11)$$

5, 7, 9 va 11 sonlari juftlikka nisbatan o'zaro tub bo'lgani bois, $n = 5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 11 = 3465$ ga teng. $N_1 = \frac{n}{5} = 693$, $N_2 = \frac{n}{7} = 495$, $N_3 = \frac{n}{9} = 385$ va $N_4 = \frac{n}{11} = 315$. Kichik hisoblashlar orqali $M_1 = 2$, $M_2 = 3$, $M_3 = 4$ va $M_4 = 8$ ga tengligini bilish mumkin. Shuning uchun, $x = (1 \cdot 693 \cdot 2 + 2 \cdot 495 \cdot 3 + 3 \cdot 385 \cdot 4 + 4 \cdot 315 \cdot 8) \ (mod\ 3465) = 19056 (mod\ 3465) = 1731$ ga teng bo'ladi. Bu esa, 1731 ni eng kichik yechim ekanligini ko'rsatadi.

Qoida 2.4.20. Agar $\gcd(n_1, n_2) = 1$ bo'lsa, u holda $x \equiv a \ (mod\ n_1)$ va $x \equiv a \ (mod\ n_2)$ juftlik unikal echim $x \equiv a \ (mod\ n_1 n_2)$ ga ega.

Ta'rif 2.4.13. $\mathbb{Z}_n$ maydonning multiplikativ guruhi $\mathbb{Z}_n^* = \{a \in \mathbb{Z}_n \mid \gcd(a, n) = 1\}$. Xususan, agar n tub bo'lsa, u holda $\mathbb{Z}_n^* = \{a \mid 1 \leq a \leq n - 1\}$ ga teng bo'ladi.

Ta'rif 2.4.14. $\mathbb{Z}_n^*$ *tartibi* undagi elementlar soni bilan aniqlanib, $|\mathbb{Z}_n^*|$ kabi belgilanadi.

Eylerning fi funksiyasiga ko'ra esa $|\mathbb{Z}_n^*| = \phi(n)$ ga teng bo'ladi. Bundan tashqari, agar $a \in \mathbb{Z}_n^*$ va $b \in \mathbb{Z}_n^*$ bo'lsa, $a \cdot b \in \mathbb{Z}_n^*$ o'rinli.

Qoida 2.4.21. Faraz qilaylik $n \geq 2$ bo'lsin.

1)*(Eyler teoremasi)* Agar $a \in \mathbb{Z}_n^*$ bo'lsa, u holda $a^{\phi(n)} \equiv 1 \ (mod\ n)$ ga teng.

2)Agar n turli tub sonlarning ko'paytmasi va $r \equiv s \ (mod\ \phi(n))$ bo'lsa, u holda barcha a butun sonlar uchun $a^r \equiv a^s \ (mod\ n)$ o'rinli bo'ladi. Boshqacha aytganda, modul bilan ishlaganda (masalan, n) daraja $mod\ \phi(n)$ gacha kamayishi kerak.

Masalan, $\phi(12) = 4$ ga teng. Agar $\gcd(a, 12) = 1$ bo'lsa, u holda $a^4 \equiv 1 \ (mod\ 12)$ o'rinli bo'ladi.

Eyler funksiyasining xususiy ko'rinishi Fermaning (kichik) teoremasi hisoblanadi.

Qoida 2.4.22. Faraz qilaylik p soni tub bo'lsin.

1)*(Ferma teoremasi)* Agar $\gcd(a, p) = 1$ bo'lsa, u holda $a^{p-1} \equiv 1 \ (mod\ p)$ o'rinli bo'ladi.

2)Agar $r \equiv s \ (mod\ p - 1)$ o'rinli bo'lsa, u holda barcha a butun sonlar uchun $a^r \equiv a^s \ (mod\ p)$ tenglik o'rinli. Boshqacha aytganda, tub qiymatli modul bilan ishlaganda (masalan, p) daraja $mod\ p - 1$ gacha kamayishi kerak.

3)Xususan, barcha butun son a uchun $a^p \equiv a \ (mod\ p)$ tenglik o'rinli.

Ta'rif 2.4.15. Faraz qilaylik $a \in \mathbb{Z}_n^*$ bo'lsin. a ning *tartibi (order)* $ord(a)$ deb belgilanib, $a^t \equiv 1 \ (mod\ n)$ shartni qanoatlantiruvchi eng kichik musbat t songa teng.

Qoida 2.4.23. Agar $a \in \mathbb{Z}_n^*$ ning tartibi t bo'lsa va $a^s \equiv 1 \ (mod\ n)$ ga teng bo'lsa, u holda s soni t ga bo'linadi. Xususan, $t|\phi(n)$.

Masalan, faraz qilaylik $n = 21$ ga teng. U holda $\mathbb{Z}_{21}^* = \{1, 2, 4, 5, 8, 10, 11, 13, 16, 17, 19, 20\}$. Bundan tashqari, $\phi(21) = \phi(7)\phi(3) = 12 = |\mathbb{Z}_{21}^*|$. U holda $\mathbb{Z}_{21}^*$ dagi elementlarning tartiblari quyidagicha bo'ladi:

$a \in \mathbb{Z}_{21}^*$	1	2	4	5	8	10	11	13	16	17	19	20
a ning tartibi	1	6	3	6	2	6	6	2	3	6	6	2

Ta'rif 2.4.16. Faraz qilaylik $\alpha \in \mathbb{Z}_n^*$ bo'lsin. Agar α ning tartibi $\phi(n)$ ga teng bo'lsa, u holda α – *generator* yoki $\mathbb{Z}_n^*$ ning *primitiv elementi* deyiladi. Agar $\mathbb{Z}_n^*$ generator bo'lsa, u holda $\mathbb{Z}_n^*$ ga nisbatan *siklik* deb aytiladi.

$\mathbb{Z}_n^*$ generatorning xususiyatlari:

1)Faqat va faqat $n = 2, 4, p^k$ yoki $2p^k$ ga teng bo'lsa, u holda $\mathbb{Z}_n^*$ uchun generator mavjud deyiladi. Bu yerda, p *toq tub* son (2 dan tashqari barcha tub sonlar toq tub sonlar deyiladi) va $k \geq 1$. Xususiy holda, agar p tub son bo'lsa, u holda $\mathbb{Z}_n^*$ uchun generator mavjud.

2)Agar $\mathbb{Z}_n^*$ ning generatori α bo'lsa, u holda $\mathbb{Z}_n^* = \{\alpha^i \bmod n \mid 0 \leq i \leq \phi(n) - 1\}$ ga teng.

3)Faraz qilaylik $\mathbb{Z}_n^*$ ning generatori α bo'lsin. U holda, faqat va faqat $\gcd(i, \phi(n)) = 1$ bo'lganida, $b = \alpha^i \bmod n$ ham $\mathbb{Z}_n^*$ ning generatori bo'ladi. Bundan kelib chiqadiki, agar $\mathbb{Z}_n^*$ siklik bo'lsa, u holda generatorlar soni $\phi(\phi(n))$ ga teng bo'ladi.

4)Faqat va faqat $\phi(n)$ ning har bir tub bo'luvchisi p uchun $\alpha^{\phi(n)/2} \not\equiv 1 \bmod(n)$ o'rinli bo'lsa, $\mathbb{Z}_n^*$ ning generatori $\alpha \in \mathbb{Z}_n^*$ bo'ladi.

Masalan, yuqorida keltirilgan $\mathbb{Z}_{21}^*$ siklik bo'lmagani bois ($\phi(21) = 12$ tartibga ega elementi mavjud emasligi uchun), $\mathbb{Z}_n^*$ generatorning 1-xususiyatini qanoatlantirmaydi. Boshqa tomondan, $\mathbb{Z}_{25}^*$ siklik hisoblanadi va unda $\alpha = 2$ generator mavjud (ya'ni, $\phi(25) = 20$ va $2^{20} \bmod 25 = 1$ bo'lgani bois).

Ta'rif 2.4.17. Faraz qilaylik $a \in \mathbb{Z}_n^*$ bo'lsin. Agar $x^2 \equiv a \ (mod\ n)$ shartni qanoatlantiruvchi $x \in \mathbb{Z}_n^*$ mavjud bo'lsa, u holda a element $mod\ n$ bo'yicha *kvadratik qoldiq* deb ataladi. Agar bunday x mavjud bo'lmasa, a element $mod\ n$ bo'yicha *kvadratik bo'lmagan qoldiq* deyiladi. $mod\ n$ bo'yicha barcha kvadratik qoldiqlar to'plami Q_n kabi, barcha kvadratik bo'lmagan qoldiqlar to'plamini esa $\overline{Q_n}$ kabi belgilaylik.

Izoh: $0 \notin \mathbb{Z}_n^*$ bo'lgani bois, $0 \notin Q_n$ va $0 \notin \overline{Q_n}$ o'rinli.

Qoida 2.4.24. Faraz qilaylik p soni toq tub son va $\mathbb{Z}_p^*$ ning generatori α ga teng bo'lsin. U holda, faqat va faqat $a = \alpha^i \ mod\ p$ (bu yerda, i – juft butun son) bo'lsa, u holda $a \in \mathbb{Z}_p^*$ element $mod\ p$ bo'yicha kvadratik qoldiq bo'ladi. Bundan, $|Q_n| = (p-1)/2$ va $|\overline{Q_n}| = (p-1)/2$ ligini bilish mumkin. Boshqacha aytganda, $\mathbb{Z}_p^*$ ning yarim elementi kvadratik qoldiqlar va yarmi esa kvadratik bo'lmagan qoldiqlar.

Masalan, $\mathbb{Z}_{13}^*$ ning generatori $\alpha = 6$ ga teng. α ning darajalari quyidagi jadvalda keltirilgan:

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$\alpha^i \ mod\ 13$	1	6	10	8	9	2	12	7	3	5	4	11

Bundan, $Q_{13} = \{1, 3, 4, 9, 10, 12\}$ va $\overline{Q_{13}} = \{2, 5, 6, 7, 8, 11\}$ ga tengligini ko'rish mumkin.

Qoida 2.4.25. Faraz qilaylik, $n = pq$ soni ikkita toq tub sonlar, p va q larning ko'paytmasi bo'lsin. U holda, faqat va faqat $a \in Q_p$ va $a \in Q_q$ bo'lganida, $a \in \mathbb{Z}_n^*$ soni $mod\ n$ bo'yicha kvadratik qoldiq bo'ladi. Bundan kelib chiqib, $|Q_n| = |Q_p| \cdot |Q_q| = (p-1)(q-1)/4$ va $|\overline{Q_n}| = 3(p-1)(q-1)/4$ tengliklarni yozish mumkin.

Masalan, faraz qilaylik $n = 21$. U holda, $Q_{21} = \{1, 4, 16\}$ va $\overline{Q_n} = \{2, 5, 8, 10, 11, 13, 17, 19, 20\}$ teng bo'ladi.

Ta'rif 2.4.18. Faraz qilaylik, $a \in Q_n$. Agar $x \in \mathbb{Z}_n^*$ son $x^2 \equiv a\ (mod\ n)$ shartni qanoatlantirsa, u holda x soni $mod\ n$ bo'yicha *kvadrat ildiz* deb aytiladi.

Qoida 2.4.26. (kvadrat ildizlar soniga oid)

1)Agar p soni toq tub son va $a \in Q_p$ bo'lsa, u holda a soni $mod\ p$ bo'yicha ikkita kvadrat ildizga ega bo'ladi.

2)Umumiy holda, faraz qilaylik $n = {p_1}^{e_1}{p_2}^{e_2} \cdots {p_k}^{e_k}$. Bu yerda, p_i lar turli tub toq sonlar va $e_1 \geq 1$. Agar $a \in Q_n$ bo'lsa, u holda a soni $mod\ n$ bo'yicha 2^k ta kvadrat ildizga ega bo'ladi.

Masalan, 12 ning mod 37 bo'yicha, kvadrat ildizlari 7 va 30 ga teng. Yoki, 121 ning mod 315 bo'yicha, kvadrat ildizlari 11, 74, 101, 151, 164, 214, 241 va 304 ga teng.

Modul bo'yicha amallar. Faraz qilayik, n musbat butun son bo'lsin. yuqorida aytilgani kabi, $\mathbb{Z}_n$ning elementlari $\{0, 1, 2, \ldots, n-1\}$ butun sonlaridan iborat bo'ladi.

Agar $a, b \in \mathbb{Z}_n$ bo'lsa, u holda

$$(a+b) mod\ n = \begin{cases} a+b, & agar\ a+b < n, \\ a+b-n, & agar\ a+b \geq n. \end{cases}$$

Modul bo'yicha qo'shish (va ayirish) amali yuqorida keltirilgan kabi, ko'p hisoblashlarni talab etmaydi. Xuddi shunga o'xshash, modul bo'yicha a, b sonlarini ko'paytirish mumkin. Ya'ni, ikki son dastlab ko'paytiriladi va uni n ga bo'lishdan olingan qoldiq aniqlanadi. $a \in \mathbb{Z}_n$ sonning teskarisini hisoblashda esa, Evklidning kengaytirilgan algoritmidan foydalaniladi.

Algoritm 2.4.3. **($\mathbb{Z}_n$da sonni multiplikativ teskarisini hisoblash algoritmi).**

KIRISH: $a \in \mathbb{Z}_n$.

CHIQISH: mavjud bo'lish sharti bilan $a^{-1} mod\ n$.

1. Evklidning kengaytirilgan algoritmidan foydalanib, $ax + ny = d$ shartni qanoatlantiruvchi (bu yerda, $d = \gcd(a, n)$) x va y sonlar topilsin.
2. Agar $d > 1$ bo'lsa, u holda $a^{-1} mod\ n$ mavjud emas. Aks holda x qaytarilsin.

Modul bo'yicha darajaga ko'tarishda, quyida keltirilgan takroriy kvadratga oshirish va ko'paytirish algoritmidan foydalaniladi. Faraz qilaylik, k sonining binar ko'rinishi har bir $k_i \in \{0, 1\}$ uchun $\sum_{i=0}^{t} k_i 2^i$ ga teng bo'lsin. U holda,

$a^k = \prod_{i=0}^{t} a^{k_i 2^i} = (a^{2^0})^{k_0} (a^{2^1})^{k_1} \cdots (a^{2^t})^{k_t}$ ga teng bo'ladi.

Algoritm 2.4.4. **($\mathbb{Z}_n$ da takroriy kvadratga oshirish va ko'paytirishni hisoblash algoritmi).**

KIRISH: $a \in \mathbb{Z}_n$ va butun $0 \leq k < n$ sonning binar ko'rinishi $k = \sum_{i=0}^{t} k_i 2^i$.

CHIQISH: $a^k mod\ n$.

1. $b \leftarrow 1$ o'rnatilsin. Agar $k = 0$ bo'lsa, b qaytarilsin.

2. $A \leftarrow a$ o'rnatilsin.
3. Agar $k_0 = 1$ bo'lsa, $b \leftarrow a$ o'rnatilsin.
4. $1 \leq i < t$ uchun quyidagilar bajarilsin:
   4.1. $A \leftarrow A^2 \ mod \ n$ o'rnatilsin.
   4.2. Agar $k_i = 1$ bo'lsa, u holda $b \leftarrow A \cdot b \ mod \ n$ o'rnatilsin.
5. b qaytarilsin.

Masalan, quyida $5^{596} \ mod \ 1234 = 1013$ tenglikni batafsil yechimi keltirilgan.

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
k_i	0	0	1	0	1	0	1	0	0	1
A	5	25	625	681	1011	369	421	779	947	925
b	1	1	625	625	67	67	1059	1059	1059	1013

$\mathbb{Z}_n$ da fundamental amallar uchun bit sathidagi amallar soni 2.2-jadvalda aks ettirilgan.

2.2-jadval

$\mathbb{Z}_n$ da fundamental amallar va ularning bitlar soni

Amallar	Bit amallari soni
Modul bo'yicha qo'shish: $(a + b) \ mod \ n$	$O(\lg n)$
Modul bo'yicha ayirish: $(a - b) mod \ n$	$O(\lg n)$
Modul bo'yicha ko'paytirish: $(a \cdot b) mod \ n$	$O((\lg n)^2)$
Modul bo'yicha teskarilash: $a^{-1} \ mod \ n$	$O((\lg n)^2)$
Modul bo'yicha darajaga oshirish: $a^k \ mod \ n, k < n$	$O((\lg n)^3)$

Lejandr va Yakobi belgilari. Lejandr belgisi tub bo'lgan p soni bo'yicha modulda a sonini kvadratik qoldiq ekanligini aniqlashda foydalaniladi.

Ta'rif 2.4.19. Faraz qilaylik p toq tub son va a soni butun son bo'lsin. U holda Lejandr belgisi $\left(\frac{a}{p}\right)$ quyidagicha aniqlanadi:

$$\left(\frac{a}{p}\right) = \begin{cases} 0, & agar\ p|a\ bo'lsa, \\ 1, & agar\ a \in Q_p\ bo'lsa, \\ -1, & agar\ a \in \overline{Q_p}\ bo'lsa. \end{cases}$$

Qoida 2.4.27. (Lejandr belgisining xususiyatlari). Faraz qilaylik, p toq tub son va $a, b \in \mathbb{Z}$ bo'lsin. U holda Lejandr belgisi quyidagi xususiyatlarga ega:

1) $\left(\frac{a}{p}\right) \equiv a^{\frac{p-1}{2}} (mod\ p)$. Xususan, $\left(\frac{1}{p}\right) = 1$ va $\left(\frac{-1}{p}\right) = (-1)^{(p-1)/2}$. Shu sababli, agar $p \equiv 1 (mod\ 4)$ bo'lsa, $-1 \in Q_p$ va agar $p \equiv 3 (mod\ 4)$ bo'lsa, $-1 \in \overline{Q_p}$ bo'ladi.

2) $\left(\frac{ab}{p}\right) = \left(\frac{a}{p}\right)\left(\frac{b}{p}\right)$. Shu sababli, agar $a \in \mathbb{Z}_p^*$ bo'lsa, u holda $\left(\frac{a^2}{p}\right) = 1$ o'rinli.

3) Agar $a \equiv b (mod\ p)$ bo'lsa, u holda $\left(\frac{a}{p}\right) = \left(\frac{b}{p}\right)$ o'rinli bo'ladi.

4) $\left(\frac{2}{p}\right) = (-1)^{(p^2-1)/8}$. Shu sababli, agar $p \equiv 1\ yoki\ 7 (mod\ 8)$ bo'lsa, $\left(\frac{2}{p}\right) = 1$ va agar $p \equiv 3\ yoki\ 5 (mod\ 8)$ bo'lsa, $\left(\frac{2}{p}\right) = -1$ ga teng bo'ladi.

5) *(kvadratik qoldiqlarning o'zaro bog'liqlik qonuni).* Agar q soni p dan farqli toq tub son bo'lsa, u holda quyidagi o'rinli:

$$\left(\frac{p}{q}\right) = \left(\frac{q}{p}\right)(-1)^{(p-1)(q-1)/4}.$$

Boshqacha aytganda, p va q lar $3\ mod\ 4$ ga kongurent bo'lsa, $\left(\frac{p}{q}\right) = -\left(\frac{q}{p}\right)$, aks holda $\left(\frac{p}{q}\right) = \left(\frac{q}{p}\right)$ o'rinli bo'ladi.

Yakobi belgisi n butun son bo'lgandagi (ya'ni, n soni toq, biroq tub bo'lishi shart emas) Lejandr belgisining umumiy ko'rinishi hisoblanadi.

Ta'rif 2.4.20. Faraz qilaylik, $n \geq 3$ soni toq va asosi tub bo'lgan faktorlash $n = {p_1}^{e_1}{p_2}^{e_2} \cdots {p_k}^{e_k}$ ko'rinishga ega bo'lsin. U holda *Yakobi belgisi* $\left(\frac{a}{n}\right) = \left(\frac{a}{p_1}\right)^{e_1}\left(\frac{a}{p_2}\right)^{e_2} \cdots \left(\frac{a}{p_k}\right)^{e_k}$ ga teng bo'ladi. Agar n soni tub bo'lganida, Yakobi belgisi Lejandr belgisiga teng bo'ladi.

Qoida 2.4.28. (Yakobi belgisining xususiyatlari) Faraz qilaylik $m \geq 3$, $n \geq 3$ bo'lgan toq sonlar va $a, b \in \mathbb{Z}$ bo'lsin. U holda Yakobi belgisi quyidagi xususiyatlarga ega:

1) $\left(\frac{a}{n}\right) = 0, 1, yoki -1$. Xususan, faqat va faqat $\gcd(a,n) \neq 1$ bo'lsa, $\left(\frac{a}{n}\right) = 0$ bo'ladi.

2) $\left(\frac{ab}{n}\right) = \left(\frac{a}{n}\right)\left(\frac{b}{n}\right)$. Shu sababli, agar $a \in \mathbb{Z}_n^*$ bo'lsa, u holda $\left(\frac{a^2}{n}\right) = 1$.

3) $\left(\frac{a}{mn}\right) = \left(\frac{a}{m}\right)\left(\frac{a}{n}\right)$.

4) Agar $a \equiv b \ (mod\ n)$ bo'lsa, u holda $\left(\frac{a}{n}\right) = \left(\frac{b}{n}\right)$.

5) $\left(\frac{1}{n}\right) = 1$.

6) $\left(\frac{-1}{n}\right) = (-1)^{(n-1)/2}$. Shu sababli, agar $n \equiv 1 \ (mod\ 4)$ bo'lsa, $\left(\frac{-1}{n}\right) = 1$ va agar $n \equiv 3 \ (mod\ 4)$ bo'lsa, $\left(\frac{-1}{n}\right) = -1$ ga teng.

7) $\left(\frac{2}{n}\right) = (-1)^{(n^2-1)/8}$. Shu sababli, agar $n \equiv 1\ yoki\ 7 \ (mod\ 8)$ bo'lsa, $\left(\frac{2}{n}\right) = 1$ va agar $n \equiv 3\ yoki\ 5 \ (mod\ 8)$ bo'lsa, $\left(\frac{2}{n}\right) = -1$ ga teng.

8) $\left(\frac{m}{n}\right) = \left(\frac{n}{m}\right)(-1)^{(m-1)(n-1)/4}$. Boshqacha aytganda, m va n lar $3\ mod\ 4$ ga kongurent bo'lsa, $\left(\frac{m}{n}\right) = -\left(\frac{n}{m}\right)$, aks holda $\left(\frac{m}{n}\right) = \left(\frac{n}{m}\right)$ o'rinli bo'ladi.

Yakobi belgisining xususiyatidan kelib chiqqan holda, agar n toq va $a = 2^e a_1$ bo'lsa (bu yerda, a_1 toq), u holda $\left(\frac{a}{n}\right) = \left(\frac{2^e}{n}\right)\left(\frac{a_1}{n}\right) = \left(\frac{2}{n}\right)^e \left(\frac{n \bmod a_1}{a_1}\right)(-1)^{(a_1-1)(n-1)/4}$ ga teng bo'ladi.

$\left(\frac{a}{n}\right)$ hisoblashning n sonini tub sonning darajasi shaklida ifodalamasdan, quyida keltirilgan rekursiv algoritm yordamida hisoblash mumkin.

Algoritm 2.4.5. **(Yakobi (yoki Lejandr) belgisini hisoblash algoritmi).**

IACOBI(a,n)

KIRISH: toq $n \geq 3$ butun son va a butun son $(0 \leq a < n)$.

CHIQISH: Yakobi belgisi $\left(\frac{a}{n}\right)$ (agar n soni tub bo'lsa, Lejandr belgisi bo'ladi)

1. Agar $a = 0$ bo'lsa, 0 qaytarilsin.
2. Agar $a = 1$ bo'lsa, 1 qaytarilsin.
3. Tub bo'lgan a_1 uchun, $a = 2^e a_1$ shaklida yozilsin.
4. Agar e juft bo'lsa, u holda $s \leftarrow 1$ o'rnatilsin. Aks holda, agar $n \equiv 1\ yoki\ 7\ (mod\ 8)$ bo'lsa, $s \leftarrow 1$ yoki agar $n \equiv 3\ yoki\ 5\ (mod\ 8)$ bo'lsa, $s \leftarrow -1$ o'rnatilsin.
5. Agar $n \equiv 3\ (mod\ 4)$ va $a_1 \equiv 3\ (mod\ 4)$ bo'lsa, u holda $s \leftarrow -s$ o'rnatilsin.
6. $n_1 \leftarrow n\ mod\ a_1$.
7. Agar $a_1 = 2$ bo'lsa, u holda s qaytarilsin. Aks holda, $(s \cdot JACOBI(n_1, a_1))$ qaytarilsin.

Yuqorida keltirilgan algoritmning ishlash vaqti $O((\lg n)^2)$ bit amallari soniga teng.

Masalan, $a = 158$ va $n = 235$ uchun, 2.4.5 algoritm yordamida Yakobi belgisi $\left(\frac{158}{235}\right)$ ni hisoblash quyidagicha bo'ladi:

$$\left(\frac{158}{235}\right) = \left(\frac{2}{235}\right)\left(\frac{79}{235}\right) = (-1)\left(\frac{235}{79}\right)(-1)^{78\cdot\frac{234}{4}} = \left(\frac{77}{79}\right) = \left(\frac{79}{77}\right)(-1)^{76\cdot 78/4} = \left(\frac{2}{77}\right) = -1.$$

Lejandr belgisidan farqli ravishda Yakobi belgisi $\left(\frac{a}{n}\right)$ son a ni $mod\ n$ uchun kvadratik qoldiqligi yoki emasligini ko'rsatmaydi.

Biroq, quyidagi jadvalda $\mathbb{Z}_{21}^*$ maydon elementlari va ularning Yakobi belgilari keltirilgan. Yuqorida keltirilgan misolga keltirilgani kabi, $Q_{21} = \{1, 4, 16\}$ ga teng bo'ladi. Kuzatish natijasida, $\left(\frac{5}{21}\right) = 1$, biroq $5 \notin Q_{21}$ligini bilish mumkin.

$a \in \mathbb{Z}_{21}^*$	1	2	4	5	8	10	11	13	16	17	19	20
$a^2\ mod\ n$	1	4	16	4	1	16	16	1	4	16	4	1
$\left(\frac{a}{3}\right)$	1	-1	1	-1	-1	1	-1	1	1	-1	1	-1

$\left(\frac{a}{7}\right)$	1	1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	-1	-1
$\left(\frac{a}{21}\right)$	1	-1	1	1	-1	-1	-1	-1	1	1	-1	1

Blum butun sonlari. Blum soni har biri $3 \, mod \, 4$ ga kongurent bo'lgan turli p va q sonlarning ko'paytmasi $n = pq$ ga teng.

Qoida 2.4.29. Faraz qilaylik $n = pq$ Blum soni va $a \in Q_n$ butun bo'lsin. U holda a uchun aniq 4 ta son $mod \, n$ bo'yicha kvardartik ildiz mavjud bo'ladi va ulardan faqat bittasi Q_n ga tegishli bo'ladi. Q_n dagi a ning kvadratik ildizi, *asosiy kvadratik ildiz* deb ataladi.

Masalan, $n = 21$ ga teng bo'lgan Blum soni uchun, $J_n = \{1, 4, 5, 16, 17, 20\}$ va $\bar{Q}_n = \{5, \ 17, \ 20\}$. Bunda, a ning to'rt kvadratik ildizi 2, 5, 16 va 19 bo'lib, ulardan faqat 16 ga teng element Q_{21} ga tegishli. Shuning uchun, 16 ga teng bo'lgan element $4 \, mod \, 21$ ga asosiy kvadratik ildiz deb ataladi.

Qoida 2.4.30. Agar $n = pq$ Blum soni bo'lsa, u holda $f(x) = x^2 \, mod \, n$ ko'rinishidagi $f: Q_n \to Q_n$ funksiya o'rin almashtirishni amalga oshiradi. f funksiyaning teskarisi $f^{-1}(x) = x^{((p-1)(q-1)+4)/8} \, mod \, n$ ga teng bo'ladi.

2.3. Fundamental algebra asoslari

Ta'rif 2.5.1. S to'plamda $*$ *binar amali* $S \times S$ dan S ga akslantirishni amalga oshiradi. Ya'ni, $*$ amali S dan elementlarning har bir talab qilingan jufti uchun S dan biror elementni belgilaydigan qoida.

Ta'rif 2.5.2. Guruh (G,)* to'plam G bilan $*$ binar amaldan iborat bo'lib, G quyidagi 3 ta aksiomaga ega:

1)Guruh amali assotsiativ. Ya'ni, barcha $a, b, c \in G$ uchun $a * (b * c) = (a * b) * c$ tenglik o'rinli.

2)$1 \in G$ element mavjud bo'lib, u *birlik elemement* deb ataladi. Ya'ni, barcha $a \in G$ uchun $a * 1 = 1 * a = a$ tenglik o'rinli.

3)Har bir $a \in G$ element uchun a ning *teskarisi* deb ataluvchi $a^{-1} \in G$ element mavjud. Ya'ni, $a * a^{-1} = a^{-1} * a = 1$ tenglik o'rinli.

4)Agar guruh G barcha $a, b \in G$ lar uchun $a * b = b * a$ tenglikni qanoatlantirsa, u holda *kommunikativ* (yoki abelev) guruh deb ataladi.

Izoh. Izoh o'rnida shuni aytish lozimki, multiplikativ guruh belgisi faqat guruh amali sifatida foydalaniladi. Agar guruh amali qo'shish bo'lsa, u holda guruh qo'shishga asoslangan guruh deyiladi hamda birlik element 0 ga teng bo'lib, a ning teskarisi $-a$ kabi belgilanadi.

Ta'rif 2.5.3. Agar $|G|$ chekli bo'lsa, G to'plam *chekli* deb ataladi. Chekli guruhdagi elementlar soni uning *tartibi* deb ataladi.

Masalan, qo'shish amaliga ega butun sonlar to'plami $\mathbb{Z}$ dan iborat guruh bo'lsin. Bunda, birlik element 0 ga va a elementning teskarisi $-a$ ga teng bo'ladi.

Bundan tashqari, $mod\ n$ bo'yicha qo'shish amaliga ega butun sonlar to'plami $\mathbb{Z}_n$ dan iborat guruh bo'lsa, uning tartibi n ga teng bo'ladi. Yoki, $mod\ n$ bo'yicha ko'paytirish amali va butun sonlar to'plami $\mathbb{Z}_n$ dan iborat guruh bo'la olmaydi. Buning sababi, har bir element uchun teskari elementni mavjud emasligi hisoblanadi. Biroq, $\mathbb{Z}_n^*$ guruh bo'lib, multiplikativ $mod\ n$ uchun $\phi(n)$ tartibga ega va birlik elementi 1 ga teng.

Ta'rif 2.5.4. Agar H guruh bo'lib, G guruh amaliga bo'ysinsa, G guruhning bo'sh bo'lmagan qismto'plami H guruh G ning *qismguruhi* deb ataladi. Agar, H guruh G ning qismguruhi va $H \neq G$ bo'lsa, u holda H guruh G ning *xususiy* qismguruhi deb ataladi.

Ta'rif 2.5.5. Agar har bir $b \in G$ uchun butun son i bilan $b = a^i$ shartni qanoatlantiruvchi $a \in G$ element mavjud bo'lsa, u holda G guruh *siklik* deb ataladi. a element esa G guruhning *generatori* deb ataladi.

Qoida 2.5.1. Agar G guruh va $a \in G$ bo'lsa, u holda a ning barcha darajalari to'plami G ning siklik qismguruhlarini shakllantiradi va ular a tomonidan generatsiya qilingan qismguruhlar deb atalib, $\langle a \rangle$ shaklida belgilanadi.

Ta'rif 2.5.6. G guruh va $a \in G$ bo'lsin. a ning tartibi $a^t = 1$ shartni qanoatlantiruvchi eng kichik musbat t bilan belgilanadi. Agar bunday t mavjud bo'lmasa, a ning tartibi ∞ kabi belgilanadi.

Qoida 2.5.2. G guruh va $a \in G$ element chekli t tartibga ega bo'lsin. U holda $|\langle a \rangle|$, a tomonidan generatsiya qilingan qismguruhlarni sonini ko'rsatib, t ga teng bo'ladi.

Qoida 2.5.3. (Lagranj teoremasi) Agar G chekli guruh va H uning qism guruhi bo'lsa, u holda $|H|$ qiymat $|G|$ qiymatni bo'luvchisi bo'ladi. Shu sababli, agar $a \in G$ bo'lsa, a ning tartibi $|G|$ qiymatni bo'luvchisi bo'ladi.

Qoida 2.5.4. Siklik guruh G ning har bir qism guruhi ham siklik bo'ladi. Agar G siklik guruh n tartibga ega bo'lsa, u holda n ning har bir musbat bo'luvchi d uchun, G guruh d tartibga ega bo'lgan aniq bir qismguruhdan tashkil topgan.

Qoida 2.5.5. Faraz qilaylik G guruh bo'lsin.

1)Agar $a \in G$ ning tartibi t ga teng bo'lsa, u holda a^k ning tartibi $\frac{t}{\gcd(t,k)}$ ga teng bo'ladi.

2)Agar G guruh n tartibga ega va $d|n$ bo'lsa, u holda G da d tartibli $\phi(d)$ ta elementlar mavjud.

Masalan, $\mathbb{Z}_{19}^* = \{1, 2, \ldots, 18\}$ tartibi 18 ga teng bo'lgan multiplikativ guruh bo'lsin. Guruh siklik va $\alpha = 2$ generatorga ega. $\mathbb{Z}_{19}^*$ ning qismguruhlari va uning generatorlari quyidagi jadvalda keltirilgan:

Qism guruh	Generatorlar	Tartibi
$\{1\}$	1	1
$\{1, 18\}$	18	2
$\{1, 7, 11\}$	7, 11	3
$\{1, 7, 8, 11, 12, 18\}$	8, 12	6
$\{1, 4, 5, 6, 7, 9, 11, 16, 17\}$	4, 5, 6, 9, 16, 17	9
$\{1, 2, 3, \ldots, 18\}$	2, 3, 10, 13, 14, 15	18

Xalqa

Ta'rif 2.5.7. Xalqa $(R, +, \times)$ to'plam R va ikkita, qo'shish $(+)$, ko'paytirish $(\times)$ kabi binar amallardan iborat bo'lib, quyidagi aksiomalar o'rinli:

1. $(R, +, \times)$ – birlik elementi 0 ga teng bo'lgan kommutativ guruh.

2. $\times$ amali assotsiativ. Ya'ni, barcha $a, b, c \in R$ uchun $a \times (b \times c) = (a \times b) \times c$ tenglik o'rinli.

3. Multiplikativ 1 ga teng bo'lgan birlik element mavjud, ya'ni, barcha $a \in R$ uchun $1 \times a = a \times 1 = a$.

4. + amali uchun × amali taqsimot qonuniyatiga ega, ya'ni, $a, b, c \in R$ uchun $a \times (b + c) = (a \times b) + (a \times c)$ va $(b + c) \times a = (b \times a) + (c \times a)$ tenglik o'rinli.

Agar xalqada barcha $a, b \in R$ lar uchun $a \times b = b \times a$ tenglik o'rinli bo'lsa, u holda xalqaga *kommutativ xalqa* deb aytiladi.

Ta'rif 2.5.8. Agar $a \times b = 1$ shartni qanoatlantiruvchi $b \in R$ mavjud bo'lsa, u holda R xalqaning elementi a *birlik* yoki *teskarisi mavjud element* deb ataladi.

Qoida 2.5.6. R xalqadagi birliklar to'plami multiplikativ guruhni tashkil qilib, R xalqaning *birliklar guruhi* deb nomlanadi.

Masalan, $\mathbb{Z}_n$ xalqaning birliklar guruhi $\mathbb{Z}_n^*$ga teng.

Maydon

Ta'rif 2.5.9. Barcha noldan farqli elementlari multiplikativ teskrisiga ega bo'lgan kommutativ xalqa *maydon* deyiladi.

Ta'rif 2.5.10. Agar ixtiyoriy $m \geq 1$ uchun $\overbrace{1 + 1 + \cdots 1}^{m\ marta}$ tenglik hech qachon 0 ga teng bo'lmasa, u holda maydonning *xarakteristikasi* nol deyiladi. Aks holda, maydonning xarakteristikasi $\sum_{i=1}^{m} 1$ yig'indini nolga teng qiluvchi eng kichik musbat son m ga teng bo'ladi.

Masalan, odatiy qo'shish va ko'paytirish amallari uchun butun sonlar to'plami maydon bo'la olmaydi. Bu yerda, faqat, multiplikativ teskarisiga ega yagona noldan farqli sonlar 1 va -1 ga teng. Biroq, ratsional sonlar $\mathbb{Q}$, real sonlar $\mathbb{R}$ va kompleks sonlar $\mathbb{C}$ odatiy amallar uchun nol xarakteristikali maydonni shakllantiradi.

Qoida 2.5.7. Faqat va faqat n tub son bo'lsa, $\mathbb{Z}_n$ ($mod\ n$ bo'yicha qo'shish va ko'paytirish amallari uchun) maydon bo'ladi. Agar n tub bo'lsa, u holda $\mathbb{Z}_n$ maydon n xaraketristikali maydon deyiladi.

Qoida 2.5.8. Agar maydonning m xarakteristikasi nolga teng bo'lmasa, u holda m – tub son.

Ta'rif 2.5.11. Agar E maydon amallari uchun F ham maydon bo'lsa, E maydonning qism to'plami bo'lgan F uning *qismto'plami* deb ataladi. Boshqacha aytganda, E maydon F maydonning *kengaytirilgani* deb ataladi.

Polinom xalqalar

Ta'rif 2.5.12. Agar R xalqa kommutativ bo'lsa, u holda R xalqa ustida aniqlanmagan x tarkibli *polinom (ko'phad)* quyidagi shaklda ifodalanadi:

$$f(x) = a_n x^n + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

Bu yerda, har bir $a_i \in R$ va $n \geq 0$. a_i element $f(x)$ dagi x^i ning koeffitsienti deyiladi. $a_m \neq 0$ shartdagi eng katta m butun soni $f(x)$ ning *darajasi* deyiladi va $\deg f(x)$ kabi belgilanadi; a_m ning o'zi esa $f(x)$ning *yetakchi koeffitsienti* deyiladi. Agar $f(x) = a_0$ (o'zgarmas polinom) va $a_0 \neq 0$ bo'lsa, $f(x)$ polinom 0 darajaga ega deyiladi. Agar $f(x)$ ning barcha koeffitsientlari nolga teng bo'lsa, u holda *nol polinom* deyiladi va uning darajasi $-\infty$ kabi belgilanadi. Agar $f(x)$ polinomning yetakchi koeffitsienti birga teng bo'lsa, u *birlik (yoki monik) polinom* deyiladi.

Ta'rif 2.5.13. Agar R xalqa kommutativ bo'lsa, $R[x]$ *polinom xalqa* R dan olingan koeffitsientlarga ega aniqlanmagan x tarkibli barcha polinomlar to'plami orqali ifodalanuvchi xalqadir. Polinom ustida bajariluvchi ikki amal esa standart qo'shish va ko'paytirish amali bo'lib, R xalqada koeffitsientlar bilan bajariladi.

Masalan, faraz qilaylik, $f(x) = x^3 + x + 1$ va $g(x) = x^2 + x$ lar $\mathbb{Z}_2[x]$ polinom xalqa elementlari bo'lsin. U holda, ularning yig'indisi va ko'paytmasi quyidagilarga teng bo'ladi:

$$f(x) + g(x) = x^3 + x^2 + 1 \text{ va}$$
$$f(x) \cdot g(x) = x^5 + x^4 + x^3 + x$$

Mazkur bo'limning qolgan qismi uchun, F ni o'zgaruvchan maydon sifatida qaraymiz. $F[x]$ polinom xalqa butun sonlar bilan umumiy bo'lgan ko'plab xususiyatlarga ega.

Ta'rif 2.5.14. Faraz qilaylik, $f(x) \in F[x]$ darajasi kamida 1 bo'lgan polinom bo'lsin. U holda $f(x)$ polinom F bo'ylab *qisqartirilmaydigan* deyiladi, agar uni har birining darajasi musbat bo'lgan $F[x]$ dagi ikki polinomlarning ko'paytmasi shaklida ifodalashning imkoni bo'lmasa.

Ta'rif 2.5.15. (Polinomlar uchun bo'lish algoritmi) Agar $g(x)$, $h(x) \in F[x]$ va $h(x) \neq 0$ bo'lsa, u holda $g(x)$ ni $h(x)$ ga bo'lish

natijasida bir-biriga teng bo'lmagan $F[x]$ dagi $q(x)$ va $r(x)$ polinomlar paydo bo'ladi:

$$g(x) = q(x)h(x) + r(x)$$

Bu yerda, $\deg r(x) < \deg h(x)$ shart o'rinli. Bu yerda, $q(x)$ polinom *bo'linma* va $r(x)$ polinom *qoldiq* deb ataladi. Qoldiq odatda $g(x) mod\, h(x)$ kabi belgilansa, bo'linma esa $g(x) div\, h(x)$ kabi belgilanadi.

Masalan, $\mathbb{Z}_2[x]$ maydonda $g(x) = x^6 + x^5 + x^3 + x^2 + x + 1$ va $h(x) = x^4 + x^3 + 1$ polinomlar bo'lsin. $g(x)$ polinomni $h(x)$ ga bo'lish quyidagicha amalga oshiriladi:

$$g(x) = x^2h(x) + (x^3 + x + 1).$$

Shuning uchun, $g(x) mod\, h(x) = x^3 + x + 1$ va $g(x) div\, h(x) = x^2$ ga teng.

Ta'rif 2.5.16. Agar $g(x)$, $h(x) \in F[x]$ va $g(x) mod\, h(x) = 0$ bo'lsa, u holda $h(x)$ polinom $g(x)$ ni bo'ladi va $h(x)|g(x)$ kabi yoziladi.

Faraz qilaylik, $f(x)$ polinom $F[x]$ dagi o'zgarmas polinom bo'lsin.

Ta'rif 2.5.17. Agar $g(x)$, $h(x) \in F[x]$ va $f(x)$ polinom $g(x) - h(x)$ ning bo'luvchisi bo'lsa, u holda $g(x)$ polinom $h(x) mod\, f(x)$ ga *kongurent* deb ataladi hamda $g(x) \equiv h(x) mod f(x)$ shaklida ifodalanadi.

Qoida 2.5.9. (Kongurentlik xususiyatlari) Barcha $g(x)$, $h(x)$, $g_1(x)$, $h_1(x)$, $s(x) \in F[x]$ lar uchun quyidagilar o'rinli:

1)Agar, faqat va faqat $g(x)$ va $h(x)$ larni $f(x)$ ga bo'lganda, bir xil qoldiq bo'lsa, $g(x) \equiv h(x) mod f(x)$ o'rinli bo'ladi.

2)*(refleksivlik)* $g(x) \equiv g(x) mod\, f(x)$.

3)*(simmetriklik)* Agar $g(x) \equiv h(x)\ mod\, f(x)$ bo'lsa, u holda $h(x) \equiv g(x)\ mod\, f(x)$.

4)*(tranzitivlik)* Agar $g(x) \equiv h(x)\ mod\, f(x)$ va $h(x) \equiv s(x)\ mod\, f(x)$ bo'lsa, u holda $g(x) \equiv s(x)\ mod\, f(x)$ o'rinli bo'ladi.

5)Agar $g(x) \equiv g_1(x)\ mod\, f(x)$ va $h(x) \equiv h_1(x)\ mod\, f(x)$ bo'lsa, u holda $g(x) + h(x) \equiv g_1(x) + h_1(x)\ (mod\, f(x))$ va $g(x)h(x) \equiv g_1(x)h_1(x)(mod\, f(x))$ o'rinli bo'ladi.

Ta'rif 2.5.18. $F[x]$ dagi $n = degf(x)$ dan kichik darajali polinomlar to'plami $F[x]/(f(x))$ kabi belgilanadi. Qo'shish va ko'paytirish $f(x)$ polinom bo'yicha amalga oshiriladi.

Qoida 2.5.10. $F[x]/(f(x))$ – kommutativ xalqa.

Qoida 2.5.11. F bo'ylab $f(x)$ qisqarmas bo'lsa, u holda $F[x]/(f(x))$ maydon.

Vektor fazosi

Ta'rif 2.5.19. F maydoni bo'ylab *vektor fazosi* V kommunikativ guruh $(V, +)$ bo'lib, ko'paytirish amalini madadlaydi: $F \times V \to V$ hamda $a, b \in F$ va $v, w \in V$ uchun quyidagi aksiomalar o'rinli:

1) $a(v + w) = av + aw$.

2) $(a + b)v = av + bv$.

3) $(ab)v = a(bv)$.

4) $iv = v$.

V ning elementlari *chektorlar*, F ning elementlari skalyarlar deyiladi. Guruh amali + *vektorli qo'shish*, ko'paytirish amali *skalyarga ko'paytirish* deb ataladi.

Ta'rif 2.5.20. Faraz qilaylik V maydon F bo'ylab vektor fazosi bo'lsin. V ning *qism fazosi* qo'shish amali uchun qism gruppa U ga teng bo'lib, skalyar ko'paytirishga yaqin, ya'ni: barcha $a \in F$ va $v \in U$ uchun $av \in U$.

Qoida 2.5.12. Vektor fazosining qism fazosi ham vektor fazosi bo'ladi.

Ta'rif 2.5.21. Faraz qilaylik F maydon bo'ylab vektor fazosi V ning chekli qism to'plami $S = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ bo'lsin.

1) Har bir $a_i \in F$ uchun S ning *chiziqli kombinatsiyasi* quyidagicha ifodalanadi: $a_1v_1 + a_2v_2 + \cdots + a_nv_n$.

2) S ning *qobig'i (span, оболочка)* $\langle S \rangle$ kabi belgilanib, S ning barcha chiziqli kombinatsiyalari to'plami hisoblanadi. S ning *qobig'i* V ning qism fazosi bo'ladi.

3) Agar V ning qism fazosi U bo'lsa, u holda agar $\langle S \rangle = U$ bo'lsa, S to'plam U ni qamrab oladi deyiladi.

4) Agar $a_1v_1 + a_2v_2 + \cdots + a_nv_n = 0$ shartni qanoatlantiruvchi, barchasi nol bo'lmagan a_1, a_2, ..., a_n skalyarlar mavjud bo'lsa, u holda S to'plam F bo'ylab *chiziqli bog'liq* deb ataladi. Agar bunday skalyarlar mavjud bo'lmasa, u holda holda S to'plam F bo'ylab *chiziqli bog'liq emas* deb ataladi.

5) Chiziqli bog'liq bo'lmagan vektorlar to'plami, ya'ni, V ning qobig'i V uchun *asos (bazis)* deb ataladi.

Qoida 2.5.13. Faraz qilaylik, V vektor fazosi bo'lsin.

1) Agar V da chekli qobiq to'plam mavjud bo'lsa, u holda unda bazis mavjud bo'ladi.

2) Agar V da bazis mavjud bo'lsa, u holda barcha bazislar teng sonli elementlarga ega bo'ladi.

Ta'rif 2.5.22. Agar V vektor fazosida bazis mavjud bo'lsa, u holda bazisdagi elementlar soni V ning *o'lchovi* deyiladi va $\dim V$ kabi belgilanadi.

Ta'rif 2.5.23. Faraz qilaylik, F ning kengaytirilgan maydoni E bo'lsin. U holda E qism maydon F bo'ylab, vektor fazosi sifatida ko'rinadi. Bu yerda, vektorni qo'shish va skalyarga ko'paytirish E dagi sodda maydon amallari, qo'shish va ko'paytirishdir. Vektor fazosining o'lchami F bo'ylab E ning *darajasi* deb ataladi va $[E:F]$ kabi belgilanadi. Agar daraja chekli bo'lsa, u holda E maydon F ning *chekli kengaytirilgani* deb ataladi.

Qoida 2.5.14. Faraz qilaylik, F, E va L maydonlar bo'lsin. Agar E ning chekli kengaytirilgani L va F ning chekli kengaytirilgani E bo'lsa, u holda L maydon F ning ham chekli kengaytirilgani bo'ladi:

$$[L:F] = [L:E][E:F].$$

Chekli maydon

Ta'rif 2.5.24. Chekli sondagi elementlardan iborat F maydonga *chekli maydon* deb aytiladi. F maydonning *tartibi* undagi elementlar soni bilan belgilanadi.

Qoida 2.5.15. (chekli maydonning mavjudligi va unikalligi haqida)

1) Agar F chekli maydon bo'lsa, u holda biror p tub va $m \geq 1$ butun son uchun F maydon p^m elementdan iborat.

2) Har bir p^m uchun, tartibi p^m bo'lgan unikal chekli maydon mavjud. Bu maydon F_{p^m} kabi yoki ba'zida $GF(p^m)$ kabi belgilanadi.

Boshqacha aytganda, ikki maydon bir xil tuzilishga ega bo'lsa (biroq, maydon elementlarini taqdim etilishi turlicha), ular *izomorfik* deb ataladi. Masalan, agar p soni tub bo'lsa, $\mathbb{Z}_p$ maydon bo'ladi va shuning uchun p tartibdagi har bir maydon $\mathbb{Z}_p$ ga izomorf bo'ladi. Boshqa shartlar mavjud bo'lmaganda, F_p chekli maydonni $\mathbb{Z}_p$ orqali anglash ham mumkin.

Qoida 2.5.16. Agar F_q chekli maydon tartibi $q = p^m$ ga teng va p tub bo'lsa, u holda F_q ning xarakteristikasi p ga teng bo'ladi. Bundan tashqari, F_q qism maydon sifatida $\mathbb{Z}_p$ nusxasidan tashkil topgan. Shuning uchun, F_q chekli maydonga darajasi m bo'lgan $\mathbb{Z}_p$ maydonning kengaytirilgani kabi qarash mumkin.

Qoida 2.5.17. (chekli maydonning qism maydonlari) Faraz qilaylik, F_q chekli maydon tartibi $q = p^m$ ga teng bo'lsin. U holda F_q ning har bir qism maydoni p^n tartibga ega (bu yerda, n soni m ning musbat bo'luvchisi). Aksincha, agar n soni m ning musbat bo'luvchisi bo'lsa, u holda aniq p^n tartibga ega F_q ning qism maydoni mavjud; faqat va faqat $a^{p^n} = a$ bo'lsa, $a \in F_q$ element F_{p^n} qism maydonda ham mavjud bo'ladi.

Ta'rif 2.5.25. F_q ning noldan farqli elementlari ko'paytirish amali bilan $F_q$ning *multiplikativ guruhi*ni shakllantiradi va F_q^* kabi belgilanadi.

Qoida 2.5.18. F_q^* tartibi $q - 1$ ga teng bo'lgan siklik guruh. Shuning uchun barcha $a \in F_q$ lar uchun $a^q = a$ o'rinli.

Ta'rif 2.5.26. Siklik guruh F_q^* ning generatori *asos element* yoki F_q ning generatori deb ataladi.

Qoida 2.5.19. Agar $a, b \in F_q$ bo'lsa, p esa chekli maydon xarakteristikasi bo'lsa, u holda barcha $t \geq 0$ lar uchun quyidagi o'rinli bo'ladi:

$$(a + b)^{p^t} = a^{p^t} + b^{p^t}.$$

AES algoritmida baytlar ustida amallar bajariladi. Baytlar $GF(2^8)$ chekli maydon elementlari sifatida qaraladi. $GF(2^8)$ maydon elementlarini

darajasi 7 dan katta bo'lmagan ko'phad sifatida tasvirlash mumkin. Agarda baytlar

$$\{a_7a_6a_5a_4a_3a_2a_1a_0\}, a_i \in \{0,1\}, i = \overline{0...7},$$

ko'rinishda tasvirlangan bo'lsa, u holda maydon elementlari quyidagicha ko'phad ko'rinishda yoziladi:

$$a_7 \cdot x^7 + a_6 \cdot x^6 + a_5 \cdot x^5 + a_4 \cdot x^4 + a_3 \cdot x^3 + a_2 \cdot x^2 + a_1 \cdot x + a_0.$$

Misol uchun $\{11010101\}$ baytga $x^7 + x^6 + x^4 + x^2 + a_0$ ko'rinishdagi ko'phad mos keladi.

Chekli $GF(2^8)$ maydon elementlari uchun additivlik va multiplikativlik xossalariga ega bo'lgan qo'shish va ko'paytirish amallari aniqlangan.

Ko'phadlarni qo'shish. AES algoritmida ko'phadlarni qo'shish $\oplus$ (XOR) (berilgan ko'phadlarga mos keluvchi ikkilik sanoq sistemasidagi sonlarni mos bitlarini mod 2 bo'yicha qo'shish) amali orqali bajariladi. Masalan $x^7 + x^6 + x^4 + x^2 + x$ va $x^7 + x^5 + x^3 + x + 1$ ko'phadlar natijasi quyidagicha hisoblanadi:

$$(x^7 + x^6 + x^4 + x^2 + x) \oplus (x^7 + x^5 + x^3 + x + 1) = (x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + 1)$$

Bu amal ikkilik va o'n oltilik sanoq sistemalarida quyidagicha ifodalanadi:

$$\{11010110\}_2 \oplus \{10101011\}_2 = \{01111101\}_2 \text{ va } D6_{16} \oplus AB_{16} = 7D_{16}.$$

Chekli maydonda istalgan nolga teng bo'lmagan a element uchun unga teskari bo'lgan $-a$ element mavjud va $a + (-a) = 0$ tenglik o'rinli, bu yerda nol elementi sifatida $\{00\}_{16}$ qaraladi. $GF(2^8)$ maydonda $a \oplus a = 0$ tenglik o'rinli.

Ko'phadlarni ko'paytirish. AES algoritmida ko'phadlarni ko'paytirish quyidagicha amalga oshiriladi:

– ikkita ko'phad o'nlik sanoq sistemasida ko'paytiriladi;

– yettinchi darajadan katta bo'lgan har qanday ko'phadni sakkizinchi darajali $\varphi(x) = x^8 + x^4 + x^3 + x + 1$ keltirilmaydigan ko'phadga bo'lganda qoldiqda yetti va undan kichik bo'lgan darajadagi ko'phadlar hosil bo'lib, ular natija sifatida olinadi, bunda bo'lish jarayonida bajariladigan ayirish amali ikkilik sanoq sistemasida, yuqorida keltirilgani kabi, $\oplus$ amali asosida bajariladi.

2.4. AES simmetrik blokli shifrlash standarti

Amerika qo'shma shtatlarining Standartlar va Texnologiyalar Milliy Instituti (NIST) 1997 yilda XXI asrning ma'lumotlarni kriptografik muhofazalovchi yangi shifrlash algoritmi standartini qabul qilish maqsadida tanlov e'lon qildi. 2001 yilda standart shifrlash algoritmi qilib, RIJNDAEL shifrlash algoritmi asos qilib olingan AES (Advanced Encryption Standard) (FIPS 197) qabul qilindi. Algoritmning yaratuvchilari Belgiyalik mutaxassislar Yon Demen (Joan Daemen) va Vinsent Ryumen (Vincent Rijmen)larning familiyalaridan RIJNDAEL nomi olingan.

RIJNDAEL algoritmi 128, 192 va 256 bitli ma'lumotlar bloklarini shifrlashga mo'ljallangan bo'lib, buning uchun 128, 192 va 256 bitli kalitlardan foydalaniladi. AES standartida esa ochiq matn blokining faqat 128 bitga teng holati olingan. Raundlar soni esa kalit uzunligiga bog'liq bo'ladi. Xususan, AES shifrlash algoritmi raundlar soni N_r, kirish bloklar o'lchami N_b (32 bitli so'zlarda) va kalit uzunligi N_k (32 bitli so'zlarda)larga bog'liq holda 2.3-jadvalga mos holda qo'llaniladi.

2.3-jadval

Rijndael algoritmidagi sozlanishlar parametri

N_r	$N_b = 4$, 128 bit	$N_b = 6$, 192 bit	$N_b = 8$, 256 bit
$N_k = 4$, 128 bit	10	12	14
$N_k = 6$, 192 bit	12	12	14
$N_k = 8$, 256 bit	14	14	14

AES kriptoalgoritmi matematik asosi. AES algoritmida baytlar ustida amallar bajariladi. Baytlar $GF(2^8)$ chekli maydon elementlari sifatida qaraladi. $GF(2^8)$ maydon elementlarini darajasi 7 dan katta bo'lmagan ko'phad sifatida tasvirlash mumkin. Agarda baytlar

$$\{a_7a_6a_5a_4a_3a_2a_1a_0\}, a_i \in \{0,1\}, i = \overline{0 \dots 7},$$

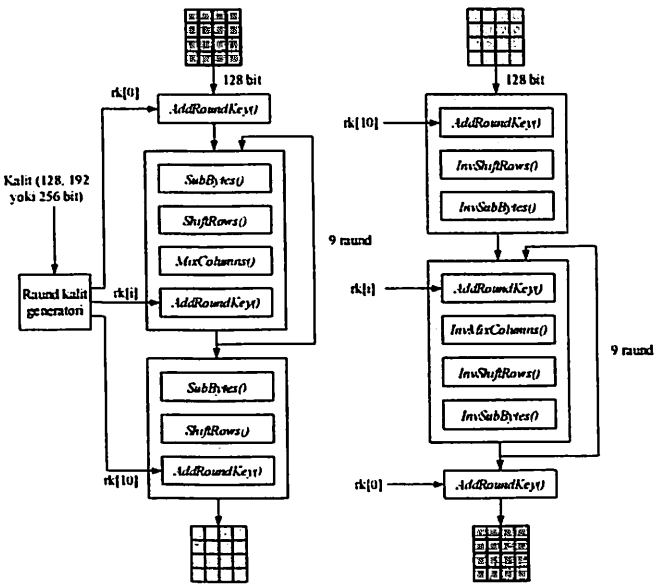
ko'rinishda tasvirlangan bo'lsa, u holda maydon elementlari ko'phad ko'rinishda quyidagicha yoziladi:

$$a_7 \cdot x^7 + a_6 \cdot x^6 + a_5 \cdot x^5 + a_4 \cdot x^4 + a_3 \cdot x^3 + a_2 \cdot x^2 + a_1 \cdot x + a_0.$$

Misol uchun {11010101} baytga $x^7 + x^6 + x^4 + x^2 + 1$ ko'rinishdagi ko'phad mos keladi.

Chekli $GF(2^8)$ maydon elementlari uchun additivlik va multiplikativlik xossalariga ega bo'lgan qo'shish va ko'paytirish amallari aniqlangan.

Shifrlash va rasshifrovkalash jarayoni. AES standartida ma'lumotlarni shifrlash va rasshifrovkalashning umumiy ko'rinishi 2.5-rasmda keltirilgan.



2.5-rasm. **AES standartida ma'lumotni shifrlash va rasshifrovkalash (128 bitli kalit uchun)**

Shifrlash algoritmida quyidagi akslantirishlardan foydalaniladi:

- *AddRoundKey()* – raund kalitlarini qo'shish;
- *SubBytes()* - jadval asosida baytlarni almashtirish;
- *ShiftRows()* – satr bo'yicha siljitish;
- *MixColumns()* – ustunlar bo'yicha aralashtirish.

Rasshifrovkalashda esa shifrlashda foydalanilgan akslantirishlarga teskari akslantirishlardan foydalaniladi:

- *InvSubBytes()* - jadval asosida baytlarni almashtirish;
- *InvShiftRows()* – satr bo'yicha siljitish;

- *InvMixColumns()* – ustunlar bo'yicha aralashtirish.

SubBytes() akslantirishi. *SubBytes()* algoritmda qayd etilgan 16 × 16 o'lchamli jadval asosida baytlarni almashtirish, ya'ni S-blok akslantirishlarini amalga oshiradi. Shifrlash jarayonida foydalanilgan S-blok 2.4-jadvalda, unga teskari bo'lgan va rasshifrovkalashda jarayonida foydalanilgan S-blok esa 2.5-jadvalda keltirilgan.

2.4-jadval

S-blok (16 sanoq tizimida ifodalangan)

	00	**01**	**02**	**03**	**04**	**05**	**06**	**07**	**08**	**09**	**0a**	**0b**	**0c**	**0d**	**0e**	**0f**
00	63	7c	77	7b	f2	6b	6f	c5	30	01	67	2b	fe	d7	ab	76
10	ca	82	c9	7d	fa	59	47	f0	ad	d4	a2	af	9c	a4	72	c0
20	b7	fd	93	26	36	3f	f7	cc	34	a5	e5	f1	71	d8	31	15
30	04	c7	23	c3	18	96	05	9a	07	12	80	e2	eb	27	b2	75
40	09	83	2c	1a	1b	6e	5a	a0	52	3b	d6	b3	29	e3	2f	84
50	53	d1	00	ed	20	fc	b1	5b	6a	cb	be	39	4a	4c	58	cf
60	d0	ef	aa	fb	43	4d	33	85	45	f9	02	7f	50	3c	9f	a8
70	51	a3	40	8f	92	9d	38	f5	bc	b6	da	21	10	ff	f3	d2
80	cd	0c	13	ec	5f	97	44	17	c4	a7	7e	3d	64	5d	19	73
90	60	81	4f	dc	22	2a	90	88	46	ee	b8	14	de	5e	0b	db
a0	e0	32	3a	0a	49	06	24	5c	c2	d3	ac	62	91	95	e4	79
b0	e7	c8	37	6d	8d	d5	4e	a9	6c	56	f4	ea	65	7a	ae	08
c0	ba	78	25	2e	1c	a6	b4	c6	e8	dd	74	1f	4b	bd	8b	8a
d0	70	3e	b5	66	48	03	f6	0e	61	35	57	b9	86	c1	1d	9e
e0	e1	f8	98	11	69	d9	8e	94	9b	1e	87	e9	ce	55	28	df
f0	8c	a1	89	0d	bf	e6	42	68	41	99	2d	0f	b0	54	bb	16

2.5-jadval

Teskari S-blok (16 sanoq tizimida ifodalangan)

	00	**01**	**02**	**03**	**04**	**05**	**06**	**07**	**08**	**09**	**0a**	**0b**	**0c**	**0d**	**0e**	**0f**

00	52	09	6a	d5	30	36	a5	38	bf	40	a3	9e	81	f3	d7	fb
10	7c	e3	39	82	9b	2f	ff	87	34	8e	43	44	c4	de	e9	cb
20	54	7b	94	32	a6	c2	23	3d	ee	4c	95	0b	42	fa	c3	4e
30	08	2e	a1	66	28	d9	24	b2	76	5b	a2	49	6d	8b	d1	25
40	72	f8	f6	64	86	68	98	16	d4	a4	5c	cc	5d	65	b6	92
50	6c	70	48	50	fd	ed	b9	da	5e	15	46	57	a7	8d	9d	84
60	90	d8	ab	00	8c	bc	d3	0a	f7	e4	58	05	b8	b3	45	06
70	d0	2c	1e	8f	ca	3f	0f	02	c1	af	bd	03	01	13	8a	6b
80	3a	91	11	41	4f	67	dc	ea	97	f2	cf	ce	f0	b4	e6	73
90	96	ac	74	22	e7	ad	35	85	e2	f9	37	e8	1c	75	df	6e
a0	47	f1	1a	71	1d	29	c5	89	6f	b7	62	0e	aa	18	be	1b
b0	fc	56	3e	4b	c6	d2	79	20	9a	db	c0	fe	78	cd	5a	f4
c0	1f	dd	a8	33	88	07	c7	31	b1	12	10	59	27	80	ec	5f
d0	60	51	7f	a9	19	b5	4a	0d	2d	e5	7a	9f	93	c9	9c	ef
e0	a0	e0	3b	4d	ae	2a	f5	b0	c8	eb	bb	3c	83	53	99	61
f0	17	2b	04	7e	ba	77	d6	26	e1	69	14	63	55	21	0c	7d

Masalan, kiruvchi bayt $0x68$ ga teng bo'lsa, S-blok natijasiga ko'ra $0x45$ ga almashadi, ya'ni, *SubBytes(0x68)=0x45*. Teskari S-blokdan foydalangan holda esa, *InvSubBytes(0x45)=0x68* tengligini bilish oson.

ShiftRows() akslantirishi. *ShiftRows* (holat baytlarini siklik surish) akslantirishining qo'llanishi quyidagicha amalga oshiriladi. Holat baytlarini siklik surishda holat jadvali satrlari quyidagicha belgilab olinadi.

S'_{00}	S'_{01}	S'_{02}	S'_{03}
S'_{10}	S'_{11}	S'_{12}	S'_{13}
S'_{20}	S'_{21}	S'_{22}	S'_{23}
S'_{30}	S'_{31}	S'_{32}	S'_{33}

ShiftRows akslantirishida jadvaldagi oxirgi uchta satr har bir baytlari chapga siklik, ya'ni 1-satr C_1 baytga, 2-satr C_2 baytga, 3-satr C_3 baytga suriladi. C_1, C_2, C_3 surilish qiymati N_b blok uzunligiga bog'liq bo'lib, ular algoritmda ko'rsatilganidek, quyidagi jadvalda keltirilgan:

l	N_b	C_0	C_1	C_2	C_3
128	4	0	1	2	3
192	6	0	1	2	3
256	8	0	1	3	4

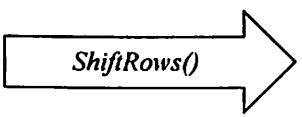
Keltirilgan jadvalga ko'ra l = *128 bitli* blok uchun $N_b = 4$ ga teng bo'lib, birinchi satr bo'yicha holat baytlarini siklik surish bajarilmaydi, ikkinchi satr bo'yicha 1 baytga, uchinchi satr bo'yicha 2 baytga, to'rtinchi satr bo'yicha 3 baytga siklik surish amalga oshiriladi.

l = *192 bitli* blok uchun $N_b = 6$ ga teng bo'lib, birinchi satr bo'yicha holat baytlarini siklik surish bajarilmaydi, ikkinchi satr bo'yicha 1 baytga, uchinchi satr bo'yicha 2 baytga, to'rtinchi satr bo'yicha 3 baytga siklik surish bajariladi.

l = *256 bitli* blok uchun $N_b = 8$ ga teng bo'lib, birinchi satr bo'yicha holat baytlarini siklik surish bajarilmaydi, ikkinchi qator bo'yicha 1 baytga, uchinchi satr bo'yicha 3 baytga, to'rtinchi satr bo'yicha 4 baytga siklik surish amalga oshiriladi.

Quyidagi jadvalda esa l = *128 bitli* shifrlash uchun $N_b = 4$ ga teng bo'lganda, satrlarni siklik surish bajarilgandan keyingi baytlarning o'rni qay tarzda o'zgarishi ko'rsatilgan:

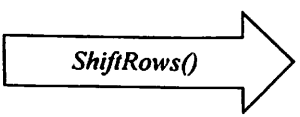
S'_{00}	S'_{01}	S'_{02}	S'_{03}
S'_{10}	S'_{11}	S'_{12}	S'_{13}
S'_{20}	S'_{21}	S'_{22}	S'_{23}
S'_{30}	S'_{31}	S'_{32}	S'_{33}



S'_{00}	S'_{01}	S'_{02}	S'_{03}
S'_{11}	S'_{12}	S'_{13}	S'_{10}
S'_{22}	S'_{23}	S'_{20}	S'_{21}
S'_{33}	S'_{30}	S'_{31}	S'_{32}

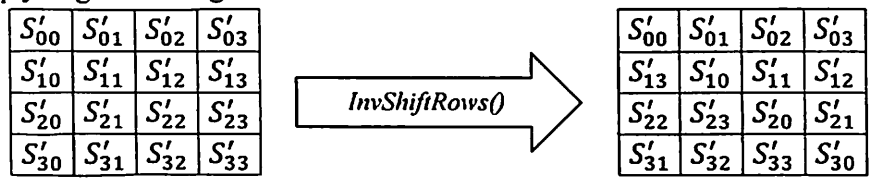
Quyida siklik surishga misol keltirilgan:

ac	ef	13	45
36	a5	38	bf
5c	a2	5d	d1
f2	cf	1c	73



ac	ef	13	45
a5	38	bf	36
5d	d1	5c	a2
73	f2	cf	1c

Rasshifrovkalash jarayoni uchun *InvShiftRows()* jarayoni quyidagicha amalga oshiriladi:



MixColumns() akslantirishi. *MixColumns()* (ustun elementlarini aralashtirish) akslantirishida holat ustunlari elementlari uchinchi darajadan katta bo'lmagan ko'phadning koeffitsientlari sifatida ifodalanib, ana shu ko'phad algoritmda berilgan: $g(x) = \{03\}x^3 + \{01\}x^2 + \{01\}x + \{02\}$ ko'phadga $x^4 + 1$ modul bo'yicha ko'paytiriladi.

Mazkur akslantirishni quyidagicha matritsa ko'rinishida tasvirlash mumkin:

$$\begin{bmatrix} s'_{0c} \\ s'_{1c} \\ s'_{2c} \\ s'_{3c} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \{02\} & \{03\} & \{01\} & \{01\} \\ \{01\} & \{02\} & \{03\} & \{01\} \\ \{01\} & \{01\} & \{02\} & \{03\} \\ \{03\} & \{01\} & \{01\} & \{02\} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} s_{0c} \\ s_{1c} \\ s_{2c} \\ s_{3c} \end{bmatrix}, 0 \le c \le 3,$$

bu yerda, c – ustun nomeri.

Bunday ko'paytirish natijasida s_{0c}, s_{1c}, s_{2c}, s_{3c} ustun baytlari mos baytlarga o'zgaradi:

$$s'_{0c} = (\{02\} \cdot s_{0c}) \oplus (\{03\} \cdot s_{1c}) \oplus s_{2c} \oplus s_{3c},$$
$$s'_{1c} = s_{0c} \oplus (\{02\} \cdot s_{1c}) \oplus (\{03\} \cdot s_{2c}) \oplus s_{3c},$$
$$s'_{2c} = s_{0c} \oplus s_{1c} \oplus (\{02\} \cdot s_{2c}) \oplus (\{03\} \cdot s_{3c}),$$
$$s'_{3c} = (\{03\} \cdot s_{0c}) \oplus s_{1c} \oplus s_{2c} \oplus (\{02\} \cdot s_{3c}).$$

Masalan, $\begin{bmatrix} s_{0c} \\ s_{1c} \\ s_{2c} \\ s_{3c} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ac \\ c1 \\ d6 \\ b8 \end{bmatrix}$ ustunni *MixColumns()* akslantirishidagi natijasini hisoblaylik.

$$s_{0c} = ac_{16} = 10101100_2 = x^7 + x^5 + x^3 + x^2;$$

$s_{1c} = c1_{16} = 11000001_2 = x^7 + x^6 + 1;$

$s_{2c} = d6_{16} = 11010110_2 = x^7 + x^6 + x^4 + x^2 + x;$

$s_{3c} = b8_{16} = 10111000_2 = x^7 + x^5 + x^4 + x^3.$

$$\begin{bmatrix} s'_{0c} \\ s'_{1c} \\ s'_{2c} \\ s'_{3c} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \{02\} & \{03\} & \{01\} & \{01\} \\ \{01\} & \{02\} & \{03\} & \{01\} \\ \{01\} & \{01\} & \{02\} & \{03\} \\ \{03\} & \{01\} & \{01\} & \{02\} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} ac \\ c1 \\ d6 \\ b8 \end{bmatrix}.$$

$s'_{0c} = (\{02\} \cdot ac) \oplus (\{03\} \cdot c1) \oplus d6 \oplus b8 = 75_{16}$:

- $\{02\} \cdot ac = x \cdot (x^7 + x^5 + x^3 + x^2) mod(x^8 + x^4 + x^3 + x + 1) = (x^8 + x^6 + x^4 + x^3) mod(x^8 + x^4 + x^3 + x + 1) = x^6 + x + 1;$
- $\{03\} \cdot c1 = (x + 1) \cdot (x^7 + x^6 + 1) mod(x^8 + x^4 + x^3 + x + 1) = (x^8 + x^6 + x + 1) mod(x^8 + x^4 + x^3 + x + 1) = x^6 + x^4 + x^3;$
- $s'_{0c} = (x^6 + x + 1) \oplus (x^6 + x^4 + x^3) \oplus (x^7 + x^6 + x^4 + x^2 + x) \oplus (x^7 + x^5 + x^4 + x^3) = x^6 + x^5 + x^4 + x^2 + 1 = 01110101_2 = 75_{16}.$

$s'_{1c} = ac \oplus (\{02\} \cdot c1) \oplus (\{03\} \cdot d6) \oplus b8 = ec_{16}$:

- $\{02\} \cdot c1 = x \cdot (x^7 + x^6 + 1) mod(x^8 + x^4 + x^3 + x + 1) = (x^8 + x^7 + x) mod(x^8 + x^4 + x^3 + x + 1) = x^7 + x^4 + x^3 + 1;$
- $\{03\} \cdot d6 = (x + 1) \cdot (x^7 + x^6 + x^4 + x^2 + x) mod(x^8 + x^4 + x^3 + x + 1) = (x^8 + x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x) mod(x^8 + x^4 + x^3 + x + 1) = x^6 + x^5 + 1;$
- $s'_{1c} = (x^7 + x^5 + x^3 + x^2) \oplus (x^7 + x^4 + x^3 + 1) \oplus (x^6 + x^5 + 1) \oplus (x^7 + x^5 + x^4 + x^3) = x^7 + x^6 + x^5 + x^3 + x^2 = 11101100_2 = ec_{16}.$

$s'_{2c} = ac \oplus c1 \oplus (\{02\} \cdot d6) \oplus (\{03\} \cdot b8) = 09_{16}$:

- $\{02\} \cdot d6 = x \cdot (x^7 + x^6 + x^4 + x^2 + x) mod(x^8 + x^4 + x^3 + x + 1) = (x^8 + x^7 + x^5 + x^3 + x^2) mod(x^8 + x^4 + x^3 + x + 1) = x^7 + x^5 + x^4 + x^2 + x + 1;$

- $\{03\} \cdot b8 = (x+1) \cdot (x^7 + x^5 + x^4 + x^3) mod(x^8 + x^4 + x^3 + x + 1) = (x^8 + x^7 + x^6 + x^3) mod(x^8 + x^4 + x^3 + x + 1) = x^7 + x^6 + x^4 + x + 1;$
- $s'_{2c} = (x^7 + x^5 + x^3 + x^2) \oplus (x^7 + x^6 + 1) \oplus (x^7 + x^5 + x^4 + x^2 + x + 1) \oplus (x^7 + x^6 + x^4 + x + 1) = x^3 + 1 = 00001001_2 = 09_{16}.$

$s'_{3c} = (\{03\} \cdot ac) \oplus c1 \oplus d6 \oplus (\{02\} \cdot b8) = 93_{16}$:

- $\{03\} \cdot ac = (x+1) \cdot (x^7 + x^5 + x^3 + x^2) mod(x^8 + x^4 + x^3 + x + 1) = (x^8 + x^7 + x^6 + x^5 + x^4 + x^2) mod(x^8 + x^4 + x^3 + x + 1) = x^7 + x^6 + x^5 + x^3 + x^2 + x + 1;$
- $\{02\} \cdot b8 = x \cdot (x^7 + x^5 + x^4 + x^3) mod(x^8 + x^4 + x^3 + x + 1) = (x^8 + x^6 + x^5 + x^4) mod(x^8 + x^4 + x^3 + x + 1) = x^6 + x^5 + x^3 + x + 1;$
- $s'_{3c} = (x^7 + x^6 + x^5 + x^3 + x^2 + x + 1) \oplus (x^7 + x^6 + 1) \oplus (x^7 + x^6 + x^4 + x^2 + x) \oplus (x^6 + x^5 + x^3 + x + 1) = x^7 + x^4 + x + 1 = 10010011_2 = 93_{16}.$

Umumiy natija esa quyidagicha bo'ladi:

$$\begin{bmatrix} s'_{0c} \\ s'_{1c} \\ s'_{2c} \\ s'_{3c} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \{02\} & \{03\} & \{01\} & \{01\} \\ \{01\} & \{02\} & \{03\} & \{01\} \\ \{01\} & \{01\} & \{02\} & \{03\} \\ \{03\} & \{01\} & \{01\} & \{02\} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} ac \\ c1 \\ d6 \\ b8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 75 \\ ec \\ 09 \\ 93 \end{bmatrix}.$$

Rasshifrovkalash jarayonida esa *InvMixColumns()* akslantirishi quyidagicha bo'ladi:

$$\begin{bmatrix} s_{0c} \\ s_{1c} \\ s_{2c} \\ s_{3c} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \{0e\} & \{0b\} & \{0d\} & \{09\} \\ \{09\} & \{0e\} & \{0b\} & \{0d\} \\ \{0d\} & \{09\} & \{0e\} & \{0b\} \\ \{0b\} & \{0d\} & \{09\} & \{0e\} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} s'_{0c} \\ s'_{1c} \\ s'_{2c} \\ s'_{3c} \end{bmatrix}.$$

Bu yerda, $\begin{bmatrix} \{0e\} & \{0b\} & \{0d\} & \{09\} \\ \{09\} & \{0e\} & \{0b\} & \{0d\} \\ \{0d\} & \{09\} & \{0e\} & \{0b\} \\ \{0b\} & \{0d\} & \{09\} & \{0e\} \end{bmatrix}$ matritsa

$\begin{bmatrix} \{02\} & \{03\} & \{01\} & \{01\} \\ \{01\} & \{02\} & \{03\} & \{01\} \\ \{01\} & \{01\} & \{02\} & \{03\} \\ \{03\} & \{01\} & \{01\} & \{02\} \end{bmatrix}$ matritsaga teskari, ya'ni, ularning ko'paytmasi olingan maydon uchun birga teng.

AddRoundKey() akslantirishi. Ushbu akslantirishda holat blokining bitlari kalit bloki mos bitlari bilan xarakteristikasi ikki bo'lgan chekli maydonda qo'shiladi, ya'ni, massivning har bir ustuni va shu ustunning elementlari kalit massivining mos ustun va elementlariga XOR amali bilan qo'shiladi. Masalan, dastlabki ochiq matn bloki quyidagicha bo'lsin:

$$\begin{bmatrix} \{25\} & \{bd\} & \{b6\} & \{4c\} \\ \{d1\} & \{11\} & \{3a\} & \{4c\} \\ \{a9\} & \{d1\} & \{33\} & \{c0\} \\ \{ad\} & \{68\} & \{8e\} & \{b0\} \end{bmatrix}$$

Dastlabki raund kaliti esa quyidagiga teng bo'lsin:

$$\begin{bmatrix} \{d4\} & \{7c\} & \{ca\} & \{11\} \\ \{d1\} & \{83\} & \{f2\} & \{f9\} \\ \{c6\} & \{9d\} & \{b8\} & \{15\} \\ \{f8\} & \{87\} & \{bc\} & \{bc\} \end{bmatrix}$$

U holda *AddRoundKey()* akslantirishining natijasi quyidagiga teng bo'ladi:

$$\begin{bmatrix} \{25\} & \{bd\} & \{b6\} & \{4c\} \\ \{d1\} & \{11\} & \{3a\} & \{4c\} \\ \{a9\} & \{d1\} & \{33\} & \{c0\} \\ \{ad\} & \{68\} & \{8e\} & \{b0\} \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} \{d4\} & \{7c\} & \{ca\} & \{11\} \\ \{d1\} & \{83\} & \{f2\} & \{f9\} \\ \{c6\} & \{9d\} & \{b8\} & \{15\} \\ \{f8\} & \{87\} & \{bc\} & \{bc\} \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} \{25 \oplus d4\} & \{bd \oplus 7c\} & \{b6 \oplus ca\} & \{4c \oplus 11\} \\ \{d1 \oplus d1\} & \{11 \oplus 83\} & \{3a \oplus f2\} & \{4c \oplus f9\} \\ \{a9 \oplus c6\} & \{d1 \oplus 9d\} & \{33 \oplus b8\} & \{c0 \oplus 15\} \\ \{ad \oplus f8\} & \{68 \oplus 87\} & \{8e \oplus bc\} & \{b0 \oplus bc\} \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} \{f1\} & \{c1\} & \{7c\} & \{5d\} \\ \{00\} & \{92\} & \{c8\} & \{b5\} \\ \{6f\} & \{4c\} & \{8b\} & \{d5\} \\ \{55\} & \{ef\} & \{32\} & \{0c\} \end{bmatrix}.$$

Raund kalitlarini generatsiyalash. AES shifrlash algoritmida raund kalitlari dastlabki kiritilgan shifrlash kalitidan hosil qilinib, u quyidagi jarayonlardan iborat:

- kalitni kengaytirish (Key Expansion);
- raund kalitlarini tanlash (Round Key Selection).

Raund kalitlarining umumiy bitlari soni kirish ma'lumotining bitlari sonini raund soniga ko'paytmasiga va yana bitta kirish ma'lumotining bitlari sonini yig'indisiga teng (misol uchun 128 bitli shifrlash uchun 128×10+128=1408 bit raund kaliti kerak bo'ladi), ya'ni $N_b\ (N_r + 1) = 128 \times (10 + 1) = 128 \times 11 = 1408$ bit.

Demak, 128 bit uzunlikdagi blok va 10 raund uchun 1408 bit raund kalitlari talab qilinadi. 128 bitli kalit uzunligi uchun raund kalitlarini generatsiyalash jarayonini ko'rib o'taylik.

Dastlabki kalitni kengaytirishda, dastlab 128 bitli (16 bayt) boshlang'ich kiruvchi kalit kiritiladi va to'rtta (w_0, w_1, w_2, w_3) 32 bitdan bo'lgan bo'lakka bo'linadi. Qolgan kengaytirilgan kalitlar mana shu to'rtta (w_0, w_1, w_2, w_3) kalitlar yordamida topiladi. Ya'ni, kengaytirilgan kalitlar quyida keltirilgan (2.1) va (2.2) formulalar asosida hisoblab topiladi. Kengaytirilgan kalitlar soni $N[w(i)] = N_b(N_r + 1)$ tenglik bilan hisoblanadi. Xususan, 128 bitli kalit uchun $N_b = 4$, $N_r = 10$ ga tengligi bois, $N[w(i)] = 4(10 + 1) = 44$ ga teng.

Demak, 128 bitli kirish blokiga va 10 ta raundga ega bo'lgan shifrlash uchun 44 ta kengaytirilgan kalitlar kerak bo'ladi.

Raund kalitlari kengaytirilgan kalitlardan quyida bayon qilingan qoida asosida yaratiladi. Kalitlar generatsiyasining formulalari quyidagi ko'rinishga ega:

$$w[i] = w[i-1] \oplus w[i-N_k], \tag{2.1}$$

va

$$w[i] = SubWord(RotWord(w[i-1])) \oplus Rcon[i/N_k] \oplus w[i-N_k] \tag{2.2}$$

Nazorat savollari

1. Funksiyaning aniqlanish va qiymatlar sohasiga ta'rif bering.
2. Injektiv, surjektiv, bijektiv funksiyalarga ta'rif bering.
3. Ehtimollik tushunchasi va uning turlari.
4. Shartli ehtimollik uchun Bayes teoremasi.
5. Binomial taqsimot va uning mohiyati.
6. Tug'ulgan kun muammosini tushuntiring.
7. Entropiyaga ta'rif bering. Entropiyaning turlari.
8. Algoritm ishlashining eng yomon vaqti tushunchasiga ta'rif bering.
9. Katta O belgilanishi va uning mohiyati.
10. Ω belgilanish va uning mohiyati.
11. Θ belgilanish va uning mohiyati.
12. EKUBga ta'rif bering. Uni hisoblash usullarini ayting.
13. EKUKga ta'rif bering. Uni hisoblash usullarini ayting.
14. Tub son, murakkab son va o'zaro tub soni tushunchalariga ta'rif bering.
15. Eylerning fi (phi) funksiyasi va uning matematik ma'nosi.
16. Kengaytirilgan Evklid algoritmini tushuntiring.
17. Modul arifmetikasi va uning xususiyatlari.
18. Qoldiqlar haqida Xitoy teoremasining mohiyatini tushuntiring.
19. Eyler teoremasi mohiyatini tushuntiring.
20. Lejandr va Yakobi belgilarini ma'nosini tushuntiring.
21. AES shifrlash algoritmi va uning matematik asosi haqida ayting.
22. AES shifrlash algoritmida ma'lumotni shifrlash tartibini tushuntiring.
23. AES shifrlash algoritmida raund kalitlarini generatsiyalash tartibini ayting.

III BOB. Simmetrik kriptotizimlar

3.1. Simmetrik blokli kriptotizimlar

Simmetrik blokli shifrlash algoritmlari barcha kriptografik tizimlarning muhim tashkil etuvchisi sanaladi. Simmetrik blokli shifrlash algoritmlari ma'lumot maxfiyligini ta'minlab, ma'lumotlarni ma'lum uzunlikdagi bloklarga bo'lgan holda ular ustida takroriy holatda amallarni bajarish orqali amalga oshiriladi.

Simmetrik blokli shifrlash algoritmlariga tegishli bo'lgan asosiy tushunchalar quyidagilar:

Blok uzunligi. Kiruvchi ma'lumotlarning bo'linishi kerak bo'lgan uzunligi bo'lib, odatda Feystel tarmog'iga asoslangan tizimlar uchun 64-bitni tashkil etadi.

Kalit uzunligi. Ma'lumotni shifrlashda va rasshifrovkalashda foydalanilangan kalitlarning uzunligi.

Raundlar soni. Blokli shifrlash algoritmlariga xos bo'lgan xususiyat bo'lib, bir ma'lumot bloki ustida turli kalitlardan foydalangan holda bajariladigan bir xil funksiyani bajaralish sonini ko'rsatadi. Masalan, DES shifrlash algoritmida raundlar soni 16 tani tashkil etadi.

Raund funksiyasi. Shifrlash va rasshifrovkalash algoritmlarining muhim qismi sanalib, har bir raundda bajariladigan ishlar ketma-ketligidan iborat bo'ladi. Ushbu funksiyada odatda ikkita kiruvchi qiymat, ma'lumot qismi va kalit bo'ladi.

Raund kaliti. Shifrlashda va rasshifrovkalashda foydalaniladigan kalit sanalib, dastlabki kalit asosida ma'lum algoritm yordamida hosil qilinadi.

Shifrlash rejimlari. Simmetrik blokli shifrlash algoritmlariga xos bo'lgan xususiyat bo'lib, blokli shifrlash algoritmlaridan ma'lum usullar asosida foydalanishga asoslanadi. Bunda shifrlash algoritmi o'zgartirilmay, balki ushbu algoritm asosida tizim quriladi.

Boshlang'ich vektor (initialization vector, IV). Blokli shifrlash algoritmlari rejimlaridan foydalanishda kerakli bo'lgan kattalik bo'lib, maxfiy tutilmaydi.

Shifrlash funksiyasi. Ochiq ma'lumot bloklarini yashiringan holda o'tkazish uchun foydalaniladigan funksiya.

Rasshifrovkalash funksiyasi. Shifrlangan matn bloklarini ochiq matnga aylantirish uchun foydalanilgan funksiya.

Zamonaviy simmetrik shifrlash algoritmlarida umumiy holda quyidagi matematik amallardan foydalaniladi:

- XOR amali;
- $mod 2^{32}$ bo'yicha qo'shish amali;
- chapga yoki o'nga siklik surish amallari;
- jadvallar asosida o'rin almashtirish;
- mantiqiy amallar, VA, YOKI, INKOR;
- va hak.

Zamonaviy blokli shifrlash algoritmlari yaratilish asosiga ko'ra quyidagi uchta asosiy yo'nalishga bo'linadi:

- Feystel tarmog'iga asoslangan;
- SPN (Substitution-permutation networks) asoslangan;
- Lai-Massey arxitekturasida asoslangan simmetrik shifrlash algoritmlariga bo'linadi.

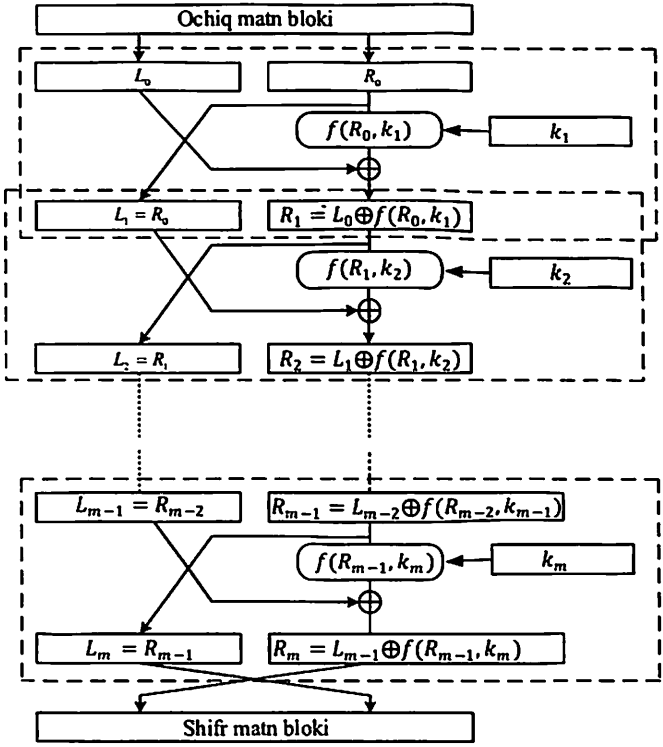
Feystel tarmog'iga asoslangan simmetrik blokli shifrlash algoritmlari. Ushbu yo'nalishga ko'ra ochiq matn bloklari teng ikki qismga ajratilib, biror yarim qism ustida (odatda o'ng qism ustida) kalit bilan amallar bajariladi va ikkinchi qism tomon bilan XOR amalida qo'shiladi. Shundan so'ng, ikki qism tomon o'rinlari almashtiriladi. Algoritmda berilgan raundlar soniga ko'ra $(0, 1, \ldots, n)$ raund kalitlari hosil qilinadi $(k_0, k_1, \ldots, k_n)$. Raund funksiyasi sifatida esa ikkita parametrni qabul qiluvchi f funksiyasi foydalaniladi (3.1-rasm).

Feystel tarmog'ining asosiy amallari quyidagilar:

- ochiq matn bloki teng ikki qismga bo'linadi (L_0, R_0);
- har bir raund uchun quyidagilar bajariladi: $L_{i+1} = R_i$, $R_{i+1} = L_i \oplus f(R_i, k_i)$;
- shundan so'ng shifrmatn olinadi : (R_{n+1}, L_{n+1}).

Rasshifrovkalashda esa (R_{n+1}, L_{n+1}) shifrmatn blokidan kalitlarni teskari tartibda $(i = n, n-1, \ldots, 0)$ foydalanib, quyidagi amallar bajariladi: $R_i = L_{i+1}$, $L_i = R_{i+1} \oplus f(L_{i+1}, k_i)$. Shundan so'ng, ochiq matn jufti (L_0, R_0) olinadi. Ushbu arxitekturani boshqalaridan farqi shundaki, ma'lumotni rasshifrovklashda shifrlash funksiyasiga teskari bo'lgan funksiya ta'lab etilmaydi, kalitlarni teskari tartibda foydalanish bilan chegaralanadi.

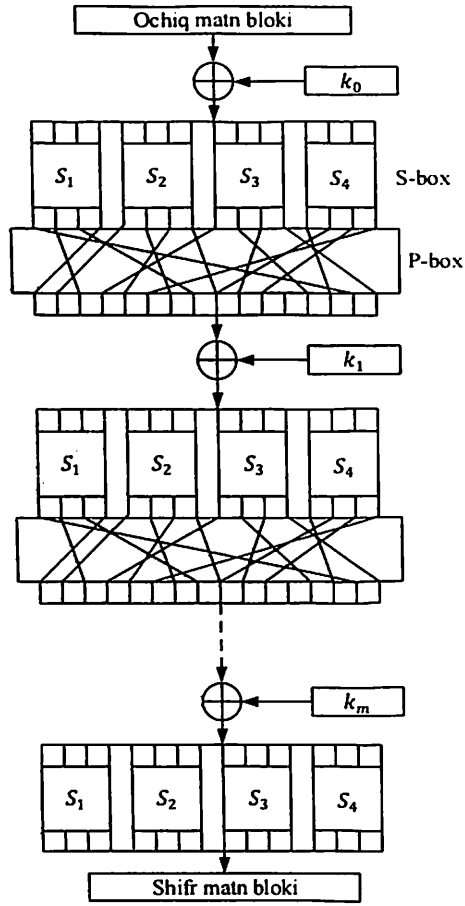
Umumiy holatda m-raundli Feystel tarmog'ining funksional sxemasi quyidagicha ifodalanadi:



3.1-rasm. **m −raundli Feystel tarmog'i**

Feystel tarmog'ining qo'llanishi ko'pgina simmetrik blokli shifrlash algoritmlarida uchraydi. Bu kriptoalgoritmlarga misol qilib FEAL, LOCI, Khufu, Khafre Blowfish, Lucifer, CAST, shuningdek, DES, ГОСТ 28147-89 kabi standart algoritmlarni keltirish mumkin.

SPN (Substitution-permutation networks)ga asoslangan blokli simmetrik shifrlash algoritmlari. Ushbu arxitekturaga ko'ra kiruvchi parametrlar sifatida ochiq matn bloki va kalitlar olinib, almashtirish va o'rniga qo'yish amallaridan foydalangan holda shifrmatn olinadi. Bunda, ikki turdagi jadvallardan, o'rniga qo'yish - *substitution box* (S-box) va o'rin almashtirish - *permutation box* (P-box) jadvallardan foydalanadi (3.2-rasm).



3.2-rasm. **SPN tarmoq arxitekturasi**

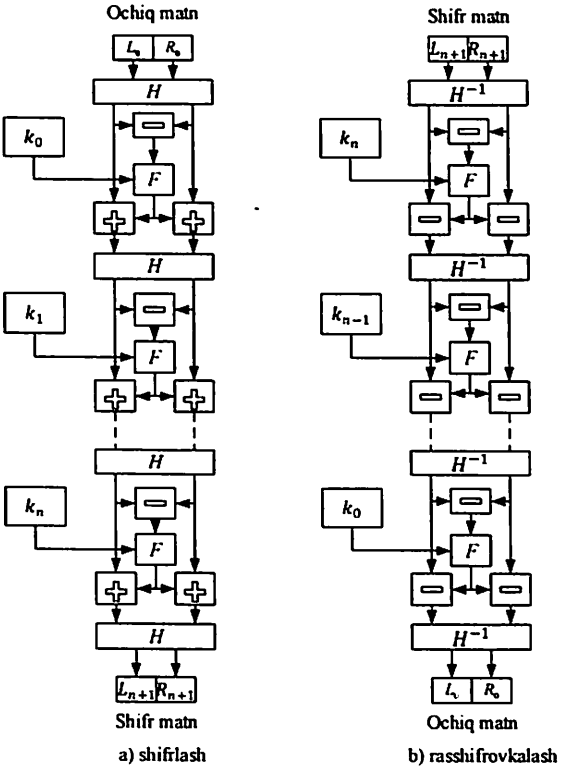
Har bir raundda alohida kalitlardan foydalanilib, almashtirish va o'rniga qo'yish amallari bajariladi.

Rasshifrovkalashda esa Feystel tarmog'idan farqli ravishda ham kalitlarning tartibi, ham jadvallarga invert bo'lgan jadvallardan foydalanish orqali amal oshiriladi.

Ushbu arxitekturaga asoslangan algoritmlarga misol sifatida Rijndael, Kuznechik, Serpent, SQUARE, O'z Dst 1105:2009, BelT, Kalyna, CRYPTON va h. keltirish mumkin.

Lai-Massey shifrlari (Lai-Massey ciphers). Ushbu usulda asoslangan kriptografiy tizimlar Feystel tarmog'iga o'xshash bo'lib, farqli

tomoni raund funksiyasi qaytmasdir. Bu usulda ham kirish bloki ikki qismga ajratiladi (3.3-rasm).



3.3-rasm. **Lai-Massey sxemasining ko'rinishi**

Bunda, F - raund funksiyasi, H - esa yarim-raund funksiyasi. $k_0, k_1, .. k_n$ lar esa 0,1, ..., n ga mos raund kalitlari.

Ushbu usulda asoslangan shifrlarga IDEA, MESH, RIDEA, WIDEA-*n*, FOX/IDEA-NXT, REESSE3+, Bel-T va h. larni misol keltirish.

Simmetrik blokli shifrlar turli akslantirishlardan iborat bo'lib, umumiy holda ularni *chiziqli* va *nochiziqli* turlarga ajratish mumkin.

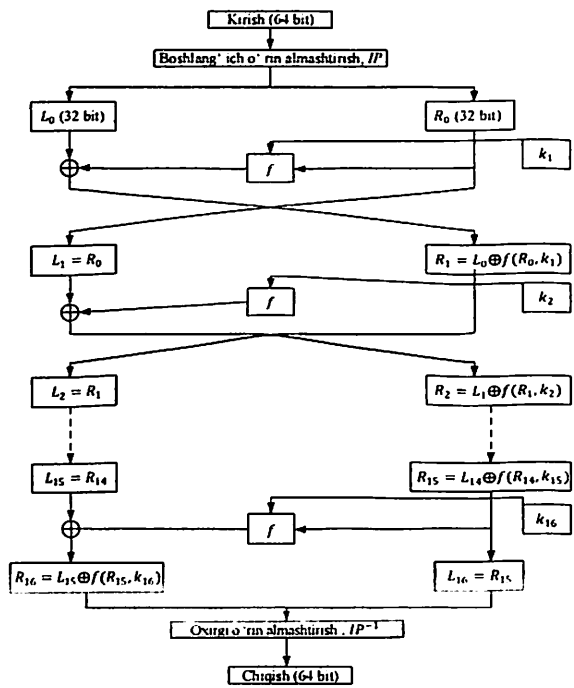
3.2. DES simmetrik blokli shifrlash algoritmi

DES standart shifrlash algoritmi Amerika Qo'shma Shtatlari (AQSh) "Milliy Standartlar Byurosi" tomonidan 1977 yilda e'lon qilingan. 1980 yilda AQShning "Standartlar va Texnologiyalar Milliy Instituti" bu algoritmni davlat va savdo-sotiq moliyasi sohasidagi mahfiy

bo'lmagan, ammo muhim bo'lgan ma'lumotlarni ruhsat etilmagan jismoniy va yuridik shaxslardan muhofaza qilishda shifrlash algoritmi sifatida qo'llash standarti deb qabul qildi.

DES algoritmida: dastlabki 56 bitli kalitdan raund kalitlarini hosil qilishning murakkab emasligi, raund asosiy akslantirishlarining apparat-texnik va dasturiy ta'minot ko'rinishlarida qo'llanilishini ta'minlashning qulayligi, hamda, ular kriptografik xossalarining samaradorligi – kriptobardoshliligining yuqoriligi, bu algoritmning asosiy xususiyatlarini belgilaydi.

DES algoritmi, 64-bitli ma'lumotlar blokini turli o'rin almashtirishlar va akslantirishlar kombinatsiyasiga asoslanib 56 bitli K kalit bilan shifrlashni amalga oshiradi. DES shifrlash algoritmining sxemasi 3.4-rasmda keltirilgan. Shifrlash jarayoni, kiruvchi blokni boshlang'ich o'rin almashtirish, o'n olti marta shifrlash siklni takrorlanishi hamda oxirgi bitlarni o'rin almashtirishidan iborat.



3.4-rasm. **DES shifrlash algoritmining blok sxemasi**

Algoritmda keltirilgan barcha o'rin almashtirish va akslantirishlar jadvallari standart qabul qilingan, algoritm bajarilishida bular hech qanday o'zgartirishlarsiz o'z holicha saqlanadi.

Foydalanilgan belgilanishlar:

L_i va R_i – 64 bitli blokning chap va o'ng qismlari;

$\oplus$ - ikkilik modul bo'yicha qo'shish amali, XOR;

k_i – 48 bitli i-raund kaliti;

f – shifrlash funksiyasi;

IP – boshlang'ich o'rin almashtirish funksiyasi.

Shifrlash jarayoni. Ma'lumotning T blokini shifrlashda uning barcha bitlari 3.1-jadval bo'yicha (IP-jadval) boshlang'ich o'rin almashtiriladi.

3.1-jadval

IP-jadval

58	50	42	34	26	18	10	2
60	52	44	36	28	20	12	4
62	54	46	38	30	22	14	6
64	56	48	40	32	24	16	8
57	49	41	33	25	17	9	1
59	51	43	35	27	19	11	3
61	53	45	37	29	21	13	5
63	55	47	39	31	23	15	7

Bunda, 58-bit T blokning 1-biti, 50-bit 2-biti va h., ko'rinishda o'rin almashtirish bajariladi. O'rin almashtirishdan keyin hosil bo'lgan $IP(T)$ blok mos ravishda ikki: L_0, 1-bitdan 32-bitgacha va R_0, 33-bitdan 64-bitgacha bo'lgan bloklarga ajraladi. Keyin, Feystel akslantirishlariga asoslangan 16 marta takrorlanuvchi iterativ shifrlash jarayoni bajariladi.

$T_{i-1} = L_{i-1}R_{i-1}$ - blok $(i-1)$ – iteratsiya natijasi bo'lsin. U holda, i –iteratsiya natijasi $T_i = L_iR_i$ quyidagi formuladan aniqlanadi:

$$L_i = R_{i-1};$$

$$R_i = L_{i-1} \oplus f(R_{i-1}, k_i),\ i = 1, \dots, 16 \qquad (3.1)$$

Bu yerda, f – shifrlash funksiyasi. Funksiya argumenti 32 bitli R_{i-1} vektor va 56 bitli shifrlash K kalitdan akslantirishlar asosida olingan 48

bitli k_i kalitdir. $T_{16} = R_{16}L_{16}$ oxirgi iteratsiya natijasi. Shifrlash tugashi bilan bitlarning o'z joylarini qayta tiklash maqsadida T_{16} ga IP^{-1} qayta o'rin almashtirishlar qilinadi.

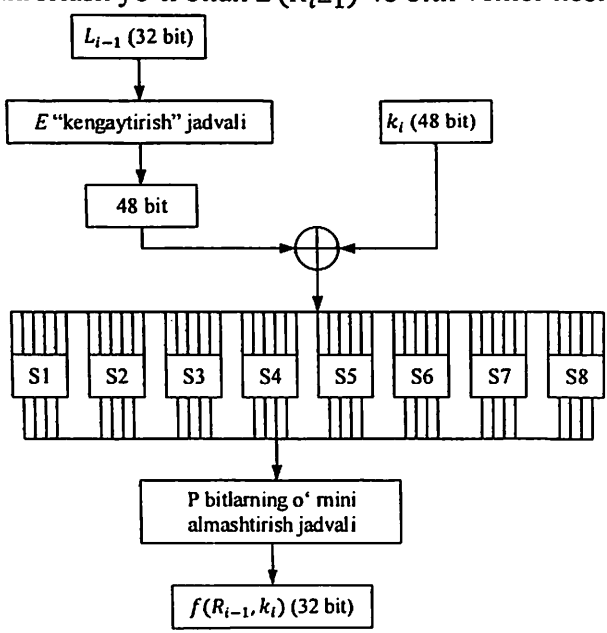
Ma'lumotni qayta shifrlash uchun yuqoridagi qilingan ishlar teskari tartibda bajariladi, shunga ko'ra (3.1) munosabat o'rniga quyidagi munosabatni qo'llashga to'g'ri keladi:

$$R_{i-1} = L_i;$$
$$L_{i-1} = R_i \oplus f(L_i, k_i),\ i = 1, \ldots, 16.$$

$f(R_{i-1}, k_i)$ shifrlash funksiyasi qiymatini hisoblash sxemasi 3.5-rasmda tasvirlangan.

f shifrlash funksiyasining qiymatini hisoblashda E "kengaytirish" jadvalidan, $S_1, S_2, \ldots, S_8$ bloklaridan iborat S va R o'rin almashtirishlardan foydalaniladi. R_{i-1} (32 bit) vektor va k_i (48 bit) kalitlar f funksiya argumenti hisoblanadi.

E "kengaytirish" jadvali 32 bitli R_{i-1} vektorni 3.2-jadvalga ko'ra bir xil bitlarni takrorlash yo'li bilan $E(R_{i-1})$ 48 bitli vektor hosil qiladi.



3.5-rasm. **$f(R_{i-1}, k_i)$ shifrlash funksiyasi**

3.2-jadval

E "kengaytirish" jadvali

32	1	2	3	4	5
4	5	6	7	8	9
8	9	10	11	12	13
12	13	14	15	16	17
16	17	18	19	20	21
20	21	22	23	24	25
24	25	26	27	28	29
28	29	30	31	32	1

$E(R_{i-1})$ vektorning birinchi uchta biti mos ravshida R_{i-1} vektorni 32, 1 va 2-bitlari, oxirgi uchta biti esa R_{i-1} vektorni 31, 32, 1-bitlaridir.

Hosil bo'lgan natija mavjud k_i kalitga 2 moduli bo'yicha bitma-bit qo'shiladi va 6 bitlik 8 ta $V_1, V_1, \ldots, V_8$ bloklar ketma-ketligi hosil qilinadi.

$$E(R_{i-1}) \oplus k_i = V_1, V_1, \ldots, V_8.$$

So'ngra har bir V_j blok 4-bitli V'_j blokka mos kelgan S_j S –bloklar jadvali yordamida o'zgartiriladi, S-bloklar ro'xati 3.3-jadvalda keltirilgan.

3.3-jadval

S-bloklar ro'yxati

S_1

	0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**
0	14	4	13	1	2	15	11	8	3	10	6	12	5	9	0	7
1	0	15	7	4	14	2	13	1	10	6	12	11	9	5	3	8
2	4	1	14	8	13	6	2	11	15	12	9	7	3	10	5	0
3	15	12	8	2	4	9	1	7	5	11	3	14	10	0	6	13

S_2

	0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**
0	15	1	8	14	6	11	3	4	9	7	2	13	12	0	5	10
1	3	13	4	7	15	2	8	14	12	0	1	10	6	9	11	5
2	0	14	7	11	10	4	13	1	5	8	12	6	9	3	2	15
3	13	8	10	1	3	15	4	2	11	6	7	12	0	5	14	9

S_3

	0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**

0	10	0	9	14	6	3	15	5	1	13	12	7	11	4	2	8
1	13	7	0	9	3	4	6	10	2	8	5	14	12	11	15	1
2	13	6	4	9	8	15	3	0	11	1	2	12	5	10	14	7
3	1	10	13	0	6	9	8	7	4	15	14	3	11	5	2	12

S_4

	0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**
0	7	13	14	3	0	6	9	10	1	2	8	5	11	12	4	15
1	13	8	11	5	6	15	0	3	4	7	2	12	1	10	14	9
2	10	6	9	0	12	11	7	13	15	1	3	14	5	2	8	4
3	3	15	0	6	10	1	13	8	9	4	5	11	12	7	2	14

S_5

	0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**
0	2	12	4	1	7	10	11	6	8	5	3	15	13	0	14	9
1	14	11	2	12	4	7	13	1	5	0	15	10	3	9	8	6
2	4	2	1	11	10	13	7	8	15	9	12	5	6	3	0	14
3	11	8	12	7	1	14	2	13	6	15	0	9	10	4	5	3

S_6

	0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**
0	12	1	10	15	9	2	6	8	0	13	3	4	14	7	5	11
1	10	15	4	2	7	12	9	5	6	1	13	14	0	11	3	8
2	9	14	15	5	2	8	12	3	7	0	4	10	1	13	11	6
3	4	3	2	12	9	5	15	10	11	14	1	7	6	0	8	13

S_7

	0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**
0	4	11	2	14	15	0	8	13	3	12	9	7	5	10	6	1
1	13	0	11	7	4	9	1	10	14	3	5	12	2	15	8	6
2	1	4	11	13	12	3	7	14	10	15	6	8	0	5	9	2
3	6	11	13	8	1	4	10	7	9	5	0	15	14	2	3	12

S_8

	0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**
0	13	2	8	4	6	15	11	1	10	9	3	14	5	0	12	7
1	1	15	13	8	10	3	7	4	12	5	6	11	0	14	9	2
2	7	11	4	1	9	12	14	2	0	6	10	13	15	3	5	8

3	2	1	14	7	4	10	8	13	15	12	9	0	3	5	6	11

V_j blokning V'_j ga o'zgartirilishini ushbu misolda keltiramiz. Masalan, V_2 blok 111010 dan iborat bo'lsin. V_2 blokni birinchi razryadi $a_1 = 1$ va oxirgi razryadi $a_6 = 0$ dan tashkil topgan $a = a_1a_6$ sonining ikkilik sanoq sistemasidagi yozuvi bo'lsa, bu sonning o'nlik sanoq sistemasidagi qiymati 4 dan katta bo'lmaydi, ya'ni, $0 \leq a < 4$. Oradagi 4 ta $b = a_2a_3a_4a_5 = 1101$ dan tashkil topgan b soni esa $0 \leq b < 16$ munosabatni qanoatlantiradi. Olingan holda $a = 2, b = 13$. S_2 blokning satrlari 0 dan a gacha bo'lgan sonlar bilan ustunlari esa 0 dan b gacha bo'lgan sonlarda raqamlab chiqilgan. Shunday qilib, (a, b) sonlar juftligi jadvaldagi a-satr va b-ustunning kesishmasidagi biror sonni aniqlaydi. Ushbu holatda kesishmada turgan son 3. Bu sonni ikkilik sanoq sistemasiga o'tkazib V'_2 ni hosil qilinadi: 0011.

$f(R_{i-1}, k_i)$ ni qiymati, R bitli o'rin almashtirishlarni 5.4-jadvaldan foydalanib hosil qilinadi.

Raund kalitlarini hosil qilish. Har bir iteratsiyada k_i (48 bit) kalitning ayni paytdagi qiymati foydalaniladi. Ushbu qiymatlar dastlabki K kalitdan quyidagicha olinadi.

Dastlab foydalanuvchi 56 ta ixtyoriy bitli kalitni tanlaydi. 8, 16,...,64 -o'rinlarda turgan 8 ta bit kalitga shunday qo'shiladiki undagi har bir bayt toq sondagi birlik raqamlarini o'z ichiga olsin. Lekin, bu bitlar shifrlash jarayonlarida qatnashmaydi.

3.4-jadval

R bitli o'rin almashtirish jadvali

16	7	20	21
29	12	28	17
1	15	23	26
5	18	31	10
2	8	24	14
32	27	3	9
19	13	30	6
22	11	4	25

Bu kalitlarni uzatish va saqlashda uchraydigan ayrim xatoliklarni topishda juda qo'l keladi. 56 bit kalit 5.5-jadvalga ko'ra o'rin almashtirishlar asosida olinadi.

3.5-jadval

64 bitdan 56 bitga o'tkazish jadvali

57	49	41	33	25	17	9
1	58	50	42	34	26	18
10	2	59	51	43	35	27
19	11	3	60	52	44	36
63	55	47	39	31	23	15
7	62	54	46	38	30	22
14	6	61	53	45	37	29
21	13	5	28	20	12	4

Bu o'rin almashtirish har biri 28 bitdan iborat bo'lgan ikkita C_0 va D_0 bloklar bilan aniqlanadi (ular mos ravishda jadvalning yuqori va pastki qismlarini egallagan). C_0 ni uchta oldingi bitlari kalitning 57,49,41 - bitlariga mos keladi va jadval asosida davom ettiriladi. Keyin, induktiv yo'l bilan C_i va D_i $(i = 1, \ldots, 16)$ bloklar aniqlanadi. Agar C_{i-1} va D_{i-1} lar aniqlangan bo'lsa, u holda C_i va D_i lar ulardan 3.6-jadvalga asosan bir yoki ikkita chapga siklik surish bilan hosil qilinadi.

3.6-jadval

Raund kalitlarni generatsiyalash uchun siklik surishlar jadvali

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
Surishlar soni	1	1	2	2	2	2	2	2	1	2	2	2	2	2	2	1

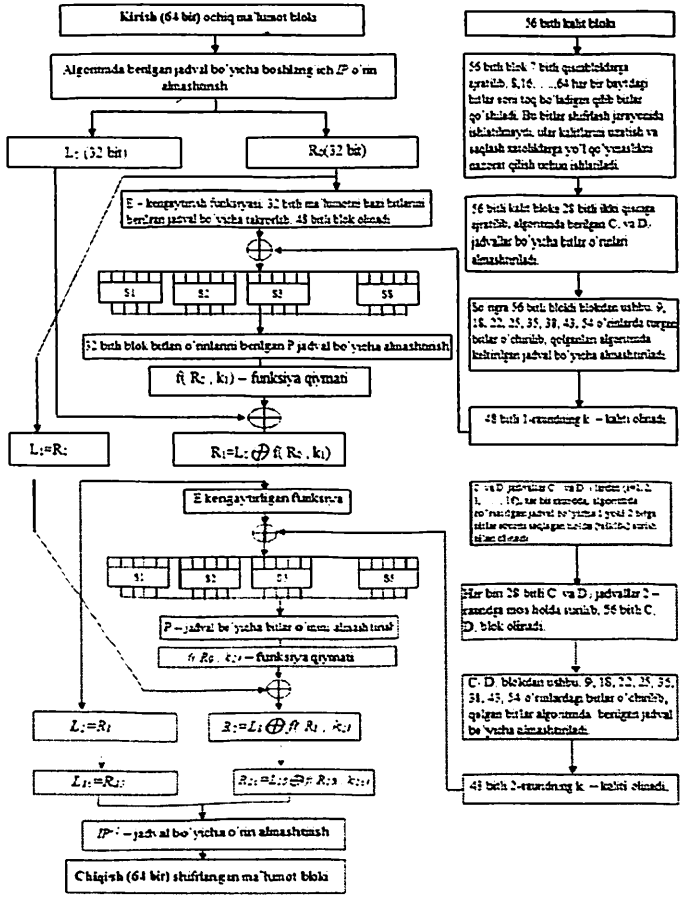
Endi, k_i $(1 \leq i \leq 16)$ kalitlarni aniqlaymiz. k_i kalit 48 bitdan tashkil topgan bo'lib, ular 3.7-jadvalga asosan C_iD_i blok bitlaridan tanlab olingan. Takidlash joizki, C_iD_i dagi 56 bitdan 8 tasi (9, 18, 22, 25, 35, 38, 43, 54 raqamli) k_i da yo'q.

3.7-jadval

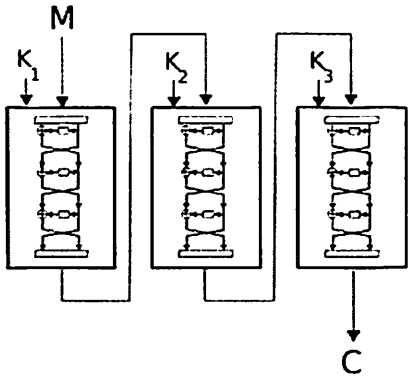
56 bitdan 48 bitga tushirish qoidasi

14	17	11	24	1	5
3	28	15	6	21	10

23	19	12	4	26	8
16	7	27	20	13	2
41	52	31	37	47	55
30	40	51	45	33	48
44	49	39	56	34	53
46	42	50	36	29	32



3.6- rasm. **DES shifrlash algoritmining bolk sxemasi**



3.7-rasm. **3DES shifrlash algoritmida ma'lumotni shifrlash**

Ochiq ma'lumotlarni shifrlashda quydagicha amalga oshiriladi: $C= E_{k3}(E_{k2}(E_{k1}(P)))$, deshifrlash jarayoni $P= E_{k1}^{-1}(E_{k2}^{-1}(E_{k3}^{-1}(C)))$.

3.3. Psevdotasodifiy sonlar generatori

Tasodifiy ketma-ketliklarni ishlab chiqarishda ko'plab usullar va vositalar mavjud bo'lib, ular turli maqsadlarda foydalaniladi. Tasodifiy ketma – ketliklarni shakllantiruvchi generatorlarni uch turkumga ajratish mumkin.

Xavfsiz bo'lmagan tasodifiy sonlar generatorlari. Ushbu generatorlar kriptografik kalit generatorlariga qo'yilgan talablarga javob bermaydi va shuning uchun hujumchi generator chiqishini taxmin qilishi mumkin.

Kriptografik psevdotasodifiy sonlar generatorlari (Cryptographic pseudorandom number generators, PRNGs). Bu turdagi generatorlar «hisoblanuvchi» generatorlar ham deb atalib, ular kirishda boshlang'ich qiymatni (seed) talab etadi va bu boshlang'ich qiymatdan kutilmagan tasodifiy sonlarni ishlab chiqaradi. Shuning uchun bu turdagi generatorlar tasodifiy emas psevdotasodifiy sonlar generatori va hosil qilgan qiymatlarini esa tasodifiy emas psevdotasodifiy sonlar deb ham ataladi. Ushbu generatorlar xavfsiz kirish qiymati amalga oshirilganda yuqori xavfsizlikni ta'minlab beradi. Bu turdagi generatorlar odatda dasturiy shaklda ko'proq amalga oshiriladi.

Entropiya to'plovchilar. Bu turdagi generatorlar odatda «haqiqiy» tasodifiy sonlar generatori deb ham atalib, ular turli manbalardan entropiyalarni to'playdi va ularni bevosita taqdim etadi. Ular ko'p

hollarda xavfsiz deb qaralsada, ma'lumotlarni taqdim etishda juda ko'p vaqt talab etadi. Shuning uchun bu turdagi generatorlar odatda apparat ko'rinishda amalga oshiriladi. Ammo, ko'plab entropiya to'plovchilar operatsion tizimdagi turli tasodifiy hodisalardan entropiya to'plashga asoslangan (masalan, /dev/random).

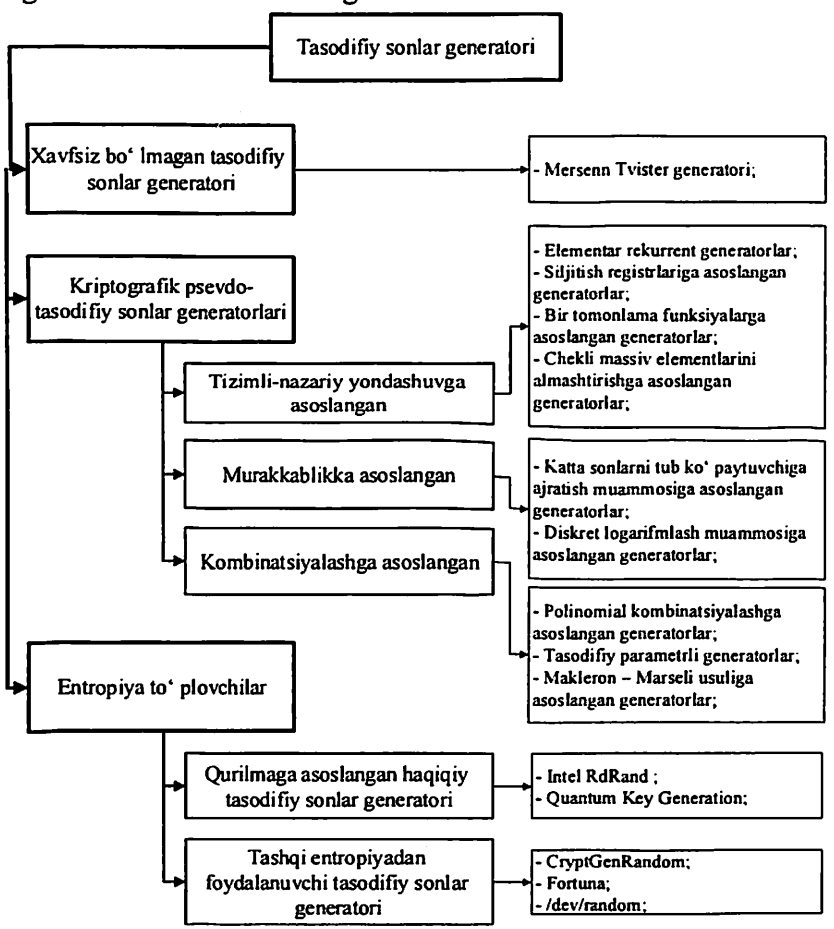
Birinchi toifadagi generatorlar odatda kriptografiyadan tashqari sohalarda foydalanishga tavsiya etilib, statistik tomondan tasodifiy bo'lmagan sonlarni generatsiya qiladi. Bu turdagi generatorlar o'zini ichki holatini oshkor etib qo'yishi mumkinligi bois, xavfsiz sanalmaydi. Ushbu generatorlarga aksariyat kutubxonalarda mavjud bo'lgan *rand()* va *random()* funksiyalarini keltirish mumkin (odatda chiziqli kongurent generatorlarga asoslangan). Bundan tashqari, eng keng tarqalgan kriptografik bo'lmagan generatorlarga Microsoft Excel, GAUSS, Glib, GNU Octave, MATLAB, Free Pascal, PHP, Python, Ruby, C++ (S++11 dan boshlab) va boshqa ko'plab kutubxona va dasturiy vositalarda tasodifiy sonlarni generatsiya qilish uchun foydalanilayotgan «Mersenn Tvister» generatorini misol qilib keltirish mumkin.

Umumiy kriptografik maqsadda foydalanish uchun, ikkinchi usul maqul sanaladi. Buning uchun xavfsiz entropiya (ya'ni, haqiqiy tasodifiy ma'lumot) olinib, kriptografik psevdotasodifiy sonlar generatoriga kiritiladi va ma'lum vaqt davomida psevdotasodifiy sonlarni generatsiya qiladi. Ushbu generatorlar ham ichki holati namayon bo'lganda kutuluvchi sonlarni taqdim etishi mumkin. Shuning uchun ushbu generatorlardan foydalanishda uni to'g'ri boshlang'ich qiymatni qabul qilishini ta'minlash lozim.

Ikkinchi usul qisqa vaqtda foydalaniluvchi kalit ma'lumotlarni ishlab chiqarish uchun qulay sanalsada, uzoq vaqt davomida foydalaniluvchi kalitlarni generatsiyalash uchun tavfsiya etilmaydi. Bu holda haqiqiy tasodifiy bo'lgan kalitlardan foydalanish talab etiladi.

Agar bir bayt ma'lumot haqiqiy tasodifiy sanalsa, unda har bir 2^8 (256) ta bo'lishi mumkin bo'lgan holatlar o'xshash bo'lishi va uni topish uchun hujumchidan 2^7 ta urinishni talab etishi kerak. Faqat shu holdagina ushbu baytni 8 bit entropiyaga ega deb qarash mumkin.

3.8 - rasmda tasodifiy sonlar generatorlarining umumiy tasnifi keltirilgan. Haqiqiy tasodifiy generatorlarni yetarli entropiyani to'plash uchun ko'p vaqt talab etishi sababli, amalda ikkinchi va uchinchi usullarning kombinatsiyasidan foydalaniladi. Shu sababli, quyida keng foydalanilayotgan tashqi entropiyadan foydalanuvchi tasodifiy sonlar generatori va kriptografik psevdotasodifiy sonlar generatoriga ta'luqli ba'zi generatorlar tahlili keltirilgan.



3.8 – rasm. **Tasodifiy sonlar generatorlarining tasnifi**

Tasodifiylik darajasi yuqori bo'lgan psevdotasodifiy ketma-ketlikni ishlab chiqaruvchi generatorlar zamonaviy kriptotizimlarning ajralmas

qismi hisoblanadi. Tasodifiy ketma-ketliklar kriptografiyada quyidagi maqsadlarda qo'laniladi:

– simmetrik kriptotizimlar uchun tasodifiylik darajasi yuqori bo'lgan seans kalitlari va boshqa kalitlarni generatsiya qilishda;

– ochiq kalitli kriptotizimlarda qo'llaniladigan katta qiymatlar qabul qiluvchi parametrlarning tasodifiy boshlang'ich qiymatlari generatsiyasida;

– blokli shifrlash algoritmlarining boshlang'ich tasodifiy qiymat talab qiluvchi CBC, OFB va boshqa rejimlar uchun tasodifiylik darajasi yuqori bo'lgan boshlang'ich vektorlar hosil qilishda;

– elektron raqamli imzo tizimlarida katta qiymatga ega parametrlar uchun dastlabki tasodifiy qiymatlarni generatsiyasida;

– bitta protokol orqali bir xil ma'lumotlarni har-xil kalitlar qo'llash bilan shifrlab har-xil ko'rinishda uzatish uchun talab qilinadigan holatlarda kalit uchun yetarli uzunlikdagi tasodifiy ketma-ketlik hosil qilishda, masalan SSL va SET protokollarida.

Chiziqli va chiziqsiz kongruent generatorlar

Elementar rekurent hisoblashlarga asoslangan psevdotasodifiy ketma-ketlik generatorlari ularda qo'llanilgan akslantirishlarga ko'ra *chiziqli, multiplikativ, chiziqsiz* turkumlarga bo'linadi.

Chiziqli va multiplikativ kongruent generatorlar. Chiziqli kongruent generatorlar umumiy holatda $x_{i+1} = (ax_i + c) mod N$ formula bilan aniqlanuvchi rekurent hisoblashga asoslangan. Dastlabki berilgan kirish parametrlari asosida ketma-ketliklar hosil qilinadi.

Kirish parametrlari:

N – chekli maydon xarakteristikasini ifodalovchi son, a va c - o'zgarmas musbat butun sonlar, x_0 – boshlang'ich butun qiymatli son;

Ketma-ketlikni tashkil etuvchi chiqish qiymatlari:

$$x_{i+1} = (ax_i + c) mod N, i = 0,1,2,3, \ldots$$

Chiziqli kongruent generatorning kirish parametri $c = 0$ bo'lsa, ya'ni

$$x_{i+1} = (ax_i) mod N, i = 0,1,2,3, \ldots$$

bo'lsa, bu generator chiziqli multiplikativ generator deyiladi.

Qoida 3.1. Ushbu $x_{i+1} = (ax_i + c) mod N, i = 0,1,2,3, \ldots$ rekurent formula bilan aniqlangan psevdotasodifiy ketma-ketlik maksimal N davrga ega bo'lishi uchun quyidagi:

1) c va N -o'zaro tub sonlar, ya'ni $gcd(c, N) = 1$;

2) r soni N sonining bo'luvchisi va $a - 1$ soni r soniga karrali;

3) N soni 4 karrali bo'lsa, $a - 1$ soni ham 4 ga karrali;

4)shartlarning bajarilishi zarur va yetarli.

Chiziqsiz kongruent generatorlar. Kirish parametrlari:

N – chekli maydon xarakteristikasini ifodalovchi son;

d, a va c - o'zgarmas musbat butun sonlar, x_0 – boshlang'ich qiymat;

Ketma-ketlikni tashkil etuvchi chiqish qiymatlari :

$$x_{i+1} = (dx_i^2 + ax_i + c) mod N, \text{ bu yerda } i = 0,1,2, \ldots$$

Bu generator kvadratik generator deb ham ataladi.

Qoida 4.2.1. Kvadratik generatorlar hosil qilgan generator o'zining $T_{max} = N$ maksimal davriga ega bo'lishi uchun quyidagi shartlarning:

1) c va N –o'zaro tub sonlar;

2) $d, a - 1$ -sonlari biror p –tub songa karrali bo'lib, bu p – soni N ning bo'luvchisi;

3) d – juft son bo'lib,

$$d = \begin{cases} (a-1) mod 4, & agar\ N\ soni\ 4\ ga\ karrali\ bo'lsa; \\ (a-1) mod 2, & agar\ N\ soni\ 2\ ga\ karrali\ bo'lsa. \end{cases}$$

4)agarda N soni 9 ga karrali bo'lsa, u holda $d \bmod 9 = 0$ yoki $d mod 9 = 1$ va $c d mod 9 = 6$;

bajarilishi zarur va yetarli.

Shuningdek, $N = 2^q$ bo'lsa, maksimal davrni ta'minlash uchun d-toq bo'lishi va $a = (d + 1) mod 4$ bo'lishi yetarlidir.

Kvadratik kongruent generator $x_{i+1} = (x_i^2) mod p$, $(i \geq 0)$ uchun 512 bit uzunlikka ega bo'lgan p va x_0 parametrlar quyidagicha olinishi tavsiya etiladi:

$p =$
987b6a6bf2c56a97291c445409920032499f9ee7ad128301b5d0254aa1a963
3f

dbd378d40149f1e23a13849f3d45992f5c4c6b7104099bc301f6005f9d8115e
1;
x_0 =
3844506a9456c564b8b8538e0cc15aff46c95e69600f084f0657c2401b3c244734b62
ea9bb95be4923b9b7e84eeaf1a224894ef0328d44bc3eb3e983644da3f5.

Kirish bit uzunligi 512 bit bo'lgan kubik kongruent generator $x_{i+1} = x_0{}^3 mod 2^{512}$ uchun esa kirish parametrini x_0= 7844506a9456c564b8b8538e0cc15aff46c95e69600f084f0657c2401b3c 244734b62ea9bb95be4923b9b7e84eeaf1a224894ef0328d44bc3eb3e983 644da3f5 ko'rinishda tanlash maqsadga muofiqdir.

Chiziqli va multiplikativ kongruent generatorlar kabi chiziqsiz generatorlar ham kiptotahlil usuliga bardoshsiz.

3.4. Oqimli shifrlarni qurish asoslari

Uzluksiz shifrlash algoritmlarini qurilmalarda amalga oshirish yuqori samaradorlikka ega bo'lgani bois, ko'plab real vaqt ilovalarida (masalan, telefon orqali so'zlashuvda) keng qo'llanilmoqda. Uzluksiz shifrlash algoritmlari simmetrik kriptotizim hisoblanib, blokli shifrlash algoritmlariga alternativ tur hisoblanadi. Simmetrik uzluksiz shifrlash algoritmlarini ishlash g'oyasi bir martali bloknotga (yoki Vernam shifri deb ataluvchi) asoslangan bo'lib, unga ko'ra ochiq matn uzunligiga teng bo'lgan bir martali kalit ketma-ketligi hosil qilinadi va u ochiq matn bilan XOR amalida qo'shiladi. Mazkur holda agar kalit ketma-ketligi to'liq tasodifiy va bir marta foydalanilsa, mazkur shifrlash usuli to'liq bardoshlikni ta'minlaydi. Biroq, ochiq matn uzunligiga mos bo'lgan kalitlarni generatsiya qilish va uni qabul qiluvchiga xavfsiz etkazish zaruriyati, Vernam shifrini to'liq amaliyotga tadbiq etish imkoniyatini bermaydi.

Uzluksiz shifrlash algoritmlarida ushbu muammo xavfsizlik darajasini pasaytirish orqali bartaraf etilgan, ya'ni, tomonlar o'rtasida ma'lum uzunlikdagi maxfiy kalit taqsimlanadi va u kalit ketma-ketligini hosil qilish uchun ishlatiladi. Maxfiy kalit simmetrik kalit bo'lib, psevdotasodifiy sonlar generatoriga (PTSG) kiritiladi va natijada undan ochiq matn uzunligiga teng bo'lgan kalit ketma-ketligi hosil qilinadi. Biroq, foydalanilgan PTSG to'liq tasodifiy va xavfsiz bo'lmagani bois, yaratilgan shifrlash algoritmi ham Vernam shifridek to'liq xavfsizlikni

ta'minlamaydi. Shuning uchun odatda PTSGiga buzg'unchi kalit ketma-ketligini bilgan taqdirda ham maxfiy kalitni bilmaslik talabi qo'yiladi.

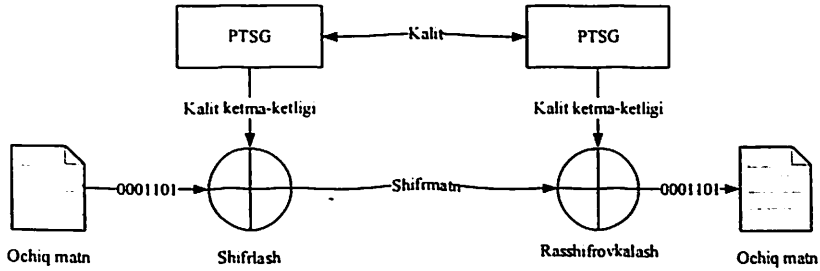
PTSGlaridan hosil bo'lgan ketma-ketliklar uchun takrorlanish oralig'i yetarlicha katta bo'lishi talab etiladi va u aynan xavfsizlik uchun muhim faktor hisoblanadi. Agar buzg'unchi takrorlanish oralig'igi bilish imkoniyatiga ega bo'lsa, u holda osonlik bilan shifrmatnni rasshifrovkalaydi. Shuning uchun takrorlanish davri shifrlanuvchi ma'lumotning uzunligidan yetarlicha katta bo'lishi talab etiladi. Agar uzluksiz shifrlash algoritmida takrorlanish davri aniqlansa, maxfiy kalitni almashtirish yoki tasodifiy parametr (nonce) kiritish zaruriyati tug'iladi.

Uzluksiz shifrlash algoritmi to'liq sozlangandan so'ng, dastlabki hosil bo'lgan ma'lum uzunlikdagi ketma-ketliklardan foydalanish tavsiya etilmaydi. Buning asosiy sababi, kiritilgan maxfiy kalit asosida ketma-ketliklarni hosil qilishda to'liq "yaxshi aralashtirish" amalga oshirilmagani hisoblanadi.

Sinxronlashgan va o'zi mustaqil sinxronlashuvchi shifrlar. Uzluksiz shifrlar ketma-ketlikni o'zlarining ichki holatiga asosan hosil qilishadi. O'z ichki holatini yangilash usuliga ko'ra uzluksiz shifrlarni ikkiga ajratish mumkin.

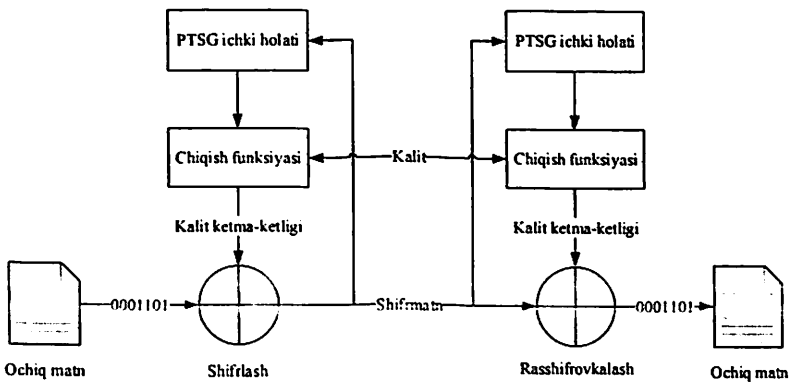
Sinxronlashgan uzluksiz shifrlash o'z ichki holatini ochiq matn yoki shifrmatndan mustaqil ravishda yangilaydi. Shifrlash jarayoni boshlanishidan oldin tomonlardagi PTSGlari o'z ichki holatlarini sinxronlashni amalga oshiradi. Agar shifrmatndagi yoki ochiq matndagi biror qism ma'lumotlar olib tashlansa yoki qo'shilsa, sinxronlash buziladi. Bunda aloqani tiklash uchun qayta sinxronlash mexanizmi, yuqori hisoblash va murakkablikni talab etadi. Boshqa tomondan, shifrmatnning bir bitining o'zgarishi ochiqmatnning ham bir bitini o'zgarishiga sabab bo'ladi va bu kam yo'qotishni talab qiluvchi ilovalar (masalan, ovozli so'zlashish yoki simsiz tarmoqlarda) uchun juda ham o'rinlidir. 3.9-rasmda sinxron ravishda ishlovchi uzluksiz shifrlash algoritmlarining umumiy ko'rinishi keltirilgan. Sinxronlashgan uzluksiz shifrlash aktiv hujumlarga (hujumchi aloqani uzishi va o'zgartirilgan shifrmatn va unga mos ochiq matn orasidagi bog'liqlikni topishi mumkin)

zaif hisoblanadi. Ushbu turdagi shifrlarni tahlil qilishda ma'lum ochiqmatnga asoslangan usullardan keng foydalaniladi.



3.9-rasm. **Sinxronlashgan uzluksiz shifrlash algoritmlari**

O'zi sinxronlashuvchi uzluksiz shifrlar ichki holatini shifrmatnning *N* bitiga ko'ra yangilaydi va ushbu usulda shifrlashning umumiy ko'rinishi 3.10-rasmda keltirilgan. O'zi sinxronlashuvchi uzluksiz shifrlar yordamida qabul qiluvchi avtomatik ravishda *N* shifrmatn bitini qabul qilgandan so'ng sinxronlash amalga oshiriladi. Bu imkoniyat shifrmatnga ba'zi bitlar qo'shilganda yoki olib tashlanganda uni osonlik bilan tiklash imkoniyatini taqdim qiladi. Agar shifrmatnning bir biti o'zgarishga uchrasa, ko'pi bilan *N* bit ochiq matn o'zgarishga uchrashi mumkin. Shuning uchun bu turdagi shifrlarga aktiv hujumni amalga oshirish murakkab hisoblanadi. Biroq, kriptografik nuqta nazaridan har bir o'zgargan bit ochiqmatning *N* bitiga ta'sir qilishi katta noqulaylikni olib keladi.

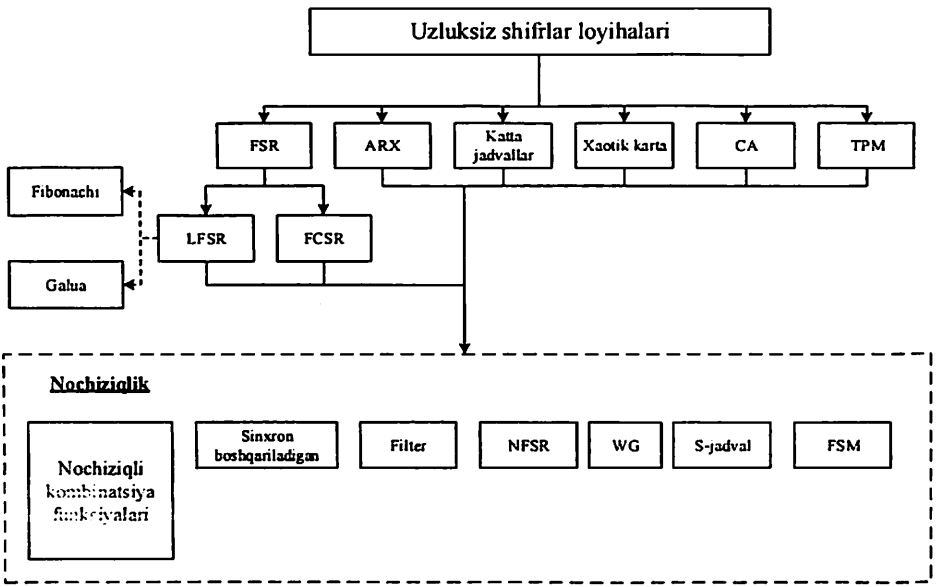


3.10-rasm. **O'zi sinxronlashuvchi uzluksiz shifrlash usuli**

Bundan tashqari, o'zi sinxronlashgan uzluksiz shifrlash usullari jiddiy xavfsizlik muammosiga ega. Kalit oldingi bitlar asosida yangilanganligi sabab, kalit ketma-ketligida statistik qonuniyat oshkor bo'lishi mumkin. O'zi sinxronlashuvchi uzluksiz shifrlar tanlangan shifrmatn bo'yicha hujumlarga bardoshsiz bo'lib, agar hujumchi shifrmatnning bir qismini deshifrlay olsa, u holda qolgan qismini ham deshifrlash imkoniyatiga ega bo'ladi. Bu esa o'zi sinxronlashuvchi uzluksiz shifrlarni xavfsiz tarzda loyihalash murakkab vazifa ekanligini anglatadi.

Har ikkala, sinxronlashgan va o'zi sinxronlashuvchi uzluksiz shifrlar ma'lumotlarni shifrlash/ rasshifrovkalash uchun foydalanilishi va balki, faqat noldan iborat ketma-ketlikni shifrlash orqali psevdotasodifiy sonlar generatori sifatida ham ishlatilishi mumkin.

Asosiy loyihalash usullari. Uzluksiz shifrlarni loyihalashga oid ma'lumotlar ko'plab manbalarda keltirilgan bo'lib, kam hisoblash imkoniyatiga ega qurilma va muhitlar uchun uzluksiz shifrlarni loyihalashning umumiy ko'rinishi 3.11-rasmda keltirilgan.



3.11-rasm. **Uzluksiz shifrlarni loyihalashning tasnifi**

Uzluksiz shifrlarni yaratishda asosan qayta aloqali siljitish registorlaridan (Feedback shift registers, FSR) foydalaniladi. Har bir siklda FSR kirish sifatida bir bitni qabul qiladi va chiqishda bir bitni taqdim qiladi. Kiruvchi bit oldingi holat funksiyasi hisoblanib, FSR funksiyasiga ko'ra ikki turdagi FSR bo'lishi mumkin: chiziqli qayta aloqali siljitish registori (Linear Feedback shift registers, LFSR) va qayta aloqali olib yuriluvchi siljitish registori (Feedback with carry shift registers, FCSR).

LFSR sxemasi uzluksiz shifrlar uchun keng tarqalgan usul hisoblanadi. Ular qurilmada amalga oshirishga qulay va tezkor hisoblanib, ularning xususiyatlari matematik tahlil qilinadi. Biroq, ular chiziqli tabiatga egaligi sababli, biror nochiziqli funksiya bilan ishlatilmasa xavfsiz emas. Siljitish amallariga ko'ra ikki turdagi LFSR mavjud. Fibonachi LFSR usuli odatiylardan bo'lib, unda har bir bit o'nga ko'chiriladi va bitlar o'nga siljiydi. O'ng tomondagi eng chetki bit bu chiqish biti hisoblanadi. Chap tomon bitlari esa ba'zi maxsus bitlar asosida hisoblanadi. Galua LFSR usuli unga alternativ usuli bo'lib, bitlar o'nga siljiydi va bunda tanlangan bitlar o'zgarishsiz qoladi. Nusxa olishdan oldin maxsus bitlarning eng o'ngdagisi oldingi chiqish biti bilan XOR amalida qo'shiladi. Galua LFSR asosida yaratilgan shifrlar Fibonachi LFSR asosida ishlab chiqilgan shifrlarga qaraganda qurilmalar uchun ko'proq mos hisoblanadi.

FCSR uzluksiz shifrlarni yaratish yondashuvi LFSR ning arifmatik anologi hisoblanadi. Ular LFSR ga o'xshash bo'lib, faqat bir bosqichdan ikkinchi bochqichga o'tishga ko'mak berish uchun qo'shimcha xotiradan iborat. Ushbu yondashuvni parallel arxitekturaga samarali amalga oshirish mumkin. Biroq, FCSR yondashuvi tabiiy holda takrorlanish davriga ega bo'lgani bois, to'g'ridan-to'g'ri foydalanilmaydi.

FCSR ga asoslangan uzluksiz shifrlardan tashqari amalda qator alternativ variantlar ham mavjud. Masalan, modul bo'yicha *qo'shish, aylantirish* va *XOR* (add. rotate and XOR, ARX) amallariga asoslangan usullar juda ham mashhur bo'lib, ular juda tezkor va amalga oshirish juda ham arzon. Ushbu amallar o'zgarmas vaqtda yuklanadi va vaqt bo'yicha hujumlarni yuzaga kelishini kamaytiradi. ARX amallariga asoslangan

shifrlar tezkor va amalga oshirish uchun ancha ixcham hisoblansada, xavfsizlik nuqtai nazaridan mos emas.

Sodda amallarga asoslangan ARX yondashuvidan ko'ra, dasturiy ta'minot ko'rinishda amalga oshirganda yuqori tezlikni taqdim qiluvchi *katta jadvallar* usuli mavjud. Katta jadvalda holat muhim ahamiyatga ega va uning kontenti nochiziqli funksiyalar yordamida har bir raundda almashib boradi. Ushbu yondashuv ham dasturiy va ham apparat ta'minotda katta xotira hajmini sarfi tufayli o'ziga xos ahamiyatga ega.

Uyali avtomatika (Cellular automata, CA) bu – uyaning doimiy tarmog'i bo'lib, ularning har birida chekli sondagi holatlar mavjud. Har bir uya o'z holatini belgilangan qoniniyatga ko'ra yangilaydi. Har bir uyani holatini yangilash qonuniyati esa uyaning holati va uning qo'shnisi holati asosida hisoblanadi. Berilgan qonuniyat bo'yicha, keyingi holatlarni bilish oson bo'lsada, oldingi holatlarni bilishni imkoni yo'q. Kriptografiyada CAlar bir tomonlama funksiyalar kabi bo'lib, unga teskari bo'lgan funksiyani topish murakkab. Ularni apparat ko'rinishda amalga oshirish qulay va dasturiy ko'rinishda bosqichma-bosqich amalga oshirish ham samarali bo'lishi mumkin. Bundan tashqari, parallel akslantirishlardan foydalanish ham mumkin bo'lib, bu o'tkazuvchanlik qobiliyatini yanada oshiradi.

Xaotik karta (Chaotic map) xaotik xususiyatga ega bo'lgan taqdimotni amalga oshiruvchi karta. Ular iterativ funksiyalarga o'xshash diskret vaqtli parametr orqali xarakterlanadi. Kriptografiyada ularning odatiy sozlanishi ochiq matn bilan kalit ketma-ketligini bitlararo amal yordamida aralashtirish hisoblanadi. Bunda PTSGidan hosil bo'lgan ketma-ketliklarni yaxshi tasodifiylik darajasiga egaligi muhim hisoblanadi. Bundan tashqari, bu turdagi shifrlash algoritmlarini apparat ko'rinishda amalga oshirish yuqori samarali hisoblanadi.

Daraxt shoxli mashina (Tree Party Machine, TPM) ko'p qatlamli oldinga siljuvchi neyron tarmoq hisoblanib, ular kriptografiyada keng tarqalgan tanlov hisoblanmasada, yuqori tasodifiylik darajasiga egaligi sababli uzluksiz shifrlarni yaratishda keng qo'llaniladi.

Chiziqsizlik. LFSR loyihalashning xavfsizligini oshirish uchun ko'plab sxemalar taklif etilgan va ularda nochiziqli funksiyalardan

foydalanish tavsiya etilgan. Masalan, ular ichiga nochiziqli kombinatsiya funksiyalarini, vaqtga asosan boshqariluvchi generatorlarni va filter generatorlarini oladi. Nochiziqli kombinatsiya funksiyalari bilan, bir qancha parallel LFSRlarning chiqishlari nochiziqli bul funksiyasiga kiritiladi. Odatiy sozlanishda, LFSR doimiy holatda siljiydi. Generator ta'sir qiluvchi LFSR esa boshqa LFSRning chiqishiga ko'ra siljishni amalga oshiradi. Agar filter funksiyalari foydalanilganda, LFSRning butun holati nochiziqli funksiyaga kiritiladi. Ushbu funksiyalarning birlashgan holatda foydalanilgan ko'rinishlari ham mavjud.

Nochiziqli qayta aloqali siljituvchi registorlar (Non-linear feedback shift registers, NFSR) usuli ham uzluksiz shifrlarni nochiziqligini ta'minlash uchun foydalaniluvchi o'zak komponentlardan biri hisoblanadi. Bundan tashqari, u kriptotahlil usullariga ham bardoshli hisoblanadi va ularga oid kam sonli nazariy tahlil natijalari mavjud. NFSR usulidagi shifrlarni kriptotahlilga bardoshligi, uning murakkabligi bilan belgilanadi. Ularni apparat ko'rinishda amalga oshirish LFSR va FCSR larga qaraganda murakkab hisoblanadi. Bundan tashqari, NFSR ko'rinishidagi shifrlarni yaratishning o'zi ham qiyin vazifa hisoblanadi.

Welch-Gong (WG) funksiyalari NFSR ga o'xshamagan boshqa oilaga tegishli struktura bo'lib, ularni matematik tahlil qilish mumkin. Ular turli darajadagi tasodifiylik darajasini qayd qilishi tasdiqlangan bo'lib, ular shifrlash va autentifikatsiyalash uchun muhim ahamiyat kasb etadi.

S-jadvallar (Substitution-boxes, S-box) o'zida almashtirishni amalga oshiradi va kirishdagi m bitni chiqishda n bitga akslantiradi. Ular blokli shifrlar uchun muhim komponent bo'lib, kalit va ochiq matn o'rtasidagi bog'liqlikni kamaytirishga xizmat qiladi. Bundan tashqari S-jadvallar uzluksiz shifrlarda nochiziqlikni ta'minlash uchun ham keng qo'llaniladi.

Chekli holatli mashinalar (Finite state machine, FSM) hisoblash ketma-ketligi mantig'i uchun matematik model hisoblanadi. Har bir vaqtda FSM ko'p sonli holatlarning birida bo'ladi. Yangi holatga o'tish harakatlantiruvchi hodisa yoki shart natijasida amalga oshiriladi. Uzluksiz

shifrlarni yaratishda FSMlar dasturiy ta'minot ko'rinishida yaxshi ishlaydi va turli tahdidlarni oldini oladi.

3.5. A5/1 oqimli shifrlash algoritmi

Ushbu oqimli shifrlash algoritmidan GSM mobil aloqa tizimlarida ma'lumotlarni konfidensialligini ta'minlashda foydalaniladi. Mazkur algoritm algebraik tuzilishga ega bo'lsada, uni sodda diagramma ko'rinishda ham tasvirlash imkoniyati mavjud.

A5/1 shifrlash algoritmi uchta *chiziqli siljitish registr*laridan iborat, ular mos holda X, Y va Z kabi belgilanadi. X registr o'zida 19 bit $(x_0, x_1, \dots, x_{18})$, Y registr 22 bit $(y_0, y_1, \dots, y_{21})$ va Z registr 23 bit $(z_0, z_1, \dots, z_{22})$ ma'lumotni saqlaydi. Uchta registrning bunday o'lchamdagi bitlarni saqlashi bejiz emas. Sababi, chiziqli siljitish registrlari o'zida jami bo'lib 64 bitni saqlaydi. A5/1 shifrlash algoritmida foydalaniluvchi kalit K ning uzunligi 64 bitga teng va ushbu kalitdan registrlarni dastlabki to'ldirish uchun foydalaniladi. So'ngra oqimli shifrlash algoritmi asosida talab etilgan uzunlikdagi (ochiq matn uzunligiga teng bo'lgan) ketma-ketliklar generatsiyalanadi. Ketma-ketliklarni generatsiyalash tartibini o'rganishdan oldin, registrlar xususidagi ba'zi ma'lumotlar quyida keltirilgan.

X siljitish registrida quyidagi amallar ketma-ketligi bajariladi:

$$t = x_{13} \oplus x_{16} \oplus x_{17} \oplus x_{18}$$

$$i = 18,17,16, \dots, 1 \; uchun \; x_i = x_{i-1}, \; x_0 = t$$

Shunga o'xshash, Y va Z registrlar uchun ham quyidagilarni yozish mumkin:

$$t = y_{20} \oplus y_{21}$$

$$i = 21,20,19, \dots, 1 \; uchun \; y_i = y_{i-1}, \; y_0 = t$$

va

$$t = z_7 \oplus z_{20} \oplus z_{21} \oplus z_{22}$$

$$i = 22,21,20, \dots, 1 \; uchun \; z_i = z_{i-1}, \; z_0 = t$$

Berilgan uchta bit x, y va z uchun $maj(x, y, z)$ funksiya qiymati eng ko'p bitga teng bo'ladi. Masalan, agar x, y va z bitlar 0 ga teng bo'lsa, u holda funksiyaning qiymati 0 ga teng bo'ladi. Funksiyaga kiruvchi bitlar toq bo'lgani uchun, funksiya har doim 0 ni yoki 1 ni qaytaradi. Boshqa holatlar bo'lmaydi.

A5/1 shifrida, ketma-ketlikning har bir bitini generatsiyalash uchun quyidagilar bajariladi. Dastlab, $m = maj(x_8, y_{10}, z_{10})$ funksiya qiymati hisoblanadi. So'ngra X, Y va Z registrlar quyidagicha sijitiladi (yoki siljitilmaydi):

- agar $x_8 = m$ ga teng bo'lsa, X siljitiladi;
- agar $y_{10} = m$ ga teng bo'lsa, Y siljitiladi;
- agar $z_{10} = m$ ga teng bo'lsa, Z siljitiladi.

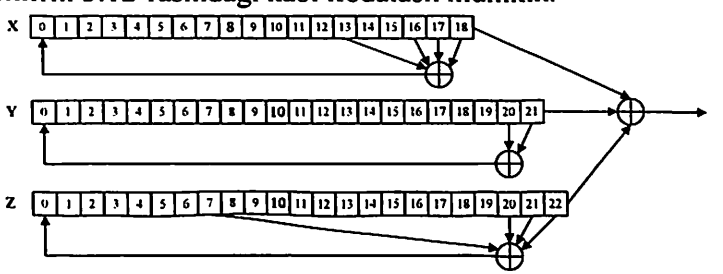
Ketma-ketlikning bir biti s quyidagicha generatsiyalanadi:

$$s = x_{18} \oplus y_{21} \oplus z_{22}$$

Yuqorida keltirilgan ketma-ketlik amallari talab etilguncha takrorlanadi (ochiq matn yoki shifrmatn uzunligiga teng).

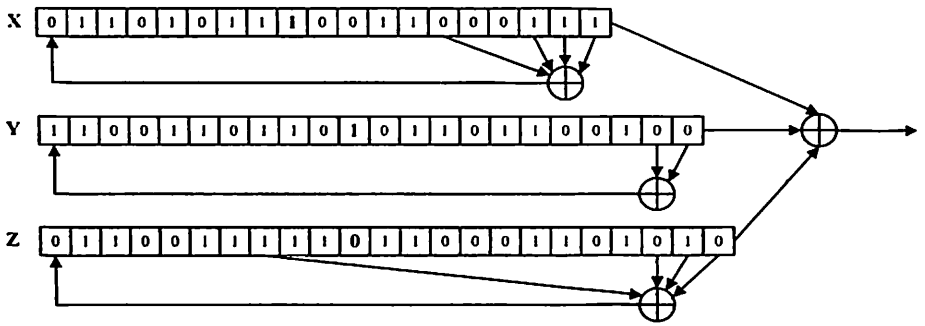
Agar biror registr siljitilsa, uning to'liq holati o'zgaradi. Ketma-ketlikning bir bitini hosil qilishda uchta registrdan kamida ikkitasi siljiydi va shuning uchun yuqoridagi ketma-ketlikni davom ettirgan holda yangi bitlar ketma-ketligini hosil qilish mumkin.

A5/1 oqimli shifrlash algoritmi murakkab ko'rinsada, qurilmada amalga oshirilganida yuqori tezlik qayd etiladi. Umumiy holda A5/1 oqimli shifrni 3.12-rasmdagi kabi ifodalash mumkin.



3.12-rasm. **A5/1 ketma-ketlik generatorining umumiy ko'rinishi**

Misol. Faraz qilaylik, 64 bitli kalit K ni X, Y va Z registrlariga bo'lib yozish natijasi quyidagicha bo'lsin (3.13 - rasm).



3.13 - rasm. ***X, Y va Z registrlarining dastlabki holati***

Mazkur holda $maj(x_8, y_{10}, z_{10}) = maj(1,1,0) = 1$ va bu $X\ va\ Y$ registrlar siljishini ko'rsatadi. Shuning uchun,

$$t = x_{13} \oplus x_{16} \oplus x_{17} \oplus x_{18} = 0 \oplus 1 \oplus 1 \oplus 1 = 1$$

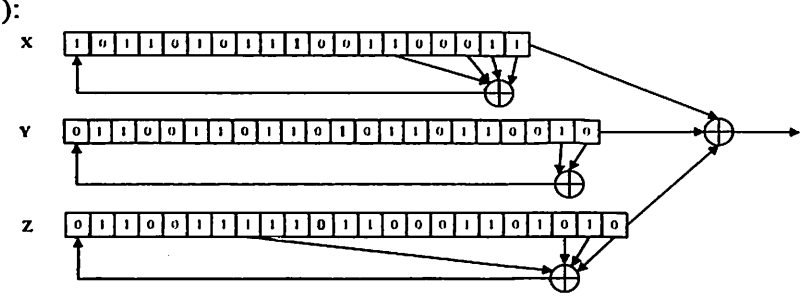
$$i = 18,17,16, \ldots,1\ uchun\ x_i = x_{i-1},\ x_0 = 1$$

Shunga o'xshash, Y registr uchun ham quyidagilarni yozish mumkin:

$$t = y_{20} \oplus y_{21} = 0 \oplus 0 = 0$$

$$i = 21,20,19, \ldots,1\ uchun\ y_i = y_{i-1},\ y_0 = 0$$

$X\ va\ Y$ registrlar siljiganidan keyingi holat quyidagicha (3.14 - rasm):



3.14 - rasm. ***X, Y va Z registrlarining siljiganidan keyingi holati***

Siljigan holatdan so'nggi registrlar holatidan generatsiyalangan bir bit $s = x_{18} \oplus y_{21} \oplus z_{22} = 1 \oplus 0 \oplus 0 = 1$. Shu tartibda talab etilgan bitlar ketma-ketligi generatsiyalanadi.

3.6. RC4 oqimli shifrlash algoritmi

Rivest Cipher 4 yoki RC4 uzluksiz shifrlash algoritmlari dasturiy vosita ko'rinishida amalga oshirishga qulay bo'lgan eng mashhur algoritmlardan biri bo'lib, Wired Equivalent Privacy (WEP), Wi-Fi

Protected Access (WPA) va Transport Layer Security (TLS) kabi protokollarda keng qo'llanilmoqda. Ushbu shifrlash algoritmi sodda tuzilishga ega va shuning uchun katta tezkorlik qayd etadi. U LFSR yondashuviga asoslangan bo'lib, undan farqli ravishda bit emas, balki bayt ko'rinishdadir.

RC4 shifrni ishga tushurish ikki qismdan iborat:

1. *S* blokni shakllantirish;
2. Psevdotasodifiy ketma-ketlik *K* ni generatsiyalash.

S blokni shakllantirish. Algoritm kirishda foydalanuvchidan *L* bayt uzunlikdagi kalit *Key* ni talab etadi. Ushbu bosqich *S* massivni to'ldirish bilan boshlanib, uning elementlari keyinchalik kalitga bog'liq holda almashtiriladi. Ushbu bosqichning psevdokodi quyida keltirilgan:

```
for i from 0 to 255
    S[i] := i
endfor
j := 0
for i from 0 to 255
    j := ( j + S[i] + Key[ i mod L ] ) mod 256
    Swap(S[i],S[j])   //  elementlar  o'rnini
almashtirish
endfor
```

Psevdotasodifiy ketma-ketlik K ni generatsiyalash. Algoritmning ushbu qismi generator deb nomlanadi. Generator har bir qadamda *S* blokdagi bir baytni psevdotasodifiy bayt sifatida taqdim etadi. Har bir bosqich uchun mos elementlar o'rni almashtiriladi. Ushbu bosqichning psevdokodi quyida keltirilgan:

```
i := 0
j := 0
while generatsiyalash sharti:
    i := (i + 1) mod 256
    j := (j + S[i]) mod 256
    Swap(S[i], S[j])
    t := (S[i] + S[j]) mod 256
    K := S[t]
```

```
endwhile
```

Psevdokodda keltirilgan siklning har bir bosqichida bir bayt psevdotasodifiy qiymat hosil bo'ladi va uni ochiq matnning bir baytiga qo'shish orqali shifrlash amalga oshiriladi. Shu sababli, siklni ochiq matnning baytdagi uzunligicha davom etishini bilish mumkin.

RC4 shifrlash algoritmi ham dasturiy ham apparat ko'rinishlarda amalga oshirish uchun qulay hisoblanadi. Biroq, ishlab chiqilganiga ancha muddat bo'lgani va kalitni almashtirishda muammolar mavjudligi sababli, xavfsiz emas deb topilgan. Xususan, protokollarda *nonce* va kalitning alohida-alohida yuborilmasligi va ular asosida kalit ketma-ketligini yaratish jarayoni. Bu holda bo'lishi mumkin bo'lgan yechimlardan biri bu – kalit va *nonce* kattaliklarini bardoshli MAC algoritmlari asosida xeshlash hisoblanadi. Hosil bo'lgan kalit ketma-ketliklari asosiy kalitga bog'liq bo'lgani bois, WEP protokolini buzishga asos bo'lgan. RC4 algoritmiga amalga oshirilgan oxirgi hujumlardan biri 224 ta ulanishni talab qilgan. Shifrni o'ziga amaliy tomondan hujumlar bo'lmagan bo'lsada, eng so'ngi hisoblash imkoniyatlari va ilmiy ishlar buni amalga oshirish imkoniyatlari mavjudligini ko'rsatmoqda.

3.7. SEAL oqimli shifrlash algoritmi

SEAL (Software-Optimized Encryption Algorithm) algoritmi dasturiy ko'rinishda amalga oshirish uchun mo'ljallangan bo'lib, IBM tashkilotida Phil Rogaway va Don Coppersmith tomonidan ishlab chiqilgan. Algoritm 32 bitli protsessorlar uchun optimallashtirilgan bo'lib, amalga oshirish uchun 8 ta 32 bitli registor va bir necha kilobaytlar talab etiladi. Nisbatan sekinroq operatsiyalarni qo'llagan holda SEAL algoritmi jadvallar to'plamida muhim amallarni oldindan amalga oshiradi. Ushbu jadvallar keyinchalik kalit sifatida foydalanilib, shifrlash va rasshifrovkalashda tezkorlikni oshirishga xizmat qiladi.

SEAL algoritmining yuqorida keltirilgan ananaviy oqimli shifrlardan farqi, uni psevdotasodifiy funksiyalar oilasiga tegishligi hisoblanadi. Berilgan 160 bitli kalit k va 32 bitli n uchun SEAL algoritmi n ni L bitli $k(n)$ ga kengaytiradi. Bu yerda, L kattalik 64 kilobaytdan kichik ixtiyoriy qiymatni olishi mumkin. Ushbu bosqich natijasida 3 ta jadval, R, S va T hosil qilinadi.

Ushbu jadvallarni hosil qilishda $SHA1$ xesh funksiyasida foydalanilgan muolajalardan foydalanilgan. Umumiy holda jadvallarni hosil qilish funksiyasini 160 bit qiymat qaytaruvchi $G_k(n)$ ko'rinishida ifodalash mumkin.

Quyidagi funksiya va o'zgaruvchilar indeks t ga bog'liq bo'ladi:

$-\ 0 \le t \le 19$ uchun $K_t = 0x5a827999$ va $f_t(B,C,D) = (B \wedge C) \vee (B \wedge D)$;

$-\ 20 \le t \le 39$ uchun $K_t = 0x6ed9eba1$ va $f_t(B,C,D) = B \oplus C \oplus D$;

$-\ 40 \le t \le 59$ uchun $K_t = 0x8f1bbcdc$ va $f_t(B,C,D) = (B \wedge C) \vee (B \wedge D) \vee (C \wedge D)$;

$-\ 60 \le t \le 79$ uchun $K_t = 0xca62c1d6$ va $f_t(B,C,D) = B \oplus C \oplus D$.

Shundan so'ng, 160 bitli k kalit 5 ta 32 bitli qismga ajratiladi: $k = H_0 \parallel H_1 \parallel H_2 \parallel H_3 \parallel H_4$.

Shuningdek, 16 ta 32 bitli so'zlar quyidagicha hosil qilinadi: $W_0 = n$, $W_1 = W_2 = \cdots = W_{15} = 0^{32}$.

Shundan so'ng quyidagi hisoblashlar amalga oshiriladi:

1. $16 \le t \le 79$ uchun $W_t = (W_{t-3} \oplus W_{t-8} \oplus W_{t-14} \oplus W_{t-16}) \lll 1$;
2. $A = H_0$, $B = H_1$, $C = H_2$, $D = H_3$, $E = H_4$;
3. $0 \le t \le 79$ uchun:

$$TEMP = A \lll 5 + f_t(B,C,D) + E + W_t + K_t;$$

$$E = D,\ D = C,\ C = B \lll 30,\ B = A,\ A = TEMP;$$

4. $H_0 = H_0 + A$, $H_1 = H_1 + B$, $H_2 = H_2 + C$, $H_3 = H_3 + D$, $H_4 = H_4 + E$.
5. $G_k(n) = H_0 \parallel H_1 \parallel H_2 \parallel H_3 \parallel H_4$.

$j = \lfloor i/5 \rfloor$ uchun $H_0^{5j} \parallel H_1^{5j+1} \parallel H_2^{5j+2} \parallel H_3^{5j+3} \parallel H_4^{5j+4} = G_k(j)$ bo'lgan $\Gamma_k(i) = H^i_{imod5}$ funksiyani kiritamiz. Ushbu funksiya 160 bitli $G_k(j)$ dan 32 bitli $\Gamma_k(i)$ ni olishga imkon beradi.

Shundan so'ng, quyidagi uchta jadvalni hosil qilinadi:

$T[i] = \Gamma_k(i),\ 0 \le i < 512$;

$S[j] = \Gamma_k(0x1000 + j),\ 0 \le j < 256$;

$R[k] = \Gamma_k(0x2000 + k),\ 0 \le k < 256$.

Shundan so'ng, kalit k foydalanilmaydi.

Xizmat registorlarini qiymatlash. Psevdotasodifiy ketma-ketliklarni generatsiyalashdan oldin 4 ta 32 bitli xizmat registorlari (A, B, C va D) va 4 ta 32 bitli so'zlarni (n_1, n_2, n_3 va n_4) hosil qilish kerak bo'ladi. Ularning qiymatlari R va T jadvallarning qiymatlari, 32 bitli son n va l butun sonlari asosida quyidagicha hosil qilinadi:

$Initialize(n, l, A, B, C, D, n_1, n_2, n_3, n_4)$

$A \leftarrow n \oplus R[4l];$

$B \leftarrow (n \ggg 8) \oplus R[4l + 1];$

$C \leftarrow (n \ggg 16) \oplus R[4l + 2];$

$D \leftarrow (n \ggg 24) \oplus R[4l + 3].$

$for\ j \leftarrow 1\ to\ 2\ do$

$P \leftarrow A \wedge 0x7fc;\ B \leftarrow B + T[P/4];\ A \leftarrow A \ggg 9;$

$P \leftarrow B \wedge 0x7fc;\ C \leftarrow C + T[P/4];\ B \leftarrow B \ggg 9;$

$P \leftarrow C \wedge 0x7fc;\ D \leftarrow D + T[P/4];\ C \leftarrow C \ggg 9;$

$P \leftarrow D \wedge 0x7fc;\ A \leftarrow A + T[P/4];\ D \leftarrow D \ggg 9;$

$(n_1, n_2, n_3, n_4) \leftarrow (D, B, A, C).$

$P \leftarrow A \wedge 0x7fc;\ B \leftarrow B + T[P/4];\ A \leftarrow A \ggg 9;$

$P \leftarrow B \wedge 0x7fc;\ C \leftarrow C + T[P/4];\ B \leftarrow B \ggg 9;$

$P \leftarrow C \wedge 0x7fc;\ D \leftarrow D + T[P/4];\ C \leftarrow C \ggg 9;$

$P \leftarrow D \wedge 0x7fc;\ A \leftarrow A + T[P/4];\ D \leftarrow D \ggg 9.$

Psevdotasodifiy ketma-ketliklarni generatsiyalash. SEAL algoritmida psevdotasodifiy ketma-ketliklarni generatsiyalashning asosiy funksiyasi $SEAL(k, n, L)$ quyidagicha amalga oshiriladi:

$SEAL(k, n, L)$:

$y = 0^L;$

$for\ l \leftarrow 0\ to\ \infty\ do$

$Initialize(n, l, A, B, C, D, n_1, n_2, n_3, n_4)$

$for\ i \leftarrow 1\ to\ 64\ do$

$P \leftarrow A \wedge 0x7fc;\ B \leftarrow B + T[P/4];\ A \leftarrow A \ggg 9;\ B \leftarrow B \oplus A;$

$Q \leftarrow B \wedge 0x7fc;\ C \leftarrow C \oplus T[Q/4];\ B \leftarrow B \ggg 9;\ C \leftarrow C + B;$

$P \leftarrow (P + C) \wedge 0x7fc$; $D \leftarrow D + T[P/4]$; $C \leftarrow C \ggg 9$;
$D \leftarrow D \oplus C$;

$Q \leftarrow (Q + D) \wedge 0x7fc$; $A \leftarrow A \oplus T[Q/4]$; $D \leftarrow D \ggg 9$;
$A \leftarrow A + D$;

$P \leftarrow (P + A) \wedge 0x7fc$; $B \leftarrow B \oplus T[P/4]$; $A \leftarrow A \ggg 9$;

$Q \leftarrow (Q + B) \wedge 0x7fc$; $C \leftarrow C + T[Q/4]$; $B \leftarrow B \ggg 9$;

$P \leftarrow (P + C) \wedge 0x7fc$; $D \leftarrow D \oplus T[P/4]$; $C \leftarrow C \ggg 9$;

$Q \leftarrow (Q + D) \wedge 0x7fc$; $A \leftarrow A + T[Q/4]$; $D \leftarrow D \ggg 9$;

$y \leftarrow y \parallel B + S[4i - 4] \parallel C \oplus S[4i - 3] \parallel D + S[4i - 2] \parallel A \oplus S[4i] - 1$;

agar $|y| \geq L$ bo'lsa, u holda $y_0 y_1 \cdots y_{L-1}$ qaytarish;

agar $odd(i)$ bo'lsa, u holda $(A, B, C, D) \leftarrow (A + n_1, B + n_2, C \oplus n_1, D \oplus n_2)$;

aks holda $(A, B, C, D) \leftarrow (A + n_3, B + n_4, C \oplus n_3, D \oplus n_4)$.

SEAL algoritmi ochiq matnning bir baytini shifrlash uchun 5 ta elementar mashina amalini talab qiladi. Ushbu algoritm 50 MGHz chastotali Intel 80486 mashinasida sekundiga 58 Mbit ma'lumotni shifrlash imkonini beradi.

3.8. WAKE oqimli shifrlash algoritmi

WAKE (Word Auto Key Encryption, avtomatik kalitda so'zlarni shifrlash) algoritmi David Wheeler tomonidan 1993 yilda yaratilgan. Ushbu algoritm 32 bitli so'zlar ketma-ketligini generatsiyalab, ularni ochiq matn belgilariga XOR amalida qo'shish bilan shifrmatnni hosil qiladi.

Ushbu algoritm CFB (Cipher Feedback Mode) rejimida ishlaydi. Ya'ni, oldingi shifrmatn keyingisi uchun xizmat qiladi. Shifrlash algoritmida 32 bit so'zlar ustida amallar bajariladi va dastlabki kalitning uzunligi 128 bitga teng bo'ladi. Ushbu algoritmda ham S blokdan foydalanilgan bo'lib, har biri 32 bit bo'lgan 256 ta elementdan iborat. Algoritm yetarlicha tezkor bo'lib, bir bayt uchun 6.38 ta siklni talab etadi. Bu ko'rsatkich SEAL algoritmiga nisbatan yomon ko'rsatkich bo'lsada, RC4 algoritmiga qaraganda yaxshi ko'rsatkich hisoblanadi (mos holda 3.5 ga 10.6 ta sikl).

Shifrlash jarayoni uchta bosqichdan iborat:

1. S blokni generatsiyalash.

2. Avtomatik kalitni generatsiyalash.

3. Shifrlash va rasshifrovkalash jarayoni.

S blokni generatsiyalash. Dastlabki kalitdan S blokning birinchi elementlari generatsiya qilinib, qolganlari quyidagicha hosil qilinadi:

1. S blokni shakllantirishda quyidagi 8 ta 32 bitli so'zlardan foydalaniladi:

$s[0]$: $0x726a8f3b$;

$s[1]$: $0xe69a3b5c$;

$s[2]$: $0xd3c71fe5$;

$s[3]$: $0xab3c73d2$;

$s[4]$: $0x4d3a8eb3$;

$s[5]$: $0x0396d6e8$;

$s[6]$: $0x3d4c2f7a$;

$s[7]$: $0x9ee27cf3$.

2. S ning dastlabki 4 elementi kalitdan quyidagicha hosil qilinadi:

$S[0]$ ...$S[3]$: $S[0] = K[0]$; $S[1] = K[1]$; $S[2] = K[2]$; $S[3] = K[3]$.

Bu yerda, $K[0]$, $K[1]$, $K[2]$ va $K[3]$ lar dastlabki kalitning 4 ta teng qismi.

3. S blokning qolgan elementlari quyidagicha hisoblanadi:

$for\ n = 4\ to\ 255$:

$x = S[n-1] + S[n-4]$

$S[n] = x \gg 3 \oplus s[x \wedge 7]$.

4. Shundan so'ng, quyidagi yig'indi hisoblanadi:

$for\ n = 0\ to\ 22$:

$S[n] += S[n+89]$;

Yig'indini hisoblash, kalitning barcha bitini bir qancha S blok elementlariga bog'lashga xizmat qiladi.

5. Quyidagi yordamchi o'zgaruvchilar aniqlanadi:

$X = S[33]$;

$Z = S[59] \vee 0x01000001$;

$Z = Z \wedge 0xFF7FFFFF$;

$X = (X \wedge 0xFF7FFFFF) + Z$.

6. S jadvaldagi so'zlarning birinchi bayti quyidagicha almashtiriladi:

$for\ n = 0\ to\ 255$:

$X = (X \wedge 0xFF7FFFFF) + Z;$

$S[n] = S[n] \wedge 0x00FFFFFF \oplus X.$

7. Quyidagi o'zgaruvchini shakllantirish:

$S[256] = S[0];$

$X = X \wedge 255;$

8. S blok elementlari o'rnini almashtirish:

$for\ n = 0\ to\ 255$:

$Temp = (S[n \oplus X] \oplus X) \wedge 255;$

$S[n] = S[Temp];$

$S[X] = S[n + 1].$

Avtomatik kalitni generatsiyalash. Ushbu jarayon quyidagicha amalga oshiriladi:

1. Dastlab kalit K (balki boshqa kalit ham bo'lishi mumkin) dan $R3$, $R4$, $R5$, $R6$ registor qiymatlari quyidagicha o'zlashtiriladi:

$R3[0] = K[0];$

$R4[0] = K[1];$

$R5[0] = K[2];$

$R6[0] = K[3].$

Bu yerda, $K[0]$, $K[1]$, $K[2]$ va $K[3]$ lar dastlabki kalitning (yoki boshqa kiritilganning) 4 ta teng qismi.

2. Avtomatik kalitlar ketma-ketligi quyidagicha hisoblanadi:

$R3[i + 1] = M(R3[i], R6[i], S);$

$R4[i + 1] = M(R4[i], R3[i], S);$

$R5[i + 1] = M(R5[i], R4[i], S);$

$R6[i + 1] = M(R6[i], R5[i], S).$

3. Psevdotasodifik ketma-ketlikning navbatdagi so'zi chetki registr qiymatiga teng bo'ladi:

$K_{i+1} = R6[i + 1].$

Bu yerda, $M(x, y, S) = (x + y) \gg 8 \oplus S[(x + y) \wedge 255]$ ga teng.

3.9. Blokli shifrlash rejimlari

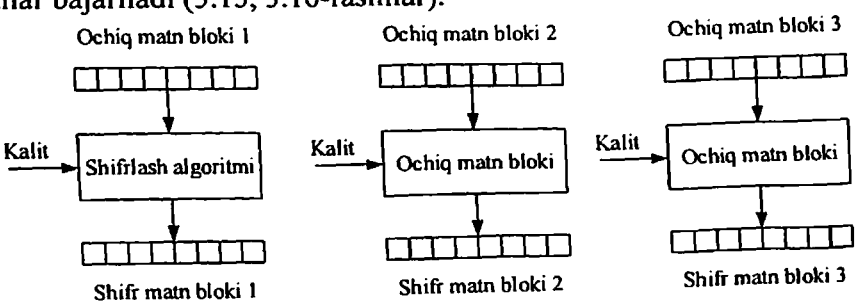
Oqimli shifrlardan foydalanish juda ham sodda – ochiq matn (yoki shifrmatn) uzunligiga teng bo'lgan kalitlar ketma-ketligi generatsiya qilinadi va XOR amalida bajariladi. Blokli shifrlardan foydalanish faqat bir blokni shifrlashda oson. Biroq, bir nechta (ko'plab) bloklarni shifrlash qanday amalga oshiriladi? Javob esa, bir qaraganda oson emas.

Shu sababli, simmetrik blokli shifrlardan turli ko'rinishlarda (rejimlarda) foydalanishga harakat qilinadi. Aksariyat rejimlarda amalga boshlang'ich vektor (initialization vector, IV) dan foydalaniladi. Boshlang'ich vektor ma'lum bitlar ketma-ketligidan iborat bo'lib, ochiq matnga yoki kalitga ma'lum algoritm bo'yicha qo'shiladi. Bu kattalik kalitdan farqli sanalib, odatda zarur bo'lsa ham sir saqlanmaydi.

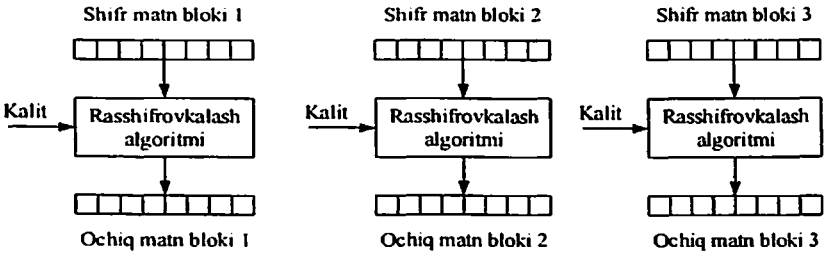
Hozirda quyidagi rejimlar keng qo'llaniladi:

- electronic codebook (ECB);
- cipher-block chaining (CBC);
- propagating cipher-block chaining (PCBC);
- cipher feedback (CFB);
- output feedback (OFB);
- counter (CTR).

Electronic codebook (ECB). Dastlabki sodda rejimlardan biri bo'lib, ochiq matn bloklarga bo'linadi va har bir blok ustida kalit bilan amallar bajariladi (3.15, 3.16-rasmlar).



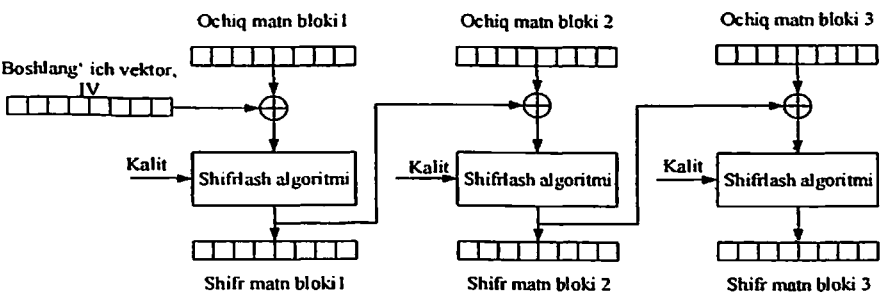
3.15-rasm. **ECB rejimida shifrlash**



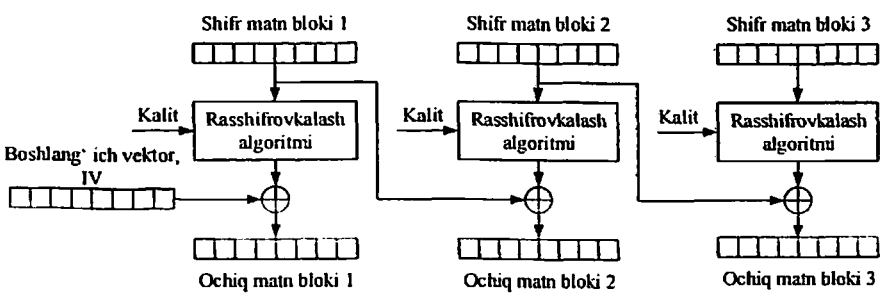
3.16-rasm. **ECB rejimida rasshifrovkalash**

Ushbu rejimning asosiy kamchiligi bir xil ochiq matn bir xil shifr matnga almashadi. Bundan tashqari, bu model matnni yashirish kabi vazifalarni bajarmaydi. Shularni hisobga olgan holda o'ta maxfiy axborot bilan ishlashda ushbu rejimdan foydalanish tavsiya etilmaydi. Biroq, dasturiy ko'rinishda parallel ravishda amalga oshirish imkoniyati mavjud.

Cipher-block chaining (CBC). Ushbu rejim 1976 yil IBM kompaniyasi tomonidan ishlab chiqilgan bo'lib, dastlab ochiq matnga boshlang'ich vektor qo'shilib, natija kalit yordamida shifrlanadi (3.17, 3.18 -rasmlar).



3.17-rasm. **CBC rejimida shifrlash**



3.18-rasm. **CBC rejimida rasshifrovkalash**

3.9. Blokli shifrlash rejimlari

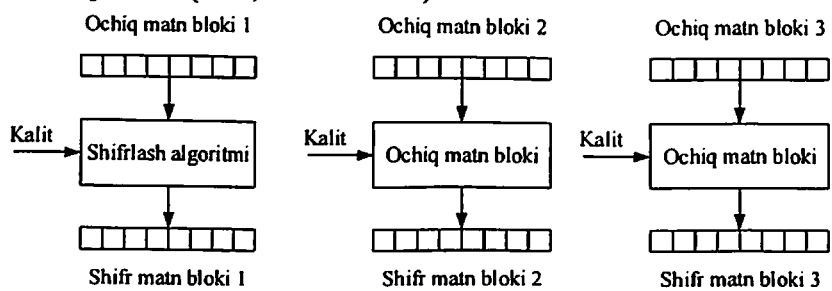
Oqimli shifrlardan foydalanish juda ham sodda – ochiq matn (yoki shifrmatn) uzunligiga teng bo'lgan kalitlar ketma-ketligi generatsiya qilinadi va XOR amalida bajariladi. Blokli shifrlardan foydalanish faqat bir blokni shifrlashda oson. Biroq, bir nechta (ko'plab) bloklarni shifrlash qanday amalga oshiriladi? Javob esa, bir qaraganda oson emas.

Shu sababli, simmetrik blokli shifrlardan turli ko'rinishlarda (rejimlarda) foydalanishga harakat qilinadi. Aksariyat rejimlarda amalga boshlang'ich vektor (initialization vector, IV) dan foydalaniladi. Boshlang'ich vektor ma'lum bitlar ketma-ketligidan iborat bo'lib, ochiq matnga yoki kalitga ma'lum algoritm bo'yicha qo'shiladi. Bu kattalik *kalitdan farqli sanalib, odatda* zarur bo'lsa ham sir saqlanmaydi.

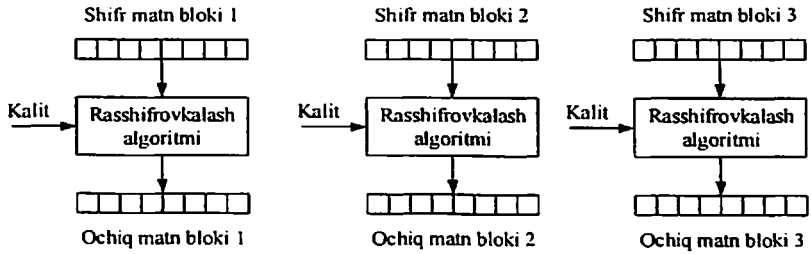
Hozirda quyidagi rejimlar keng qo'llaniladi:

- electronic codebook (ECB);
- cipher-block chaining (CBC);
- propagating cipher-block chaining (PCBC);
- cipher feedback (CFB);
- output feedback (OFB);
- counter (CTR).

Electronic codebook (ECB). Dastlabki sodda rejimlardan biri bo'lib, ochiq matn bloklarga bo'linadi va har bir blok ustida kalit bilan amallar bajariladi (3.15, 3.16-rasmlar).



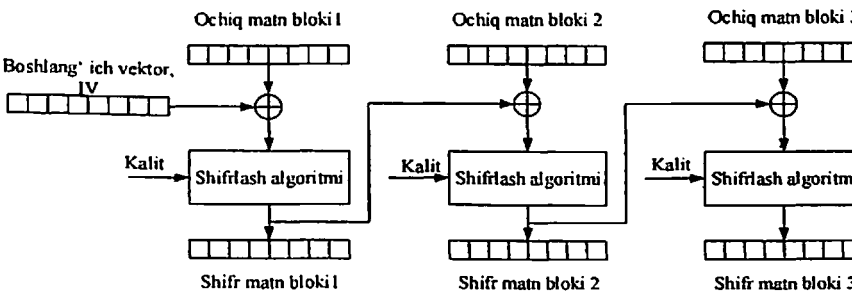
3.15-rasm. **ECB rejimida shifrlash**



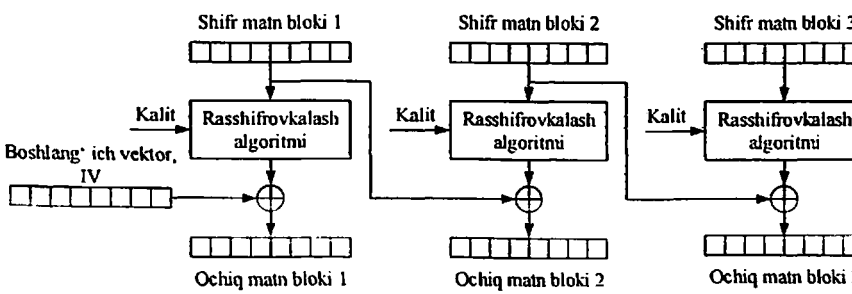
3.16-rasm. **ECB rejimida rasshifrovkalash**

Ushbu rejimning asosiy kamchiligi bir xil ochiq matn bir xil shifr matnga almashadi. Bundan tashqari, bu model matnni yashirish kabi vazifalarni bajarmaydi. Shularni hisobga olgan holda o'ta maxfiy axborot bilan ishlashda ushbu rejimdan foydalanish tavsiya etilmaydi. Biroq, dasturiy ko'rinishda parallel ravishda amalga oshirish imkoniyati mavjud.

Cipher-block chaining (CBC). Ushbu rejim 1976 yil IBM kompaniyasi tomonidan ishlab chiqilgan bo'lib, dastlab ochiq matnga boshlang'ich vektor qo'shilib, natija kalit yordamida shifrlanadi (3.17, 3.18 -rasmlar).



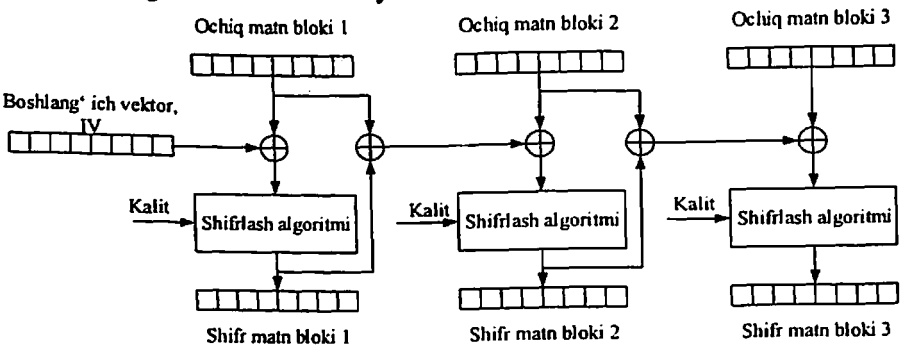
3.17-rasm. **CBC rejimida shifrlash**



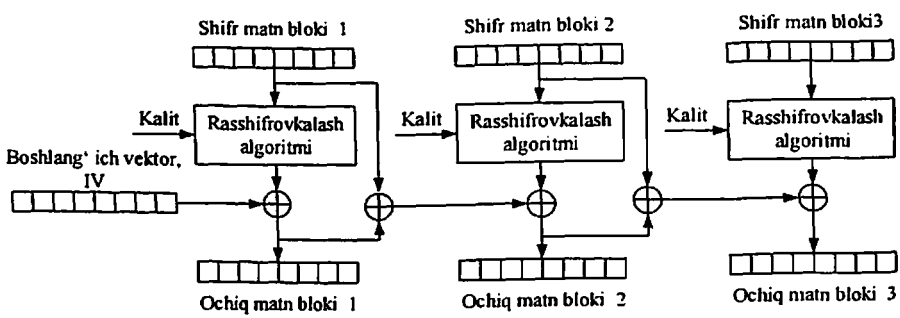
3.18-rasm. **CBC rejimida rasshifrovkalash**

Ushbu rejimda shifrlashda bir xil ma'lumot bloklari har xil shifrmatn bloklariga almashtiriladi. Bu esa shifrmatnga qarab tahlil qilish usulini oldini olishga yordam beradi. Keyingi bosqich natijasi oldingi bosqich natijasiga bog'liq bo'lgani bois, algoritmni parallel tarzda amalga oshirish mumkin emas.

Propagating cipher-block chaining (PCBC). Ushbu rejim Kerberos v4 va WASTE protakollarida foydalanilgan bo'lsada, bardoshlsizligi sababli amalda keng qo'llanilmaydi. Bundan tashqari, ushbu rejim parallel amalga oshirish imkoniyatini bermaydi (3.19, 3.20-rasmlar).

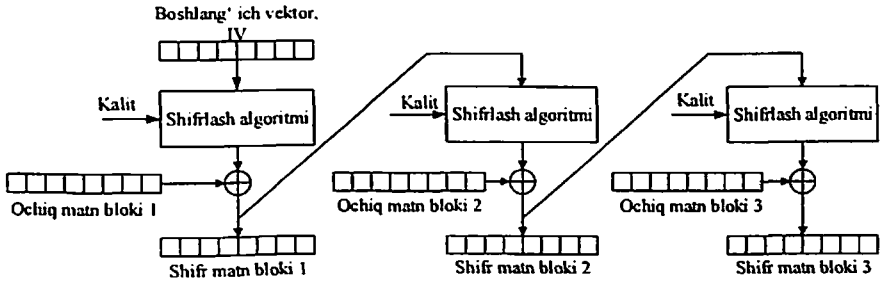


3.19-rasm. **PCBC rejimida shifrlash**

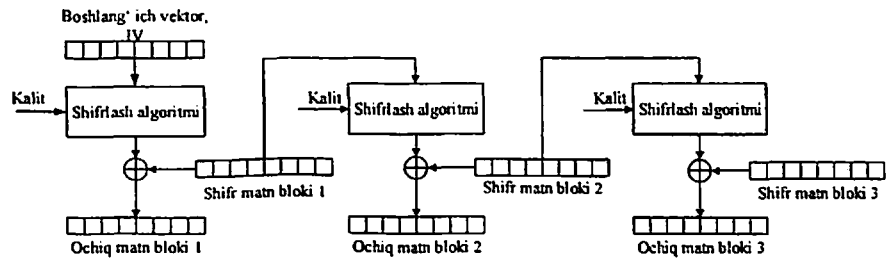


3.20-rasm. **PCBC rejimida rasshifrovkalash**

Cipher feedback (CFB). Ushbu rejim CBC rejimiga yaqin bo'lib, ushbu modelda rasshifrovkalash CBC modelida shifrlash amaliga o'xshaydi. Ushbu rejimda rasshifrovkalashda ham shifrlash amalidan foydalaniladi. Ushbu rejimni ham dasturiy tomondan parallel amalga oshirish imkoniyati mavjud emas (3.21, 3.22-rasmlar).

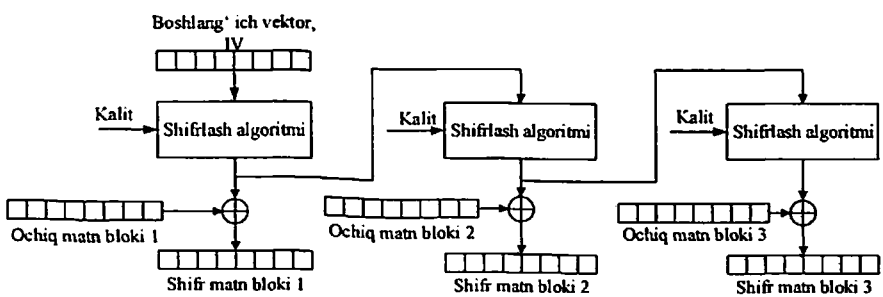


3.21-rasm. **CFB rejimda shifrlash**

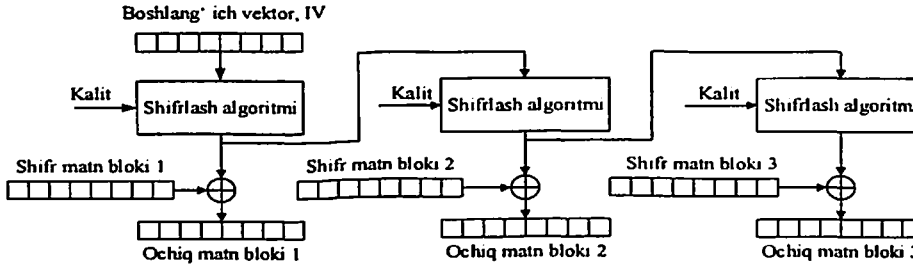


3.22-rasm. **CFB rejimda rasshifrovkalash**

Output feedback (OFB). Ushbu rejimda shifrlash amali sinxron oqimli shifrlash algoritmlarini qurishga imkon beradi. Ushbu rejimda shifrlashda keyingi blok oldingi blokga bog'liq bo'lganligi sababli, parallel ravishda amalga oshirish imkoniyati mavjud emas (3.23, 3.24-rasmlar).

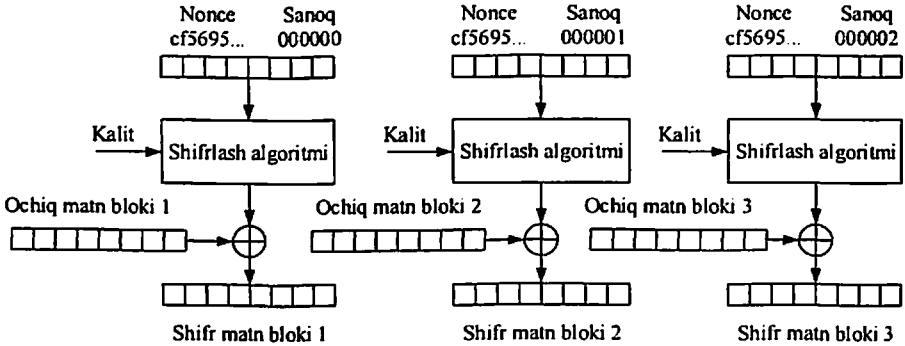


3.23-rasm. **OFB rejimda shifrlash**

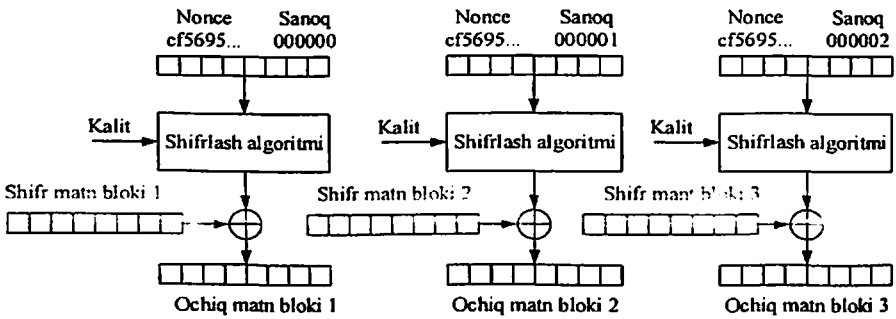


3.24-rasm. **OFB rejimda rasshifrovkalash**

Counter (CTR). OFB rejimi kabi ushbu rejimda ham oqimli shifrlashni amalga oshirish mumkin. Bunda keyingi kalit ketma-ketligi sanagich qiymatini shifrlash amali orqali amalga oshiriladi. Sanagich qiymati esa takrorlanmaydigan algoritm asosida hosil qilinadi. Ushbu usul amalda keng foydalanilib, kriptobardoshligi va parallel hisoblash imkonini berishi bilan belgilanadi (3.25, 3.26-rasmlar).



3.25-rasm. **CTR rejimida shifrlash**



3.26-rasm. **CTR rejimida rasshifrovkalash**

Yuqoridagi rasmlardan ko'rinib turibdiki, ba'zi shifrlash rejimlarida ham shifrlash ham rasshifrovkalash amallari birgalikda amalga oshirilsa, ba'zida faqat shifrlash amalidan foydalaniladi.

Nazorat savollari

1. Chiziqli va chiziqsiz kongurent generatorlarni tushuntiring.
2. Simmetrik oqimli shifrlar va ularni ma'lumotni shifrlashdagi o'ziga xos xususiyatlarini ayting.
3. Oqimli shifrlarni qurish usullari haqida ayting.
4. A5/1 oqimli shifrlash algoritmi va uning matematik asosi.
5. RC4 oqimli shifrlash algoritmi va uning matematik asosi.
6. SEAL oqimli shifrlash algoritmi va uning matematik asosi.
7. WEAK oqimli shifrlash algoritmi va uning matematik asosi.
8. Oqimli shifrlarning kelajagi haqida gapiring.
9. Simmetrik blokli shifrlarga oid asosiy tushunchalarni ayting.
10. Zamonaviy bl okli shifrlash algoritmlari yaratilish asosiga ko'ra qanday turlarga bo'linadi.
11. Feystel tarmog'i va uning xususiyatlari haqida gapiring.
12. SPN tarmoq va unda foydalanilgan akslantirishlar haqida ma'lumot bering.
13. Lai-Massey tarmog'iga asoslangan shifrlarni o'ziga xos xususiyatlarini ayting.
14. DES algoritmi va unda ma'lumotni shifrlash tartibini tushuntiring.
15. DES algoritmida raund kalitlarini generatsiyalash tartibini ayting.

IV BOB. Asimmetrik kriptotizimlar

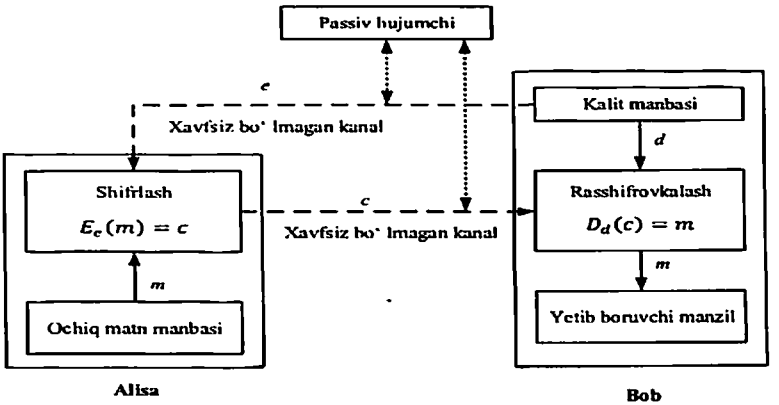
4.1. Ochiq kalitli (asimmetrik) kriptotizimlar

Kriptografiyada keng qo'llaniluvchi shifrlash usullaridan yana biri *ochiq kalitli* deb (yoki ikki kalitli deb ham ataladi) nomlanib, ma'lumotni shifrlashda va rasshifrovkalashda turli kalitlardan foydalanadi.

Faraz qilaylik, $\mathcal{K}$ kalit maydonida $\{E_e: e \in \mathcal{K}\}$ shifrlash funksiyasi va $\{D_d: d \in \mathcal{K}\}$ unga mos rasshifrovkalash funksiyasi bo'lsin. Shuningdek, barcha shifrlash/rasshifrovkalash funksiyalari jufti (E_e, D_d) uchun berilgan shifrmatn $c \in C$ uchun E_e funksiya yordamida ochiq matn $m \in M$ ni $(E_e(m) = c$ shartni qanoatlantiruvchi) hisoblashning imkoni mavjud bo'lmasin. Bu xususiyat, berilgan shifrlash kaliti e dan foydalanib, rasshifrovkalash kaliti d ni topishning imkonsizligini ko'rsatadi. Bu yerda, E_e – qopqonli bir tomonlama funksiya hisoblanib, uni teskarisini topish uchun faqat d parametr talab etiladi. Shu sababli, ochiq kalitli shifrlash algoritmlari shifrlash va rasshifrovkalash kalitlari bir xil bo'lgan, simmetrik shifrlardan farqlanadi.

Ochiq kalitli shifrlash algoritmi yordamida hosil qilingan ikki tomon o'rtasidagi aloqa kanalining umumiy ko'rinishi 4.1-rasmda keltirilgan. Bunga ko'ra, Bob (e, d) kalit juftlarini tanlaydi. Shifrlash kaliti e (*ochiq kalit* deb ataladi) ni Alisaga ochiq tarmoq orqali yuboradi va rasshifrovkalash kaliti d (*shaxsiy kkalit* deb ataladi) ni o'zida maxfiy saqlaydi. Shundan so'ng, Alisa ochiq matn m ni Bobning ochiq kaliti yordamida shifrlaydi: $c = E_e(m)$ va uni ochiq tarmoq orqali yuboradi. Bob esa qabul qilingan shifrmatn c ni d kalit bilan D_d funksiya yordamida rasshifrovkalaydi.

Ochiq kalitli shifrlash algoritmlari yordamida shifrlash jarayoni shifrlash kalitini ochiq yuborilishi bilan simmetrik kalitli shifrlardan farq qiladi. Bundan tashqari, ochiq kalitli shifrlash algoritmlari yordamida ma'lumot uzatishda simmetrik kriptotizimlar kabi har bir ma'lumot uzatuvchi va qabul qiluvchi orasida alohida – alohida kalitdan foydalanishni talab etmaydi. Bobning ochiq kaliti e ni bilgan har bir ishtirokchi ma'lumotni shifrlab unga yuborishi mumkin.

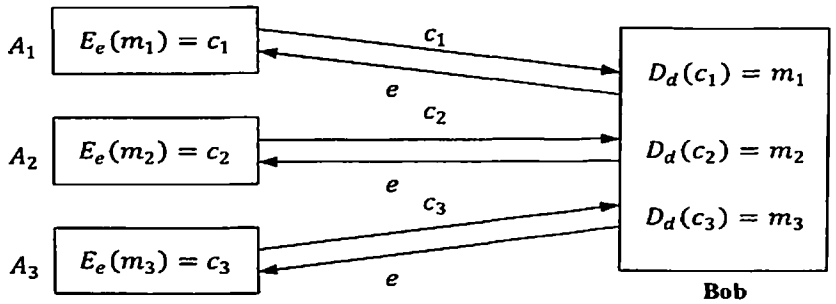


4.1-rasm. **Ochiq kalitli shifrlash usuli yordamida shifrlash**

Shifrlangan ma'lumotni rasshifrovkalash esa faqat d kalitni bilgan Bob uchun joiz bo'ladi. Mazkur holat 4.2-rasmda keltirilgan. Bu yerda A_1, A_2 va A_3 turli tomonlar bo'lib, Bobning yagona kaliti e bilan m_1, m_2 va m_3 ma'lumotlarni shifrlashi mumkin bo'ladi. Hosil bo'lgan barcha shifrmatnlarni esa Bob yagona shaxsiy kalit d bilan rasshifrovkalashi mumkin bo'ladi.

Ochiq kalitli shifrlash algoritmlari shifrlash kalitini uzatish uchun xavfsiz kanalni talab etmasligi bilan ajralib tursada, bu amalda to'liq xavfsizlikni ta'minlash uchun yetarli hisoblanmaydi. 4.3-rasmda buzg'unchi tomonidan ochiq kalitli shifrlash algoritmini buzmasdan ma'lumotni qo'lga kiritish jarayoni keltirilgan. Mazkur holat *obro'sizlantirish* deb ataladi.

Yuqoridagi ssenariyda, obro'sizlantirish holati hujumchi e' kalitni B tomonning ochiq kaliti deb A tomonni ishontirishi natijasida yuzaga kelmoqda. Bunda, hujumchi A dan B tomon uzatilgan shifrmatnni o'zining d' shaxsiy kaliti bilan rasshifrovkalaydi hamda B tomonning ochiq kaliti e bilan qayta shifrlab unga yuboradi. Mazkur holda muammo A tomon ochiq kalitni B tomonga tegishli ekanligini tekshira olmasligi natijasida yuzaga kelmoqda. Amalda ochiq kalitli shifrlash algoritmlaridan elektron raqamli imzo deb ataluvchi tizimni qurish uchun foydalaniladi. Elektron raqamli imzo algoritmlari ochiq kalitli kriptotizimlarning bir turi hisoblanadi.

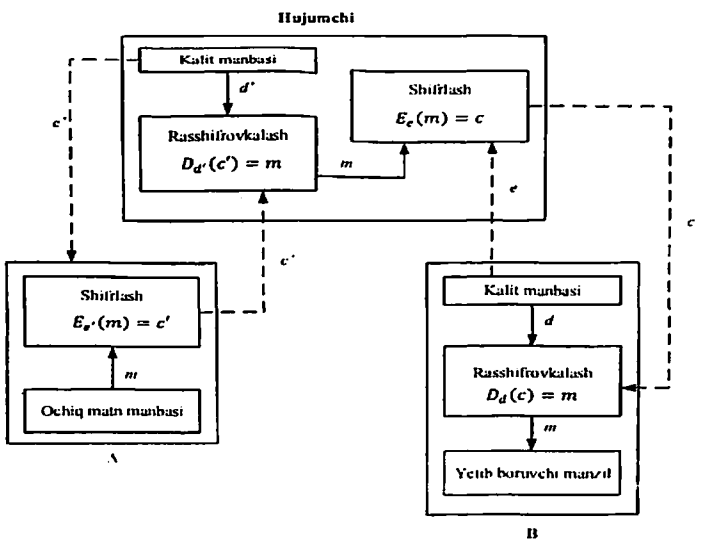


4.2-rasm. **Ochiq kalitli shifrlashdan foydalanish sxemasi**

Faraz qilaylik, E_e ochiq matn maydoni $\mathcal{M}$ dan shifrmatn maydoni C ga aklantiruvchi shifrlash funksiyasi va bunda $\mathcal{M} = C$ bo'lsin. Agar E_e ga mos bo'lgan rasshifrovkalash funksiyasi D_d bo'lsa, u holda E_e va D_d lar uchun o'rin almashtirish mumkin:

barcha $m \in \mathcal{M}$ lar uchun, $D_d(E_e(m)) = E_e(D_d(m)) = m$.

Ochiq kalitli shifrlashning mazkur ko'rinishi *qaytariladigan* deb ataladi. Bunda, faqat $m \in \mathcal{M}$ holat uchun $\mathcal{M} = C$ o'rinli bo'lishini inobatga olish kerak. Qolgan holatlarda esa ($m \notin C$), $D_d(m)$ akslantirish ma'noga ega bo'lmaydi.



4.3-rasm. **Ikki tomon orasidagi aloqaning obro'sizlantirilishi**

Elektron raqamli imzo tizimlarini qurish quyidagi tartibda amalga oshiriladi (4.4-rasm):

1. Faraz qilaylik imzolash sxemasi uchun $\mathcal{M}$ ochiq matn maydoni bo'lsin.

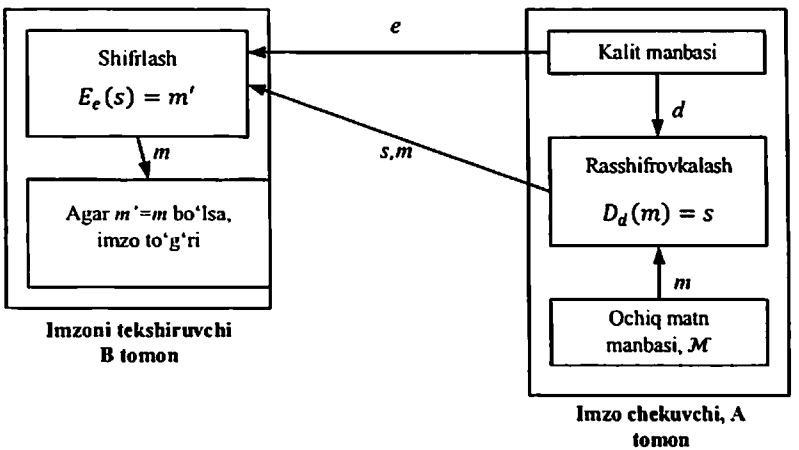
2. Faraz qilaylik imzo maydoni S uchun $\mathcal{M} = C$ o'rinli bo'lsin.

3. Faraz qilaylik (e, d) – ochiq kalitli shifrlash sxemasi uchun kalit jufti bo'lsin.

4. Imzolash funksiyasi S_A ni D_d ga teng deb olsak, u holda $m \in \mathcal{M}$ xabarlar uchun imzo $s = D_d(m)$ ga teng bo'ladi.

5. Imzoni tekshirish funksiyasi V_A esa quyidagiga teng bo'ladi:

$$V_A(m,s) = \begin{cases} true, & agar\ E_e(s) = m \\ false, & qolgan\ hollarda. \end{cases}$$



4.4-rasm. **Elektron raqamli imzoning sodda sxemasi**

Simmetrik kalitli kriptotizimlar kabi ochiq kalitli shifrlash orqali ma'lumotni konfidensialligini ta'minlash amalga oshiriladi. Biroq, elektron raqamli imzo tizimlari ma'lumotni yaxlitligini va rad etishdan himoyasini ta'minlashni maqsad qiladi.

Yuqorida ko'rib o'tilgan simmetrik va ochiq kalitli kriptotizimlar o'ziga xos qator afzallik va kamchiliklarga ega. Xususan, ularga quyidagilarni keltirish mumkin (4.1-jadval).

4.1-jadval

Simmetrik va ochiq kalitli kriptotizimlarning afzalliklari va kamchiliklari

Xususiyat / Kriptotizim	Afzallik	Kamchilik
Simmetrik kriptotizimlar	1. Simmetrik kalitli shifrlar ma'lumotni shifrlashda yuqori tezkorlik taqdim etadi. 2. Simmetrik kriptotizim kalitining uzunligi nisbatan qisqa.	1. Simmetrik kriptotizimdan foydalanish uchun ikki tomonda ham yagona kalit bo'lishi shart. 2. Simmetrik kalitlardan foydalanish davri kam.
Ochiq kalitli kriptotizimlar	1. Faqat shaxsiy kalitni maxfiy saqlash talab etiladi. 2. Shaxsiy va ochiq kalitlar juftida yetarlicha uzoq vaqt foydalanish mumkin.	1. Ochiq kalitli shifrlar ma'lumotlarni shifrlashda past tezkorlik qayd etadi. 2. Ochiq kalitli kriptotizimlarda kalit uzunligi nisbatan katta.

4.2. Kriptografik protokollar va kalit almashish protokollari

Bir nechta kriptografik algoritmlar yagona maqsad yo'lida *kriptografik protokol* sifatida birlashtiriladi. Shifrlash algoritmlari, elektron raqamli imzo va tasodifiy sonlar generatori kriptografik protokolni qurishda ishlatilishi mumkin.

Ta'rif 4.1. Kriptografik protokol – aniq xavfsizlik maqsadiga erishish uchun ikki yoki undan ortiq subyektlardan talab qilinadigan harakatlarni izchil ko'rsatib beradigan bosqichlar ketma-ketligi bilan taqsimlangan algoritm.

Kriptografik protokoldan farqli o'laroq mexanizm tushunchasi ham mavjud. *Mexanizm* – muayyan xavfsizlik maqsadlariga erishish uchun protokollarni, algoritmlarni va kriptografik bo'lmagan usullarni o'z ichiga olgan umumiy atama.

Misol 4.1. (Sodda kalit almashinish protokoli). Alisa va Bob xavfsiz bo'lmagan kanal orqali aloqa o'rnatish uchun simmetrik shifrlash tizimini tanladilar. Bu o'rinda, ma'lumotni shifrlash uchun ularga kalit zarur bo'ladi. Mazkur holda tomonlar o'rtasida aloqa o'rnatish protokoli quyidagicha bo'ladi:

1. Bob ochiq kalitni shifrlash algoritmini tanlaydi va o'zining ochiq kalitini kanal orqali Alisaga yuboradi.

2. Alisa ma'lumotlarni shifrlash uchun simmetrik kriptotizim kalitini generatsiya qiladi.

3. Alisa simmetrik kriptotizim kalitini Bobning ochiq kaliti bilan shifrlagan holda uni Bobga yuboradi.

4. Bob o'zining shaxsiy kaliti yordamida simmetrik kriptotizim kalitini qayta tiklaydi.

5. Shundan so'ng, Alisa va Bob umumiy simmetrik kalitga va uning yordamida ma'lumotlarni shifrlab uzatish imkoniyatiga ega bo'ladilar.

Mazkur protokolning maqsadi xavfsiz bo'lmagan tarmoqda xavfsiz aloqani qurish hisoblanadi va buning uchun ochiq kalitli va simmetrik shifrlash tizimlaridan foydalanilgan.

Amalda kriptografik funksiyalar alohida-alohida tarzda emas balki, kriptografik protokol sifatida keng qo'llaniladi. Bu esa qurilayotgan kriptografik protokolning xavfsizligi nafaqat unda foydalanilgan algoritmlarga, shuningdek, ularning birgalikda qanday loyihalanganligiga ham bog'liq bo'ladi.

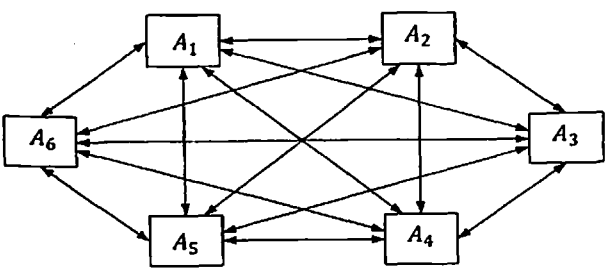
Yuqorida simmetrik, ochiq kalitli va elektron raqamli imzo kabi kriptotizimlar bilan tanishib o'tildi. Xususan, ularning har biri uchun kalitlarni generatsiyalash jarayoni mavjudligini ko'rishimiz mumkin. Kriptografik kalitlarni generatsiyalash va kalitni o'rnatish kabi vazifalar bilan kriptografiyaning *kalitlarni boshqarish* deb nomlangan bo'limi shug'ullanadi.

Ta'rif 4.2. Kalitni o'rnatish – ikki yoki undan ortiq tomonlarga keyingi kriptografik algoritmlar foydalanishi uchun kerak bo'lgan kalitni taqsimlash jarayoni.

Ta'rif 4.3. Kalitni boshqarish – kalitlarni o'rnatishni madadlovchi, tomonlar o'rtasida doimiy aloqani saqlab turuvchi hamda kalitlar eskirganda ularni yangilovchi jarayon va mexanizmlarning to'plami.

Kalitlarni o'rnatish jarayoni o'zida *kalitlarni kelishish* va *kalitlarni uzatish* qism jarayonlarini mujassamlashtirgan. Kalitlarni o'rnatish jarayonni ko'plab protokollar tomonidan amalga oshirilgan.

Kalitlarni o'rnatish simmetrik kriptotizimlar uchun jiddiy muammolardan hisoblanadi. Xususan, 6 ta ishtirokchi o'rtasida kalitni o'rnatish holatining ko'rinishi 4.5-rasmda keltirilgan.



4.5-rasm. **Olti tomon o'rtasidagi kalitlarning bog'lanishi**

Ma'lumot almashmoqchi bo'lgan har bir tomon o'rtasida alohida-alohida simmetrik kalitlar talab qilingani bois, tomonlar o'rtasidagi jami simmetrik kalitlar soni $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$ tenglik bilan aniqlanadi. Bu yerda, n – tomonlar soni bo'lib, 6 ta tomon uchun umumiy simmetrik kalitlar soni 15 ga teng bo'ladi.

Kalitlarni boshqarishning yana bir asosiy jarayonlaridan biri – *kalitlarni generatsiyalash* hisoblanadi. Masalan, shifrlash jarayoni uchun hujumchi noma'lum bo'lgan va uni bashorat qilish ehtimoli kam bo'lgan tasodifiy kalitlarni generatsiyalash talab etiladi. Tasodifiy kalitlarni generatsiyalash tasodifiy sonlarni yoki bitlar ketma-ketligini tanlashdan iborat bo'lib, amalga oshirishda yetarlicha murakkabliklarni taqdim etadi.

Misol 4.2. 0 va 1 lardan iborat bo'lgan tasodifiy ketma-ketlikni generatsiyalash uchun tangani to'g'ri tushgan holatini 1 deb, teskari holatini esa 0 deb olish mumkin. Agar tanga xolis deb hisoblanilsa, u holda tangani to'g'ri tushish ehtimoli ½ ga teng bo'ladi. Bu holat tangani

qanday yasalganiga va tangani tashlash qanday amalga oshirilganiga bog'liq bo'ladi. Mazkur usul katta uzunlikdagi tasodifiy bitlar ketma-ketligini talab qiluvchi muhit uchun o'rinli hisoblanmaydi. Ushbu misol tasodifiylikka misol bo'la olsada, amaliy tomondan ahamiyatga ega hisoblanmaydi.

Tasodifiy ketma-ketliklarning haqiqiy manbasi fizik jixozlar bo'lgani bois, amalda ulardan foydalanish yuqori narx talab etishi yoki jarayon sekin amalga oshirilishi mumkin. Ushbu muammoni yechishda, amalda dastlabki kichik uzunlikdagi qiymatdan (*seed* deb nomlanadi) hisoblash asosida *psevdotasodifiy ketma-ketliklarni* generatsiyalash usulidan foydalaniladi. Agar psevdotasodifiy ketma-ketliklarni generatsiyalash usuli noma'lum bo'lganda, u to'liq tasodifiy ketma-ketliklarni generatsiyalashga imkon beradi. Biroq, kriptografik algoritmlarni yaratishda *Kerkgoff prinsiga* asoslanilgani bois, amalda bardoshli psevdotasodifiy ketma-ketliklarni generatsiyalash usullarini yaratish murakkab masalalardan hisoblanadi.

4.3. Kriptografik algoritmlarga qaratilgan hujumlar

Yuqorida simmetrik va ochiq kalitli kriptografik tizimlardan foydalanish sxemalarida hujumchi yoki passiv hujumchi atamalari keltirildi. Bundan tashqari, deshifrlash tushunchasi haqida ma'lumotlar keltirildi. Ushbu tushunchalar kriptotahlil deb nomlanuvchi fan sohasiga tegishli bo'lib, ushbu bo'limda ularga qisqacha to'xtalib o'tiladi.

Ta'rif 4.4. Kriptoanaliz – qanday ishlashini tushunish, ularni buzish yoki obro'sizlantirish usullarini topish hamda takomillashtirish maqsadida shifrmatn, shifrlash algoritmi yoki kriptotizimni o'rganish jarayoni.

Odatda kriptoanalizda asosiy maqsad sifatida shifrlash kalitini topish qaraladi. Hujumchilarning darajasiga ko'ra kriptografik hujumlar quyidagi turlarga ajratiladi:

1. *Passiv hujum*da hujumchiga faqat aloqa kanalini kuzatish imkoniyati beriladi va u asosan ma'lumotning konfidensialligini buzishga qaratiladi.

2. *Aktiv hujum*da hujumchi kanal orqali uzatilgan ma'lumotlarni o'chirishi, modifikatsiyalashi yoki almashtirishning boshqa usullaridan

foydalanishi mumkin bo'ladi. Aktiv hujum ma'lumot yaxlitligi, konfidensiallini va autentifikatsiyasini buzishga qaratilgan bo'ladi.

Shifrlash sxemalari uchun shifrmatndan ochiq matnni olishni yoki shifrlash kalitini topishni maqsad qilgan quyidagi hujum usullari mavjud:

1. *Faqat shifmatnga asoslangan hujum* faqat bir yoki bir nechta shifrmatnlar asosida ochiq matnni yoki shifrlash kalitini topishni maqsad qiladi. Ushbu hujumga bardoshsiz bo'lgan shifrlash algoritmi to'liq xavfsiz emas deb qaraladi.

2. Ma'lum ochiq matnlarga asoslangan hujum ma'lum sondagi ochiq matnlar va ularga mos bo'lgan shifrmatnlar asosida shifrlash kalitini topishni maqsad qiladi. Biroq, ko'p sonli ochiq matn va shifrmatn juftliklari kerak bo'lgani bois, ushbu hujumni amalga oshirish murakkab vazifa hisoblanadi.

3. Tanlangan ochiq matnga asoslangan hujum buzg'unchi tomonidan tanlangan ochiq matn va unga mos shifrmatn berilganda shifrlash kalitini topishni maqsad qiladi. Shundan so'ng, berilgan shifrmatnlar uchun ochiq matnni topish imkoniyati tug'iladi.

4. Adaptiv tanlangan ochiq matnga asoslangan hujum ham tanlangan ochiq matnga asoslangan hujum kabi bo'lib, ochiq matnni tanlanishi oldingi shifrmatnga bog'liq bo'lishi bilan farqlanadi.

5. Tanlangan shifrmatnga asoslangan hujum hujumchi tomonidan tanlangan shifrmatnga mos bo'lgan ochiq matn berilishi bilan xarakterlanadi.

6. Adaptiv tanlangan shifrmatnga asoslangan hujum ham tanlangan shifrmatnga asoslangan hujum kabi bo'lib, shifrmatnni tanlanishi oldingi ochiqmatnga bog'liq bo'lishi bilan farqlanadi.

Kriptografik algoritmlardan protokol ko'rinishida foydalanilgani bois, protokollarga qaratilgan hujumlarning ayrimlari quyida keltirilgan:

1. Ma'lum kalit bo'yicha hujum. Ushbu hujumda hujumchi oldin foydalanilgan kalitlar haqidagi ma'lumot asosida yangi kalitlarni hisoblaydi.

2. Takrorlash hujumi. Ushbu hujumda hujumchi o'rnatilgan aloqa seansini to'liq ko'chirib oladi va keyinchalik uni to'liqligicha yoki qisman takrorlaydi.

3. Obro'sizlantirish hujumi. Ushbu hujumda hujumchi tarmoqdagi qonuniy tomonlarning biri nomidan amallarni bajaradi.

4. Lug'atga asoslangan hujum. Ushbu hujum parolga qaratilgan bo'lib, bunda parollar faylida saqlangan parollarning xesh qiymatlariga mos haqiqiy parolni topishda keng tarqalgan parollar lug'atidan foydalanadi. Keng tarqalgan parollar lug'ati Internet tarmog'idagi ko'p sonli foydalanuvchilar tomonidan foydalanilgan eng ommabob parollardan tashkil topgan.

4.4. Tub sonlar va ularning ayrim xossalari

Ochiq kalitli kriptotizimlarning asosiy tashkil etuvchi elementlaridan biri yetarlicha katta (150 va undan ortiq xonali) tub sonlardan foydalanishidir. Bunday kriptotizimlarda malumotlarni shifrlash va rasshifroklalash jarayonini amalga oshirish algoritmlarini amaliy qo'llanishlarini ta'minlash uchun katta razryadli sonlarni tub yoki tub emasligini aniqlab olish usullarini bilish muhim hisoblanadi.

Quyida ochiq kalitli kriptotizmlar asosi bilan bog'liq bo'lgan sonlar nazariyasining ayrim ta'rif va tasdiqlari isbotsiz keltiriladi.

Ta'rif 1. Berilgan p natural son tub deyiladi, agarda $p > 1$ bo'lib, u bir va o'zidan boshqa natural bo'luvchilarga ega bo'lmasa.

Odatda tub sonlar p va q lar bilan belgilanib, tub sonlarga quyidagilar misol bo'la oladi:
29, 53, 79, 89, 97, 113, 151, 163, 419, 877, 1063, 1439, 1913, 1999, 2003, 2081, 2609, 2887, 3181, 3217, 3517, 3797, 4423, 4999, 5039, 5227, 5659, 5878, 5981.

Ta'rif 2. Bir va o'zidan boshqa sonlarga ham bo'linadigan sonlar murakkab sonlar deyiladi.

Ta'rifdan ko'rinadiki, 1 soni tub soniga kirmaydi. Shuningdek, murakkab son ham emas.

Teorema 1. Har bir $n > 1$ natural sonning 1 dan farqli eng kichik bo'luvchisi p tub sondir.

Teorema 2. Har qanday n natural son berilgan p tub songa yoki bo'linadi yoki u bilan o'zaro tubdir.

Teorema 3. Agar $a \cdot b$ ko'paytma biror p tub songa bo'linsa, u holda ko'paytuvchilardan kamida bittasi p -ga bo'linadi.

Natija. Agar bir necha sonlarning ko'paytmasi p tub songa bo'linib, uning barcha ko'paytuvchilari tub sonlardan iborat bo'lsa, ko'paytuvchilarning biri p-ga tengdir.

Teorema (arifmetikaning asosiy teoremasi) 4. Har bir $n > 1$ natural son tub son yoki tub son ko'paytmasi shaklida yoziladi, agarda bu ko'paytmada ko'paytuvchilarning o'rni etiborga olinmasa, u holda bu ko'paytma yagona bo'ladi.

Teorema 5. Tub sonlar to'plami cheksizdir.

Tub sonlarning keltirilgan xossalaridan foydalanish va ularning ochiq kalitli algoritmlarda yetarlicha katta qiymatlarda ishlatilishi, katta qiymatli berilgan butun sonlarni elementar hamda maxsus ko'rinshga ega bo'lgan sonlarning tub ekanligini aniqlash usullaridan foydalanishni taqazo etadi. Bunday usullardan ayrimlari quyida keltiriladi.

1-usul.

Teorema 5. Ixtiyoriy n natural sonning eng kichik tub bo'luvchisi $\sqrt{n}$ dan oshmaydi.

Misol 1. $n = 89$ shu sonning tub ekanligini yuqoridagi teoremaga asosan quyidagicha tekshiriladi.

Yechish. $\sqrt{89} < 10$ demak, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 sonlarga ketma-ket bo'lib chiqiladi. Agar berilgan n natural son shu sonlardan birortasiga bo'linsa, uholda berilgan son murakkab, aks holda esa tub son deb e'lon qilinadi. Javob $n = 89$ tub son.

2-usul.

Ushbu usul Eratosfen g'alviri deb atalib, bu usulda berilgan N natural songa ko'ra, shu songacha bo'lgan tub sonlar ro'yxatini topish mumkin bo'ladi, ya'ni agar N dan katta bo'lmagan barcha tub sonlarni topish kerak bo'lsa, avvalo ikkidan boshlab, N gacha bo'lgan barcha natural sonlar yozib chiqiladi. Hosil bo'lgan jadvalda ikkidan keyin har bir ikkinchisini, uchdan keyin har bir uchunchisini, beshdan keyin har bir beshinchisini, 7 dan keyin har bir yettinchisini va h.k. Bu jarayonni $\sqrt{N}$ - dan ortmaydigan r tub songacha davom ettirib, r-ga bo'linadigan sonlar o'chiriladi. O'chirilmay qolgan sonlar N dan ortmaydigan tub sonlar

bo'ladi. Chunki, N dan ortmaydigan barcha karrali sonlar o'chirib tashlandi.

Misol 2. $N = 200$ bo'lsin, u holda $13 < \sqrt{200}$ bo'ladi. 2 dan 200 gacha bo'lgan intervaldagi tub sonlarni topish uchun 2 va 199 gacha bo'lgan barcha toq sonlar yoziladi. Keyin yuqoridagidek 3, 5, 7, 11, 13-ga karali bo'lganlari o'chirilib, quyidagi hosil qilinadi:
2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97, 101, 103, 107, 109, 113, 127, 131, 137, 139, 149, 151, 157. 163, 167, 173, 179, 181, 191 ,193, 197, 199.

Demak, 200 dan kichik tub sonlarning umumiy soni 46 ta ekan.

Ta'rif 3. Quyidagi ko'rinishdagi sonlar: $F_n = 2^{2^n} + 1$, bu yerda, $n \geq 0$, Ferma sonlari deyiladi.

Masalan, bevosita ishonch hosil qilish mumkinki F_0, F_1, F_2, F_3, F_4 sonlar tub sonlar bo'ladi, lekin, yana qaysi n-lar uchun Ferma sonlari tub bo'ladi degan savolga, quyidagi teorema javob beradi.

Teorema 6. $k = F_n$ soni $n > 0$ bo'lganda tub bo'ladi faqat va faqat, $3^{(k-1)/2} \equiv -1(mod\ k)$ o'rinli bo'lsa.

Hozirgi vaqtda n=5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 15, 16, 18, 23, 36, 38, 73 qiymatlarda Ferma sonlari murakkab ekanligi ma'lum.

Misol 3. $n = 3$ uchun $F_n = 2^{2^n} + 1$ sonini tub ekanligi isbot qilinsin.

Yechish. F_3=257, $(F_3-1)/2$=128. U holda keltirilgan algoritmga ko'ra, $3^{128}(\text{mod } 257) = (3^8)^{16}(\text{mod } 257) = 6561^{16}(\text{mod } 257) = (136^2)^8(\text{mod } 257) = 249^8(\text{mod } 257) = (249^2)^4(\text{mod } 257) = 64^4(\text{mod } 257) = 256(\text{mod } 257) = -1(\text{mod } 257)$;

Demak, 257 soni tub son ekan.

Ta'rif 4. Quyidagi ko'rinishdagi sonlar $M_p = 2^p - 1$, bu yerda, p-tub son, - Mersen sonlari deb ataladi.

Masalan, p = 2, 3, 5, 7, 13, 17, 19 lar uchun Mersen sonlari tub son. Biroq, p =11, 23, 29 bo'lganda esa Mersen sonlari murakkab son bo'ladi.

Mersen sonlari tub bo'lishligi uchun quyidagi teorema o'rinli.

Teorema 7. $M_p = 2^p - 1$, p-tub son va $p > 2$. Quyidagi ketma-ketlik ko'rib chiqiladi:

$L_0, L_1, L_2, \ldots..$

$L_0 = 4, L_{j+1} \equiv (L_j{}^2 - 2)(mod\ M_p)$

Berilgan, M_p – soni tub bo'ladi, faqat va faqat $L_{p-2} \equiv 0\ (mod\ M_p)$ bo'lsa.

Misol-4. r=13 bo'lsa, Mersen soni tub son bo'lishligi ko'rsatilsin.

Yechish. $M_{13}=2^{13}-1= 8192-1=8191$. Keltirilgan algoritm bo'yicha: $L_0 = 4, L_{j+1} \equiv (L_j{}^2 - 2)(mod\ M_p)$, j=1,2,.....11 gacha hisoblab chiqiladi:

L_0=4, L_1=14, L_2=194, L_3=4870, L_4=3953, L_5=5970, L_6=1857, L_7=36, L_8=1294, L_9=3490, L_{10}=128, L_{11}=16382 (mod 8191)=0.

Demak, algoritm shartlari bajarildi, ya'ni 8191 soni tub ekan.

Quyida ko'rib chiqadigan algoritm umumiy ko'rinishda berilgan natural son tub bo'lishini aniqlab beruvchi algoritmlardan biri bo'lib, Lukas algoritmi deb ham yuritiladi.

Teorema (Lukas). Agar n – natural son uchun shunday a – butun son mavjud bo'lib:

$a^{n-1} \equiv 1\ (mod\ n)$ va $a^{n-1/p} \not\equiv 1\ (mod\ n)$ har bir tub r – soni n – 1-ning bo'luvchisi bo'lgan. U holda n – tub son bo'ladi.

Misol 5. Agar n=113 bo'lsa, uning tub son ekanligi Lukas algoritmi yordamida tekshirilsin.

Yechish:

Aytaylik, a=3 bo'lsin. U holda $n - 1 = 112$ bo'lib, $112=2^4\times7$. $3^{112}(\text{mod}113)=3^{8\times14}(\text{mod}113)= 6561^{14}(\text{mod}113)= 7^{14}(\text{mod}113)= 823543^2$ $(\text{mod}113)=112^2(\text{mod}113)=1$;

Demak, Lukas algoritmi shartlari bajarildi, ya'ni n=113 soni tub ekan.

Tub sonlarni generatsiyalash usullari

Tub sonlarning keltirilgan xossalaridan foydalanish va ularning asimmetrik algoritmlarda yetarlicha katta qiymatlarda ishlatilishi, katta qiymatli berilgan butun sonlarni elementar hamda maxsus ko'rinishga ega bo'lgan sonlarning tub ekanligini aniqlash usullaridan foydalanishni taqozo etadi. Bunday usullardan ayrimlarini ko'rib chiqamiz.

1- usul.

Teorema 5. Ixtiyoriy n natural sonning eng kichik tub bo'luvchisi $\sqrt{n}$ dan oshmaydi.

Misol 1. n = 89 shu sonning tub ekanligini yuqoridagi teoremaga asosan quyidagicha tekshiramiz.

Yechish. $\sqrt{89} < 10$ demak, 2,3,4,5, 6,7,8,9 sonlarga ketma-ket bo'lib ko'ramiz. Agar berilgan n natural son shu sonlardan birortasiga bo'linsa, u holda berilgan son murakkab, aks holda esa tub son deb elon qilinadi. Javob n =89 tub son.

2- usul.

Eratosfen g'alviri deb ataladi. Bu usulda berilgan N natural songa ko'ra, shu songacha bo'lgan tub sonlar ro'yxatini topish mumkin bo'ladi, yani agar N dan katta bo'lmagan barcha tub sonlarni topish kerak bo'lsa, avvalo ikkidan boshlab, N gacha bo'lgan barcha natural sonlarni yozib chiqamiz, hosil bo'lgan jadvalda ikkidan keyin har bir ikkinchisini, uchdan keyin har bir uchinchisini, beshdan keyin har bir beshinchisini , 7 dan keyin har bir yettinchisini va h.k. Bu jarayonni $\sqrt{N}$ dan ortmaydigan r tub songacha davom ettirib, r ga bo'linadigan sonlarni o'chiramiz. O'chirilmay qolgan sonlar N dan ortmaydigan tub sonlar bo'ladi, chunki biz N dan ortmaydigan barcha karrali sonlarni o'chirib tashladik.

Misol 2. N = 200 bo'lsin, u holda $13<\sqrt{200}$ bo'ladi.

2 dan 200 gacha bo'lgan intervaldagi tub sonlarni topish uchun 2 va 199 gacha bo'lgan barcha toq sonlarni yozamiz. Keyin yuqoridagidek 3, 5 , 7,11,13 ga karali bo'lganlarini o'chirib, quyidagini hosil qilamiz:

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97, 101, 103, 107, 109, 113, 127, 131, 137, 139, 149, 151, 157, 163, 167 , 173, 179, 181, 191, 193, 197, 199.

Demak, 200 dan kichik tub sonlarning umumiy soni 46 ta ekan.

Tarif 3. Quyidagi ko'rinishdagi sonlar:

$F_k = 2^{2^k} + 1$, $k=0,1,2,...$ Ferma sonlari deyiladi.

Masalan. Bevosita ishonch hosil qilish mumkinki F_0, F_1, F_2, F_3, F_4 sonlar tub sonlar bo'ladi, lekin yana qaysi k - lar uchun Ferma sonlari tub bo'ladi degan savol bo'lsa, bu savolga quyidagi teorema javob beradi.

Teorema 6. $n = F_k$ soni $k > 0$ bo'lganda tub bo'ladi faqat va faqat,

$3^{(n-1)/2} \equiv -1 (\text{mod } n)$ o'rinli bo'lsa.

Hozirgi vaqtda k=5,6,7,8,9,10,11,12,15,16,18,23,36,38,73 qiymatlarda Ferma sonlari murakkab ekanligi malum[11].

Misol -3. $F_k = 2^{2^k} + 1$, $k=3$ bo'lganda tub ekanligi isbot qilinsin.

Yechish. $F_3 = 257$, $(F_3 - 1) : 2 = 128$. U holda keltirilgan algoritmga ko'ra:

$3^{128} (\text{mod } 257) = (3^8)^{16} (\text{mod } 257) = 6561^{16} (\text{mod } 257) = (136^2)^8 (\text{mod } 257) = 249^8 (\text{mod } 257) = (249^2)^4 (\text{mod } 257) = 64^4 (\text{mod } 257) = 256 (\text{mod } 257) = -1 (\text{mod } 257)$;

Demak, 257 soni tub son ekan.

Tarif 4. Quyidagi ko'rinishdagi sonlar $M_r = 2^r - 1$, r- tub son tub bo'lsa. U holda bunday sonlar Mersen sonlari deb ataladi.

Masalan r=2,3,5,7,13,17,19 bo'lganda Mersen sonlari tub son . Biroq r=11,23, 29 bo'lganda esa Mersen sonlari murakkab ekanliklari aniqlanilgan.

Shuni takidlash lozimki, Mersen sonlari juda kam miqdorda topilgan bo'lib, 2001 yil 39 –chi Mersen soni topilgan va bu son $M_{13466917}$ iboratdir.

Mersen sonlari tub bo'lishligi uchun quyidagi tasdiq o'rinli.

Teorema 7. $M_r = 2^r - 1$, r- tub son va $r > 2$. Quyidagicha ketma-ketlikni qaraymiz: $L_0, L_1, L_2 \ldots\ldots\ldots$

$L_0 = 4$, $L_{j+1} \equiv (L_j^2 - 2) (\text{mod } M_p)$

Berilgan M_r – soni tub bo'ladi faqat va faqat $L_{r-2} \equiv 0 (\text{mod } M_p)$ bo'lsa.

Misol-4. r=13 bo'lsa, Mersen soni tub son bo'lishligi ko'rsatilsin.

Yechish. $M_{13} = 2^{13} - 1 = 8192\text{-}1 = 8191$. Keltirilgan algoritm bo'yicha:

$L_0 = 4$, $L_{j+1} \equiv (L_j^2 - 2) (\text{mod } M_p)$

J = 1,2,.....11 gacha hisoblab chiqamiz:

$L_0 = 4$, $L_1 = 14$, $L_2 = 194$, $L_3 = 4870$, $L_4 = 3953$, $L_5 = 5970$, $L_6 = 1857$, $L_7 = 36$, $L_8 = 1294$, $L_9 = 3490$, $L_{10} = 128$, $L_{11} = 16382 (\text{mod } 8191) = 0$.

Demak, algoritm shartlari bajarildi, yani 8191 soni tub ekan.

Quyida ko'rib chiqadigan algoritm umumiy ko'rinishda berilgan natural son tub bo'lishini aniqlab beruvchi algoritmlardan biri bo'lib, Lukas algoritmi deb ham yuritiladi.

Teorema (Lukas). Agar n – natural son uchun shunday a – butun son mavjud bo'lib: $a^{n-1} \equiv 1 \pmod{n}$ va $a^{n-1/r} \neq 1 \pmod{n}$ har bir tub r – soni n -1 ning bo'luvchisi bo'lgan. U holda n – tub son bo'ladi.

Misol 5. Agar $n = 113$ bo'lsa, uning tub son ekanligi Lukas algoritmi yordamida tekshirilsin.

Yechish.

Aytaylik, $a=3$ bo'lsin. U holda $n - 1 = 112$ bo'lib, $112 = 2^4 * 7$.

$3^{112} \pmod{113} = 3^{8*14} \pmod{113} = 6561^{14} \pmod{113} = 7^{14} \pmod{113} = 823543^2 \pmod{113} = 112^2 \pmod{113} = 1$;

Demak, Lukas algoritmi shartlari bajarildi, yani $n = 113$ soni tub ekan.

4.5. Sonlarni tublikka tekshirishning birlamchi testlari

Sonlarni tublikka tekshirishning ehtimollik algoritmlari:

- Ferma testi;
- Solavey Shtrassen testi;
- Rabbi-Milner testi;
- Beyl-pomerens testi;
- Lukas testi;
- Poklington testi;
- Prot testi;
- Frobenius.

Tub sonlar ochiq kalitli kriptografik tizimlarda juda muhim va zarur bo'lib, ixtiyoriy hajmdagi tub sonlardan foydalanadi. Tub sonlar kalitlarni generatsiya qilishda va ochiq parametrlarni hosil qilishda foydalaniladi. Olingan biror son, n dan kichik bo'lgan tub sonlarning taqribiy miqdori quyidagi tenglik bilan o'lchanadi:

$$n/\ln n$$

Tub sonlarni generatsiya qilish murakkab vazifa bo'lib, uni samarali amalga oshirish uchun biroz "hiyla" ishlatiladi. Boshqa so'z bilan aytilganda "n soni tubmi ?" degan savolga javob beriladi.

Tub sonlarni generatsiyalashdagi noto'g'ri usullardan biri bu – tub sonni topib keyin uni faktorlash bo'lib, juda ham ko'p vaqt oladi. Amalda ko'plab sonlarni tublikga tekshiruvchi testlar mavjud bo'lib, quyida sonlarni tublikka tekshiruvchi algoritmlar bilan tanishib chiqiladi.

Solovey – Shtrassen testi. Robert Solovey va Volker Shtrassen tomonidan ishlab chiqilgan ushbu ehtimoliy tublikka tekshirish algoritmi bo'lib, unda p sonini tublikka tekshirish uchun Yakobi belgilaridan foydalaniladi:

-dastlab p dan kichik bo'lgan tasodifiy a soni tanlanadi;

-agar $EKUB(a,p) \neq 1$, u holda p testdan o'ta olmaydi, u murakkab son;

-$j = a^{(p-1)/2} mod p$ ni hisoblanadi;

-Yakobi belgisi J(a,p) hisoblanadi;

-agar $j \neq J(a,p)$ bo'lsa, u holda p aniq tub emas;

-agar $j = J(a,p)$ bo'lsa, u holda 50 % dan yuqori bo'lmagan ehtimollik bilan p tub son emas.

Yuqoridagi ketma – ketlik t marta turli a sonlar bilan amalga oshiriladi. Bu holda murakkab toq sonlarning barcha t marta testlash davomida testdan o'tish ehtimoli $1/2^t$ dan yuqori bo'lmaydi.

Lehman. Yuqorida kabi testlashga asoslangan usullardan biri *Lehman* tomonidan ishlab chiqilgan va uni ketma – ketligi quyida keltirilgan:

-dastlab p dan kichik bo'lgan tasodifiy a soni tanlanadi;

-$a^{(p-1)/2} mod p$ ni hisoblanadi;

-agar $a^{(p-1)/2} mod p \neq 1$ ёки $-1 \; mod \; p$ ga, u holda p aniq tub son emas;

-agar $a^{(p-1)/2} mod p = 1$ ёки $-1 \; mod \; p$ bo'lsa, u holda 50 % dan yuqori bo'lmagan ehtimollik bilan p tub son emas.

Ushbu testlashda ham murakkab toq sonlarning testdan o'tish ehtimoli Solovey – Shtrassen testidagi kabi bo'ladi.

Rabin – Miller testi. Amalda eng tezkor algoritm sifatidagi qaraladigan tublikga tekshirish usuli sanalib, bu algoritm Maykl Rabin va

Gari Millerlar tomonidan yaratilgan. Ushbu testlash usuli ketma – ketligi quyidagicha:

1. testlash uchun p son olinadi;
2. shundan so'ng $p-1$ ni 2 soni necha marta bo'lishini anglatuvchi b soni hisoblanadi (ya'ni, 2^b soni $p-1$ ni bo' luvchisi bo'lgandagi b ning eng katta qiymati);
3. shundan so'ng $p = 1 + 2^b * m$ tenglikdan m hisoblanadi;
4. p dan kichik bo'lgan a soni tanlanadi;
5. $j = 0$ ga o'rnatiladi va $z = a^m mod p$ hisoblanadi;
6. agar $z = 1$ bo'lsa yoki $z = p - 1$ ga teng bo'lsa, u holda p testdan o'tadi va u tub bo'lishi mumkin;
7. agar $j > 0$ bo'lsa va $z = 1$ bo'lsa, u holda p tub son emas;
8. $j = j + 1$ o'rnatiladi. Agar $j < b$ va $z \neq p - 1$ bo'lsa, $z = z^2 mod p$ o'rnatiladi va 7 – qadamga o'tiladi. Agar $z = p - 1$ ga teng bo'lsa, p testdan o'tadi va u tub son bo'lishi mumkin;
9. agar $j = b$ va $z \neq p - 1$ ga teng bo'lsa, u holda p testlashdan o'ta olmaydi.

Ushbu testlash usulida murakkab toq sonni yolg'ondan o'tish ehtimoli juda past. a sonning ¾ qismi test natijasi to'g'riligini tasdiqlaydi. Bu shuni tasdiqlaydiki murakkab sonlarning t marta testlashdan o'tish ihtimoli $1/4^t$ ga teng bo'ladi. Bu albatta, taxminiy fikr bo'lib, amalda 256 – bitli sonlarni 6 marta testlashda xatolik bo'lishi ehtimoli $1/2^{51}$ ga teng bo'ladi (4.2 - jadval).

4.2 – jadval

DSA algoritmi uchun Rabin – Miller testi orqali testlashning minimal iteratsiyasi

Parametrlar	Faqat Rabin – Miller testlash orqali
p:1024 bit; q: 160 bit. Xatolik ehtimoli=2^{-80}	p va q lar uchun: 40
p:2048 bit; q: 224 bit. Xatolik ehtimoli=2^{-112}	p va q lar uchun: 56

Parametrlar	Faqat Rabin – Miller testlash orqali
p:2048 bit; q: 256 bit. Xatolik ehtimoli=2^{-112}	p va q lar uchun: 56
p:3072 bit; q: 256 bit. Xatolik ehtimoli=2^{-128}	p va q lar uchun: 64

Tub sonlarni tekshirishni amalga oshirish. Amalda sonlarni tublikga testlash juda ham tezkor amalda oshiriladi:

1. n – bitli tasodifiy p soni generatsiya qilinadi;
2. ushbu sonning eng kichik va eng katta pozisiyasidagi bitlarga 1 o'rnatiladi (eng kichik pozisiyaga 1 ni o'rnatish sonni toqligini, eng katta pozisiyasida o'rnatilgan 1 esa to'liq n bitli bo'lishini ta'minlaydi);
3. p sonni kichik tub sonlar, 2,3,5,7,11 va h.larga bo'linadi, bunda odatda 2000 dan kichik bo'lgan barcha tub sonlardan foydalanadi;
4. agar 3 bosqich natijasida p son tub deb topilsa, ba'zi a sonlarga ko'ra Rabin – Miller testi amalga oshiriladi (odatda testlashni 5 marta amalga oshirish yetarli);
5. 4 bosqich natijasiga ko'ra p son tub deb topilsa, testlash tugatiladi, aks holda, boshqa p tub son olinadi va qaytadan jarayonlar amalga oshiriladi.

4.6. Elliptik egri chiziqda nuqtalarni qo'shish

So'nggi yillarda elliptik egri chiziqlar kriptografiyada keng tadbiq qilinmoqda. Bu bo'limda elliptik egri chiziqlar haqida umumiy ma'lumotlar, ularning koordinatalar sistemasidagi o'rni va xossalari, hamda ularda yotuvchi ratsional koordinatali nuqtalar ustida chekli maydonlarda bajariladigan amallar bilan tanishib chiqamiz.

Ta'rif. Biror κ-chekli maydonda olingan elliptik egri chiziq deb, Veyershtrass tenglamasi deb ataluvchi quyidagi

$$y^2 + a_1xy + a_3y = x^3 + a_2x^2 + a_4x + a_6 \qquad (4.2)$$

tenglik orqali aniqlanuvchi egri chiziqqa aytiladi, bu yerda: $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6 \in K$.

Elliptik egri chiziq odatda E yoki E/K bilan belgilanadi va elliptik egri chiziqqa tegishli nuqtalar, ya'ni (4.2) tenglama yechimlari shu elliptik

egri chiziqning affin nuqtalari deyiladi.

Ta'rif.

Ushbu $E: f(x,y) = y + a_1xy + a_3y - x^3 - a_2x^2 - a_4x - a_6 = 0$ - elliptik egri chiziqqa tegishli bo'lgan $P(x_0, y_0) \in E$ nuqta silliq deyiladi, agar quyidagi shartlardan bittasi o'rinli bo'lsa:

$$f_x'(x_0, y_0) \neq 0 \text{ yoki } f_y'(x_0, y_0) \neq 0. \quad (4.3)$$

Ta'rif. E (yoki E/K) –elliptik egri chiziq silliq deb ataladi, agar uning har bir affin nuqtasi silliq bo'lsa.

Misol 1. $y^2 = x^3$-eliptik egri chiziq uchun (0;0) nuqta silliq nuqta emasligi ko'rsatilsin.

Yechish.

$f(x, y) = y^2 - x^3$, $f_x' = -3x^2$, $f_x' = 2y$

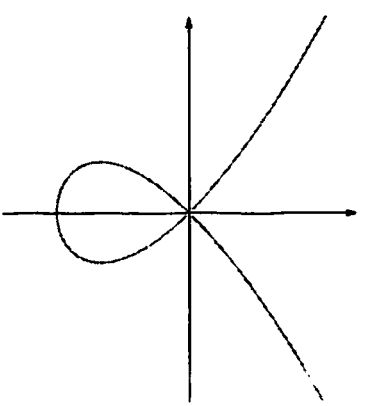
U holda (4.3) shartga nisbatan ziddiyatga kelamiz, natijada (0;0) nuqta haqiqatan ham silliq nuqta bo'la olmas ekan.

Misol 2. $y^2 = x^3 + x^2$ -eliptik egi chiziq uchun (0;0) nuqta silliq nuqta emas ekanligi ko'rsatilsin.

Haqiqatan,

$f(x,y) = y^2 - x^3 - x^2$, $f_x' = -3x^2 - 2x$, $f_y' = 2y$

bo'lib, (4.3) shartga nisbatan ziddiyatga kelamiz. Natijada (0; 0) nuqta haqiqatan ham silliq nuqta bo'la olmas ekan. Uning grafigi quyidagicha:



4.6-rasm. $y^2=x^3+x^2$ elliptik egri chiziq grafigi

Biz bundan keyin elliptik egri chiziqlarning umumiy kanonik

ko'rinishi hisoblangan quyidagi tenglama bilan ish ko'ramiz:

$$y^2 = x^3 + ax^2 + bx + c, \qquad (4.4)$$

bu yerda $a, b, c \in Z$ va $p(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$, ko'phad karrali ildizga ega emas deb qaraladi.

Elliptik egri chiziqlarning grafiklari. Yuqorida keltirilgan (1.4) ko'rinishdagi egri chiziq grafigiga ega bo'lish uchun

$$y = \sqrt{x^3 + ax^2 + bx + c}\,, \qquad (4.5)$$

chizish va Ox – o'qiga nisbatan simmetrik akslantirish lozim. (1.5) grafigini chizish uchun esa kvadrat ildizsiz ko'rinishdagi funksiya $z = x^3 + ax^2 + bx + c$ grafigini chizib olish kerak bo'ladi.

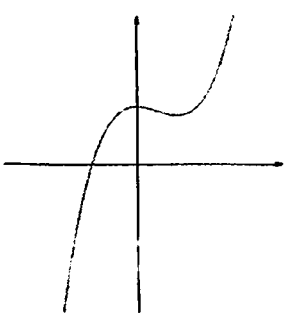
Yuqorida talab etilgan shartga muvofiq (4.4) funksiya Ox-o'qida karrali ildizga ega emas. U holda $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ uchinchi tartibli tenglama uchun Kordano formulasiga ko'ra yoki bitta, yoki uchta haqiqiy ildizga ega va bu ildizlar turlicha bo'ladi.

Demak, $y = x^3 + ax^2 + bx + c$ funksiya grafigi quyidagi ikkita holdan kelib chiqib ifodalanadi:

a) tenglama bitta yechimga ega, ya'ni funksiya grafigi Ox –o'qini bitta nuqtada kesib o'tadi;

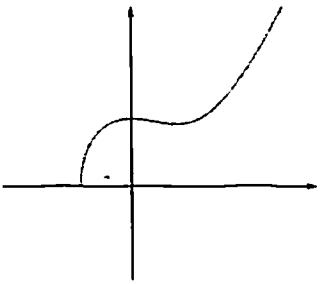
b) tenglama uchta yechimga ega, ya'ni funksiya grafigi Ox –o'qini uchta nuqtada kesib o'tadi.

Keltirilgan a) hol uchun $y = x^3 + ax^2 + bx + c$, funksiya grafigi quyidagi ko'rinishga ega:



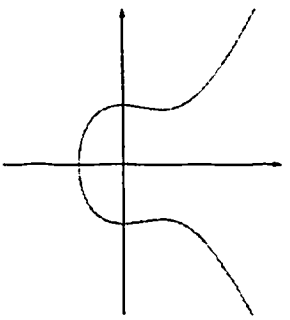
4.7-rasm. a holat uchun funksiya grafigi

Bu grafikdan (4.5) funksiya grafigini olish uchun, kvadrat ildiz ostidagi ifodaning manfiy bo'lmagan qiymatlar sohasiga mos keluvchi - aniqlanish sohasi qismini



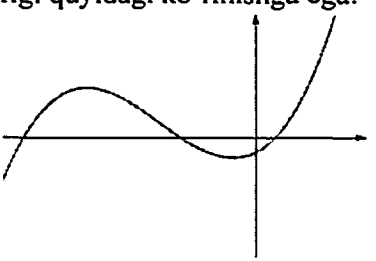
4.8-rasm. $y = \sqrt{x^3 + ax^2 + bx + c}$ *funksiya grafigi*

Ox - o'qiga nisbatan simmetrik ko'chiriladi, ya'ni:



4.9-rasm. $y^2 = x^3 + ax^2 + bx + c$ *funksiya grafigi*

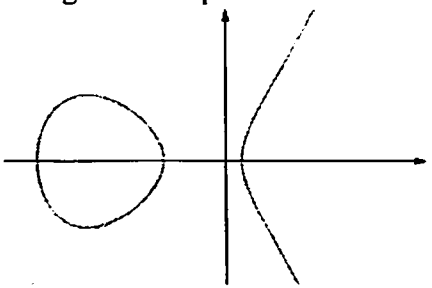
Uchta haqiqiy ildizga ega bo'lgan b) hol uchun $z = x^3 + ax^2 + bx + c$, funksiya grafigi quyidagi ko'rinishga ega:



4.10-rasm. b holat uchun funksiya grafigi

Xuddi yuqoridagi fikr va mulohazalarga ko'ra bu grafikdan (4.5) funksiya grafigini olish uchun, kvadrat ildiz ostidagi ifodaning manfiy

bo'lmagan qiymatlar sohasiga mos keluvchi - aniqlanish sohasi qismini Ox - o'qiga nisbatan simmetrik ko'chiriladi, natijada grafik ellips va giperboladan iborat bo'lgan ikkita qismlar bilan ifodalanadi:



4.11-rasm. (1.5) tenglik grafigi

Elliptik egri chiziqqa tegishli ratsional nuqtalarni aniqlash usullari. Hozirgi kunda $y^2 = x^3 + ax^2 + bx + c$, tenglamaning barcha ratsional yechimlarini topish matematikada noma'lumligicha qolib kelmoqda. Lekin, bugungi kunda kriptografiya fanida unchalik effektiv bo'lmasa ham quyidagi ikkita usuldan foydalaniladi. Quyida ushbu usullar bilan batafsil tanishamiz.

1- usul. Tanlangan $y^2=x^3+ax+b$ tenglamaga x_i qiymatlar berib, tenglamaning o'ng tomoni to'la kvadrat tashkil qilishi tekshiriladi. Agar qandaydir x_k qiymatda to'la kvadrat tashkil qilsa, u holda tenglamaga tegishli nuqta koordinatalarini

$$(x_k;y_k = \pm\sqrt{x_k^3 + ax_k + b}) \qquad (4.6)$$

juftliklar bilan fiksirlanadi. Bu usul tenglama koeffisentlariga biror shart avvaldan berilgan holda yaxshi natija beradi. Ya'ni koeffisentlarga mos tenglama xosil qilib, shu tenglamaga tegishli nuqta qidirish usuli hisoblanadi.

Misol:

$a = 2, b = -3$ bo'lsin, ya'ni tenglama: $y^2 = x^3 + 2x - 3$ ko'rinishga ega. (1.5) formulaga ko'ra, $x = 2$ bo'lganda, $y = \sqrt{2^3 + 2 * 2 - 3} = 3$.

Demak, $y^2 = x^3 + 2x - 3$ tenglama *P(2, 3)* ratsional nuqtaga ega.

2- usul. Bu usul topilishi kerak bo'lgan nuqtaga biror shart qo'yilganda foydalaniladigan usul hisoblanadi. Ya'ni nuqta koordinatalari (x,y) va tenglamaning bitta a–koeffisentini fiksirlab: $(a, x, y \in R)$,

$$b = y^2 - x3^3 - ax \qquad (4.7)$$

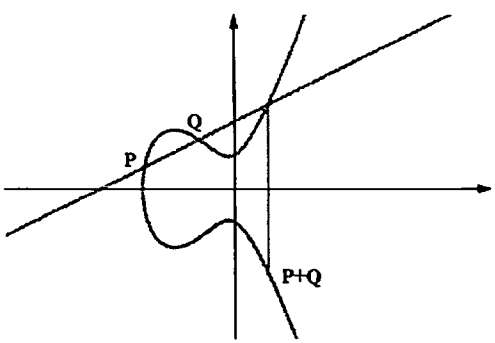
formula orqali b–koeffisiyent hisoblanib topiladi va shu koeffisent asosida tenglama quriladi. Buni quyidagi misolda ko'rish mumkin.

Misol: Agar $a = 2, P(x, y) = (1, 2)$ berilgan bo'lsa, u holda (4.7) formulaga ko'ra: $b = 2^2 - 1^3 - 2 * 1 = -1$.

Demak, *P(1, 2)* nuqta $y^2 = x^3 + 2x - 1$ ga tegishli ratsional nuqta hisoblanadi.

Elliptik egri chiziqlarning ratsional nuqtalarini qo'shish. $E: y = x^3 + ax^2 + bx + c$, elliptik egri chiziqda $P(x_1, y_1)$, $Q(x_2, y_2)$ nuqtalar berilgan bo'lsin. Bu nuqtalar orqali to'g'ri chiziq o'tkazamiz. U holda o'tkazilgan chiziq, *E*- egri chiziqni uchinchi nuqtada kesib o'tadi. Bu $B(x_3, y_3)$ nuqtani Ox - o'qiga simmetrik ko'chiramiz va hosil bo'lgan:

$B'(x_3, -y_3) = P(x_1, y_1) + Q(x_2, y_2)$ nuqtani, $P(x_1, y_1)$ va $Q(x_2, y_2)$ nuqtalarning elliptik egri chiziq ustida qo'shish deb e'lon qilamiz:



4.12-rasm. Nuqtalarni qo'shishning geometrik ifodalanishi

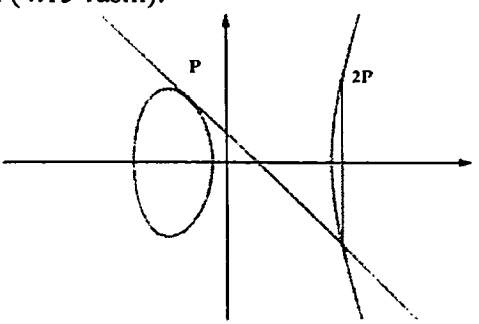
4.12-rasmda $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ tenglama bitta yechimga ega bo'lgan hol uchun misol sifatida keltirilgan.

Izoh. Albatta har doim ham $P(x_1, y_1)$ va $Q(x_2, y_2)$ nuqtalar orqali o'tuvchi chiziq *E*-egri chiziqni uchinchi nuqtada kesib o'tavermaydi. Masalan, o'tkazmoqchi bo'layotgan chiziq ikkita nuqta orqali Ox -o'qiga

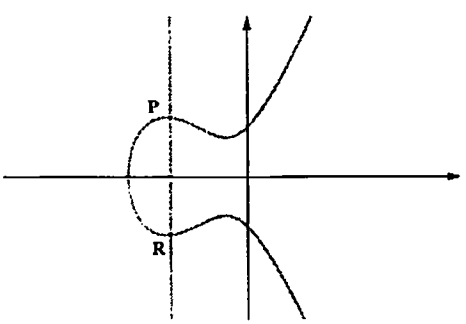
vertikal bo'lib qolsa, u holda egri chiziqni uchinchi nuqtada kesib o'tmaydi (4.14-rasm).

Ikkita nuqta orqali o'tuvchi chiziq egri chiziqni uchinchi nuqtada kesib o'tmaydigan holi alohida ko'rib o'tiladi.

Demak, $P(x_1, y_1) \neq Q(x_2, y_2) \neq 0$ bo'lganda ularning yig'indisini $P(x_1, y_1) + Q(x_2, y_2)$ topish ko'rib chiqildi. $P + P =?$ qanday amalga oshiriladi? Buning uchun elliptik egri chiziqdagi P -nuqta orqali urinma chiziq o'tkaziladi. Bu urinma chiziq elliptik egri chiziq grafigidagi ikkinchi qismni (giperbola qismida) biror nuqtada kesib o'tadi. Ana shu kesib o'tgan nuqtani Ox -o'qiga simmetrik ko'chiriladi va bu nuqtani $2P$ deb e'lon qilinadi (4.13-rasm):



4.13-rasm. 2P-ning geometrik ko'rinishi



4.14-rasm. Ox o'qiga vertikal nuqalarni geometrik ko'rinishi

Xuddi shunday, $3P$-ni topish uchun, $3P = P + 2P$ va hokazo, $4P = P + 3P$, $5P = 4P + P$ nuqtalarni topish ham yuqoridagi kabi amalga oshiriladi.

Elliptik egri chiziqning nuqtalarini qo'shish formulalari. Yuqorida ko'rib o'tilganlarga muvofiq, agar $P, Q \in E$ nuqtalar bo'lsa. Ular orqali

kesuvchi chiziq o'tkazib, bu kesuvchi chiziq E -egri chiziqni biror uchinchi $R(x_3, y_3)$ nuqtada kesib o'tadi.

Tasdiq. Agar $P, Q \in E$ nuqtalar ratsional nuqtalar bo'lsa, u holda $R(x_3, y_3)$ nuqta ham ratsional nuqta bo'ladi.

Isboti. $P, Q \in E$ nuqtalar orqali o'tuvchi chiziq umumiy ko'rinishi: $y = kx + d$ bo'lib, bu yerda k, d – hozircha noma'lum. Bu noma'lumlar quyidagicha topiladi, ya'ni $P(x_1, y_1)$, $Q(x_2, y_2)$ nuqtalardan $y = kx + d$ chiziq o'tadi. Bundan esa quyidagilar kelib chiqadi:

$$\begin{cases} y_1 = kx_1 + d \\ y_2 = kx_2 + d \end{cases} \Rightarrow y_1 - y_2 = k(x_1 - x_2) \quad k = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$$

Shuningdek,

$$d = y_1 - kx_1 = y_1 - \left(\frac{y - y_2}{x - x_2}\right) \cdot x_1 = \frac{y_2 x_1 - y_1 x_2}{x_1 - x_2}$$

o'rinli. Demak, biz $u = kx + d$ chiziqni tiklab oldik. Keyingi qadamda, $u = kx+d$ –ni $y^2 = x^3 + ax^2 + bx + c$, elliptik egri chiziq tenglamasiga olib borib qo'yamiz, ya'ni

$$(kx + d)^2 = x^3 + ax^2 + bx + c,$$

$$x^3 + (a - k^2)x^2 + (b - 2kd)x + c - d^2 = 0,$$

u holda uchinchi tartibli tenglama uchun Viyet teoremasiga ko'ra:

$$x_1 + x_2 + x_3 = k^2 - a$$

bo'lib, bu oxirgi tenglikda x_1, x_2 ratsional sonlar, u holda x_3 - ham ratsional, hamda $y_3 = kx_3 + d$ ifodadan esa y_3 ham ratsional bo'ladi. Demak, tasdiq isbot qilindi.

Bu keltirilgan tasdiq isbotidan esa $P + Q$ yig'indi nuqta koordinatasini hisoblash formulasini keltirib chiqarish mumkin. $P + Q$ nuqta R – nuqtani Ox - o'qiga simmetrik ko'chirishdan hosil bo'lar edi. Natijada biz qidirayotgan nuqtaning koordinatalarini (u, v)–deb belgilasak, bu koordinatalar quyidagi formulalar orqali topiladi:

$$u = k^2 - a - x_1 - x_2,$$

$$v = -ku - d = -(k(u - x_1) + y_1),$$

chunki $u = x_3, v = -y_3$. Bu formulalarga $k = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$ ifoda qo'yilsa:

$$\begin{cases} v = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}(-u + x_1) - y_1. \end{cases} \tag{4.8}$$

$$u = \frac{(y_1-y_2)^2}{(x_1-x_2)^2} - (a + x_1 + x_2),$$

tengliklarga ega bo'lamiz. Bu formulalar $x_1 \neq x_2$ bo'lganda ma'noga ega bo'ladi.

Agar $x_1 = x_2$ bo'lsa, $y = kx + d$ chiziq sifatida urinma o'tkazilib, quyidagicha formulaga kelamiz:

$$\begin{cases} u = -2x_1 - a + \frac{(3x_1^2+2ax_1+b)^2}{4y_1^2}, \\ v = -y_1 - \frac{3x_1^2+2ax_1+b}{2y_1}(u - x_1). \end{cases} \quad (1.9)$$

Shunday qilib, hech bo'lmasa bitta P- ratsional nuqta elliptik egri chiziqdagi nuqta bo'lsa, u holda (4.8), (4.9) formulalar orqali $2P, 3P, 4P, \ldots$ va hokazolarni topish mumkin ekan.

Shuni alohida ta'kidlash kerakki, (4.8) va (4.9) formulalar (4.4) tenglamaga nisbatan keltirib chiqarildi. Endi elliptik egri chiziqning kriptografiyada keng qo'llaniladigan $y^2 = x^3 + ax + b$ tenglamasi uchun ratsional nuqtalarini qo'shish formulalarini keltirib o'tamiz:

$$\begin{cases} u = \frac{(y_1-y_2)^2}{(x_1-x_2)^2} - x_1 - x_2, \\ v = -y_1 + \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}(x_1 - u). \end{cases} \quad (4.10)$$

bu yerda, $x_1 \neq x_2$.

Agar $x_1 = x_2$ bo'lsa, u holda

$$\begin{cases} u = \frac{(3x_1^2+a)^2}{4y_1^2} - 2x_1, \\ v = -y_1 - \frac{3x_1^2 + a}{2y_1}(x_1 - u). \end{cases} \quad (4.11)$$

Misol -3. Agar elliptik egri chiziq tenglamasi $y^2 = x^3 - 2$, undagi nuqta $P(3,5)$ bo'lsa, u holda ushbu nuqtalar: $2P = ?, 3P = ?, 4P = ?, 5P = ?$ topilsin.

Yechish. Yuqoridagi (4.9) formulaga muvofiq:

$$y^2 = x^3 + ax^2 + bx + c, a = 0, b = 0;$$

$$u = -2x_1 - a + \frac{(3x_1^2+2ax_1+b)^2}{4y_1^2} = \frac{129}{100};$$

$$v = -y_1 - \frac{3x_1^2+2ax_1+b}{2y_1}(u - x_1) = -\frac{383}{100};$$

demak, $2P = \left(\frac{129}{100}; -\frac{383}{100}\right)$.

Natijada (4.9) formuladan foydalanib: $3P, 4P, 5P$ – larni hisoblash mumkin, yani $u_n = nP$ – nuqtaning birinchi koordinatasini olsak , u holda:

$$u_1 = 3, u_2 = \frac{129}{100}, u_3 = \frac{164323}{29241}$$

$$u_4 = \frac{2340922881}{58675600}, u_5 = \frac{307326105747363}{160280942564521}$$

Shu hisoblashlarni davom ettirsak, u_{11} ga borganda 71 xonali songa to'qnash kelamiz.

4.7. Elliptik egri chiziq nuqtasi tartibi

Oldingi bo'limda agar $P \in E$ bo'lsa, nP – ni topish, ya'ni

$$nP = P + P + \ldots\ldots + P$$

ko'rib chiqilgan edi. Biroq bu qo'shish jarayonida quyidagi ikkita holat bo'lishi mumkin:

1. Biror n – chi qadamda $nP = 0$ tenglik bajarilishi mumkin;
2. $2P, 3P, 4P$ va hokazo nP – nuqtalar har xil qiymatga ega bo'lishi mumkin.

Ta'rif. Agar $mP \neq 0$, barcha $m < n$ bajarilib, $nP = 0$bo'lsa, u holda P – nuqta n – chekli tartibga ega deyiladi.

Misol. $y^2 = x^3 + 4$, $P(0,2)$ nuqta $n = 3$ tartibli ekanligi ko'rsatilsin.

Yechish. Haqiqatan $a = b = 0$, (4.8) formulaga ko'ra:

$$u = 0$$

$$v = -2$$

$$2P = (0; -2), 3P = 2P + P = (0; -2) + (0; 2) = (0; 0)$$

bu esa elliptik egri chiziq nuqtasi tartibi ta'rifi bilan ustama-ust tushdi, ya'ni $n = 3$ ekan. Bevosita tekshirib ko'rish mumkinki:

1) $y^2 = x^3 + 1, P(2,3), n = 6.$

2) $y^2 = x^3 - 43x + 166, P(3,8), n = 7.$

Izoh. 1901 yilda fransuz matematigi A.Puankare (1854- 1912) quyidagi gipotezani ilgari surgan.

Gipoteza. Har doim cheksiz tartibli $P_1, P_2, \ldots . P_k$ chekli ratsional nuqtalar topish mumkinki, har qanday P- ratsional nuqta shu ratsional nuqtalar orqali ifodalanadi:

$$P = n_1P_1 + \ldots \ldots + n_kP_k + Q,$$

Bu yerda $n_1, \ldots . n_k$ - butun sonlar P – nuqta uchun bir qiymatli aniqlanadi, Q – esa chekli tartib ega bo'lgan nuqta. Bu yerdagi k - soni egri chiziq rangi deyiladi.

1922 yilda ingliz matematigi L.Mordell, Puankare gipotezasi isbotini keltiradi. Biroq, bu isbot egri chiziq rangini topishning usulini bermas edi. Faqatgina 1995 yilda elliptik egri chiziq rangini juda murakkab analitik konstruksiya yordamida topish mumkinligi ko'rsatildi.

Ta'rif. E EECh ga tegishli bo'lgan P nuqtaning tartibi deb $[k]P = O$ shartni bajaruvchi eng kichik natural k soniga aytiladi.

Nuqtalarni qo'shish quyidagi xossalarga ega:

0. $[0]P = O$;
1. $[1]P = P$;
2. $[n + m]P = [n]P + [m]P$;
3. $[-n]P = -([n]P)$.

Ma'lumki, agar $z \neq 0$ bo'lsa, $y^2 = z(mod\, p)$ tenglama ikkita yechimga ega bo'lishi mumkin. Agar bu yechimlar y_1 va y_2 bo'lsa, u holda $y_1 = -y_2$ tenglik bajariladi. Agar $y_2 < 0$ bo'lsa, u holda $y_2 + p$ ham yuqoridagi tenglamaning yechimi bo'ladi.

Teorema 1. P va $(-P)$ nuqtalarning tartiblari teng bo'ladi.

Misol 1. F_{97} maydon ustida aniqlangan $y^2 = x^3 + 46x + 74$ EECh larning nuqtalarini tartiblarini topamiz. Biz uni quyidagi jadvalda keltiramiz.

x	y_1	y_2	$ord(P)$
1	11	86	16
4	15	82	4
6	9	88	80
8	9	88	40
9	21	76	10
10	46	51	8
15	29	68	80

19	12	85	80
20	19	78	80
22	26	71	8
24	8	89	40
27	12	85	16
30	18	79	40
32	48	49	40
34	28	69	80
35	6	91	20
37	7	90	80
43	46	51	80
44	46	51	80
46	2	95	20
49	45	52	5
51	12	85	10
52	22	75	80
57	0	0	2
60	14	83	40
63	25	72	40
64	35	62	16
65	47	50	40
66	24	73	20
67	42	55	80
70	2	95	80
75	32	65	20
76	41	56	80
78	2	95	80
83	9	88	16
85	5	92	80
88	17	80	40
90	31	66	5
94	43	54	80
96	30	67	80

Berilgan maydonning koordinatalar tekisligida nuqtalari soni 9410 ga teng. Yuqoridagi jadvaldan EECh ga tegishli nuqtalar soni 81 ta

ekanligi kelib chiqadi (nol nuqta bilan birga). Demak, tekislikdagi barcha nuqtalar EECh ga tegishli bo'lmas ekan, ya'ni x ning barcha qiymatlarida $y^2 = x^3 + 46x + 74(mod\ 9\ 7)$ tenglama yechimga ega bo'lavermaydi. Masalan, $x = 2$ hol uchun. Agar bu qiymatni tenglamaga olib borib qo'yilsa $y^2 = 77(mod\ 9\ 7)$ tenglamaga kelinadi. Bu tenglama yechimga ega yoki yo'qligini aniqlash uchun Lejandr simvolidan foydalaniladi:

$$L\left(\frac{77}{97}\right) = (-1)^{\frac{77-1}{2}\frac{97-1}{2}} L\left(\frac{97}{77}\right) = L\left(\frac{20}{77}\right) = L\left(\frac{4\cdot 5}{77}\right) =$$

$$(-1)^{\frac{77-1}{2}\frac{5-1}{2}} L\left(\frac{77}{5}\right) = L\left(\frac{2}{5}\right) = (-1)^{\frac{5^2-1}{8}} = -1$$ Demak, $x = 2$ holda

$y^2 = 77(mod\ 9\ 7)$ tenglama yechimga ega emas ekan.

Yuqorida ko'rib o'tganimizdek F maydon ustida aniqlangan E EECh unda aniqlangan qo'shish amaliga nisbatan gruppa tashkil etar ekan. Bu EECh ga tegishli nuqta qism gruppa tashkil etishini quyidagi teorema aniqlaydi.

Teorema 2. Bizga E elliptik egri chiziqqa tegishli bo'lgan P nuqta berilgan bo'lib, uning tartibi $ord(P) = n$ tub bo'lsin. U holda $\langle P\rangle = \{O, P, [2]P, [3]P, \ldots, [n-1]P\}$ to'plam $E(F)$ ning siklik qism gruppasi bo'ladi.

Misol 2. F_{29} maydon ustida aniqlangan $E: y^2 = x^3 + 4x + 20$ EECh berilgan bo'lsin. $P = (1,5)$ nuqtaning tartibi 37 ga teng bo'lib, bu nuqta aniqlagan qism gruppa $E(F_{29})$ gruppaning o'zi bilan ustma-ust tushadi, ya'ni bu nuqta $E(F_{29})$ gruppaning generatori bo'ladi.

$[0]P = O$	$[8]P = (8,10)$	$[16]P = (0,22)$	$[24]P = (16,2)$	$[32]P = (6,17)$
$[1]P = (1,5)$	$[9]P = (14,23)$	$[17]P = (27,2)$	$[25]P = (19,16)$	$[33]P = (15,2)$
$[2]P = (4,19)$	$[10]P = (13,23)$	$[18]P = (2,23)$	$[26]P = (10,4)$	$[34]P = (20,26)$
$[3]P = (20,3)$	$[11]P = (10,25)$	$[19]P = (2,6)$	$[27]P = (13,6)$	$[35]P = (4,10)$
$[4]P = (15,27)$	$[12]P = (19,13)$	$[20]P = (27,27)$	$[28]P = (14,6)$	$[36]P = (1,24)$
$[5]P = (6,12)$	$[13]P = (16,27)$	$[21]P = (0,7)$	$[29]P = (8,19)$	
$[6]P = (17,19)$	$[14]P = (5,22)$	$[22]P = (3,28)$	$[30]P = (24,7)$	
$[7]P = (24,22)$	$[15]P = (3,1)$	$[23]P = (5,7)$	$[31]P = (17,10)$	

Ko'rib o'tganimizdek F maydon ustida aniqlangan E elliptik egri chiziqning nuqtalari $F \times F = \{(x,y): x,y \in F\}$ to'plamning qism to'plami bo'ladi. Demak, E elliptik egri chiziqning nuqtalari tashkil etgan gruppa $F \times F$ ning qandaydir qism to'plamiga teng bo'ladi. Bu qism to'plamni aniqlash uchun bizga quyidagi teorema yordam beradi. $(A,*)$ va $(B,\circ)$ algebraik strukturalar berilgan bo'lsin. Ularning to'g'ri yig'indisi deganda $A \oplus B = \{(x,y): x \in A, y \in B\}$ to'plamga aytiladi va bu to'plam ham algebraik struktura bo'ladi. Bu algebraik strukturada amal quyidagicha aniqlanadi: $(x_1,y_1) \oplus (x_2,y_2) = (x_1 * x_2, y_1 \circ y_2)$.

Teorema 3. E elliptik egri chiziq F_q maydon ustida berilgan bo'lsin. Bu maydon nuqtalari aniqlagan $E(F_q)$ gruppa $Z_{n_1} \oplus Z_{n_2}$ ga izomorf bo'ladi, bu yerda n_1 va n_2 lar bir qiymatli aniqlangan va n_2 soni n_1 va $q-1$ larning bo'luvchisi.

$y^2 = x^3 + ax^2 + bx + c$ -elliptik egri chiziq ratsional nuqtalarini topishning effektiv usulini topish hozirgi kunda sonlar nazariyasining muhim muammolaridan biri hisoblanadi. Biroq egri chiziqqa tegishli bitta nuqta topilsa, qolganlari 4.6 - bo'limda keltirilgan formulalar orqali aniqlanadi.

Bugungi kunda EECh ning nuqtalari soni $\#E(F_p)$ ni hisoblashning Shuf (Rene Schoof, 1985) metodi va uning modifikasiyalangan varianti bo'lgan SEA algoritmlari mavjud. Shuf metodi EECh ning nuqtalari sonini topishning birinchi polinomial metodi hisoblanadi va uning qiyinchilik darajasi p modul bo'yicha $O(log^6 p)$ ta operasiyaga teng. Ushbu metodni tushunishda muhim tushuncha va teoremalar bilan tanishib chiqamiz..

Teorema 4. $\#E(F_p)$ uchun

$$p + 1 - 2\sqrt{p} \le \#E(F_p) \le p + 1 + 2\sqrt{p}$$

tengsizliklar o'rinli.

Demak, $\#E(F_p) = p + 1 - t$ deb olishimiz mumkin, bunda $|t| \le 2\sqrt{p}$ bo'lib u $\#E(F_p)$ uchun Frobenuis izi deb ataladi.

$\#E(F_p)$ hisoblashning asl mohiyatini tushunish uchun uning eng oddiy usulini keltiramiz. $\#E(F_q)$ ***ni hisoblashning oddiy usuli.*** Bu

usulda avvalo har bir $x \in F_q$ uchun $z = x^3 + ax + b$ hisoblanadi va z ning F_q maydonda kvadratik chegirma ekanligi tekshiriladi. Agar $z = 0$ bo'lsa, u holda $(x, 0) \in E$ bo'ladi. Agar shunday $y \in F_q$ topilib, $y^2 \equiv z(mod\, p)$ tenglik o'rinli bo'lsa, u holda bu tenglikni qanoatlantiruvchi va absissasi x ga teng faqat ikkita nuqta mavjud, ya'ni $(x, y), (x, -y) \in E$ munosabat o'rinli bo'ladi. EECh dagi nuqtalar sonini aniqlashda quyidagi teorema o'rinli.

Teorema 5. F_p maydonda aniqlangan $y^2 = x^3 + ax + b$ EECh ning nuqtalari soni $\#E(F_p) = p + 1 + \sum_{x=0}^{p-1}\left(\frac{x^3+ax+b}{p}\right)$ ga teng, bu yerda $(\cdot)$ – Lejandr simvoli.

Lekin, bu usulni p juda kichik tub son bo'lgan holda ECh ning nuqtalar sonini topishda qo'llash mumkin.

Ma'lumki $m \geq 3$ hol uchun $[m]P$ nuqtaning koordinatalarini hisoblash juda ko'p amallarni bajarishni talab qiladi. EECh da $[m]P$ hisoblashning rekursiv formulasi ham mavjud, ya'ni $m \geq 2$ va $P = (x, y)$ bo'lsa

$$[m]P = \left(\frac{\psi_m^2 x - \psi_{m-1}\psi_{m+1}}{\psi_m^2}, \frac{\psi_{m+2}\psi_{m-1}^2 - \psi_{m-2}\psi_{m+1}^2}{4y\psi_m^3}\right) \qquad (4.12)$$

formula o'rinli bo'ladi, bunda

$$\psi_{-1} = -1,\ \psi_0 = 0,\ \psi_1 = 1,\ \psi_2 = 2y,\ \psi_3 = 3x^4 + 6ax^2 + 12bx - a^2,$$

$$\psi_4 = 4y(x^6 + 5ax^4 + 20bx^3 - 5a^2x^2 - 4abx - 8b^2 - a^3),$$

$$\psi_{2m+1} = \psi_{m+2}\psi_m^3 - \psi_{m-1}\psi_{m+1}^3,\ m \geq 2,\ m \geq 3$$

bo'lib, $\psi_m(x, y)$ ko'phad m -tartibli bo'luvchi ko'phad deb ataladi. Barcha ψ bo'luvchi ko'phadlarning koeffisentlari p modul bo'yicha hisoblanadi. Yuqorida keltirilgan rekursiv formulaga ko'ra m -tartibli bo'luvchi ko'phadni hisoblashni $O(log\, m)$ qadamda bajarish mumkin. Eslatib o'tamizki m toq bo'lgan hollar uchun ψ_m ko'phad faqat x o'zgaruvchiga bog'liq bo'lib qoladi.

Teorema 6. $\psi_n(x, y) = 0$ tenglik faqat va faqat tartibi n ga karrali bo'lgan $P = (x, y)$ nuqtalar uchun bajariladi.

Ma'lumki, F_p maydon ustida berilgan $y^2 = x^3 + ax + b$ EECh uchun Xasse teoremasidan $\#E(F_p) = p + 1 - t$ ga egamiz. Quyidagi teorema $\#E(F_p) = p + 1 - t$ tenglikdagi p va t parametrlar orasidagi bog'lanishni ifodalaydi.

$\varphi_q((x,y)) = (x^q, y^q)$ tenglik bilan aniqlanuvchi $\varphi_q : E(\overline{F}_q) \to E(\overline{F}_q)$ akslantirish ***Frobenuis endomorfizmi*** deyiladi. Har qanday $P \in E(\overline{F}_q)$ nuqta uchun $\varphi_q^2 - t\varphi_q + q = 0$ tenglik o'rinli. Boshqacha aytganda quyidagi teorema o'rinli bo'ladi.

Teorema 7. (Frobenuis endomorfizmining xossasi). Ixtiyoriy $P(x,y) \in E_p(a,b)$ uchun quyidagi tenglik o'rinli bo'ladi

$$(x^{p^2}, y^{p^2}) + [p](x,y) = [t](x^p, y^p), \qquad (4.13)$$

bu formuladagi qo'shish ECh dagi nuqtalarni qo'shishni bildiradi.

Shuf algoritmini o'rganishda l-tartibli torsion (burilish) nuqta tushunchasiga duch kelamiz. Shuning uchun bu tushunchani keltirib o'tamiz. Agar EECh dagi P nuqta uchun $[l]P = O$ bo'lsa, P nuqta $l-$ tartibli torsion nuqta deyiladi va barcha l -tartibli torsion nuqtalar to'plami $E[l]$ orqali belgilanadi. Manbalarda $\#E[l] = l^2$ tenglik o'rinli va $E[l]$ to'plam $E(F_p)$ ning qism gruppasi bo'lishi ta'kidlangan.

l -tartibli torsion nuqtalar va l -tartibli $\psi_l(x,y)$ bo'luvchi ko'phad orasida ham bog'lanish mavjud bo'lib, bu bog'lanish quyidagi teoremada keltiriladi.

Teorema 8. $P(x,y)$ nuqtaning l- tartibli torsion nuqta bo'lishi uchun $\psi_l(x,y) = 0$ bo'lishi zarur va yetarlidir.

Misol 3. $y^2 = x^3 + 2x + 6 (mod\ 7)$ ECh ning nuqtalari sonini toping.

Yechish. Birinchi oddiy usuldan foydalanib ko'ramiz. Buning uchun x ga 0 dan 6 gacha bo'lgan qiymatlarni berib chiqamiz. So'ngra bu qiymatlarga mos y ning qiymatlarini topamiz. Buning uchun z, ning elementlarini kvadratlarini yozib chiqamiz:

$0^2 = 0,\ 1^2 = 1,\ 2^2 = 4,\ 3^2 = 2,\ 4^2 = 2,\ 5^2 = 4,\ 6^2 = 1.$

Yuqorida hisoblanganlarga ko'ra $E_7(2,6)$ ning nuqtalarini topamiz:

$x = 0$ $\quad y$ mavjud emas

$x = 1 \quad y = 3, y = -3 = 4$
$x = 2 \quad y = 2, y = -2 = 5$
$x = 3 \quad y = 2, y = -2 = 5$
$x = 4 \quad y = 1, y = -1 = 6$
$x = 5 \quad y = 1, y = -1 = 6$
$x = 6 \quad y$ mavjud emas

Topilgan nuqtalarga cheksiz nuqtani qo'shsak, $\#E_7(2,6) = 11$ ga ega bo'lamiz.

EECh larni kriptografiyada qo'llanilishida $\#E(F_p)$ ning katta tub son yoki katta tub son va kichik sonning ko'paytmasiga teng bo'lishi talab qilinadi. Bu talabning muhimligi Lagranj va Xasse teoremalariga asoslanadi. Lagranj teoremasiga ko'ra elementning tartibi gruppa tartibining bo'luvchisi bo'ladi. Lagranj va Xasse teoremalariga ko'ra esa agar $\{k_i\}$ lar EECh ning n ta nuqtasining tartiblari bo'lsa, u holda shunday r soni topilib $p + 1 - 2\sqrt{p} \le r \cdot lcm(\{k_i\}) \le p + 1 + 2\sqrt{p}$ tengsizliklar o'rinli bo'ladi. Agar bunday r yagona bo'lsa, u holda $\#E(F_p) = r \cdot lcm(\{k_i\})$ tenglik o'rinli bo'ladi.

Misol 4. Faraz qilaylik F_{97} maydon ustida $y^2 = x^3 + 46x + 74$ EECh berilgan bo'lsin. Xasse teoremasiga ko'ra $97 - 2 \cdot 9 = 79 \le \#E(F_{97}) \le 117 = 97 + 2 \cdot 9$ munosabatlar o'rinli bo'ladi. Bu EECh ga tegishli $P = (64,35)$ va $Q = (46,95)$ nuqtalarni qaraylik. Bu nuqtalarning tartiblari quyidagicha bo'ladi: $ord(P) = 16, ord(Q) = 20$. Yuqoridagi qayd qilingan tasdiqqa ko'ra $79 \le r \cdot lcm(ord(P), ord(Q)) \le 117$ tengsizlik o'rinli bo'ladi va $lcm(16,20) = 80$ ekanligidan $r = 1$ tenglik kelib chiqadi. Demak, $\#E(F_{97}) = 80$.

Agar $\#E(F_p)$ ma'lum bo'lsa, $\#E(F_{p^n})$ ni hisoblash mumkin. Haqiqatan ham, faraz qilaylik $\#E(F_p) = p + 1 - t$ bo'lsin.

Teorema 9. $\#E(F_{p^n})$ ni hisoblash uchun $x^2 - tx + p = (x - \alpha)(x - \beta)$ tenglikni qanoatlantiruvchi α, β lar topiladi va ular uchun $\#E(F_{p^n}) = p^n + 1 - (\alpha^n + \beta^n)$ tenglik o'rinli bo'ladi. Agar p juda katta son bo'lsa $s_n = \alpha^n + \beta^n$ miqdor quyidagi rekkurent formula bilan

berilgan ketma-ketlik orqali topiladi: $s_0 = 2,\ s_1 = t,\ s_{n+1} = ts_n - ps_{n-1}$.

Agar $\#E(F_p) = p + 1 - 2d$ bo'lsin, u holda teorema 2.3.2 ga ko'ra α va β kompleks sonlar topilib $p = \alpha\beta$ va $-2d = \alpha + \beta$ tengliklar o'rinli bo'ladi.

Tasdiq. Agar F_2 maydonda aniqlangan ECh $y^2 + xy = x^3 + ax^2 + b$ tenglik orqali berilgan bo'lsa, u holda $\#E(F_2) \in \{2,4\}$ munosabat o'rinli bo'ladi. Yuqoridagilardan esa har qanday k uchun, $\#E(F_2) = 2$ va $\#E(F_2) = 4$ lar uchun mos ravishda, quyidagi tengliklar o'rinli bo'ladi:

$$\#E(F_{2^k}) = 2^k + 1 - 2^{\frac{k}{2}+1}\left[cos\left(k\,arctan\left(\pm\sqrt{7}\right)\right)\right] \quad (1.14).$$

Isboti. Agar $a, b = 0$ bo'lsa, u holda $y^2 + xy = x^3$ ECh tenglamasi faqat bitta $(0,0)$ yechimga ega bo'ladi. Cheksiz uzoqlikdagi nuqtani hisobga olsak $\#E(F_2) = 2$ bo'ladi. $GF(2)$ maydonda aniqlangan ECh ning nuqtalari soni uchun $\#E(F_2) = 2 + 1 - 2d$ tenglik o'rinli ekanligidan $-2d = -1$ ga ega bo'lamiz. $\begin{cases}\alpha + \beta = -1\\ \alpha\beta = 2\end{cases}$ tenglamalar sistemasini yechsak $\alpha = \frac{-1\pm\sqrt{-7}}{2}$ va $\beta = \frac{-1\mp\sqrt{-7}}{2}$ yechimlarga ega bo'lamiz. Topilgan bu qiymatlardan $\#E(F_{2^k}) = 2^k + 1 - \frac{(1-\sqrt{-7})^k + (1+\sqrt{-7})^k}{2^k}$ ga ega bo'lamiz. Bu ifodani soddalashtirish uchun kompleks sonning trigonometrik ko'rinishi va uni darajaga oshirish xossasidan foydalaniladi. Shulardan kelib chiqqan holda bu formulalarni keltirib o'tamiz. Bizga biror $z = a + ib \in C$ kompleks son berilgan bo'lsin. Uning trigonometrik ko'rinishi $z = r(cos\,\phi + i\,sin\,\phi)$ bo'lib, bunda $\phi = arctan\frac{b}{a}$, $r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$. Agar $z = r(cos\,\phi + i\,sin\,\phi)$ bo'lsa, $z^k = r^k(cos(k\phi) + i\,sin(k\phi))$ tenglik o'rinli bo'ladi. Yuqorida keltirilgan formulalardan foydalanib $z_1 = 1 - \sqrt{-7} = 1 - \sqrt{7}i$ va $z_2 = 1 + \sqrt{-7} = 1 + \sqrt{7}i$ sonlarning darajalarini hisoblasak, mos ravishda $z_1^k = \left(\sqrt{8}\right)^k\left[cos\left(k\,arctan\sqrt{7}\right) - i\,sin\left(k\,arctan\sqrt{7}\right)\right]$ va $z_1^k = \left(\sqrt{8}\right)^k\left[cos\left(k\,arctan\sqrt{7}\right) + i\,sin\left(k\,arctan\sqrt{7}\right)\right]$ larga ega bo'lamiz.

Natijada esa $\#E(F_{2^k}) = 2^k + 1 - 2^{\frac{k}{2}+1}\left\lceil cos\left(k\, arctan\sqrt{7}\right)\right\rceil$ kelib chiqadi.

Agar $a = b = 1$ bo'lsa, $\#E(F_2) = 4$ va $-2d = 1$ bo'ladi. $\begin{cases}\alpha + \beta = 1\\ \alpha\beta = 2\end{cases}$ tenglamalar sistemasi $\alpha = \frac{1\pm\sqrt{-7}}{2}$ va $\beta = \frac{1\mp\sqrt{-7}}{2}$ yechimlarga ega. Natijada $\#E(F_{2^k}) = 2^k + 1 - 2^{\frac{k}{2}+1}\left\lceil cos\left(k\, arctan\left(-\sqrt{7}\right)\right)\right\rceil$ ga ega bo'lamiz. Tasdiq isbot bo'ldi.

Xuddi shunday maydon xarakteristikasi 3 ga teng hol uchun ham ECh nuqtalarini topish formulasini keltiramiz.

Tasdiq. Agar F_3 maydonda aniqlangan ECh ning j -invarianti noldan farqli bo'lsa, u holda $\#E(F_3) \in \{1,2,3,4,5,6,7\}$ munosabat o'rinli bo'ladi. Bu holda ECh ning F_{3^k} dagi nuqtalari soni quyidagicha aniqlash mumkin:

1) ixtiyoriy k va $\#E(F_3) = 5$, $\#E(F_3) = 3$ lar uchun mos ravishda $\#E(F_{3^k}) = 3^k + 1 - 2\cdot 3^{\frac{k}{2}}\left\lceil cos\left(k\, arctan\left(\pm\sqrt{11}\right)\right)\right\rceil$ bo'ladi;

2) ixtiyoriy k va $\#E(F_3) = 6$, $\#E(F_3) = 2$ lar uchun mos ravishda $\#E(F_{3^k}) = 3^k + 1 - 2\cdot 3^{\frac{k}{2}}\left\lceil cos\left(k\, arctan\left(\pm\sqrt{2}\right)\right)\right\rceil$ bo'ladi;

3) ixtiyoriy k va $\#E(F_3) = 7$, $\#E(F_3) = 1$ lar uchun mos ravishda $\#E(F_{3^k}) = 3^k + 1 - 2\cdot 3^{\frac{k}{2}}\left\lceil cos\left(k\, arctan\left(\pm 3^{-\frac{1}{2}}\right)\right)\right\rceil$ bo'ladi;

4) $\#E(F_3) = 4$ va k – juft, k – toq lar uchun mos ravishda $\#E(F_{3^k}) = \begin{cases}3^k + 1 - 2\cdot(-3)^{\frac{k}{2}}\\ 3^k + 1\end{cases}$ bo'ladi.

Isboti. Koeffisiyentlari $a, b, c \in F_3$ bo'lgan $y^2 = x^3 + ax^2 + bx + c$ tenglik bilan aniqlangan ECh ning nuqtalari $\#E(F_3) \in \{1,2,3,4,5,6,7\}$ bo'ladi. $\#E(F_3)$ ning qiymatlar $a, b, c \in F_3$ koeffisiyentlarga bog'liq ravishda har xil bo'ladi (4.3–jadval). $\#E(GF(3)) = 4$ tenglik $a, b, c \in F_3$ larning ko'p qiymatlarida o'rinli bo'ladi. Shuning uchun faqatgina $\#E(F_3) = 4$ holni isbotini qaraymiz. Qolgan hollar ham shunga o'xshash isbotlanadi.

4.3–jadval

$\#E(GF(3))$	EECh ning koeffisiyentlari		
	a	b	c
1	0	2	2
2	2	0	2
	2	1	2
	2	2	0
3	1	1	2
4	0	0	0
	0	0	1
	0	0	2
	0	1	0
	0	1	1
	0	1	2
	0	2	0
	1	0	0
	1	0	2
	1	1	0
	1	2	0
	1	2	1
	1	2	2
5	2	0	0
	2	0	1
	2	1	0
	2	1	1
	2	2	1
	2	2	2
6	1	1	1
7	0	2	1
	1	0	1

$\#E(F_3) = 4$ ekanligidan, $-2d = 0$ ga ega bo'lamiz. Bundan esa $\begin{cases}\alpha + \beta = 0 \\ \alpha\beta = 3\end{cases}$ tenglamalar sistemasiga ega bo'lamiz. bu sistemaning

yechimlari $\alpha = \pm\sqrt{-3}$ va $\beta = \mp\sqrt{-3}$ bo'ladi. Bu qiymatlardan $\#E(F_{3^k}) = 3^k + 1 - \left(\left(\sqrt{-3}\right)^k + \left(-\sqrt{-3}\right)^k\right)$ ga ega bo'lamiz. Demak,

$$\#E(F_{3^k}) = \begin{cases} 3^k + 1 - 2 \cdot (-3)^{\frac{k}{2}}, k - \text{juft} \\ 3^k + 1, k - \text{toq} \end{cases}$$

tenglik o'rinli ekan. Teorema 9 isbot bo'ldi.

F_p maydon ustida aniqlangan $E: y^2 = x^3 + ax + b$ EECh kriptografik talablarga javob berishi uchun quyidagilar bajarilishi lozim:

1. $t = \lfloor log\, p \rfloor + 1 \geq 160$
2. $a, b \neq 0 (mod\, p)$ va $4a^3 + 27b^2 \neq 0 (mod\, p)$
3. $\#E(F_p)$ – deyarli tub son
4. $(p^k - 1)\, mod\, q = 0$ shart biror $k = \overline{1,31}$ uchun bajarilsa 2-qadamga qaytilsin
5. $p = q$ bo'lsa, 2-qadamga qaytilsin
6. G generator nuqta topilsin.

Nazorat savollari

1. Ochiq kalitli kriptotizimlar va ularning vazifalari.
2. Tasodifiy qiymatlar va ularning kriptografiyadagi o'rni?
3. Zamonaviy kriptografiyaning bo'limlari.
4. Simmetrik kalitli shifrlarda foydalanilgan akslantirishlar.
5. Kriptografik algoritmlarga qaratilgan hujum turlari.
6. Kriptotahlil fan sohasi va uning maqsadi.
7. Diskret logarifmlash muammosini yechish usullarini ayting?
8. Elliptik egri chiziqda nuqtalar qanday qo'shiladi?
9. Elliptik egri chiziq deb qanday chiziqqalarga aytiladi?
10. Elliptik egri chiziqda nuqta tartibi qanday aniqlanadi?

V BOB. Xesh funksiyalar

5.1. Kriptografik xesh funksiyalar

Zamonaviy kriptografiyaning yana bir simmetrik akslantirishlaridan biri – *kriptografik xesh funksiyalar* hisoblanadi.

Ta'rif 5.1. Xesh funksiya deb o'zgaruvchan uzunlikdagi binar qatorlarni *xesh qiymat* deb ataluvchi biror o'zgarmas uzunlikdagi qiymatga samarali hisoblashlar orqali aks ettiruvchi bir tomonlama funksiyaga aytiladi.

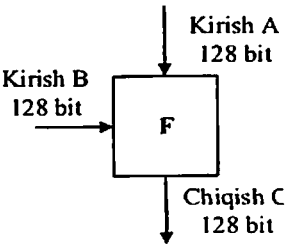
n bitli xesh qiymatlarni (masalan, $n = 128$ yoki 160) qaytaruvchi va talab etilgan xususiyatlarga ega xesh funksiya uchun tasodifiy kiruvchi satrning ma'lum bir xesh qiymatga bog'lanish ehtimoli 2^{-n} ga teng bo'ladi. Buning uchun, biror h kriptografik xesh funksiyani loyihalashda ikkita turli kirish qiymatlari uchun bir xil xesh qiymatni hosil bo'lishini imkonsizligiga e'tibor qaratiladi (ya'ni, $x \neq y$ kiruvchi qatorlar uchun $h(x) = h(y)$ holat kuzatilmasligi shart).

Kriptografik xesh funksiyalar axborot xavfsizligida elektron raqamli imzo algoritmlarini yaratishda va ma'lumotlar yaxlitligini ta'minlashda foydalaniladi.

Xesh funksiya kirishdagi cheklanmagan uzunlikdagi ma'lumotni chiqishda qat'iy uzunlikdagi qiymatga akslantiruvchi funksiya. Kriptografik xesh funksiyaga quyidagi talablar qo'yiladi:

1. Ixtiyoriy uzunlikdagi matnga qo'llash.
2. Chiqishda tayinlangan uzunlikdagi qiymatni qaytarish.
3. Berilgan ixtiyoriy x bo'yicha $h(x)$ oson hisoblanishi.
4. Berilgan ixtiyoriy H bo'yicha $h(x) = N$ tenglikdan x ni hisoblab topib bo'lmaslik (bir tomonlilik xossasi).
5. Olingan x va $y \neq x$ matnlar uchun $h(x) \neq h(y)$ bajarilishi (kolliziyaga bardoshlilik xossasi).

Siqish funksiyasi. Xesh funksiyalarning asosiy xususiyatlaridan biri bu – siqish imkoniyati bo'lib, kriptografiyada bu – fiksirlangan ikkita kiruvchi bloklarni, chiqishda bitta fiksirlangan blokga aylantirib beruvchi bir tomonlama funksiyaga aytiladi (5.1 - rasm).



5.1 – rasm. **Bir tomonlama siqish funksiyasi**

Bir tomonlama siqish funksiyalarni ishlab chiqishda ba'zida mavjud kriptografik algoritmlardan foydalanilsa, ba'zida biror matematik muammodan kelib chiqqan holda yondashiladi. Quyida keng tarqalgan bir tomonlama siqish funksiyalarini yaratish usullari keltirilgan:

1. Blokli shifrlarga asoslangan:
   a) bitta blok uzunligiga siqish:
      - Davies-Meyer (Davies-Meyer);
      - Matias-Meyer-Oseas (Matyas-Meyer-Oseas);
      - Miaguchi-Prinel (Miyaguchi-Preneel).
   b) ikkita blok uzunligiga siqish:
      - MDC-2;
      - MDC-4;
      - Hirose.
2. Oqimli shifrlarga asoslangan;
3. Maxsus siqishga asoslangan;
4. Modul arifmetikasiga asoslangan.

Xesh funksiyalarga qaratilgan hujumlar. Xesh funksiyalarni xavfsizlik xususiyatlarini tahlil qilganda odatda *haqiqiy* ma'lumotni topish, *ikkilamchi haqiqiy* ma'lumotni topish va *kolliziyani* topishga qaratiladi. Agar haqiqiy ma'lumotni topish, ikkilamchi haqiqiy ma'lumotni topish va kolliziyani topish uchun mos ravishda 2^n, 2^n va $2^{n/2}$ dan kam bo'lgan urinishlar soni talab etilsa, bu xesh funksiya bu ko'rsatilgan turdagi hujumlarga bardoshsiz deb qaraladi. Xesh funksiyalarga qaratilgan hujumlarni maqsadiga asoslangan holda quyidagicha ifodalash mumkin (5.1 - jadval).

5.1 – jadval

Xesh funksiyalarga qaratilgan hujumlarning maqsad va uni amalga oshirish uchun hujumchi imkoniyatlari

Hujum	Berilgan imkoniyat	Hujumdan maqsad
Haqiqiy	$H(M)$	M ni topish
Ikkilamchi haqiqiy	$M\&H(M)$	$M' \neq M$ va $H(M') \neq H(M)$ ni topish
Kolliziya	-	$M' \neq M$ va $H(M') \neq H(M)$ ni topish

Tug'ilgan kun hujumi. Ushbu hujum kolliziyani topishga qaratilgan bo'lib, *tug'ilgan kun muammosi* yoki *tug'ilgan kun paradoksi*ga asoslanadi. Bu muammo minimal sondagi odamlar orasida kamida ikkita odamning tug'ilgan kunining bir xil bo'lish ehtimoli ½ dan katta bo'lishi haqida bo'lib, buni xesh funksiyalarga qo'llaganda bir tug'ilgan kunga ega bo'lgan ikkita insonning mavjudligini bildiradi.

Ushbu hujumda hujumchi maxsus kolliziyani topishdan ko'ra ixtiyoriy kolliziyani topishga harakat qiladi. Agar hujumchi N ta odamlar orasidan biror maxsus kolliziyani, ya'ni bir odamning tug'ilgan kuni bilan bir xil bo'lgan kunni topayotgan bo'lsa, u holda bu ehtimol quyidagiga teng bo'ladi:

$$P_{kolliziya}(N) = 1 - \left(\frac{364}{365}\right)^N$$

Bu ehtimollik ½ dan katta bo'lishi uchun N qiymat 254 dan katta bo'lishi talab etiladi. Ushbu g'oyani xesh funksiyaga tadbiq etilsa, biror xabar va uning xesh qiymati berilganda xesh qiymatlari teng bo'lgan turli ma'lumotni topish masalasi qaraladi.

Biroq hujumchidan N tug'ilgan kunlar orasida ixtiyoriy kolliziyani topish ehtimoli quyidagiga teng bo'ladi:

$$P_{kolliziya}(N) = 1 - \left(\frac{365}{365}\right)\left(\frac{364}{365}\right)\left(\frac{363}{365}\right)\cdots\left(\frac{365-N+1}{365}\right)$$

Ushbu holda ehtimollik ½ dan katta bo'lishi uchun $N=23$ imkoniyatning o'zi yetarli bo'ladi.

Agar hujumchi n bitli xesh qiymat chiqaruvchi xesh funksiya uchun ½ dan ko'p bo'lgan ehtimollik bilan ixtiyoriy kolliziyani topishi $2^{n/2}$ ga teng bo'ladi.

Agar xesh funksiya uchun xesh qiymatning uzunligi n bitga teng bo'lsa va u p ehtimollik bilan aniqlanishi uchun kerak bo'lgan hisoblashlar soni N ga teng bo'lsa, ular orasidagi bog'liqlikning mental ko'rinishi quyidagiga teng bo'ladi:

$$N \approx \sqrt{2 * 2^n * p}.$$

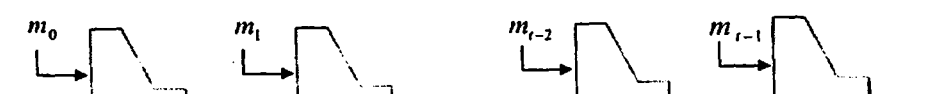
Xesh funksiyalarni qurish usullari. Yuqorida keltirilgan siqish usullari asosida turli konstruksiyalardan foydalanilgan holda xesh funksiyalarni qurish amalga oshiriladi. Takroriy xeshlashga asoslangan funksiyalar hozirda keng tarqalgan usullardan biri bo'lib, xesh funksiyalarni qurishda keng foydalaniladi. Quyida keng tarqalgan xesh funksiyalarni qurish usullari keltirilgan.

Merkle-Damgard (MD) usuli. Ushbu usul xesh funksiyalarni qurishda eng keng tarqalgan usul sanalib, 1989 yilda R.Merkl va I.Damgard tomonidan ishlab chiqilgan. Ushbu usul odatda uchta qadamdan iborat bo'ladi. Birinchi qadamda ma'lumotga qo'shimcha ma'lumot qo'shish orqali uni teng bloklarga ajratish. Bunda keng tarqalgan to'ldirish usuli bu – bitta bir va qolganlarini nol bilan to'ldirishdir. Ikkinchi bosqich bu – kiritilgan ma'lumot bloki m ni qism bloklarga $m_0, m_1, \dots, m_n$ ajratishdir. Shundan so'ng ochiq tanlab olingan boshlang'ich vektor va qism bloklardan foydalangan holda takroriy fiksirlangan qiymatlar hisoblanadi.

$$h_0 = IV,$$

$$h_i = f(h_{i-1}, m_{i-1})\ i = 1,2 \dots, t.$$

Bu yerda, f siqish funksiyasi. Ushbu konstruksiyaning umumiy ko'rinish quyidagi 5.2 – rasmda keltirilgan.



5.2 – rasm. **Markle – Damgard konstruktori**

Sxemaning zaif tomonlari:

1. Malumotni kerakli uzunlikkacha to'ldirish. Ya'ni, agar kriptoanalitik bitta kolliziya topsa, boshqalarini ham topish oson.

2. Xesh qiymatni beruvchi ikkinchi bir ma'lumotni (ikkinchi haqiqiyni) topish uzun ma'lumotlar uchun "to'liq tanlash hujumiga"ga nisbatan effektiv hisoblanadi.

3. Ma'lumotni to'ldirishga qaratilgan xujum, ya'ni, X ma'lumotning xesh qiymati $H(X)$ ma'lum bo'lganida $H(pad(X)||Y)$ ning qiymatini topish oson bo'ladi. Bu yerda, pad-to'ldirish funksiyasi bo'lib, u Xga bog'liq bo'lgan ma'lumotning xesh qiymatini topish imkonini beradi.

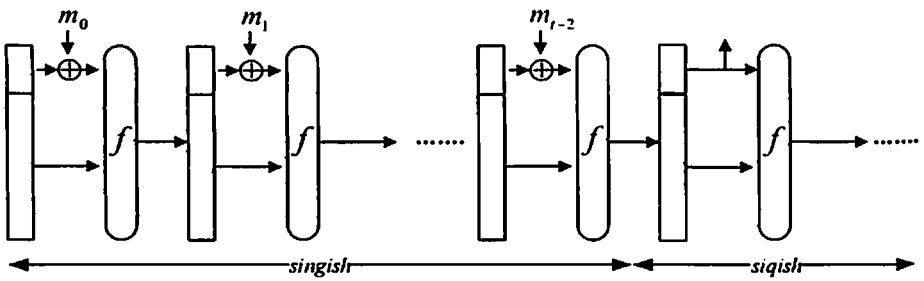
HAIFA usuli. Merkle-Damgard usuli kolliziyaga bardoshli sanalsada, yildan yil hisoblash qurilmalarining imkoniyatlari ortishi natijasida ko'plab hujumlarga zaif bo'lib bormoqda. Ushbu usuldagi kamchiliklar Biham va Dunkelmanlar tomonidan tuzatilib, yangi *HAIFA (HAsh Iterative FrAmework)* usulini taklif etishdi. HAIFA ham Merkle-Damgard usuli kabi takroriy sanalib, qo'shimcha ravishda xavfsizlikni oshirish uchun vosita kiritilgan.

MD usulida siqish funksiyasida kiruvchi qiymat sifatida h_i va m_i qiymatlar olinsa, HAIFAda esa ularga qo'shimcha ravishda b va s kattaliklar ham kiritiladi va umumiy ko'rinish quyidagicha bo'ladi: $h_i = f(h_{i-1}, m_{i-1}, b, s)$ ga teng bo'ladi.

Sponge(gubka) usuli. Ushbu funksiya xesh funksiya va oqimli shifrlarni yaratish uchun yangi usul sanalib, u tasodifiy almashtirish yoki tasodifiy funksiyaga asoslanadi. Agar f funksiya tasodifiy almashtirish kabi tasvirlansa, unda $P - sponge$, aks holda $T - sponge$ deb ataladi. Sponge usulida siqish va qolgan usullardagi siqish usullarining farqi, unda kirishdagi l bit qiymat chiqishda ham l bit shaklda ifodalanadi.

Ushbu usul ikkita bosqichdan iborat: *singish (absorbing)* va *siqish (squeezing)*. Birinchi bosqich takroriy holda bloklar ustida amalga oshiriladi. Bunda xabar bloki holat bilan takroriy holda XOR amalida qo'shiladi. Ushbu amal barcha bloklar ustida amalga oshirilgandan so'ng ikkinchi bosqich amalga oshiriladi. Bu bosqichda ba'zi qiymatlar

chiqariladi va kutilgan xesh qiymat olingunga qadar *f* funksiya qo'llaniladi (5.3 - rasm).



5.3 – rasm. **Sponge konsturkutori**

Bulardan tashqari, xesh funksiyalarni qurishda *keng kanalli va ikki kanalli (Wide Pipe and Double Pipe), erkin old qo'shiluvchili Merkle-Damgard (Prefix-Free Merkle-Damgård), qobiqli Merkle-Damgard (Enveloped Merkle-Damgård), RMX, 3C va 3C-X, dinamik xesh funksiya* konstruksiyalaridan keng foydalanilmoqda.

Xesh-funksiyalar ikki muhim turga, *kalitli* va *kalitsiz* xesh-funksiyalarga bo'linadi. Kalitli xesh-funksiyalar simmetrik kriptotizimlarda foydalaniladi. Ularni ma'lumotni autentifikatsiyalash kodlari deb ham atashadi. Ular bir-biriga ishonuvchi tomonlar uchun qo'shimcha vositalarsiz manbaning haqiqiyligi va ma'lumotning yaxlitligini kafolatlaydi. Kalitsiz xesh-funksiyalar xatolarni aniqlash kodlari deb ham yuritiladi. Kalitsiz xesh-funksiyalar qo'shimcha vositalarsiz ma'lumotning yaxlitligini kafolatlaydi. Bu xesh-funksiyalar bir-biriga ishonuvchi hamda bir-biriga ishonmaydigan tomonlar orasida ishlatiladi. Odatda kalitsiz xesh-funksiyalar quyidagi xossalarni qanoatlantirishi shart:

- bir tomonlamalik;
- kolliziyaga bardoshlilik;
- xesh qiymatlari teng bo'lgan ikkita ma'lumotni topishga bardoshlilik.

Keng foydalaniluvchi xesh-funksiyalar sifatida MD5, SHA1, SHA2, SHA3, GOST R 34.11-94, O'z DSt 1106 : 2006 algoritmlarini misol keltirish mumkin.

5.2. MD5 xesh funksiyasi

MD5 xesh-funksiyasi kalitsiz xesh-funksiyalar turkumiga tegishli bo'lib, Massachusets texnologiyalar instituti professori R.Rivest tomonidan 1992 yilda taqdim qilingan. MD5 xesh-funksiyasida xeshlanuvchi ma'lumot uzunligi ixtiyoriy bo'lib, xesh qiymat uzunligi 128 bit uzunlikda bo'ladi. MD5 xesh-funksiyasida xeshlanuvchi ma'lumot 512 bitlik bloklarga ajratiladi. Ular esa o'z o'rnida 16 ta 32 bitlik qism bloklarga ajratiladi va ular ustida amallar bajariladi.

Masalan, uzunligi b bit bo'lgan (bu yerda, b ixtiyoriy manfiy bo'lmagan butun son) ma'lumot berilgan va bu ma'lumotning bitlari $m_0 m_1 \cdots m_{b-1}$ tartibda yozilgan. Xesh qiymatni hisoblash uchun quyidagi beshta bosqich bajariladi:

1-bochqich. To'ldirish bitlarini qo'shish.

Berilgan ma'lumot uzunligi L, 512 modul bo'yicha 448 bilan taqqoslanadigan ($L \equiv 448\ mod\ 512$) ko'rinishda to'ldiriladi, ya'ni, kengaytirilgan ma'lumotning uzunligi unga eng yaqin bo'lgan 512 ga karrali bo'lgan sondan 64 bitga kichik bo'lishi kerak. To'ldirish bosqichi, hamma vaqt xattoki ma'lumot uzunligi 512 modul bo'yicha 448 bilan taqqoslanadigan bo'lsa ham bajariladi. To'ldirish quyidagi tartibda amalga oshiriladi: ma'lumotga qiymati 1 ga teng bo'lgan bitta bit qo'shiladi, qolgan bitlar esa 0 lar bilan to'ldiriladi. Shuning uchun qo'shilgan bitlar soni 1 dan 512 tagacha bo'ladi.

Masalan, xabar M="message" ga teng bo'lsin. U holda xabarning ASCIIdagi ko'rinishi quyidagicha bo'ladi:

01101101 01100101 01110011 01110011 01100001 01100111 01100101

Xabar uzunligi $L = 56$ ga tengligi bois, qo'shiluvchi bitlar sonini 392 ga tengligini ko'rish mumkin: $(56 + 392) mod 512 = 448$. Shu sababli, birinchi bosqich natijasi quyidagicha bo'ladi:

01101101 01100101 01110011 01110011 01100001 01100111 01100101 *10000000 00000000 00000000 00000000 00000000 00000000 00000000 00000000 00000000 00000000 00000000 00000000 00000000 00000000 00000000 00000000*

00000000 00000000

2-bosqich. Ma'lumotning uzunligini qo'shish.

1-bosqichning natijasiga berilgan ma'lumot uzunligining 64 bitlik qiymati qo'shiladi. Agar ma'lumotning uzunligi 2^{64} bitdan katta bo'lsa, bu uzunlik $mod 2^{64}$ bo'yicha qo'shiladi. Shunday qilib, birinchi ikkita bosqich bajarilgandan keyin uzunligi 512 bitga karrali bo'lgan ma'lumot olinadi, ya'ni, kengaytirilgan ma'lumot uzunligi 16 ta 32 bitlik so'zdan iborat blok uzunligiga karrali bo'ladi. Natijada, hosil qilingan ma'lumot so'zlarini $M[0,\ldots,N-1]$ orqali belgilaymiz. U holda N soni 16 ga karrali bo'ladi. Shunday qilib, $N = T \times 16$ bo'ladi.

Yuqoridagi misolda $L = 56$ bo'lgani bois, uning 64 bitlik razryaddagi ko'rinishi quyidagicha bo'ladi:

00000000 00000000 00000000 00000000 00000000 00000000 00000000 00111000

3-bosqich. Xesh qiymat uchun bufer initsializatsiya qilish.

Xesh funksiyaning oraliq va oxirgi natijalarini saqlash uchun 128 bitlik buferdan foydalaniladi. Bu buferni to'rtta 32 bitlik A, B, C, D registrlar ko'rinishida tasvirlash mumkin. Bu registrlarga 16 lik sanoq sistemasidagi quyidagi boshlang'ich qiymatlar beriladi:

$A = 0x01234567;$

$B = 0x89ABCDEF;$

$C = 0xFEDCBA98;$

$D = 0x76543210.$

4-bosqich. 512 bitlik ma'lumotni 32 bitlik bloklarga ajratib qayta ishlash.

MD5 algoritmida argumenti va qiymati 32 bitlik so'z bo'ladigan to'rtta funksiyadan foydalanilgan:

$F(X,Y,Z) = (X \wedge Y) \vee (\neg X \wedge Z)$

$G(X,Y,Z) = (X \wedge Z) \vee (Y \wedge \neg Z)$

$H(X,Y,Z) = X \oplus Y \oplus Z$

$I(X,Y,Z) = Y \oplus (X \vee \neg Z)$

Bu yerda, bitlar bo'yicha mantiqiy *AND*, *OR*, *NOT*, *XOR* amallari mos ravishda $\wedge$, $\vee$, $\neg$, $\oplus$ belgilari bilan ifodalangan.

Shundan so'ng, 64 ta 32 bitli so'zdan iborat $K[0,...,63]$ massiv sinus funksiyasi asosida quyidagicha hosil qilinadi:

$$K[i] = [2^{32} \times abs(\sin(i))].$$

Bu yerda, $0 \leq i \leq 63$ ga teng. Ushbu tenglik natijasi quyida keltirilgan:

K[0.. 3] := {0xd76aa478, 0xe8c7b756, 0x242070db, 0xc1bdceee}

K[4.. 7] := {0xf57c0faf, 0x4787c62a, 0xa8304613, 0xfd469501}

K[8..11] := {0x698098d8, 0x8b44f7af, 0xffff5bb1, 0x895cd7be}

K[12..15] := {0x6b901122, 0xfd987193, 0xa679438e, 0x49b40821}

K[16..19] := {0xf61e2562, 0xc040b340, 0x265e5a51, 0xe9b6c7aa}

K[20..23] := {0xd62f105d, 0x02441453, 0xd8a1e681, 0xe7d3fbc8}

K[24..27] := {0x21e1cde6, 0xc33707d6, 0xf4d50d87, 0x455a14ed}

K[28..31] := {0xa9e3e905, 0xfcefa3f8, 0x676f02d9, 0x8d2a4c8a}

K[32..35] := {0xfffa3942, 0x8771f681, 0x6d9d6122, 0xfde5380c}

K[36..39] := {0xa4beea44, 0x4bdecfa9, 0xf6bb4b60, 0xbebfbc70}

K[40..43] := {0x289b7ec6, 0xeaa127fa, 0xd4ef3085, 0x04881d05}

K[44..47] := {0xd9d4d039, 0xe6db99e5, 0x1fa27cf8, 0xc4ac5665}

K[48..51] := {0xf4292244, 0x432aff97, 0xab9423a7, 0xfc93a039}

K[52..55] := {0x655b59c3, 0x8f0ccc92, 0xffeff47d, 0x85845dd1}

K[56..59] := {0x6fa87e4f, 0xfe2ce6e0, 0xa3014314, 0x4e0811a1}

K[60..63] := {0xf7537e82, 0xbd3af235, 0x2ad7d2bb, 0xeb86d391}

Bundan tashqari, 64 ta elementdan iborat s massivdan foydalanilib, u siljitishlar sonini ifodalaydi:

s[0..15] :={7, 12, 17, 22, 7, 12, 17, 22, 7, 12, 17, 22, 7, 12, 17, 22 }
s[16..31] :={5, 9, 14, 20, 5, 9, 14, 20, 5, 9, 14, 20, 5, 9, 14, 20 }
s[32..47] :={4, 11, 16, 23, 4, 11, 16, 23, 4, 11, 16, 23, 4, 11, 16, 23 }
s[48..63] :={6, 10, 15, 21, 6, 10, 15, 21, 6, 10, 15, 21, 6, 10, 15, 21 }

MD5 xesh funksiyasida 64 raund davomida har bir 512 bitli blok ustida quyidagi amallar bajariladi:

5.1. 512 bitli blok M 16 ta 32 bitli qismlarga ajratiladi: $M[j]$, $0 \le j \le 15$.

5.2. Quyidagilar o'zlashtiriladi:

$a = A$;
$b = B$;
$c = C$;
$d = D$.

5.3. 64 raund quyidagichasi bajariladi:

```
  for i from 0 to 63 do:
if 0≤i≤15 then:
    f=F(b,c,d);
    g=i;
if 16≤i≤31 then:
    f=G(b,c,d);
    g=(5×i+1)mod16;
if 32≤i≤47 then:
    f=H(b,c,d);
    g= (3×i+5) mod 16;
if  48≤i≤63 then:
```

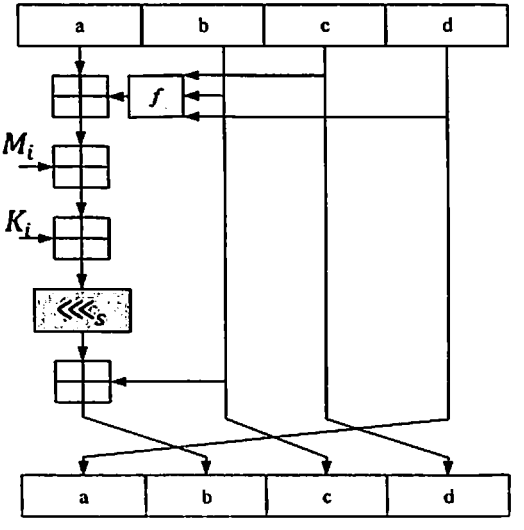
```
            f=I(b,c,d);
        g=(7×i)mod16;
        f=(f+a+K[i]+M[g])mod2^32;
    A=D;
    D=C;
    C=B;
    B=(B+leftrotate(f,s[i]))mod2^32;
      end for
      A=(A+a)mod2^32;
      B=(B+b)mod2^32;
      C=(C+c)mod2^32;
      D=(D+d)mod2^32.
```

5.4. Barcha ma'lumot bloklari uchun 5.1 va 5.2-bosqichlar bajarilib bo'linganidan so'ng, yakuniy xesh qiymat quyidagicha hosil qilinadi:

$$h = A \parallel B \parallel C \parallel D.$$

Bu yerda, $\text{leftrotate}(x, c) = (x \ll c) \vee (x \gg (32 - c))$ ga teng.

Umumiy holda MD5 xesh funksiyasi bir raundining akslantirilishi 6.4-rasmda keltirilgan.



5.4-rasm. **MD5 algoritmining *i*-raundi**

MD5 funksiyasida kolliziya hodisasi aniqlangan bo'lib, quyida ushbu ikki bir-biridan farq qiluvchi ma'lumotlar keltirilgan.

M_1:

d131dd02c5e6eec4 693d9a0698aff95c 2fcab58712467eab
4004583eb8fb7f89
55ad340609f4b302 83e4888325f1415a 085125e8f7cdc99f
d91dbdf280373c5b
d8823e3156348f5b ae6dacd436c919c6 dd53e2b487da03fd
02396306d248cda0
e99f33420f577ee8 ce54b67080980d1e c69821bcb6a88393
96f965fb6ff72a70

M_2:

d131dd02c5e6eec4 693d9a0698aff95c 2fcab5b712467eab
4004583eb8fb7f89
55ad340609f4b302 83e4888325f1415a 085125e8f7cdc99f
d91dbdf280373c5b
d8823e3156348f5b ae6dacd436c919c6 dd53e2b487da03fd
02396306d248cda0
e99f33420f577ee8 ce54b67080980d1e c69821bcb6a88393
96f965fb6ff72a70

Ushbu ikki ma'lumotning xesh qiymati "79054025255fb1a26e4bc422aef54eb4" ga teng. Shu sababli, yuqori darajadagi xavfsizlik talab etilgan tizimlarda ushbu algoritmdan foydalanish tavsiya etilmaydi.

5.3. SHA1 xesh funksiyasi

SHA (Secure Hash Algorithm) xeshlash algoritmi AQShning standartlar va texnologiyalar Milliy instituti (NIST) tomonidan ishlab chiqilgan bo'lib, 1992 yilda axborotni qayta ishlash federal standarti (RUB FIPS 180) sifatida nashr qilingan. Ushbu standart 1995 yilda qaytadan ko'rib chiqilib, SHA-1 deb nomlandi (RUB FIPS 180-1). SHA1 algoritmi MD4 algoritmiga asoslangan. Ushbu algoritm DSS (Digital Signature Standard) standartida elektron raqamli imzo algoritmlarini shakllantirishda foydalanish uchun mo'ljallangan.

SHA1 algoritmida kiruvchi ma'lumotning uzunligi 2^{64} bitdan kichik bo'lib, xesh qiymat uzunligi 160 bitga teng. Kiritilayotgan ma'lumot 512 bitlik bloklarga ajratilib qayta ishlanadi.

Xesh qiymatni hisoblash jarayoni quyidagi bosqichlardan iborat:

1-bosqich. To'ldirish bitlarini qo'shish. Mazkur bosqich MD5 algoritmidagi kabi amalga oshiriladi.

2- bosqich. Ma'lumotning uzunligini qo'shish. Ushbu bosqich ham MD5 algoritmida keltirilgani kabi amalga oshiriladi.

3- bosqich. Xesh qiymat uchun bufer initsializatsiya qilish.

SHA1 algoritmida oraliq va oxirgi natijalarini saqlash uchun 160 bitlik buferdan foydalanilgan. Ushbu bufer beshta 32 bitlik A, B, C, D, E registrlardan tashkil topgan. Ushbu registorlarning 16 lik sanoq tizimidagi boshlang'ich qiymatlari quyida berilgan:

$A = 0x67452301;$

$B = 0xEFCDAB89;$

$C = 0x98BADCFE;$

$D = 0x10325476;$

$E = 0xC3D2E1F0.$

Keyinchalik ushbu o'zgaruvchilar mos ravishda yangi a, b, c, d va e o'zgaruvchilarga o'zlashtiriladi.

4- bosqich. Ma'lumotni 512 bitlik bloklarga ajratib qayta ishlash.

SHA1 algoritmida har bir 512 bitlik blok ustida 80 raund davomida qayta ishlash amalga oshiriladi. Ushbu algoritmda quyidagi o'zgarmaslar va funksiyalardan foydalanilgan:

Barcha raundlar uchun 32 bitli K_t o'zgarmas qiymatlari:

$$K_t = \begin{cases} 0x5A827999, & 0 \le t \le 19 \\ 0x6ED9EBA1, & 20 \le t \le 39 \\ 0x8F1BBCDC, & 40 \le t \le 59 \\ 0xCA62C1D6, & 60 \le t \le 79 \end{cases}$$

$f_t(x, y, z)$ esa raundlar bo'yicha quyidagicha ifodalanadi:

$$f_t(x, y, z) = \begin{cases} (x \wedge y) \vee (\neg x \wedge z), & 0 \le t \le 19 \\ x \oplus y \oplus z, & 20 \le t \le 39, \quad 60 \le t \le 79 \\ (x \wedge y) \vee (x \wedge z) \vee (y \wedge z) & 40 \le t \le 59 \end{cases}$$

512 bitli blok (M) 16 ta 32 bitli qismlarga ajratiladi va undan 80 ta raund uchun W_t quyidagicha hosil qilinadi:

$$W_t = \begin{cases} M_t, & 0 \le t \le 15 \\ (W_{t-3} \oplus W_{t-8} \oplus W_{t-14} \oplus W_{t-16}) \lll 1, & 16 \le t \le 79 \end{cases}$$

SHA1 xesh funksiyasining asosiy sikli esa quyidagicha:

```
for t from 0 to 79 do:
```

$temp = ((a \lll 5) + f_t(b,c,d) + e + W_t + K_t) mod 2^{32};$

$e = d;\ \ d = c;\ \ c = b \lll 30;\ \ b = a;\ \ a = temp;$

```
end for
```

Asosiy sikl tugagandan keyin a, b, c, d va e larning qiymatlari mos ravishda A, B, C, D va E registrlardagi qiymatlariga qo'shiladi va ma'lumotning keyingi 512 bitlik blokini qayta ishlashga o'tiladi.

$A = (A+a) mod 2^{32};$

$B = (B+b) mod 2^{32};$

$C = (C+c) mod 2^{32};$

$D = (D+d) mod 2^{32};$

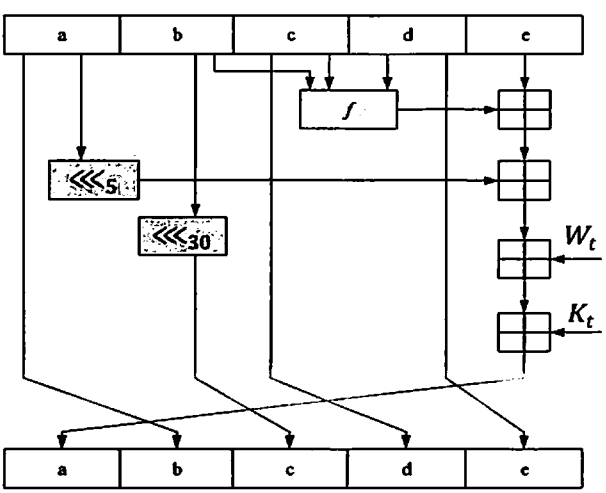
$E = (E+e) mod 2^{32}.$

5- bosqich. Yakuniy xesh qiymatni hosil qilish.

Ma'lumotning xesh qiymati A, B, C, D va E registrlardagi qiymatlarni birlashtirish natijasida hosil qilinadi:

$$h = A \parallel B \parallel C \parallel D \parallel E.$$

5.5-rasmda SHA1 xesh funksiyaci algoritmining i-raund ko'rinishi keltirilgan.



5.5-rasm. **SHA1 algoritmining *t*-raundi**

MD5 algoritmi kabi, SHA1 algoritmi uchun ham kolliziya holati aniqlangan. 2017 yilda Google tashkiloti va CWI (Centrum Wiskunde & Informatica) markazi mutaxassislari tomonidan bir xil xesh qiymatni beruvchi ikkita turli PDF formatidagi fayllar generatsiya qilingan.

5.4. O'z DSt 1106 : 2006 xesh funksiyasi

Ushbu standart ikkita algoritmdan iborat ular 1-algoritm va 2-algoritm deb nomlangan. 1-algoritmda kirish ketma-ketligining uzunligi 128 yoki 256 bitga karrali bo'lib, chiqish ketma-ketligi va xeshlash kaliti qayd etilgan 128 yoki 256 bit uzunlikka ega.

Birinchi algoritm parametrli algebga muammosiga asoslangan bo'lsa, ikkinchi algoritm ГОСТ 28147-89 blokli shifrlash algoritmiga asoslangan. Ushbu standartda quyidagi belgilanishlar va sozlanmalar mavjud:

O'z DSt 1106:2009 – birinchi algoritm. Ushbu algoritmning tavsifi quyida keltirilgan. Birinchi algoritm uchun quyidagi belgilanishlar qabul qilingan:

M - dastlabki ma'lumotlar (xabar);

h - xesh-funksiya;

m - xesh-funksiya qiymati, bunda $m = h(M)$;

k - xeshlash kaliti;

k_e - *4x8* tartibli ikki o'lchamli massiv ko'rinishidagi bosqich kaliti;

holat - *4x8* tartibli ikki o'lchamli massiv ko'rinishidagi xeshlashning oraliq natijasi;

holatn - *4x8* tartibli ikki o'lchamli massiv ko'rinishidagi kirish bloki;

r - modul, bunda $p \in \{16, 256\}$;

e - xeshlash protsedurasining bosqichlar soni;

b - dastlabki ma'lumotlardagi bloklar soni;

$\oplus$ - *XOR* amalining simvoli (2-modul bo'yicha qo'shish amallari);

$\otimes$ - diamatritsalarni r moduli bo'yicha ko'paytirish amalining simvoli;

® - parametr bilan r moduli bo'yicha ko'paytirish amalining simvoli;

$^{-1}$ - r moduli bo'yicha teskarilash amalining simvoli;

$^{-1}$ – parametr bilan r moduli bo'yicha teskarilash amalining simvoli;

^{x} - parametr bilan r moduli bo'yicha x-darajaga ko'tarish amalining simvoli;

XF - xeshlash funksiyasi;

NY - nazorat summasi;

|| - konkatenatsiya simvoli.

XFda quyidagi parametr va funksiyalar foydalaniladi:

a) k – yarim bayt (bayt) darajasidagi chiziqli massivi ko'rinishidagi *128* yoki *256* bit uzunlikdagi xeshlash kaliti;

b) k_e - *4x8* tartibdagi ikki o'lchamli massiv ko'rinishidagi bosqich (raund) kaliti;

c) b – dastlabki ma'lumotlardagi bloklar soni;

d) *uzunlik* – dastlabki ma'lumotlarning bitlardagi uzunligini o'z ichiga oluvchi xeshlash funksiyasiga kiruvchi ma'lumotlarning oxirgidan oldingi bloki;

e) *NY* - o'nlik sanoq tizimida dastlabki ma'lumotlar qiymatlari summasini o'z ichiga oluvchi xeshlash funksiyasiga kiruvchi ma'lumotlarning oxirgi bloki;

f) r - modul, $r \in \{16,256\}$;

g) e_0 - *128* va *(256)* bitli kirish bloklari uchun $(b+2)10$ ga teng bo'lgan xeshlash protsedurasi bosqichlarining umumiy soni;

h) *Qo'sh (holat, holatn)* - *holat* massivi va *holatn* massivi joriy qiymatlarining yarim bayt (bayt) darajasidagi elementlari ustida p moduli bo'yicha *(A, B, R)* parametri bilan darajaga ko'tarish amali asosida xeshlash protsedurasida foydalaniladigan o'zgartirish;

i) *BaytZichlash (holat, holatn)* - *holat* massivi va *holatn* massivi joriy qiymatlarining yarim bayt (bayt) darajasidagi elementlari ustida, agar modul $p=16$ bo'lsa, *XOR* amalidan foydalanilgan holda yoki agar modul $p=256$ bo'lsa, bitta massivga zichlash chiziqli massivi asosida xeshlash protsedurasida foydalaniladigan o'zgartirish:

j) *Aralash(holat, k_e)* – diamatritsalarni ko'paytirish amali asosida xeshlash protsedurasida foydalaniladigan o'zgartirish. Bu yerda ko'paytiriladigan diamatritsalar, mos ravishda, *holat* va k_e bosqich kaliti

ikki o'lchamli massivlarining kvadrat shaklidagi chap va o'ng yarimlariga o'zaro mos keladi;

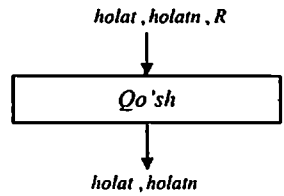
k) *SurHolat(holat)* - *holat* massivi ustida amalga oshiriladigan, xeshlash protsedurasida foydalaniladigan o'zgartirish, bu *holat* massivining barcha to'rtta satrini gorizontal va vertikal bo'yicha surilishlarning turli qiymatlariga davriy surishlardan iborat;

l) *SurKalit(k_e)* - k_e massivi ustida amalga oshiriladigan xeshlash protsedurasida foydalaniladigan ò'zgartirish, bu k_e massivining barcha to'rtta satrini gorizontal va vertikal bo'yicha surilishlarning turli qiymatlariga davriy surishlardan iborat;

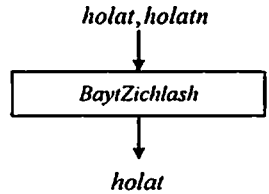
m) *TuzilmaKalit(k_e, k)* - xeshlash protsedurasining har bir bosqichi so'ngida foydalaniladigan o'zgartirish, bu uning strukturasini dastlabki xeshlash kaliti *k* strukturasiga keltirish maqsadida k_e massivining har bir yarim bayti (bayti) ustida amalga oshiriladi; ushbu o'zgartirish natijasi k_e massivining kvadrat qismlaridan har birini teskarilash shartlarini qanoatlantiradi.

Keltirilgan almashtirishlarning umumiy ko'rinishi quyidagicha:

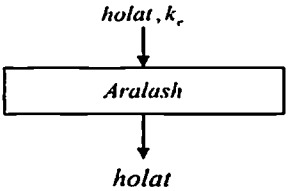
1. *Qo'sh(holat, holatn, R) o'zgartirish*



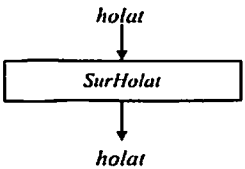
2. *BaytZichlash(holat, holatn)* o'zgartirishi



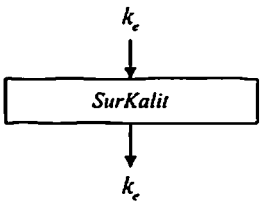
3. *Aralash(holat, k_e) o'zgartirishi*



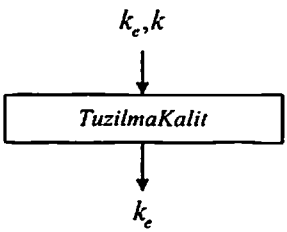
4. *SurHolat(holat) o'zgartirishi*



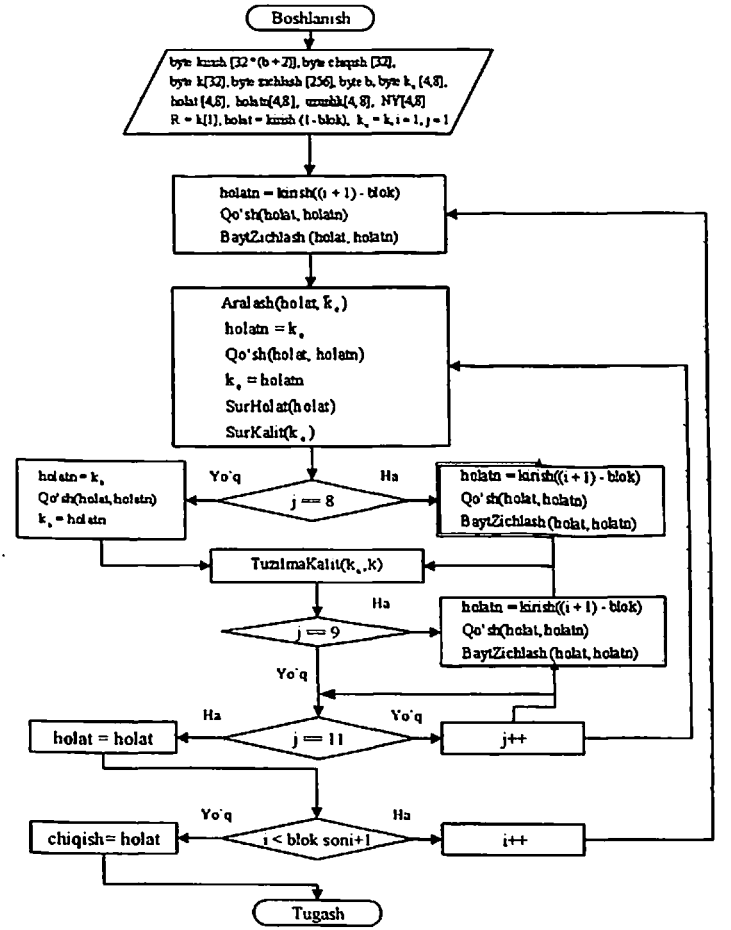
5. *SurKalit(k_e) o'zgartirishi*



6. *TuzilmaKalit(k_e,k) o'zgartirishi*



Keltirilgan akslantirishlar asosida O'z DSt 1106:2009 standartining birinchi algoritmining blok sxemasi 5.6-rasmda keltirilgan.

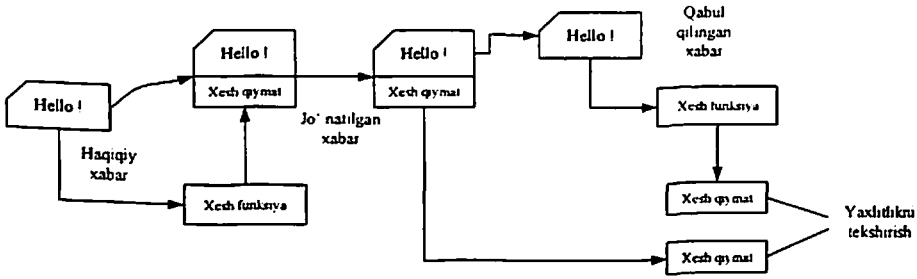


5.6-rasm. **O'z DSt 1106:2009 standarti 1-algoritmining blok-sxemasi**

5.5. Ma'lumotlarni autentifikatsiyalash kodlari. HMAC algoritmi

Xesh funksiya yordamida uzatilayotgan ma'lumotlar yaxlitligini tekshirishning sodda ko'rinishi 5.7-rasmda keltirilgan. Jo'natuvchi xabarning xesh qiymatini hisoblaydi va uni qabul qiluvchiga xabar bilan birgalikda yuboradi. Qabul qiluvchi dastlab xabarning xesh qiymatini hisoblaydi va qabul qilingan xesh qiymat bilan taqqoslaydi. Agar har ikkala xesh qiymat teng bo'lsa, ma'lumotning yaxlitligi o'zgarmagan, aks holda o'zgargan deb topiladi. Odatda xesh funksiya kirishda ma'lumotdan tashqari hech qanday qiymatni talab etmagani bois, *kalitsiz kriptografik*

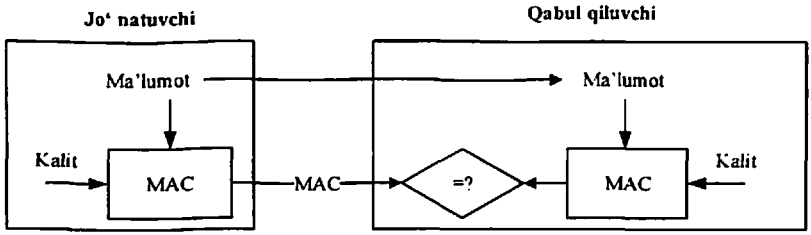
funksiyalar deb ham ataladi (kalit talab qiluvchi ma'lumotlarning yaxlitligini ta'minlash usullari ham mavjud).



5.7-rasm. **Xesh funksiya asosida ma'lumotlar yaxlitligini tekshirish**

Yuqorida keltirilgan usulda xavfsizlik muammosi jiddiy bo'lgani bois, undan amalda foydalanilmaydi. Ya'ni, hujumchi tomonidan faqat ma'lumot o'zgartirilgan holda yaxlitlikni tekshirish imkoniyati mavjud. Biroq, hujumchi ma'lumotning xesh qiymatini almashtirish orqali foydalanuvchini osonlik bilan ma'lumot yaxlitligiga ishontirishi mumkin. Buning asosiy sababi, ma'lumotning xesh qiymatini hosil qilishda hujumchiga noma'lum biror axborotdan foydalanilmaganligi.

Ushbu muammoni bartaraf etuvchi – *xabarlarni autentifikatsiyalash kodi (message authentication code, MAC)* tizimlari mavjud bo'lib, unga ko'ra biror maxfiy kalit asosida ma'lumotning xesh qiymati hisoblanadi (5.8-rasm).



5.8-rasm. **MAC tizimi**

MAC tizimlarini ishlab chiqishda blokli shifrlardan ham foydalanish mumkin. Buning uchun blokli shifrni CBC (Cipher Block Chaining – shifr bloklar zanjiri) rejimida foydalanish va eng oxirgi shifrmatn blokini olishning o'zi yetarli (qolganlari tashlab yuboriladi). Ushbu oxirgi shifrmatn bloki *MAC* sifatida xizmat qiladi. Mazkur holda

N blokdan iborat bo'lgan ma'lumot bloklari, $P_0, P_1, P_2, \ldots, P_{N-1}$ uchun MAC quyidagi formula orqali hisoblanadi:

$$C_0 = E(P_0 \oplus IV, K), C_1 = E(P_1 \oplus C_0, K), \ldots, C_{N-1} = E(P_{N-1} \oplus C_{N-2}, K) = MAC.$$

Buning uchun har ikkala tomonda IV va K ni bo'lishining o'zi yetarli.

Faraz qilaylik, A va B tomonlardan uzatilayotgan ma'lumotlar yaxlitligini tekshirish talab etilgan bo'lsin (bu yerda ma'lumot konfidensialligini ta'minlash masalasi qaralmagan). Bu holda A va B tomonlar orasida xavfsiz taqsimlangan K kalit yordamida A tomon MAC ni hisoblaydi va ma'lumotni IV ga qo'shib B ga uzatadi. B tomon ma'lumot, K va IV yordamida MAC ni hisoblaydi. Agar hisoblangan MAC qabul qilingan MAC' ga teng bo'lsa, ma'lumot o'zgartirilmagan aks holda o'zgartirilgan deb topiladi.

Qanday qilib, ikkita hisoblangan MAC qiymatlar turlicha bo'lishi mumkin? Faraz qilaylik, A tomon quyidagilarni B ga yuborgan bo'lsin:

$$IV, P_0, P_1, P_2, P_3, MAC.$$

Faraz qilaylik, hujumchi birinchi blok P_1 ni o'zgartirdi (u Q deb belgilansin), bu holda B tomon MAC ni quyidagicha hisoblaydi:

$$C_0 = E(P_0 \oplus IV, K), \acute{C}_1 = E(Q \oplus C_0, K), \acute{C}_2 = E(P_2 \oplus \acute{C}_1, K), \acute{C}_3 = E(P_3 \oplus \acute{C}_2, K) = "MAC" \neq MAC.$$

Ya'ni, ochiq matndagi bir blokning o'zgarishi keyingi barcha bloklarga ta'sir qiladi va buning natijasida shifrmatn bloklari turlicha bo'ladi. Ma'lumki, CBC rejimida shifrmatndagi bir blok o'zgarishi rasshifrovkalanganda faqat 2 ta ochiq matn blokiga ta'sir qiladi. Biroq, ochiq matnning bir blokini o'zgarishi undan keyingi barcha shifrmatn bloklariga ta'sir qiladi va bu MAC tizimlari uchun juda muhim.

Albatta, mazkur usul MAC tizimlarini yaratishning yagona usuli emas. Quyida xesh funsiyalar asosida MAC tizimlarini yaratish bilan tanishib chiqiladi.

Xesh – funksiyalar asosida ma'lumot yaxlitligini tekshirish. Yuqorida M ma'lumot yaxlitligini tekshirishda $h(M)$ ni hisoblash va qabul qiluvchiga $M, h(M)$ ni yuborish orqali amalga oshirishning

kamchiligi haqida aytib o'tilgan edi. Shuning uchun, amalda xesh funksiyalardan ma'lumot yaxlitligini ta'minlashda bevosita foydalanilmaydi. Boshqacha aytganda, xesh funksiyalar asosida ma'lumot yaxlitligini ta'minlashda hisoblangan xesh qiymatni o'zgartira olmaslikni kafolatlash maqsad qilinadi. Buni amalga oshirish uchun balki xesh qiymatni simmetrik kalitli shifrlar asosida shifrlash zarurdir (ya'ni, $E(h(M), K)$). Biroq, buni amalga oshirishning soddaroq usuli – *xeshlangan MAC* (hashed MAC yoki HMAC) usuli mavjud. Bu usulga ko'ra, xesh qiymatni shifrlashning o'rniga, xesh qiymatni hisoblash jarayonida kalitni bevosita ma'lumotga biriktirish amalga oshiriladi. HMAC tizimida kalitlar qanday biriktiriladi? Umumiy holda ikki usul: kalitni matnni oldidan qo'yish ($h(K, M)$) yoki kalitni matndan keyin qo'yish ($h(M, K)$) mavjud bo'lsada, ularning har ikkalasida jiddiy xavfsizlik muammosi mavjud.

Xesh funksiyalar ham simmetrik kriptotizim hisoblanadi va simmetrik blokli shifrlash kabi ma'lumotlarni xeshlashda bloklarga ajratiladi. Odatda aksariyat xesh funksiyalar uchun (masalan, MD5, SHA1, Tiger) blok uzunligi 64 baytga yoki 512 bitga teng.

HMAC tizimida kalit ma'lumotga quyidagicha biriktiriladi. Dastlab xesh funksiyadagi blokning uzunligi baytlarda aniqlanadi. Masalan. MD5 xesh funksiyasida blok uzunligi $B = 64$ baytga teng bo'lsin. Olingan kalit (K) uzunligi ham blok uzunligiga keltiriladi. Bunda 3 ta holat bo'lishi mumkin: (1) agar kalitning uzunligi 64 baytga teng bo'lsa, hech qanday o'zgarish amalga oshirilmaydi, (2) agar kalitning uzunligi 64 dan kichik bo'lsa, u holda yetmagan baytlar o'rni nollar bilan to'ldiriladi, (3) agar kalit uzunligi blok uzunligidan katta bo'lsa, kalit dastlab xeshlanadi va hosil bo'lgan xesh qiymatning o'ng tomoni blok uzunligiga yetguncha nollar bilan to'ldiriladi. Shu tariqa, kalit uzunligi blok uzunligiga moslashtiriladi.

Shunday qilib, ma'lumot va moslashtirilgan kalit asosida HMAC qiymati quyidagicha hisoblanadi:

$$HMAC(M, K) = H\big(K \oplus opad, H(K \oplus ipad, M)\big).$$

Bu yerda, *ipad* va *opad* o'zgaruvchilar quyidagicha hosil qilinadi:

$$ipad = 0x36 \text{ ni } B \text{ marta takrorlash natijasida}$$

$opad = 0x5c$ *ni B marta takrorlash natijasida*

Tenglikdan ko'rinib turibdiki, HMAC da ikki marta xeshlash amalga oshirilmoqda. Kalit K faqat ikki tomonga (jo'natuvchi va qabul qiluvchiga) ma'lum bo'lgani uchun, hujumchi mos xesh qiymatni qayta hisoblay olmaydi. A tomondan yuborilgan $(M, HMAC(M,K))$ ma'lumot juftlaridan hujumchi faqat ma'lumotni o'zgartirishi mumkin bo'ladi va bu holat qabul qiluvchi tomonidan osonlik bilan aniqlanadi.

GCM (Galois/Counter Mode) rejimi. GCM – simmetrik blokli shifrlash algoritmlari uchun amalga oshirishi rejimi bo'lib, yuqori samaradorligi bois keng qo'llaniladi. Ushbu rejim ham konfidensiallik, ham yaxlitlikni ta'minlash maqsadida ishlab chiqilgan bo'lib, 128 bitli blok uzunligidagi blokli shifrlar uchun mo'ljallangan.

GCM rejimida ikkita amal: autentifikatsiyalangan shifrlash va autentifikatsiyalangan rasshifrovkalash, mavjud. Autentifikatsiyalangan shifrlash amali uchun 4 ta kirish parametrli bo'lib, ular quyidagilar:

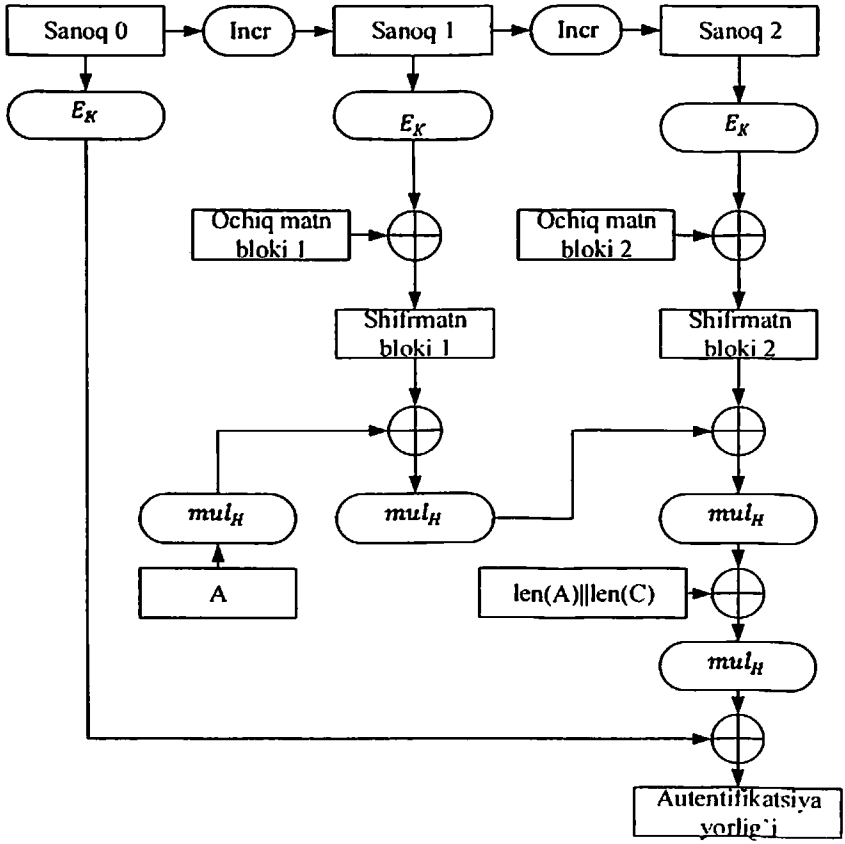
- maxfiy kalit K – tanlangan blokli shifrlash algoritmining kaliti;
- boshlang'ich vektor IV – 1 va 2^{64} oraliqdagi ixtiyoriy bitlar qatori. Har bir kalit uchun IV ham turlicha bo'lishi shart va bunda ularning uzunligini bir xil bo'lishi talab qilinmaydi. 96 bitli IV amalga oshirishdagi eng samarali uzunlik hisoblanadi;
- ochiq matn P – 0 va 2^{39}-256 oraliqdagi bitlar qatori;
- qo'shimcha autentifikatsiyalanuvchi ma'lumot (Additional authenticated data) A – bo'lib, u autentifikatsiyalansada, shifrlanmaydi va ushbu kattalik 0 va 2^{64} oraliqdagi ixtiyoriy bitlar qatori bo'lishi mumkin;

GCM amalida quyidagi 2 ta kattaliklar hosil qilinadi:

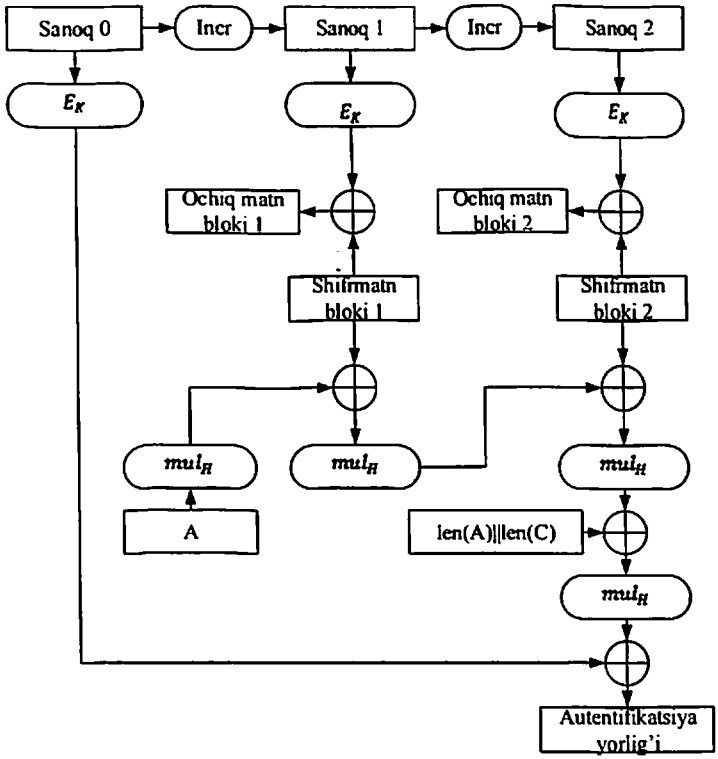
- shifrmatn C bo'lib, uning uzunligi ochiq matn uzunligiga teng bo'ladi;
- autentifikatsiya yorlig'i T bo'lib, u 0 va 128 oralig'idagi bitlar qatoridir.

GCM rejimining autentifikatsiyalangan rasshifrovkalash amalida esa K, IV, C, A va T parametrlari kiritiladi hamda chiqishda ochiq matn P yoki autentikatsiyadan o'ta olmaganlik holatini ko'rsatuvchi $FAIL$ belgisi hosil bo'ladi.

Umumiy holda autentifikatsiyalangan shifrlash va rasshifrovkalash amallarining 2 ta blok uchun ko'rinishi 6.9-rasmda keltirilgan. Bu yerda, $counter$ – sanoq, dastlabki qiymati IV va u har bir blok uchun $incr$ funksiyasi yordamida bittadan ortib boradi. E_K – kalit yordamida simmetrik blokli shifrlash funksiyasi, mul_H – xesh kalit H yordamida $GF(2^{128})$ maydonda ko'paytirishni anglatadi. Bu yerda, $H = E(K, 0^{128})$ ga teng. $len(A)$ va $len(C)$ – funksiyalar esa mos holda A va C kattaliklarni bitdagi uzunligini ko'rsatadi va u oxirgi shiflanuvchi/ rasshifrovkalanuvchi blokdan so'ng amalga oshiriladi.



a) Autentifikatsiyalangan shifrlash amali



b) Autentifikatsiyalangan rasshifrovkalash amali

5.9-rasm. **GCM rejimi**

GCM rejimida ko'plab standartlarda, IEEE 802.1AE, IEEE 802.11ad, ANSI (INCITS) Fibre Channel Security Protocols (FC-SP), IEEE P1619.1, IETF Ipsec, SSH, TLS 1.2 va 1.3, qo'llanilgan.

Nazorat savollari

1. Xesh funksiyaga ta'rif bering.
2. Xesh fnksiyalarga qo'yilgan talablarni ayting.
3. Xesh funksiyalarni qurish usullari haqida ayting.
4. Xesh funksiyada kolliziya hodisasi nima?
5. MD5 xesh funksiyasi va uning matematik asosi haqida ayting.

6. MD5 xesh funksiyasiga ma'lumotga to'ldirish bitlari qanday qo'shiladi.

7. SHA1 xesh funksiyasi va uning matematik asosi haqida gapiring.

8. O'z DSt 1106 : 2006 xesh funksiyasi va uning matematik asosi haqida ayting.

9. Xabarlarni autentifikatsiyalash kodi nima va uning asosiy vazifasini tushuntiring.

10. MAC tizimlarida kalitdan foydalanishdan asosiy maqsadni tushuntiring.

11. HMAC algoritmining ishlash tartibini tushuntiring.

12. GCM rejimi va uning asosiy vazifasini ayting.

VI BOB. Elektron raqamli imzo

6.1. Elektron raqamli imzo va uning ishlash prinsipi

Kriptografik sxemalar odatda ikki masalani yechishga yo'naltirilgan: Shifrlash (AES, 3DES yoki RSA), kalitlarni taqsimlash (Diffi-Helman yoki EECh).

Alisa va Bob simmetrik blokli shifrlash algoritmlari yordamida maxfiy ma'lumotlarni almashishlari mumkin. Buning uchun ikki tomon uchun ham umumiy bo'lgan simmetrik shifrlash kaliti bo'lishi lozim. Ushbu kalit yordamida ma'lumot ham shifrlanadi, ham rasshifrovka qilinadi. Shuning uchun ushbu kalitni hujumchining qo'liga tushishidan himoyalash lozim. Ammo simmetrik kriptotizimlar ishtirokchilarning o'zini xavfsizligini yetarli darajada himoya qila olmaydi.

Aloqa boshlanishidan oldin simmetrik shifrlash kaliti Diffi-Xellman kabi kalitlarni almashish ochiq kalitli kriptotizimi yordamida almashiladi. Shuningdek, ushbu sxemada uchinchi tomon Bobdan kelgan ma'lumotni o'zgartirib Alisaga va aksincha amallarni bajarsa, maxfiy ma'lumot buzg'unchining qo'liga tushishi yoki uni o'zgartirishi mumkin. Ushbu holatda ishonchli uchinchi tomon yordamida ularning haqiqiyligini tekshirish va jo'natilgan xabarning egasini aniqlash lozim. Buning ochiq kalitli kriptotizimlarga mansub Elektron raqamli imzo (ERI) algoritmlaridan foydalanish mumkin.

ERI ishlash prinsipi. Elektron raqamli imzo - elektron matnga ilova qilinadigan kriptografik almashtirishdan iborat bo'lib, uzatilgan xabarning butunligini va imzolovchining haqiqiy yoki haqiqiy emasligini aniqlash imkonini beradi.

Qabul qilib olingan ma'lumotlarning haqiqiy yoki haqiqiy emasligini aniqlash masalasi, ya'ni ma'lumotlar autentifikatsiyasi masalasi quyidagicha aniqlanadi.

Har qanday yozma xat yoki hujjatning oxirida shu hujjatni tuzuvchisi yoki tuzish uchun javobgar bo'lgan shaxsning imzosi bo'lishi tabiiy holdir. Bunday holat odatda quyidagi ikkita maqsaddan kelib chiqadi. Birinchidan, ma'lumotni olgan tomon o'zida mavjud imzo na'munasiga olingan ma'lumotdagi imzoni solishtirgan holda shu ma'lumotning haqiqiyligiga ishonch hosil qiladi. Ikkinchidan, shaxsiy

imzo ma'lumot xujjatiga yuridik jihatdan mualliflikni kafolatlaydi. Bunday kafolat esa savdo–sotiq, ishonchnoma, majburiyat va shu kabi bitimlarda alohida muhimdir.

Hujjatlardagi qo'yilgan shaxsiy imzolarni soxtalashtirish nisbatan murakkab bo'lib, shaxsiy imzolarning mualliflarini hozirgi zamonaviy ilg'or kriminalistika uslublaridan foydalanish orqali aniqlash mumkin. Ammo elektron raqamli imzo xususiyatlari bundan farqli bo'lib, ikkilik sanoq sistemasi xususiyatlari bilan belgilanadigan xotira registrlari bitlariga bog'liq. Xotira bitlarining ma'lum bir ketma-ketligidan iborat bo'lgan elektron imzoni ko'chirib biror joyga qo'yish yoki o'zgartirish kompyuterlar asosidagi aloqa tizimlarida murakkablik tug'dirmaydi.

Bugungi yuqori darajada rivojlangan butun dunyo sivilizasiyasida hujjatlar, jumladan maxfiy hujjatlarning ham, elektron ko'rinishda ishlatilishi va aloqa tizimlarida uzatilishi keng qo'llanilib borilayotganligi elektron hujjatlar va elektron imzolarning haqiqiyligini aniqlash masalalarining muhimligini keltirib chiqarmoqda.

Ochiq kalitli kriptografik tizimlar qanchalik qulay va kriptobardoshli bo'lmasin, autentifikatsiya masalasining to'la yechilishiga javob bera olmaydi. Shuning uchun autentifikatsiya uslubi va vositalari kriptografik algoritmlar bilan birgalikda kompleks holda qo'llanilishi talab etiladi.

Quyida ikkita (A) va (B) foydalanuvchilarning aloqa munosabatlarida autentifikatsiya tizimi raqib tomonning o'z maqsadi yo'lidagi qanday xatti-harakatlaridan va kriptotizim foydalanuvchilarining foydalanish protokolini o'zaro buzilishlardan saqlashi kerakligini ko'rsatuvchi holatlar ko'rib chiqiladi.

Rad etish. Foydalanuvchi (A) foydalanuvchi (B) ga haqiqatan ham ma'lumot jo'natgan bo'lib, uzatilgan ma'lumotni rad etishi mumkin.

Bunday qoida buzilishining (tartibsizlikning) oldini olish maqsdida elektron (raqamli) imzodan foydalaniladi.

Modifikatsiyalash (o'zgartirish). Foydalanuvchi (B) qabul qilib olingan ma'lumotni o'zgartirib, shu o'zgartirilgan ma'lumotni foydalanuvchi (A) yubordi, deb ta'kidlaydi (da'vo qiladi).

Soxtalashtirish. Foydalanuvchi (B)ning o'zi ma'lumot tayyorlab, bu sohta ma'lumotni foydalanuvchi (A) yubordi deb da'vo qiladi.

Faol modifikasiyalash (o'zgartirish). (A) va (B) foydalanuvchilarning o'zaro aloqa tarmog'iga uchinchi bir (V) foydalanuvchi noqonuniy tarzda bog'lanib, ularning o'zaro uzatayotgan ma'lumotlarini o'zgartirgan holda deyarli uzluksiz uzatib turadi.

Niqoblash (imitatsiyalash). Uchinchi foydalanuvchi (B) foydalanuvchi (B)ga foydalanuvchi (A) nomidan ma'lumot jo'natadi. Yuqorida sanab o'tilgan: modifikatsiyalash, soxtalashtirish, faol modifikasiyalash, niqoblash kabi aloqa tizimi qoidalarining buzilishini oldini olish maqsadida raqamli signaturadan – raqamli imzo va uzatiladigan ma'lumotning biror qismini to'la o'z ichiga oluvchi raqamli shifrmatndan iborat bo'lgan ma'lumotdan foydalaniladi.

Takrorlash. Foydalanuvchi (B) foydalanuvchi (A) tomonidan foydalanuvchi (B)ga jo'natilgan ma'lumotni takroran (B)ga jo'natadi. Bunday noqonuniy xatti–harakat aloqa usulidan banklar tarmoqlarida elektiron hisob–kitob tizimidan foydalanishda noqonuniylik bilan o'zgalar pullarini talon-taroj qilishda foydalaniladi. Ana shunday noqonuniy usullardan muhofazalanish uchun quyidagi chora - tadbirlari ko'riladi.

- imitatsiyalashga bardoshlilik – imitabardoshlilik;
- kriptotizimga kirayotgan ma'lumotlarni muhofaza maqsadlaridan kelib chiqib tartiblash.

Elektron raqamli imzo aloqa tizimlarida bir necha tur qoida buzilishlaridan muhofaza qilishni ta'minlaydi, ya'ni:

- maxfiy kalit faqat foydalanuvchi (A)ning o'zigagina ma'lum bo'lsa, u holda foydalanuvchi (B) tomonidan qabul qilib olingan ma'lumotni faqat (A) tomonidan jo'natilganligini rad etib bo'lmaydi;
- qonun buzar (raqib tomon) maxfiy kalitni bilmagan holda modifikatsiyalash, soxtalashtirish, faol modifikatsiyalash, niqoblash va boshqa shu kabi aloqa tizimi qoidalarining buzilishiga imkoniyat tug'dirmaydi;
- aloqa tizimidan foydalanuvchilarning o'zaro bog'liq holda ish yuritishi munosabatidagi ko'plab kelishmovchiliklarni bartaraf etadi va

bunday kelishmovchiliklar kelib chiqqanda vositachisiz aniqlik kiritish imkoniyati tug'iladi.

Ko'p hollarda uztilayotgan ma'lumotlarni shifrlashga zarurat bo'lmaydi, uni elektron raqamli imzo bilan tasdiqlash kerak bo'ladi. Bunday holatlarda ochiq matn jo'natuvchining yopiq kaliti bilan shifrlanib, olingan shifrmatn ochiq matn bilan birga jo'natiladi. Ma'lumotni qabul qilib olgan tomon jo'natuvchining ochiq kaliti yordamida shifrmatnni rasshifrovkalab, ochiq matn bilan solishtirishi mumkin.

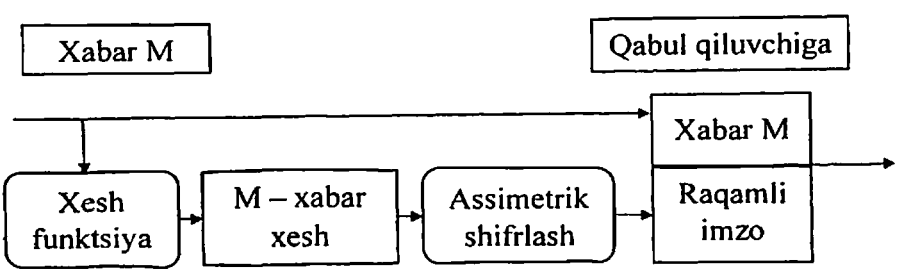
Asimmetrik shirflash algoritmlari yuqorida isbotlanganidek, katta hajmdagi ma'lumotlarni shifrlashda keng qo'llanilmaydi. Asimmetrik shifrlash algoritmlari kriptografiya sohasida asosan elektron raqamli imzo tizimlarida keng foydalaniladi.

ERI algoritmlari quyidagi vazifalarni bajaradi:

- imzo chekilgan ma'lumot butunligini;
- elektron hujjatga raqamli imzo qo'ygan subyektning mualliflikdan bosh tortmasligini ta'minlaydi;
- elektron hujjat manbaining haqiqiyligini aniqlash.

ERI tizimi quyidagi ikki jarayondan iborat (5.1, 5.2 - rasmlar):

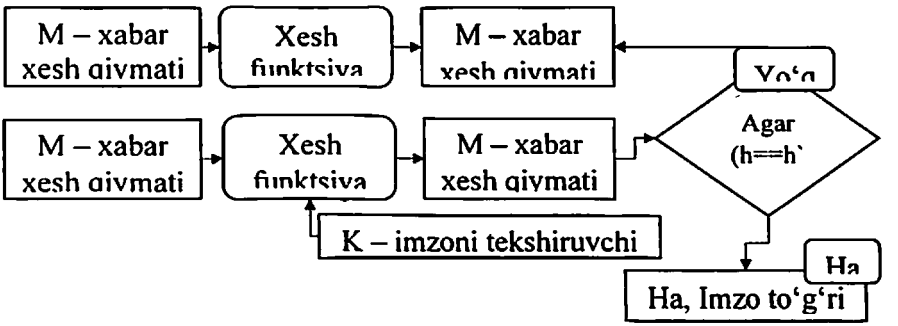
- ERIni shakllantirish;
- ERI haqiqiyligini tekshirish.



6.1- rasm. **Elektron raqamli imzoni shakllantirish jarayoni**

ERI sxemalarining yuqoridagi vazifalarga qo'shimacha quyidagi imkoniyatlari mavjud:

Identifikatsiya va autentifikatsiya. Shaxs, kompyuter yoki kredit kartalarini tanib olish va haqiqiyligini tekshirish.



6.2 - rasm. **Elektron raqamli imzoni tekshirish jarayoni**

Ruxsatlarni nazoratlash. Huquqi bor foydalanuvchilarga manbaalardan foydalanishiga ruhsat berish.

Foydalanuvchanlik. Elektron tizimlardan foydalanish imkoniyatini ta'minlaydi.

Audit. Mavjud hodisalarning log fayllari asosida xavfsizlikka aloqador elementlar haqida dalillar to'plash va tahlillash.

Fizik xavfsizlik. Fizik urinish va harakatlardan himoyalash.

Anonimlik. Foydalanuvchini oshkor etish yoki uning nomidan noto'g'ri foydalanishdan himoyalash.

6.2. RSA algoritmiga asoslangan ERI

RSA algoritmiga asoslangan ERI algoritmini ortiqcha qiyinchiliksiz amalga oshirsa bo'ladi. Buning uchun shifrlash va deshirflash uchun foydalanilgan kalitlardan teskarisiga va ma'lumotning o'rnida uning xesh qiymatdan foydalanishning o'zi yetarli (6.3 - rasm).

ERI ni shakllantirish	**ERI ni tekshirish**
$H(M)^d mod n = P$ Bu yerda: H(M) – ma'lumotning xesh qiymati; d – imzo qo'yish kaliti (yopiq kalit); n,e - ochiq kalit; P – imzo.	$P^e mod n = H`(M)$ $\begin{cases} H`(M) \equiv H & \text{Haqiqiy} \\ H`(M) \not\equiv H & \text{Haqiqiy emas} \end{cases}$

6.3– rasm. **RSA asosida ERI algoritmi**

RSA algoritmi yordamida shifrlashda qo'llaniladigan kalitlar teskarisi tarzda foydalaniladi. Ya'ni, d – imzo qo'yish (shifrlash) va e – imzoni tekshirish (deshirflash) uchun foydalaniladi.

Isboti. RSA algoritmida quyidagi tenglik bajarilganida uning haqiqiyligi isbotlanadi:

$P^e = (x^d)^e = x^{de} \equiv x \bmod n.$

Chunki, ochiq va yopiq kalitlar o'rtasida quyidagi tenglik o'rinli:

$d\,e \equiv 1 \bmod \varphi(n).$

$x \in Z_n$ butun son va hisoblashdan keyin ham butun son bo'ladi. RSA algoritmi ochiq kalitli bo'lganligi bois, qabul qiluvchi yopiq kalit orqali shifrlangan ma'lumotni rasshifrovkalaydi. Elektron raqamli imzoda esa, imzo egasi yopiq kalit asosida x xabarni imzolaydi.

Misol. Bob $x = 4$ xabarni shifrlaydi va Alisaga tasdiqlash uchun jo'natadi. Uning sxemasi quyida keltirilgan:

Alisa		**Bob**
		p=3 va q=11 sonlari tanlanadi $n = p * q = 33$ hisoblanadi $\varphi(n) = (3-1) * (11-1) = 20$ $e = 3$ tanlanadi $d \equiv e^{-1} \equiv 7 \bmod 20$
	$(n, e) = (33,3)$ ←	
		$x = 4$ xabarni imzolash $s = x^d \equiv 4^7 \equiv 16 \bmod 33$
	$(x, s) = (4,16)$ ←	
Tasdiqlash: $x` = s^e \equiv 16^3 \equiv 4 \bmod 33$ $x` \equiv x \bmod 33$ Demak imzo haqiqiy		

RSA asosidagi ERI xavfsizligi. Ochiq kalitli kriptotizimlarda kalitlarning autentifikatsiyasi asosiy xavfsizlik muammosi hisoblanadi. Ya'ni, haqiqiy foydalanuvchining ochiq kaliti uning juft yopiq kalitiga

mos kelishi lozim. Agar hujumchi Alisa o'rnidan ma'lumotni imzolasa, Alisaning ochiq kaliti (sertifikati) asosida uni tekshirish mumkin. Unga qaratilgan asosiy hujumlar maxfiy kalitni hisoblashga urinadi. Buning uchun n sonini tashkil etuvchi p va q tub sonlarining faktorizatsiya muammosini yechish lozim. Uni bartaraf etish uchun katta o'lchamdagi sonlar tanlanishi lozim (Masalan, 1024 bit yoki undan kattaroq).

Qalbakilashtirish hujumi. Bobdan kelgan imzoni ushlab qoladi va hujumchi o'zining ochiq kaliti va imzosini jo'natadi. Alisa esa ushbu xabar Bob tomonidan jo'natilgan deb o'ylaydi. Bu kabi hujumlarni oldini olish uchun RSA to'ldirish (padding) sxemalaridan foydalanish lozim. RSA to'ldirishda Bob ma'lumot uzatish uchun aynan format yoki oldindan kelishilgan uzunlikni tanlashi mumkin. Bu esa, o'z-o'zidan hujumchiga nomalum.

6.3. El-Gamal algoritmiga asoslangan ERI

Amalda El-Gamal shifrlash usuliga asoslangan ERI algoritmalari keng qo'llaniladi. U RSA algoritmidan farqli o'laroq diskret logarifm muammosiga asoslangan. Bu usulda asoslangan ERI da kalitlarni generatsiyalash shifrlashdagi kabi amalga oshiriladi. Imzo qo'yish va imzoni tekshirish jarayonlari quyidagi kabi amalga oshiriladi (6.4-rasm).

ERI ni shakllantirish	**ERI ni tekshirish**
$r \equiv \alpha^{k_E} mod p$ $s = (x - dr){k_E}^{-1} mod(p-1)$ Bu yerda: x – ma'lumot; k_E – imzo qo'yish kaliti (maxfiy kalit); k_E - EKUB (k_E, p-1)=1 ga teng butun son; (r,s) – imzo.	$\beta^r r^s mod p \equiv \alpha^x mod p$ tenglik o'rinli bo'lsa imzo haqiqiy, aks holda yo'q. Bu yerda: $\beta = \alpha^d mod p$ – ochiq kalit. $d \in \{2,3,\ldots,p-2\}$.

6.4 - rasm. **El-Gamal asosidagi ERI**

Uning xavfsizligi diskret logarifm muammosi asosida isbotlanadi va p soni sifatida 1024 bitdan katta bo'lgan va tub sonlarni generatsiyalash

usullari asosida olingan sonni olish lozim. Xuddi shunday maxfiy kalit ham tasodifiy sonlarni generatsiyalash asosida hosil qilinadi.

Isboti. Qabul qiluvchida haqiqiy imzo va ochiq kalit bo'lsa, imzoni oson tekshirishi mumkin. (r, s) – imzo parametrlari berilgan bo'lsa, quyidagi tekshirish tengligini keltirish o'rinli:

$\beta^r r^s \equiv (\alpha^d)^r (\alpha^{k_E})^s mod\ p \equiv \alpha^{dr+k_E s} mod\ p.$

Agar α^x uchun quyidagi tenglik bajarilsa, demak, imzo haqiqiy:

$\alpha^x = \alpha^{dr+k_E s} mod\ p.$

Ferma teoremasiga asosan, tenglikning ikki tomonini eksponentlash asosida quyidagi tenglikka ega bo'linadi:

$$x \equiv dr + k_E s\ mod\ .p - 1.$$

$s \equiv (x - dr) k_E^{-1} mod\ p - 1.$

Misol. Bob xabarni imzolaydi va Alisaga tasdiqlash uchun jo'natadi. Uning sxemasi quyida keltirilgan:

Alisa		**Bob**
		$p = 29, \alpha = 2, d = 12$ va $\beta = \alpha^d \equiv 7\ mod\ 29$
	$(p, \alpha, \beta) =$ $(29,2,7)$	
		$x = 26$ xabar $k_E = 5$ $r \equiv \alpha^{k_E} mod p \equiv 2^5 9$ $\equiv 3 mod\ 29$ s $= (x$ $- dr) k_E^{-1} mod (p$ $- 1) \equiv (-10) \cdot 17$ $\equiv 26\ mod\ 28$
	$(x, (r, s))$ $= (26, (3,26))$	

Alisa		Bob
Tekshirish: $\beta^r r^s \equiv 7^3 \cdot 3^{26}$ $\equiv 22 \ mod \ 29$ $\alpha^x \equiv 2^{26}$ $\equiv 22 \ mod \ 29$ Imzo haqiqiy.	←	

El-Gamal asosidagi ERI xavfsizligi. Agar hujumchi diskret logarifmni hisoblash imkoniyatiga ega bo'lsa, unda a orqali maxfiy kalitni hosil qilishi mumkin. Natijada, xuddi qonuniy foydalanuvchi kabi xabarlarni imzolashi mumkin. Ularni oldini olish uchun diskret logarifm muammosida keltirilgan shartlarga amal qilish lozim. Olinayotgan sonlar belgilangan guruhlarga tegishli bo'lishiga qat'iy rioya etish talab etiladi.

Vaqtinchaik kalitdan qayta foydalanish. k kalitni qayta qo'llash asosida maxfiy kalitni hisoblashga asoslangan.

Qalbakilashtirish hujumi. RSA algoritmiga o'xshab, ixtiyoriy x xabar uchun qalbaki imzo shakllantiriladi. Hujumchi Bobning o'rnidan o'zini haqiqiy deb tanishtiradi va imzoni jo'natadi. Agar xabar xeshlangan bo'lsa, unda bu hujum ish bermaydi.

6.4. ERI standartlari

DSA ERI algoritmi. 1991-yilda NIST (National Institute of Standard and Technology) tomonidan DSA (Digital Signature Algorithm) algoritmiga asoslangan DSS (Digital Signature Standard) ERI standarti yaratildi. Ushbu algoritm chekli maydonda diskret logarifmlash muammosiga asoslangan. Xesh funksiya sifatida SHA1 standartidan foydalanilgan.

Imzoni shakllantirish:

1. Imzolanuvchi M ma'lumotni imzolashda quyidagi ketma – ketliklar bajariladi:
   a. p – tub son tanlanadi ($2^{1023} < p < 2^{1024}$ va bit uzunligi 64 ga karrali);
   b. q - tub son tanlanadi ($2^{159} < q < 2^{160}$ va $p-1$ ning bo'luvchisi);

c. $0 < h < p$ va $h^{(p-1)q} \bmod p > 1$ shartlarni qanoatlantiruvchi h kattalik asosida $g = h^{(p-1)q} \bmod p$ butun son hisoblanadi;

d. x – maxfiy kalit orqali, $y = q^x \bmod p$ ochiq kalit hisoblanadi (bu yerda: 0<x<q);

e. ma'lumotning xesh qiymatini hisoblanadi (H(M) – ma'lumot xesh qiymati [1;q] oraliqda).

2. Ma'lumot jo'natuvchisi tasodifiy k sonini tanlaydi ($0 < k < q$ shart bilan). Ushbu kattalik imzo shallantirilgandan so'ng o'chirib tashlanadi.

3. M ma'lumotni imzolari quyidagilarga teng bo'ladi:

$$r = g^k \bmod p \bmod q,$$

$$s = k^{-1}(xr + H(M)) \bmod q.$$

Hosil qilingan kattaliklar (r, s) malumot M ga qo'shib imzoni tekshiruvchi tomonga yuboriladi.

Imzoni tekshirish jarayoni:

Qabul qilingan M' ma'lumot va unga qo'yilgan imzo (r', s') asosida imzoni tekshirish jarayoni amalga oshiriladi. Bu ikki bosqichdan iborat. Agar imzo birinchi bosqichdagi tekshiruvdan o'ta olmasa, unda ikkinchi bosqichga o'tmaydi.

1. Qabul qilingan imzolar uchun $0 < s' < q$ yoki $0 < r' < q$ shart tekshiriladi. Bu shart bajarilsa ikkinchi bosqichga o'tiladi.

2. Ikkinchi bosqich quyidagilardan iborat:

a. $v = (s')^{-1} (mod\ q)$ hisoblanadi.

b. $z_1 = H(M')\ v \bmod q$, $z_2 = r'\ v \bmod q$ qiymatlar hisoblanadi.

c. Shundan so'ng $u = g^{z_1} y^{z_1} \bmod p \bmod q$ qiymat hisoblanadi.

i. Agar $r' = u$ tenglik bajarilsa, u holda qo'yilgan elektron raqamli imzo haqiqiy ($M = M'$) bo'ladi. Aks holda imzo qalbaki deb topiladi.

EECh asosidagi ERI algoritmi. EECh asosidagi ochiq kalitli kriptotizimlar tub sonlar faktorizasiyasi yoki diskret logarifm muammosiga nisbatan xavfsizligi yuqori ekanligi isbotlangan. Ya'ni 160-256 bit kalit uzunlikdagi xavfsizligi RSA yoki El-Gamalning

1024-3072 bit kalitga teng. Ularga misol sifatida EC DSA va GOST R 34.10-2001 standartlarini keltirish mumkin.

EC DSA raqamli imzo algoritmi.

Imzoni generatsiya qilish algoritmi. Boshlang'ich ma'lumotlar: M-imzolanishi kerak bo'lgan ma'lumot, berilgan parametrlar va imzo kaliti. Natija: imzo (r, s).

1) $1 \leq k \leq n-1$ intervaldan tasodifiy k soni tanlanadi, bu yerda G nuqta tartibi $n > max\{2^{160}; 4\sqrt{p}\}$ shartni qanoatlantiruvchi tub son bo'lishi kerak.

2) $(x_1, y_1) := [k]G$ hisoblanadi.

3) $r := x_1 \ mod \ n$ hisoblanadi.

4) Agar $r = 0$ bo'lsa, u holda 1-qadamga boriladi, aks holda keyingi qadamga o'tiladi.

5) $z := k^{-1} \ mod \ n$ hisoblanadi.

6) $e := h(\mathrm{M})$ hisoblanadi.

7) $s := z(e + dr) \ mod \ n$ hisoblanadi.

8) Agar $s = 0$ bo'lsa, u holda 1-qadamga boriladi.

9) M -ma'lumot imzosi - (r, s) juftligidan iborat.

Imzoni tekshirish algoritmi. Boshlang'ich ma'lumotlar: M - ma'lumot, berilgan parametrlar, imzoni tekshirish kaliti va M -ma'lumot imzosi. Natija: imzo haqiqiyligi yoki qalbakiligi haqidagi tasdiq.

1)Agar $1 \leq r, s \leq n-1$ shart bajarilmasa, u holda imzo qalbaki va imzoni tekshirish algoritmi tugatiladi.

2)$e := h(\mathrm{M})$ hisoblanadi.

3)$w := s^{-1} \ mod \ \ n$ hisoblanadi.

4)$u_1 := ew \ \ mod \ \ n$ hisoblanadi.

5)$u_2 := rw \ \ mod \ \ n$ hisoblanadi.

6)$X := [u_1]G + [u_2]Q = (x_1, y_1)$ hisoblanadi.

7)Agar $r = x_1 \ \ mod \ \ n$ shart bajarilsa, u holda imzo haqiqiy, aks holda imzo qalbaki va imzoni tekshirish algoritmi tugatiladi.

GOST R 34.10-2001 EECh ERI standarti.

Imzoni generasiya qilish. Boshlang'ich ma'lumotlar: M ma'lumot, berilgan (elliptik chiziqqa aloqador) parametrlar va imzo maxfiy kaliti.

Ushbu algoritmda Elliptik egri chiziq tenglamasi $p > 2^{255}$ shartni qanoatlantiruvchi tub xarakteristikali F_p maydonda deb qaraldi. Natija, imzo (r, s).

Imzoni generasiya qilish qadamlari:

1. $1 \le k \le n-1$ intervaldan ixtiyoriy k soni tanlansin, bu yerda G nuqta tartibi $2^{254} < n < 2^{256}$ shartni qanoatlantiruvchi son.

2. $(x_1,y_1)= [k]G$ hisoblansin, ya'ni tanlangan egri chiziqqa tegishli G nuqtani k marta qo'shilsin.

3. $r=x_1 \bmod n$ hisoblansin. Agar $r=0$ bo'lsa, 1-qadamga qaytilsin va boshqa k soni tanlansin.

4. M ma'lumotning xesh funksiyasi hisoblansin, ya'ni $e=H(M)$. Agar $H(M) \bmod n=0$ bo'lsa, u holda $H(M) \bmod n=1$ deb olinsin.

5. $0< d <n$ intervaldan olingan d maxfiy kalit asosida $s=(dr+ke) \bmod n$ hisoblab topilsin.

6. Agar $s=0$ bo'lsa, 1-qadamga qaytilsin va boshqa k soni tanlansin.

7. Hosil bo'lgan (r,s) sonlar juftligi M ma'lumotga qo'yilgan imzo hisoblanadi.

Imzoni tekshirish. Boshlang'ich ma'lumotlar M ma'lumot, berilgan (elliptik chiziqqa aloqador) parametrlar, imzoni tekshirish kaliti va M ma'lumot imzosi-(r,s). Natija: imzo haqiqiyligi yoki qalbakiligi haqidagi tasdiq .

Imzoni tekshirish qadamlari:

1. Agar $1 \le r, s \le n-1$ bajarilmasa, u holda imzo qalbaki va tekshirishni shu yerda to'xtatish mumkin.

2. $e= H(M)$ hisoblansin.

3. $w= H(M)^{(n-2)} \bmod n$ hisoblansin.

4. $u_1 = s\, w \bmod q$ hisoblansin.

5. $u_2 = (n-r)\, w \bmod n$ hisoblansin.

6. $X=[u_1] G+[u_2] Q=(x_1,y_1)$ hisoblansin.

7. Agar $x_1 \bmod n = r$ bo'lsa, imzo haqiqiy, aks holda imzo qalbaki va algoritm to'xtatiladi.

Muhokama: ERI imzo ochiq kalitli shifrlash algoritmlariga asoslangan, masalan RSA. Ammo DSA kabi algoritmlar mavjudki, ularni ma'lumotlarni shifrlash maqsadida qo'llab bo'lmaydi. DSA va RSA kabi

algoritmlarining imzo sxemasida 1024 bitdan katta sonlar tanlanishi lozim. ECDSA kabi EEChga asoslangan algoritmlar uchun esa, kamida 160-256 bit olinishi maqsadga muvofiq.

Amalda ko'plab davlatlar o'zining ERI standartlariga ega. Ularga quyidagilarni kiritish mumkin:

- El-Gamalga asoslangan DSA standarti (AQSh);
- El-Gamalga asoslangan GOST R 34.10-94 standarti (Rossiya);
- EECh asoslangan ECDSA-2000 standarti (AQSh);
- EECh asoslangan GOST R 34.10-2001 standarti (Rossiya);
- Parametrli darajaga ko'tarish va EECh asoslangan O'zDSt 1092:2009 standarti (O'zbekiston Respublikasi).

6.5. Ochiq kalitli shifrlardan foydalanish muammolari

Shifrlash algoritmlari yordamida ma'lumot konfidensialligini ta'minlashga erishish mumkin. Ushbu masalani hal etishda asimmetrik shifrlash algoritmlaridan foydalanish quyidagi afzallik va kamchiliklarni keltirib chiqaradi:

Afzalligi:

– Maxfiy kalitni ochiq kanallar yordamida ochiq holda uzatish almashish mumkin. Kalitni almashish uchun maxsus, himoyalangan kanallardan foydalanish shart emas.

– Rasshifrovkalash kaliti xabarni qabul qiluvchi tomonidan generatsiyalanadi va uni ochiq tarmoqda jo'natish shart emas. Natijada maxfiy kalit konfidensiyalligi ta'minlanadi.

– Katta tarmoqlarda kalitlar soni simmetrik shifrlash algoritmlariga qaraganda soni kam.

Kamchiligi:

– Algoritmga o'zgartirish kiritish murakkab.

– Yuqori bardoshlilikni ta'minlash uchun uzun kalitlardan foydalanish lozim. 5.2-jadvalda simmetrik va asimmetrik shifrlash algoritmlarida teng bardoshlilik uchun mos kalit uzunliklari keltirilgan.

5.2-jadval

Simmetrik va asimmetrik shifrlash algoritmlari uchun kalit uzunliklari

Simmetrik kalit uzunligi (bit)	Asimmetrik kalit uzunligi (bit)
56	384
64	512
80	768
112	1792
128	2304

– Shifrlash va rasshifrovkalash tezligi simmetrik shifrlash algoritmlariga nisbatan past.

– Ma'lumotni shifrlash uchun katta hisoblash mashinalarini talab etadi, shuning uchun asimmetrik shifrlash algoritmlaridan Elektron raqamli imzoda ma'lumotning xesh qiymatini imzolashda va gibrid shifrlash algoritmlarida seans kalitni almashish maqsadlarida foydalaniladi.

Nazariy jihatdan matematik kriptobardoshliligi isbotlanmagan.

Nazorat savollari

1. Elektron raqamli imzo va uning ishlash prinsipi haqida ayting?
2. Elektron raqamli imzo qaysi hujumlarga nisbatan himoyani ta'minlaydi?
3. RSA algoritmiga asoslangan elektron raqamli imzo algoritmi haqida ayting?
4. El-Gamal algoritmiga asoslangan elektron raqamli imzo algoritmi haqida ayting?
5. Elektron raqamli imzo standartlari haqida ayting?
6. Elliptik egri chiziqqa asoslangan elektron raqamli imzo standartlari haqida ayting?

VII BOB. Yengil kriptografiya, kvant va post-kvant kriptografiyasi

7.1. Yengil kriptografiya tushunchalari

Yengil kriptografiya deganda kam quvvatli mikrokontrollerlar, o'rnatilgan tizimlar va buyumlar interneti (IoT) qurilmalari kabi resurslari cheklangan qurilmalar uchun optimallashtirilgan holda xavfsizlikni ta'minlash uchun mo'ljallangan kriptografik algoritmlar va protokollar tushuniladi. Ushbu turdagi algoritmlarning maqsadi hisoblash quvvati, xotira va quvvat sarfi cheklangan hollarda, xavfsizlik va samaradorlik o'rtasida muvozanatni saqlash hisoblanadi. Masalan, kriptografik algoritmda kalit hajmi va raundlar sonini oshirish uning xavfsizligini oshirishi mumkin, lekin resurslar cheklangan qurilmalarda ushbu algoritmlardan foydalanish imkoniyati deyarli yo'q. Boshqa tomondan, kalit hajmi va raundlar sonini kamaytirish, algoritmlarning ishlash samaradorligini oshirishi mumkin, ammo algoritm xavfsizligini buzilishiga olib kelishi mumkin. Ushbu muammolarni hal qilish uchun yengil kriptografiya sohasidagi ko'pincha o'rin almashtirish va o'rniga qo'yish hamda yengil Feystal tarmoqlari kabi maxsus kriptografik konstruktorlardan, yengil blokli shifrlar va cheklangan qurilmalar uchun maxsus ishlab chiqilgan xesh funksiyalari kabi turli usullardan foydalaniladi. Shuningdek, yengil maxfiy kalitli shifrlar va elliptik egri chiziqlarga asoslangan kriptografiya kabi samarali va yengil kriptografik algoritmlardan foydalanishga ustuvor ahamiyat beriladi.

Yengil kriptografik algoritmlarni ishlab chiqishdan tashqari, IoT qurilmalari va tarmoqlarini himoya qilish uchun yengil kriptografiya usullaridan foydalanishga qiziqish ortib bormoqda. Bu xavfsiz aloqa va ma'lumotlar almashinuvi uchun yengil kriptografik protokollarni ishlab chiqish, shuningdek, yengil kriptografiyani IoT xavfsizlik tizimlari va standartlariga integratsiyalashni o'z ichiga oladi. Umuman olganda, yengil kriptografiya tadqiqot va rivojlantirishning muhim sohasidir, chunki u IoT qurilmalari kabi resurslar cheklangan muhitda ishlash va samaradorlikka putur etkazmasdan xavfsiz aloqa va ma'lumotlarni himoya qilish imkonini beradi.

Yengil kriptografiyaning asosiy jihatlaridan biri bu kriptografik algoritmlar va protokollarning hisoblash va xotira talablarini

minimallashtirishga, shu bilan birga yuqori darajadagi xavfsizlikni saqlashga qaratilgan. Bu, ayniqsa, cheklangan ishlov berish quvvatiga, saqlash quvvatiga va energiya resurslariga ega bo'lishi mumkin bo'lgan resurslar cheklangan qurilmalar uchun juda muhimdir. Kriptografik operatsiyalar uchun hisoblash va xotira yukini kamaytirish orqali yengil kriptografiya ushbu qurilmalarda samarali va xavfsiz aloqa va ma'lumotlarni himoya qilish imkonini beradi.

Yengil kriptografiyaning yana bir muhim jihati uning soddaligi va amalga oshirish qulayligiga qaratilganligidir. An'anaviy kriptografik algoritmlardan farqli o'laroq, murakkab va to'g'ri amalga oshirish qiyin bo'lishi mumkin, yengil kriptografik algoritmlar oddiy va keng turdagi qurilmalarda amalga oshirish oson bo'lishi uchun mo'ljallangan. Bu resurs cheklangan muhitda ayniqsa muammoli bo'lishi mumkin bo'lgan amalga oshirishdagi xatolar va zaifliklar xavfini kamaytirishga yordam beradi.

Umuman olganda, yengil kriptografiya tadqiqot va rivojlantirishning muhim sohasidir, chunki u IoT qurilmalari kabi resurslari cheklangan qurilmalarda ishlash, samaradorlik yoki xavfsizlikka putur etkazmasdan xavfsiz aloqa va ma'lumotlarni himoya qilish imkonini beradi. Ushbu qurilmalardan foydalanish o'sishda davom etar ekan, yengil kriptografik usullar va algoritmlarga bo'lgan ehtiyoj yanada dolzarb bo'lib qoladi.

Yengil kriptografik algoritmlarning asosiy jihatlari quyidagilardan iborat:

- *Ishlash samaradorligi*: Yengil kriptografik algoritmlar hisoblash tezligi va resurslardan foydalanish nuqtai nazaridan samaradorlikni birinchi o'ringa qo'yadi. Ular hisoblash quvvati, xotirasi va energiya resurslari cheklangan qurilmalarda yaxshi ishlash uchun mo'ljallangan.
- *Xavfsizlik*: Yengil bo'lishiga qaramay, kriptografik algoritmlar kuchli xavfsizlik darajasini saqlab turishi kerak. Differensial quvvat tahlili (DPA), yon kanal hujumlari va boshqa kriptoanalitik usullar kabi ma'lum hujumlarga qarshilik ko'rsatish uchun ular jiddiy tahlil va baholashdan o'tadilar.

- *Algoritm dizayni*: Yengil kriptografik algoritmlar an'anaviy kriptografik algoritmlarga nisbatan ko'pincha turli dizayn usullaridan foydalanadi. Ushbu usullarga o'rin almashtirish va o'rniga qo'yish tarmoqlari, yengil blokli shifrlar, oqim shifrlari va resurs cheklangan muhitlar uchun maxsus ishlab chiqilgan xesh funksiyalari kiradi.
- *Kalit hajmi va murakkabligi*: Yengil kriptografiya hisoblash yuki va xotira talablarini kamaytirish uchun kichikroq kalit o'lchamlaridan foydalanishga urg'u beradi. Bundan tashqari, samaradorlikni oshirish uchun algoritmlarning murakkabligi ko'pincha kamayadi.
- *Standartlashtirish*: Xalqaro standartlashtirish tashkiloti (ISO) va Milliy standartlar va texnologiyalar instituti (NIST) kabi bir nechta tashkilot va standartlashtirish organlari yengil kriptografiya uchun standartlarni ishlab chiqdilar. Ushbu standartlar yengil muhitlar uchun mos keladigan algoritmlar va protokollarni belgilaydi.
- *Ilovalar*: Yengil kriptografiya turli domenlardagi ilovalarni, jumladan, simsiz sensor tarmoqlari, IoT qurilmalari, smart-kartalar, RFID teglari va xavfsiz aloqa, autentifikatsiya va ma'lumotlarni himoya qilishni talab qiluvchi boshqa resursi cheklangan qurilmalarni o'z ichiga oladi.

Shuni ham ta'kidlab o'tish kerakki, yengil kriptografiya resurslari cheklangan muhitlar uchun afzalliklarni taqdim etsa-da, an'anaviy kriptografiyaga nisbatan u turli xil xavfsizlikka ega bo'lishi mumkin. Shu sababli, maqsadli tizimning o'ziga xos talablari va tahdid modellari asosida yengil kriptografik yechimlarni tanlash va amalga oshirishda ehtiyotkorlik bilan ko'rib chiqish va baholash zarur.

Hozirgi kunda asosan foydalanish mumkin bo'lgan yengil kriptografik algoritmlarni to'rtta turga sinflash mumkin (7.1-rasm):

- yengil blokli shifrlash algoritmlari (LWBC);
- yengil oqimli shifrlash algoritmlari (LWSC);
- yengil kriptografik xesh funksiyalar (LWHF);
- elliptik egri chiziqlarga asoslangan algoritmlar (ECC).

Yengil blokli shifrlash algoritmlari quyidagi xususiyatlarga ega:

- blok uzunligini kichikligi;
- kalit hajmini kichikligi;

- sodda ko'rinishdagi raunlarni yaratish imkoniyati;
- kalitlar jadvalini oson ishlab chiqish.

Yengil oqimli shifrlash algoritmlari quyidagi xususiyatlarga ega:

- chip maydonining qisqarishi;
- kalit uzunligini qisqarishi;
- ichki holatni minimalashtirish;
- kalit/IV o'rnatish davrlarini qisqartirish.

Yengil kriptografik xesh funksiyalar quyidagi xususiyatlarga ega:

- chiqish hajmining qisqarishi;
    - xabar hajmining qisqarishi.

Elliptik egri chiziqlarga asoslangan algoritmlar quyidagi xususiyatlarga ega:

- xotira talablarini kamaytirish;
- energiya sarfini kamaytirish;
- guruh arifmetikasini optimallashtirish/tezlikni oshirish.

7.2. Yengil kriptografik algoritmlar

Yengil blokli shifrlar

Blokli shifrlar simmetrik shifrlash algoritmlarining bir turi bo'lib, unda butun blok bir vaqtning o'zida qayta ishlanadi. Blokli shifrlar xesh funksiyalar va xabarlarni autentifikatsiya qilish kodlarini (MAC) loyihalash uchun ishlatiladi. Yengil blokli shifrlar ikki turdagi tarmoqlarga asoslanadi: o'rin almashtirish va o'rniga qo'yis tarmoqlari (SPN) va Feistal tarmog'iga. Feistal tarmog'i o'zining raund funksiyasidan faqat yarim holatda foydalanadi. Bu esa shifrlash va rashifrovkalash uchun minimal qo'shimcha xarajatlar bilan bir xil sxemani yaratishga imkon beradi. Shunday qilib Feistal tarmog'ining asosiy afzalligi shifrlash va rasshifrovkalash jarayonlari uchun bir xil dasturiy ta'minot kodidan foydalanishdir, bu esa xotiradan kam foydalanishga olib keladi. U kam quvvat sarflaydgan apparat majmuada amalga oshirilishi mumkin. Feistal tarmog'i kichik kechikishlar uchun mos emas. SP tarmoqlar nisbatan tezroq ishlaydi, ammo kalitlar jadvalisiz. Kalit jadvalini yetishmasligi uni himoyasiz qilib qo'yadi. Bir xil darajadagi xavfsizlik va bir xil energiya sarfi uchun SP tarmoq

strukturasi ko'proq mos keladi, chunki unda bajarilish raundlar soni kamroq bo'ladi. Shunga o'xshash sharoitlarda SP tarmoqlar kamroq quvvat sarflaydi. Yengil blokli shifrlarni baholashning asosiy parametrlari kalit o'lchami, blok o'lchami, tarmoq turi va raundlar soni hisoblanadi. Quyidagi 7.1-jadvalda turli xil yengil blokli shifrlarning tuzilishi, kalit o'lchami, blok o'lchami va kerakli raundlar soni bo'yicha tavfsilotlar keltirilgan.

7.1-jadval

Yengil blokli shifrlash algoritmlari tahlil

Yengil blokchi shifrlar	Tuzilishi	Raundlar soni	Kalit o'lchami (bit)	Blok uzunligi (bit)
RC5	Feistel	0-255	0-2040	32/64/128
TEA	Feistel	64	128	-
XTEA	Feistel	64	128	64
AES	SPN	10,12,14	128,192,256	128
DESL	Feistel	16	56	64
PRESENT	SPN	31	80/128	64
CLEFIA	Feistel	2488	128,192,256	39/128
KATAN va KATANTAN	NLFSR	254	80	32/48/64
MIBS	SPN raund funksiyasiga ega Feistal	32	64/80	64
Humming-Bird	Gibrid	4	256	16
LED	SPN	64 bit uchun 8, qolganlari uchun 12	64/80/96/128	64
TWINE	GFN Feistel	32	80/128	64
KLEIN	SPN	12/16/20	64/80/96	64
PRINCE	SPN	11	128	64
ITUBEE (2013)	Feistel	20 gacha	80	80
	Feistel	32–72	64–256	32–128

SIMON va SPECK	ARX	22–34	64–256	32–128
RECTANGLE (2014)	SPN	25	80/128	64
Midori (2015)	SPN	16/20	64/128	-
QTL (2016)	Feistel	-	64/128	64
ANU (2016)	Feistel	25	80/128	65
SFN (2018)	Feistel+SPN	32	96	64

Yengil oqimli shifrlar

Yengil oqim shifrlash - bu kam quvvatli mikrokontrollerlar yoki RFID kabi cheklangan resurslarga ega qurilmalarda foydalanish uchun mo'ljallangan oqimli shifrlarning bir turi hisoblanadi. Oqim shifrlari - ma'lumotlarning belgilangan o'lchamdagi bloklarini shifrlaydigan blokli shifrlardan farqli o'laroq, bir vaqtning o'zida ma'lumotlar bitlari yoki baytlarini shifrlaydigan simmetrik kalitli shifrlash algoritmining bir turidir. Yengil oqim shifrlari odatda kichik hajmdagi xotiraga ega va minimal hisoblash resurslarini talab qiladi, bu ularni o'rnatilgan tizimlarda foydalanish uchun mos qiladi. Ular ko'pincha oddiy tuzilishga ega bo'lib, amalga oshirish murakkabligini kamaytirish hamda ish faoliyatini yaxshilashga yordam berish uchun shifrlash va rasshifrovkalashda ko'p bo'lmagan raundlardan foydalanadi.

Yengil oqimli shifrlariga, kichik protsessorlarda yuqori samaradorlik uchun mo'ljallangan, RFID va boshqa kam quvvatli qurilmalarda qo'llanilgan *Grain* shifrlari oilasini, shu bilan birgalikda, resurslar cheklangan qurilmalarda yuqori tezlikda shifrlash va shifrni ochishni ta'minlash uchun mo'ljallangan *Trivium* shifrlarini misol qlib keltirish mumkin. Yengil oqimli shifrlarning xavfsizligi uning kaliti va ichki tuzilishi murakkabligiga bog'liqdir. Differensial va chiziqli kriptotahlil kabi har xil turdagi hujumlarga qarshi yetarlicha katta kalit maydonini va shifrning ichki tuzilishi barqarorligini ta'minlash muhimdir.

Yengil oqimli shifrlaridan foydalanishning bo'lishi mumkin bo'lgan kamchiliklaridan biri bu ularning yon kanal hujumlariga nisbatan zaifligi bo'lib, ular elektromagnit emissiya yoki qurilmaning boshqa jismoniy xususiyatlarini kuzatish yordamida maxfiy kalit yoki boshqa muhim

ma'lumotlarni olish uchun ishlatilishi mumkin. Bundan tashqari, yengil oqimli shifrlar, agar ular ma'lum bir standart asosida ishlab chiqilmagan bo'lsa, murakkabroq shifrlash algoritmlariga qaraganda kamroq xavfsiz bo'lishi mumkinligini inobatga olish kerak.

Yengil oqimli shifrlar cheklangan hisoblash quvvatiga, xotiraga va energiya ega bo'lgan qurilmalar uchun samarali va xavfsiz shifrlashni ta'minlash uchun mo'ljallangan. Yengil oqimli shifrlarni qurishning bir nechta usullari mavjud. Eng keng tarqalgan qurish usullaridan ba'zilari quyidagilardan iborat:

1. *LFSR (Linear-feedback shift register)-ga asoslangan konstruksiyalar*: LFSR-ga asoslangan (chiziqli teskari aloqali registrlarni surish) konstruksiyalar yengil oqimli shifrlarini yaratishning mashhur usulidir. Ushbu konstruktsiyalar oddiy XOR operatsiyasi yordamida ochiq matn bilan mos keladigan kalit oqimini yaratish uchun oz miqdorda LFSR dan foydalanadi. LFSRlar haqiqiy tasodifiy bitlardan statistik jihatdan farqlanmaydigan psevdo-tasodifiy bitlarning uzoq ketma-ketligini ishlab chiqarish uchun sozlangan bo'ladi.

2. *Filtrga asoslangan konstruktsiyalar*: Filtrga asoslangan konstruktsiyalar kirish ma'lumotlarini kalit oqimiga aylantirish uchun filtr funksiyasidan foydalanadi. Filtr funktsiyasi odatda chiziqli yoki chiziqli bo'lmagan funksiya bo'lib, u qayta aloqa siklidagi kirishga qo'llaniladi. Filtr funksiyasi tomonidan yaratilgan kalit oqimi oddiy XOR operatsiyasi yordamida ochiq matn bilan birlashtiriladi.

3. *S-box-ga asoslangan konstruksiyalar*: S-box-ga asoslangan konstruksiyalar oddiy XOR operatsiyasidan foydalangan holda ochiq matn bilan mos keladigan kalit oqimini yaratish uchun oz sonli S-boxlardan foydalanadi. S-boxlar odatda yaxshi kriptografik xususiyatlarga ega bo'lish uchun mo'ljallangan va shifrlash jarayoniga chalkashlik kiritish uchun ishlatiladi.

4. *Feistel tipidagi yengil konstruktsiyalar*: Feistel tipidagi yengil konstruktsiyalar an'anaviy Feistel tarmoqlariga o'xshaydi, lekin ular yanada samaraliroq bo'lish uchun mo'ljallangan va kamroq shifrlash va rasshifrovkalash raundlarini talab qiladi. Ushbu konstruktsiyalar odatda oddiy matnga mos keladigan kalit oqimini yaratish uchun XOR va teskari

aloqali takrorlanlar kabi oz sonli raundlardan va oddiy operatsiyalardan foydalanadi.

5. *O'rin almashtirish va o'rniga qo'yish tarmoqlari (SPNs)*: O'rin almashtirish va o'rniga qo'yish tarmoqlari (SPN) yengil blokli shifrlarni yaratishning mashhur usulidir, ammo ular yengil oqimli shifrlarni yaratish uchun ham ishlatilishi mumkin. SPNlar oddiy XOR operatsiyasi yordamida ochiq matn bilan birlashtirilgan kalit oqimini yaratish uchun o'rin almashtirish va o'rniga qo'yish operatsiyalari kombinatsiyasidan foydalanadi.

Qurish usulini tanlash dasturning o'ziga xos xavfsizlik talablari, mavjud resurslar va ishlash cheklovlari kabi turli omillarga bog'liq bo'ladi. Quyida 7.2-jadvalda yengil oqimli shifrlash algoritmlarning tavfisi keltirilgan.

7.2-jadval

Yengil oqimli shifrlash algoritmlari tahlili

Yengil oqimli shifrlar	Kalit o'lchami	IV (boshlang'ich vektor)	Konstruksiya turi
A5/1	64	22	LFSR
Rabbit	128	64	Xaotik jadval+oddiy arifmetika
Grain	80, 128	65, 96	LFSR, NFSR
Trivium	80	80	3SHR
Salsa 20/r	128, 256	128	ARX
Grain128a	128	96	LFSR+NLFSR
Sosemanuk	128, 256	64, 128	LFSR+FSM
MICKEY	80, 128	0–80, 0–128	Galois LFSR+NLFSR
CHACHA	256	128	ARX
Encoro 128	128	64	PRNG
Encoro80	80	64	PRNG
SNOW-3G	128	128	LFSR+FSM
A2U2	56	-	LFSR+2NLFSR
Quavium	80	80	4 Trivium like SHR
WG-8	80	80	LFSR+WG

Sprout	-	-	NLFSR+LFSR+Counter Reg
Fruit-v2	64/80	64	LFSR+NLFSR
Plantlet	80	90	LFSR+NLFSR+Counter
Espresso	128	96	Galois structure NLFSR
Lizard	120	64	NLFSR

Yengil kriptografik xeşh funksiyalar

Kriptografik xesh funksiyasi matematik funksiya bo'lib, u ixtiyoriy uzunlikdagi kirish xabarini oladi va xesh yoki xabar dayjesti deb ataladigan fiksirlangan o'lchamdagi chiqishni beradi. Chiqish odatda kirish xabariga xos bo'lgan bitlar ketma-ketligidir va kirish xabaridagi har qanday o'zgarish boshqa xeshga olib keladi. Xesh funksiyalari ko'plab kriptografik ilovalarda, jumladan raqamli imzolar, xabarlarni autentifikatsiya qilish kodlari (MAC) va parolni saqlashda qo'llaniladi. Yengil xesh-funksiyalar - bu kiritilgan ma'lumotlardan fiksirlangan o'lchamdagi xesh qiymatlarini (dijestlar) samarali yaratish uchun mo'ljallangan kriptografik algoritmlar. Ular ishlash quvvati, xotirasi va energiyasi cheklangan qurilmalar uchun maxsus optimallashtirilgan bo'ladi.

Xesh funksiyalarni yengil qilish uchun konstruktorlar odatda quyidagi usullarning kombinatsiyasidan foydalanadilar:

1. *Bitli amallar*: AND, OR, XOR va surish kabi bitli operatsiyalardan foydalaniladi, ular apparat va dasturiy ta'minotda tez va oson amalga oshiriladi.

2. *Modul arifmetikas*: Modul arifmetika, masalan oraliq qiymatlar hajmini kamaytirish va ish faoliyatini yaxshilash uchun tub modul bo'yicha qo'shish va ko'paytirish amallaridan foydalanish mumkin.

3. *O'rin almashtirish va o'rniga qo'yish amallari:* S-box va P-box kabi o'rin almashtirish va o'rniga qo'yish amallari xesh funksiyasiga chiziqli bo'lmaganlik va diffuziya qo'shish uchun ishlatilishi mumkin.

4. *Bitlarni ajratish*. Bitlarni ajratish-bu bitta ma'lumotlar blokiga parallel ravishda bir nechta operatsiyalarni bajarishga imkon beradigan usul, bu esa samaradorlikni oshirishi mumkin.

Yengil xesh funktsiyasini tanlashda asosiy e'tibor berilishi kerak bo'lgan jihatlar quyidagilardan iborat:

1. *Xavfsizlik*: Xesh funksiyasi kolliziya hujumlariga qarshi yuqori darajadagi xavfsizlikni ta'minlashi kerak.

2. *Samaradorligi*: Xash funksiyasi tez va samarali bo'lishi kerak, hisoblash quvvati va xotira talablari past bo'lishi talab etiladi.

3. *Amalga oshirishning murakkabligi*: Xesh funksiyasi kichik kod hajmi va kam quvvat iste'moli bilan apparat va dasturiy ta'minotda oson amalga oshirilishi kerak.

Umuman olganda, yengil xesh funksiyalar kam quvvatli qurilmalar va o'rnatilgan tizimlarni himoya qilishda muhim rol o'ynaydi. Samarali va xavfsiz xesh funksiyalaridan foydalangan holda, konstruktorlar ushbu qurilmalarni ruxsatsiz kirish va boshqa xavfsizlik tahdidlaridan himoyalanganligini ta'minlashi mumkin.

Xesh funksiyalar	Tavsifi	Afzalliklari	Kamchiliklari	Xesh qiymati uzunligi (bit)
FNV-1a	Kriptografik bo'lmagan xesh funksiya	Tezkor, kolliziyaga duch kelish ehtimoli past	Kriptografik maqsadlar uchun mos emas	32/64
MurmurHash	Kriptografik bo'lmagan xesh funskiyalar oilasiga mansub	Tezkor, samarali, kolliziyaga duch kelish ehtimoli past	Kriptografik maqsadlar uchun mos emas	32/64

xxHash	Kriptografik bo'lmagan xesh funskiyalar oilasiga mansub	Tezkor, samarali, kolliziyaga duch kelish ehtimoli past	Kriptografik maqsadlar uchun mos emas	64 va undan yuqori
SipHash	Kriptografik xesh funksiya	Yengil, samarali, xavfsiz	Kriptografik bo'lmagan xesh funktsiyalariga qaraganda sekinroq	64
BLAKE2s	Kriptografik xesh funksiya	Tez, xavfsiz, yon kanal hujumlariga bardoshli	Ba'zi yengil ilovalar uchun ortiqcha bo'lishi mumkin	256 va undan yuqori

Xesh funksiyasini tanlashda ilovangizning o'ziga xos ehtiyojlarini, jumladan xavfsizlikning talab qilinadigan darajasi va kerakli xesh qiymati uzunligini hisobga olish muhimdir.

Elliptik egri chiziqlarga asoslangan algoritmlar (ECC)

Elliptik egri chiziqqa asoslangan ochiq kalitli kriptografiyaning bir turi bo'lib, aloqa xavfsizligini ta'minlash uchun elliptik egri chiziqlar matematikasidan foydalanadi. RSA va Diffie-Hellman kabi boshqa ochiq kalitli kriptografik algoritmlar bilan solishtirganda, elliptik egri chiziqlarga asoslangan algoritmlar kichikroq kalit o'lchamlarida o'xshash yoki ulardan yaxshiroq xavfsizlikni taklif qiladi, bu esa uni yengil kriptografik ilovalarda samarador bo'lishini ta'minlaydi.

Elliptik egri chiziqlarga asoslangan kriptografik algoritmlar $y^2 = x^3 + a * x + b$ ko'rinishdagi tenglama bilan aniqlangan matematik egri chiziqlar bo'lgan elliptik egri chiziqlarning xususiyatlariga asoslanadi. Egri chiziq tub tartibli chekli maydon ustida aniqlanadi va egri chiziqdagi nuqtalar ustida amallar chekli maydonda amalga oshirilad. Elliptik egri

chiziqlarga asoslangan kriptografik algoritmlarning xavfsizligi elliptik egri chiziqli diskret logarifmlash muammosini yechish qiyinligiga asoslanadi.

Elliptik egri chiziqli yengi kriptografiya (EECHYK) elliptik egri chiziqlarning kichik to'plami bo'lib, u smart-kartalar, o'rnatilgan tizimlar va mobil qurilmalar kabi resurslari cheklangan qurilmalar uchun maxsus ishlab chiqilgan. EECHYK algoritmlari tezlik va xotiradan foydalanish uchun optimallashtirilgan va ular shifrlash va shifrni ochish operatsiyalarini bajarish uchun minimal hisoblash resurslarini talab qiladi.

Umuman olganda, EECHYK kriptografiya sohasidagi tadqiqotlarning muhim yo'nalishlaridan hisoblanadi, chunki u resurslar cheklangan qurilmalarda xavfsiz aloqa va autentifikatsiyani ta'minlaydi. EECHYK algoritmlari va ularni amalga oshirish bo'yicha tadqiqotlarni davom ettirish ushbu qurilmalar uchun xavfsiz va samarali kriptografik tizimlarni ishlab chiqish uchun juda muhimdir.

7.3. Kvant kriptografiyasi

Kvant kriptografiyasi kriptografiyaning bir bo'limi bo'lib, u ikki tomon o'rtasida xavfsiz aloqani ta'minlash uchun kvant mexanikasi tamoyillaridan foydalanadi. Kuchli kompyuterlar tomonidan echilishi mumkin bo'lgan matematik muammolarga asoslangan klassik kriptografiyadan farqli o'laroq, kvant kriptografiyasi fizika qonunlariga asoslanadi va klassik hamda kvant kompyuterlarining hujumlariga chidamli bo'ladi.

Kvant kriptografiyasi - bu ikki tomon o'rtasida xavfsiz aloqani ta'minlash uchun kvant fizikasi tamoyillaridan foydalanadigan kriptografiya sohasidir. Kvant kriptografiyasi xavfsiz aloqani ta'minlash uchun katta imkoniyat bersa-da, uni amalga oshirishda bir qator qiyinchiliklar mavjud. Qiyinchiliklardan biri chigallashgan fotonlarni ishlab chiqarish va aniqlash uchun ixtisoslashtirilgan apparatga ehtiyojdir, bu qimmat va ishlab chiqarish qiyin bo'lishi mumkin. Yana bir qiyinchilik - kvant signallarini uzoq masofalarga axborotni yo'qotmasdan uzatishning qiyinligi, bu esa aloqa doirasini cheklashga olib keladi.

Kvant kriptografiyasi kriptografiyaning eng so'nggi va ilg'or sohasi bo'lib, uning asosi kvant texnikasining ikkita prinsipiga asoslanadi: Geyzenbergning noaniqlik prinsipi va foton qutblanish prinsiplariga.

Geyzenbergning noaniqlik prinsipi shuni ko'rsatadiki, ba'zi jismoniy xususiyatlar juftligi bir xususiyatni o'lchashda odamning bir vaqtning o'zida boshqasini bilishiga to'sqinlik qilishi mumkin. Xususan, qaysi yo'nalishni o'lchashni tanlash barcha ketma-ket o'lchovlarga ta'sir qiladi. Polarizatsiyalanmagan yorug'lik vertikal tekislangan filtrga kirganda, u yorug'likning bir qismini o'zlashtiradi va qolgan qismini vertikal yo'nalishda qutblaydi. Qaysidir burchak ostida q egilgan keyingi filtr qutblangan yorug'likning bir qismini o'ziga singdiradi va qolgan qismiga yangi qutblanish beradi hamda uzatadi. Gorizontal/vertikal kabi fotonlarning qutblanishini ifodalash uchun foydalaniladigan bir juft ortogonal qutblanish holatlari bazis deb ataladi.

Ushbu qiyinchiliklarga qaramay, kvant kriptografiyasi kriptografiya sohasida inqilob qilish va turli ilovalarda, jumladan moliyaviy operatsiyalar, harbiy aloqalar va hukumat aloqalarida xavfsiz aloqani ta'minlash imkoniyatiga ega. Ushbu sohadagi tadqiqotlar davom etar ekan, kvant kriptografiyasining joriy cheklovlarini engib o'tish va xavfsiz aloqa uchun amaliy va keng qo'llaniladigan vositaga aylantirish uchun yangi texnika va texnologiyalar ishlab chiqilishi mumkin.

Grover qidiruv algoritmi. Muammo quyidagicha qo'yilgan bo'lsin. $f(x)$ funksiya berilgan bo'lsin. Bu yerda $x - 0 \leq x \leq 2^n - 1$ oraliqdagi butun son. Argumentning ba'zi qiymatlari uchun bu funktsiya 1 qiymatini oladi, qolganlari uchun esa 0 qiymatini oladi. Funktsiya 1 ga teng bo'lgan argumentning kamida bitta qiymatini topish talab qilinsin.

Klassik kompyuterda bu muammoni faqat argumentning barcha qiymatlarini to'liq tanlash yo'li orqali hal qilish mumkin. Bu $f(x)$ funksiyani hisoblash va bir xil miqdordagi taqqoslash uchun o'rtacha 2^{n-1} marta tanlash talab qilinadi.

Kvant kompyuterida bu muammoni quyidagi algoritm yordamida hal qilish mumkin:

1. Kvant registrini $\frac{1}{\sqrt{2^n}}\sum_{x=0}^{2^n-1}|x\rangle$ holatga keltiring;

2. $\frac{1}{\sqrt{2^n}}\sum_{x=0}^{2^n-1}|x\rangle|f(x)\rangle$ registrdan f funksiyani hisoblang;

3. $f(x_i) = 1$ bo'lgan barcha x_i larning amplitudasini oshirish protsedurasini $\frac{\pi}{4}\sqrt{2^n}$ marta takrorlang.

4. Registrning holatini o'lchang. Natija taxminan 2^{-n} ehtimollik bilan to'g'ri bo'ladi. Agar natija hali ham noto'g'ri bo'lib chiqsa, butun algoritmni takrorlash kerak.

Amplitudani oshirish protsedurasi ikki bosqichdan iborat.

1. $f(x_i) = 1$ bo'lgan barcha x_i larning amplitudasini oshirish a_j dan $-a_j$ ga o'zgartirish. Bu operatsiya Z ni registrning oxirgi kvant bitiga o'zgartirishdir.

2. O'rtacha amplitudaga nisbatan inversiya. Ushbu akslantirishni quyidagicha yozish mumkin:

$$\sum_i |x_i\rangle \to \sum_i (2a_{o'r} - a_i)|x_i\rangle,$$

bu yerda $a_{o'r}$ – o'rtacha amplituda.

Yuqoridagi akslantirishni matritsa ko'rinishida quyidagicha ifodalash mumkin:

$$D = \begin{bmatrix} \frac{2}{N}-1 & \frac{2}{N} & \cdots & \frac{2}{N} \\ \frac{2}{N} & \frac{2}{N}-1 & \cdots & \frac{2}{N} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{2}{N} & \frac{2}{N} & \cdots & \frac{2}{N}-1 \end{bmatrix}$$

L.K. Grover [2] da ko'rsatganidek, bu akslantirishni kvant kompyuterida samarali amalga oshirish mumkin va butun algoritmning murakkabligi quyidagicha baholanadi: $O(\sqrt{2^n})$.

Kvant Furye almashtirishi quyidagicha aniqlanadi:

$$U_{QFT}(|x\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2^m}}\sum_{c=0}^{2^m-1} e^{\frac{2\pi icx}{2^m}}|c\rangle.$$

[10] da ko'rsatilganidek, bunday akslantirishni faqat ikki turdagi $m(m+1)/2$ kvant akslantirishlari yordamida qurish mumkin. Ulardan biri j – kvant bitiga qo'llaniladigan Adamar akslantirishi (uni H_j kabi

belgilanadi). Ikkinchisi esa quyidagicha ifodalanadigan ikki bitli akslantirishdir:

$$S_{j,k} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{i\frac{\pi}{2^{k-j}}} \end{pmatrix}.$$

Shorning [10] ishiga ko'ra, Furye kvant almashtirishini quyidagicha ifodalash mumkin:

$$U_{QFT} = H_0 S_{0,1} \dots S_{0,m-1} H_1 \dots H_{m-3} S_{m-3,m-2} S_{m-3,m-1} H_{m-2} S_{m-2,m-1} H_{m-1}.$$

Funksiya davrini topishning kvant algoritmi. $f(x)$ davriy funksiya berilgan bo'lsin. Bu funksiyaning aniqlanish sohasi va qiymatlar sohasi butun sonlar hamda ular uchun $0 \le x \le 2^n - 1, 0 \le f(x) \le 2^m - 1$ shartlar o'rnli bo'lsin. Ushbu funktsiyaning davrini topish uchun $n + m$ kvant bitlaridan tashkil topgan kvant registr zarur bo'ladi. Mazkur registr $\frac{1}{\sqrt{2^n}} \sum_{x=0}^{2^n-1} |x, 0\rangle$ holatga keltiriladi.

So'ngra registrni $\frac{1}{\sqrt{2^n}} \sum_{x=0}^{2^n-1} |x, f(x)\rangle$ holatga keltiradigan f funksiya hisoblanadi.

Oxirgi m kvant bitlarinining (ya'ni $f(x)$ ga tegishli kvant bitlarinining) holati o'lchanadi. Kvant registr esa quyidagi holatga o'tadi:

$$\sum_{x:f(x)=u} |x, u\rangle.$$

Kvant Fure almashtirishi amalga oshiriladi va natijada registr quyidagi holatga keladi:

$$\sum_j c_j \left| j \frac{2^n}{r} \right\rangle,$$

bu yerda c_j j ning $\frac{2^n}{r}$ ga karrali bo'lmagan barcha qiymatlari uchun nolga teng. Agar 2^n r ga bo'linmasa akslantirish aniq natija bermaydi, chunki, katta amplituda $[2^n/r]$ ga karrali butun sonlar atrofida to'plangan.

Va nihoyat registrning holati o'lchanadi va holatni ifodalovchi v soni topiladi. Agar davr ikkining darajasi bo'lsa, u holda $v = j\frac{2^n}{r}$ bo'ladi. Ko'p hollarda j va r o'zaro tub bo'lganligi sababli, $\frac{v}{2^n}$ kasrni soddalashtirish natijasi ham kasr bo'ladi. Hosil bo'lgan kasrning maxraji davr hisoblanadi. Umumiy holatda, davrning to'g'ri qiymati (u maksimal amplitudaga va shuning uchun maksimal ehtimollikka to'g'ri keladi) olingunga qadar butun algoritmni bir necha marta bajarish yoki sonlar nazariyasidan ma'lum bo'lgan cheksiz kasrga kengaytirish [10] usulidan foydalanish zarur.

Sonni tub ko'paytuvchilarga ajratish algoritmi (Shor algoritmi). Masala quyidagicha qo'yilgan bo'lsin: aniq ikkita tub bo'luvchiga ega bo'lgan N natural soni bor. Bu bo'luvchilarni topish talab qilinadi.

Ushbu muammoni hal qilishning eng mashhur klassik algoritmi (sonli maydon g'alviri algoritmi) superpolinomial murakkablikka ega. Bu fakt bilan, xususan, RSA kriptotizimining bardoshliligi asoslangan.

Biroq, bu muammoni polinom vaqtida hal qiladigan kvant algoritmi mavjud. Shunday a soni uchun uning N modul bo'yicha tartibi (ya'ni, $a^r = 1(modN)$ bo'lgan minimal r soni) juft bo'lsin. U holda $a^r = 1(modN)$ ifodani quyidagicha yozishmumkin:

$$(a^{\frac{r}{2}} - 1)(a^{\frac{r}{2}} + 1) = 0(mod\ N).$$

r ning qiymatini bilgan holda, N ning bo'luvchilarini oson topish mumkin. r ning tartibi aslida $a^x = 1(modN)$ funksiyaning davri ekanligini hisobga olsak, funksiya davrini topish algoritmi yordamida r ni aniqlash mumkin. a raqamini tasodifiy olish mumkin - agar funktsiyaning davri toq bo'lib chiqsa, boshqa a ni tanlash va algoritmni qayta ishga tushirish zarur.

7.4. Post-kvant kriptografiyasi tushunchalari

Post-kvant kriptografiyasi kvant kompyuterlari tomonidan hujumlarga qarshi turish uchun mo'ljallangan kriptografik algoritmlarga

ishora qiladi. Hozirgi kriptografik tizimlar, jumladan RSA va ECC kuchli kvant kompyuterlari tomonidan yechish mumkin bo'lgan matematik muammolarga asoslangan bo'lsa-da, post-kvant kriptografiyasi ham klassik, ham kvant kompyuterlarining hujumlariga chidamli bo'lgan matematik muammolarga asoslangan bo'ladi.

Kvantdan keyingi kriptografiyaga bo'lgan ehtiyoj kvant kompyuterlari hozirda qo'llanilayotgan kriptografik tizimlarning ko'pini buzish potentsialiga ega ekanligidan kelib chiqadi. Kvant kompyuterlari katta sonlarni faktoringlash va diskret logarifm masalasini yechish kabi muayyan matematik amallarni klassik kompyuterlarga qaraganda ancha tez bajarishi mumkin. Bu shuni anglatadiki, o'z xavfsizligi uchun ushbu muammolarga tayanadigan kriptografik tizimlar kvant kompyuterlari tomonidan hujumlarga qarshi zaif bo'ladi.

Post-kvant kriptografiyasi turli xil kriptografik algoritmlarni o'z ichiga oladi. masalan, panjarali kriptografiya, kodga asoslangan kriptografiya, xeshga asoslangan kriptografiya va ko'p o'lchovli kriptografiya. Bu algoritmlar klassik va kvant kompyuterlarining hujumlariga chidamli deb hisoblangan matematik muammolarga asoslangandir.

Masalan, panjara asosidagi kriptografiya yuqori o'lchamli panjarada eng qisqa vektorni topishning murakkabligiga asoslanadi. Kodga asoslangan kriptografiya chiziqli kodlarni dekodlashning murakkabligiga asoslanadi. Xeshga asoslangan kriptografiya bir tomonlama funksiyalar kontseptsiyasiga asoslangan bo'lib, ularni bir yo'nalishda hisoblash oson, lekin ortga qaytarish qiyin. Ko'p o'lchovli kriptografiya ko'p o'lchovli polinomli tenglamalarni echish tizimlarining murakkabligiga asoslanadi.

Post-kvant kriptografiyasi faol tadqiqot sohasi bo'lib, kriptografik standartlar bo'yicha ko'plab tashkilotlar hozirda potentsial post-kvant kriptografik algoritmlarni o'z standartlariga kiritish uchun baholamoqda. Post-kvant kriptografiya hali rivojlanishning dastlabki bosqichida bo'lsada, kvant kompyuterlari tomonidan yuzaga keladigan yangi tahdidlar sharoitida kriptografik tizimlar xavfsizligini ta'minlash uchun katta imkoniyatlarni bashorat qilmoqda.

Nazorat savollari

1. Yengil kriptografiya tushunchasiga ta'rif bering.
2. Yengil kriptografik algoritmlar qanaqa jihatlarni o'z ichiga oladi?
3. Yengil kriptografik algoritmlarning qanday turlari mavjud?
4. Xesh funksiyalarni yengil qilish uchun konstruktorlar odatda qanday usullar kombinatsiyasidan foydalanadilar?
5. Yengil xesh funktsiyasini tanlashda asosiy e'tibor berilishi kerak bo'lgan jihatlarga izoh bering.
6. Kvant kriptografiyasining asosiy tushunchalari?
7. Post-kvant kriptografiyasi vazifalari.

VIII BOB. Kriptografik kalitlarni boshqarish

8.1. Kriptografik kalitlarni boshqarish

Axborot-kommunikatsiya tizimida ma'lumotlar amashinuvigamos keluvchi kriptografik tizimni yaratish bilan bir qatorda shu tizimda kalitlar boshqarish masalasini optimal (qulay va ishonchli) hal etish muhim o'rin tutadi. Chunki tanlangan kriptotizim qanchalik murakkab va ishonchli bo'lmasin, baribir undan amalda foydalanish jarayonlari kalitlarni boshqarish masalasi bilan bog'liqdir. Agarda ma'lumotlarning mahfiy almashinuvi oz sonli foydalanuvchilar doirasida bo'lsa, kalitlar almashinuvi jarayonida noqulayliklar tug'ilmaydi. Ammo axborot-kommunikatsiya tizimida ma'lumotlarning mahfiy almashinuvi yuzlab, minglab va xatto millionlab foydalanuvchilar doirasida bo'lsa (misol uchun modem va Internet aloqa tizimlari orqali bank, savdo–sotiq, davlat ahamiyatiga bog'liq hamda boshqa muhim sohalardagi aloqa jarayoni foydalanuvchilari doirasida) kalitlarni boshqarishning o'ziga xos alohida muhim masalalari kelib chiqadi.

Kalitlar haqidagi ma'lumot deganda axborot-kommunikatsiya kriptotizimida mavjud bo'lgan barcha kalitlar to'plami va ularning muhofazasi bilan bog'liq ma'lumotlar tushuniladi. Agarda kalitlar haqidagi ma'lumotlarni yetarli darajadagi ishonchli muhofazali boshqaruvi ta'minlanmasa, tabiiyki, raqib tomonga axborot-kommunikatsiya tizimidagi deyarli ihtiyoriy ma'lumotni olish uchun to'la imkoniyat tug'iladi.

Kalitlarni boshqarish jarayoni quyidagi uchta muhim bo'lgan:

- barcha kalitlarning o'zaro bog'liq holda, ya'ni bir butun holda ishlash jarayonini ta'minlash (kalitlar generatsiyasi);
- kalitlar to'plamining maqsadli kengayib borishini ta'minlash (kalitlarlarning to'planishi);
- kalitlarlarni foydalanuvchilar doirasida taqsimlash (kalitlarlarning taqsimlanishi)jarayonlariga ahamiyat berishni talab etadi.

Kalit blokini tashkil etuvchi belgilar taqsimotini tasodifiylikka tekshirishda, avvalo, bu kalit blokini biror qoida bo'yicha hosil qilib olish zarur. Bu kabi ishlar. Odatda, psevdotasodifiy ketma-ketliklar generatorlari orqali amalga oshiriladi. Psevdotasodifiy ketma-ketlik

ishlab chiqaruvchi generatorlar haqida, ularning tuzilish asoslariga ko'ra turkumlari, xususiyatlari, xossalari, kriptografik masalarni yechishdagi qo'llanishlari V bobda batafsil tahlil qilingan. Xususan:

1) Chiziqli kongruent;

2) Kvadratik kongruent;

3) Bir tomonlama unikatsiyalarga, shifrlash va xeshlash algoritmlariga asoslangan;

4) Sonlar nazariyasi muammolariga asoslangan generatorlar tahlil qilingan.

Bundan tashqari, V bobda tasodifiylik darajasi yetarli yuqori va akslantirishlari kriptoxujum turlariga bardoshli va samarali:

1) Differensial va chiziqli kriptotahlil usullariga bardoshli bo'lgan 256 baytli S-blok va 16x16 o'lchamli siqish jadvali (SJ) akslantirishlari asosida;

2) Ikkita ustuni proporsional va barcha elementlari har-xil bo'lgan o'lchami x4 bo'lgan to'g'ri to'rtburchakli - matritsa, hamda, o'lchami 16x16, bo'lib, elementlari yarim baytdan iborat bo'lgan (0 dan 15 gacha sonlarni tekis taqsimotidan iborat) siqish jadvali (SJ) akslantirishlari asosida;

3) To'rtta 4 argumentli mantiqiy funksiya va o'lchami 16x16, elementlari yarim baytdan iborat bo'lgan (0 dan 15 gacha sonlarni tekis taqsimotidan iborat) siqish jadvali (SJ) akslantirishlari asosida;

4) Baytlar va bitlar o'rnini bog'liqsiz almashtirishga asoslangan psevdotasodifiy ketma-ketlik ishlab chiqaruvchi generatorlarni 5 marta kombinatsiyalashga asoslangan (boshqa sinfga tegishli bo'lgan generator ham olish mumkin) yangi generatorlar ishlab chiqilgan hamda ularning kriptobardoshli uzuluksiz shifrlash algoritmlari sifatida qo'llanilishi mumkinligi ilmiy asoslangan.

Quyida misol sifatida bir tomonlama funksiyalarga asoslangan psevdotasodifiy ketma-ketlik ishlab chiqaruvchi generatorlar keltirib o'tiladi[2,14,20]:

1) ANSI X9.17 generatori. Bu algoritm AQSh da psevdatasodifiy ketma-ketlik ishlab chiquvchi Milliy standart hisoblanib, FIPS (USA Federal Information Processing Standart) tarkibiga kiradi. Algoritmda bir

tomonlama funksiya sifatida uchlik DES ikkita K1, K2ÎV64 kalit ishlatiladi: DESK1DESK2 DESK1(64 bit).

2) FIPS-186 generatori. Bu algoritm ham AQSh Milliy standarti sifatida qabul qilingan bo'lib. DSA elektron raqamli imzo algoritmi mahfiy parametrlarini va kalitlarini generatsiya qilish uchun mo'jallangan. Algoritm bir tomonlama funksiya sifatida DES shifrlash algoritmi va SHA-1 xeshlash algoritmini ishlatadi.

3) Yarrow-160 generatori. Yarrow-160 psevdatasodifiy ketma-ketlik ishlab chiqaruvchi generatori Kelsi, Shnayer va Fergyuson tomonidan taklif qilingan. Bu yerda uchlik DES va SHA-1 xeshlash algoritmi ishlatilgan.

Sonlar nazariyasi muammolariga asoslangan generatorlar sifatida [2, 14, 20]:

1) RSA algoritmi asosidagi;

2) Mikali-Shnorr RSA algoritmi asosidagi;

3) BBS (Blum-Blum- Shub) - algoritmi asosidagi generatorlarni keltirish mumkin.

Agar chiziqli va multiplikativ kongruent generatorlar bilan aniqlangan sonlar ketma-ketligi uchun – bitlari ma'lum bo'lsa, u holda hosil qilingan ketma-ketlikning qolgan hadlarini topish imkoniyati mavjud[14, 20].

Sonlar nazariyasining muammolariga (tub ko'paytuvchilarga ajratish va diskret logarifmlash) asoslangan generatorlardan simmetrik shifrlash algoritmlari bardoshli kalitlarining generatsiya qilinishida foydalanish maqsadga muvofiq, chunki bu generatorlardan foydalanib, hosil qilingan ketma-ketlikning hadlarini biror qismini bilgan holda undan oldingi yoki keyingi qismlarini aniqlash imkoniyati murakkab masala hisoblanadi.

Biz bundan keyingi fikr-mulohazalarimizda, biror tanlangan psevdotasodifiy ketma-ketliklar generatori orqali kerakli uzunlikdagi kalit bloki generatsiya qilib olingan deb hisoblaymiz.

8.2. Kalitlarni taqsimlash algoritmlari

Axborot-kommunikatsiya tizimida ma'lumotlar amashinuviga mos keluvchi kriptografik tizimni yaratish bilan bir qatorda shu tizimda

kalitlar boshqarish masalasini optimal (qulay va ishonchli) hal etish muhim o'rin tutadi. Chunki tanlangan kriptotizim qanchalik murakkab va ishonchli bo'lmasin, baribir undan amalda foydalanish jarayonlari kalitlarni boshqarish masalasi bilan bog'liqdir. Agarda ma'lumotlarning mahfiy almashinuvi oz sonli foydalanuvchilar doirasida bo'lsa, kalitlar almashinuvi jarayonida noqulayliklar tug'ilmaydi. Ammo axborot-kommunikatsiya tizimida ma'lumotlarning mahfiy almashinuvi yuzlab, minglab va xatto millionlab foydalanuvchilar doirasida bo'lsa (misol uchun modem va INTERNET aloqa tizimlari orqali bank, savdo–sotiq, davlat ahamiyatiga bog'liq hamda boshqa muhim sohalardagi aloqa jarayoni foydalanuvchilari doirasida) kalitlarni boshqarishning o'ziga xos alohida muhim masalalari kelib chiqadi.

Kalitlar haqidagi ma'lumot deganda axborot-kommunikatsiya kriptotizimida mavjud bo'lgan barcha kalitlar to'plami va ularning muhofazasi bilan bog'liq ma'lumotlar tushuniladi. Agarda kalitlar haqidagi ma'lumotlarni yetarli darajadagi ishonchli muhofazali boshqaruvi ta'minlanmasa, tabiiyki, raqib tomonga axborot-kommunikatsiya tizimidagi deyarli ihtiyoriy ma'lumotni olish uchun to'la imkoniyat tug'iladi.

Kalitlarni boshqarish jarayoni quyidagi uchta muhim bo'lgan:

-barcha kalitlarning o'zaro bog'liq holda, ya'ni bir butun holda ishlash jarayonini ta'minlash (kalitlar generatsiyasi);

-kalitlar to'plamining maqsadli kengayib borishini ta'minlash (kalitlarlarning to'planishi);

-kalitlarlarni foydalanuvchilar doirasida taqsimlash (kalitlarlarning taqsimlanishi) jarayonlariga ahamiyat berishni talab etadi.

Kalitlarning ochiq taqsimlanish algoritmi haqida

Yana U. Diffi va M. Ye. Xellman bir tomonli funksiya sifatida taklif etgan ushbu

$$f(x)=\alpha^x \pmod p, \qquad (8.1)$$

p modul bo'yicha diskret darajaga ko'tarish funksiyasiga to'xtalamiz. Ilgari ta'kidlanganidek, bu yerda: x – butun son bo'lib, 1 dan $(p-1)$ gacha bo'lgan qiymatlarni qabul qilishi mumkin; p-yetarli katta bo'lgan tub

son; α – butun son bo'lib, 1 dan p gacha bo'lgan qiymatlarni qabul qiladi va uning darajalari $\alpha, \alpha^2, \cdots, \alpha^{p-1}$ qandaydir tartibda $1, \cdots, p-1$ qiymatlarni qabul qiladi. Misol uchun. $p=7$. $\alpha=3$ bo'lsa, $\alpha=3, \alpha^2=2, \alpha^3=6, \alpha^4=4, \alpha^5=5, \alpha^6=1$ ifodalarga ega bo'lamiz.

Algebrada mana shunday α sonini chekli $GP(p)$ maydonning sodda elementi deyiladi va ma'lumki, bunday α har doim mavjud bo'ladi.

Agarda $y=f(x)=a^x$ bo'lsa, u holda tabiiyki, bu funsiyaga teskari funksiya

$$x=f^{-1}(y)=\log_a y \qquad (8.2)$$

bo'lib, berilgan y lar bo'yicha x qiymatlarni topish diskret lagorifmlarni topish masalasi deyiladi. Xattoki, p ning yetarli katta bo'lgan qiymatlarida ham, misol uchun $p=2^{1000}$ bo'lganda ham, 1000 dan ko'p bo'lmagan kvadratga ko'tarish va ko'paytirish amallarini bajarib, $f(x)$ funksiyani oson hisoblash mumkin.

Agarda diskret darajaga ko'tarish funksiyasi haqiqatan ham bir tomonlama bo'lsa, u holda $\log_a y$ ifodani y ning barcha, ya'ni ushbu $1 \le y \le p$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi, barcha qiymatlarida hisoblashni amaliy jihatdan imkoniyati yuq bo'lishi kerak. M.Ye. Xellman va uning shogirdi Polig, faqatgina p soni katta tub son bo'lgandagina emas, balki $(p-1)$ soni katta tub kupaytuvchi q ga ega (yoki shu q tub son 2 ga kupaytirilgan) bo'lganda, (18.1) ifoda bilan aniqlangan funksiyaning y qiymatlariga ko'ra $\log_a y$ ifodani hisoblash amaliy jihatdan murakkab ekanligini ko'rsatdilar. U. Diffi va M.Ye. Xellman mahfiy aloqa tizimlari foydalanuvchilari uchun, diskret logorifmlardan foydalanib, mahfiy kalitlarni o'zaro almashuvini alohida maxfiy kanalsiz amalga oshirish algoritmini yaratdilar. Bu algoritm bo'yicha:

1. a va p sonlari hamma foydalanuvchilarga ma'lum.

2. Har bir foydalanuvchi, masalan i – foydalanuvchi 1 bilan $(p-1)$ sonlari oralig'idagi biror butun X_i sonini tanlab oladi bu sonni mahfiy tutadi.

3. i – foydalanuvchi $Y_i = \alpha^{X_i} (\mathrm{mod}\, p)$ qiymatni hisoblab, bu Y_i qiymatni mahfiy tutmay hamma foydalanuvchilar tomonidan tasdiqlangan va ular har doim foydalana oladigan ochiq ma'lumotlar kitobiga kiritadi.

4. Agarda, mahfiy aloqa tizimining i – foydalanuvchisi j – foydalanuvchi bilan mahfiy aloqa o'rnatmoqchi bo'lsa, i – foydalanuvchi ochiq ma'lumotlar kitobidan Y_j ni olib, o'zining mahfiy kaliti X_i yordamida

$$Z_{ij} = \left(Y_j\right)^{X_i} = \left(\alpha^{X_j}\right)^{X_i} = \alpha^{X_i X_j} (\mathrm{mod}\, p)$$

qiymatni hisoblaydi.

5. Xuddi shu kabi j – foydalanuvchi ham Z_{ji} ni hisoblaydi. Bunda $Z_{ij} = Z_{ji}$ bo'lib, i va j foydalanuvchilar o'z maxfiy aloqalarini ta'minlovchi simmetrik kalitli kriptotizimda Z_{ij} qiymatni maxfiy kalit sifatida ishlatishlari mumkin. Agar raqib tomon diskret logorifmlarni hisoblash masalasini yecha olsa, ochiq ma'lumotlar kitobidan Y_i va Y_j larni olib, $X_i = \log_\alpha Y_i$ va $X_j = \log_\alpha Y_j$ qiymatlarni hisoblab, Z_{ij} maxfiy kalitga ega bo'lgan bo'lar edi (i va j- foydalanuvchilar kabi).

Shu yerda ta'kidlab o'tish joizki, ochiq ma'lumotlar kitobi axborotlarning mahfiy aloqa tizimi foydalanuvchilarigagina ochik.

Yuqorida keltirilgan algoritmdan ko'rinib turibdiki, hali bu narsa nazariy jihatdan to'la isbotlangan bo'lmasada, raqib tomon Z_{ij} qiymatni boshqa biror uslub bilan hisoblay olmaydi. Keltirilgan algoritm U.Diffi va M.Ye. Xellmanning kalitlarni ochiq taqsimlash tizimi deyiladi. Bu mahfiy aloqa tizimida mahfiy kalitlarni mahfiy kanal bilan uzatishning hojati yuqligini ta'minlovchi birinchi sistema bo'lib, bugungi kunda ham bardoshli va qulay ochiq kalitli boshqa kriptotizimlarlarning asosini tashkil etadi.

U. Diffi va M.Ye. Xellmanning kalitlarni ochiq taqsimlash sistemasi ochiq kalitli boshqa kriptotizimlar kabi mahfiy kalitni mahfiy kanal orqali uzatilishining hojati yo'qligini ta'minlaydi, ammo autentifikatsiya masalasini yechmaydi.

Quyida Diffi-Xelman algoritmi asosida kalit almashinishga misol keltirilgan.

ALICE	EVIL EVE	BOB
Alice va Bob ikkita g, p (p>g) sonni hosil qiladi. p=11, g=7	Buzg'unchiga ham p=11, g=7 ma'lum.	Alice va Bob ikkita g, p (p>g) sonni hosil qiladi. p=11, g=7
Alice o'zining maxfiy kalitini hosil qiladi. X_A=6		Bob o'zining maxfiy kalitini hosil qiladi. X_B=9
$Y_A=g^{X(A)}(modp)$ $Y_A=7^6 mod 11=4$	→	$Y_B=g^{X(B)}(modp)$ $Y_A=7^9 mod 11=8$
Alice Y_A=8 ni qabul qiladi.	Buzg'unchiga ham Y_V =4, Y_A = 8 ma'lum.	Bob Y_V=4 ni qabul qiladi.
Maxfiy kalit = $Y_B{}^{X_A} modp$ Maxfiy kalit = $8^6 mod 11$ = 3		Maxfiy kalit = $Y_A{}^{X_B} modp$ Maxfiy kalit = $4^9 mod 11$ = 3

Ushbu kalitni ochiq taqsimlash protokoli O'rtaga turgan odam hujumiga bardoshli emas.

EECh asoslangan Diffi-Xelman

ALICE		BOB
$n_A \in [1, n-1]$shartni qanoatlantiruvchi son tanlanadi. $Q_A = n_A P$ochiq kalitni hisoblaydi. BOBdan Q_B ni qabul qiladi.		$n_B \in [1, n-1]$shartni qanoatlantiruvchi son tanlanadi. $Q_B = n_B P$ochiq kalitni hisoblaydi. ALICEdan Q_A ni qabul qiladi.
Umumiy kalitni hosil qilish		
$K = n_A Q_B$		$K = n_B Q_A$
$K = n_A Q_B = n_B Q_A = n_A n_B P$		
Bu usul ham odatiy usul kabi O'rtaga turgan odam hujumiga bardoshsiz.		

Nazorat savollari

1. Kalitlarni boshqarish tizimlarining vazifasi nimadan iborat.
2. Kalitlarni generatsiyalash bo'limining vazifasi.
3. Kalitlarni ochiq taqsimlash protokolini tushuntiring.
4. Kerberos protokoli.

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR

1. Z.T.Xudoykulov, Sh.Z.Islomov, U.R.Mardiev. Kriptografiya 1: O‘quv qo‘llanma. – Toshkent, 2021, 236 bet.

2. Z.T.Xudoykulov, O.M.Allanov, I.M.Boyquziyev, I.S.Olimov, O.O.Tursunov, U.U.Tojiakbarova. Kriptografiya 2: O‘quv qo‘llanma ; – Toshkent, 2022. – 180 b.

3. A.J.Menezes, P.C. van Oorschot, S.A.Vanstone. Handbook of Applied Cryptography. CRÇ Press, 2001, 816 p.

4. Шнайер Б. Прикладная криптография. Протоколы, алгоритмы, исходные тексты на языке Си. –М.: издательство ТРИУМФ, 2003 -816 стр.

5. S.K.Ganiev, A.A.Ganiev, Z.T.Xudoyqulov. Kiberxavfsizlik asoslari: O‘quv qo‘llanma. – T.: “Iqtisod-Moliya”, 2021. – 228 b.

6. S.K.Ganiev, T.A.Kuchkarov. Tarmoq xavfsizligi (Mobil tarmoq xavfsizligi). O‘quv qo‘llanma. –T.: «Aloqachi», 2019, 140 b.

7. S.K.Ganiev, M.M.Karimov, Z.T.Xudoyqulov, M.M.Kadirov. Axborot xavfsizligi bo‘yicha atama va tushunchalarning rus, o‘zbek va ingliz tillaridagi izohli lug‘ati. –T.: «Iqtisod-moliya», - 2017, 480 bet.

8. S.K.Ganiev, M.M.Karimov, K.A.Tashev. Axborot xavfsizligi. –T.: «Fan va texnologiya», 2016, 372 bet.

9. S.K.Ganiev, M.M.Karimov, K.A.Tashev. Axborot xavfsizligi. Axborot-kommunikatsion tizimlar xavfsizligi. O‘quv qo‘llanma. –T.: «Aloqachi», 2008, 382 bet.

10. Stamp M. Information security: principles and practice // John Wiley & Sons, 2011, -P. – 606.

11. D.Y.Akbarov, P.F.Xasanov, X.P.Xasanov, O.P.Axmedova, I.U.Xolimtoyeva. Kriptografiyaning matematik asoslari. O‘quv qo‘llanma. –T.: «Aloqachi», 2019, 192 bet.

12. Akbarov D.Y. Axborot xavfsizligini ta’minlashning kriptografik usullari va ularning qo‘llanilishi // Toshkent, 2008, 394 bet.

13. Шаньгин, В. Ф. Информационная безопасность компьютерных систем и сетей : Учеб. пособие / В.Ф. Шаньгин. — Москва : ИД «ФОРУМ» : ИНФРА-М, 2017. — 416 с.

14. А.П. Алферов, А.Ю. Зубов, А.С. Кузьмин, А.В. Черемушкин. Основы криптографии: Учебное пособие, 2-е изд. –М.: Гелиос АРВ, 2002.-480 с.

15. Xasanov X.P. Takomillashgan diamatritsalar algebralari va parametrli algebra asosida kriptotizimlar yaratish usullari va algoritmlari. –Toshkent, 2008. - 208 bet.

16. O'z DSt 1105:2009 Axborot texnologiyasi. Axborotning kriptografik muhofazasi. Ma'lumotlarni shifrlash algoritmi.

17. O'z DSt 1106:2009 Axborot texnologiyasi. Axborotning kriptografik muhofazasi. Xeshlash funksiyasi.

18. David A. McGrew, John Viega. The Galois/Counter Mode of Operation
(GCM), 2001. https://csrc.nist.rip/groups/ST/toolkit/BCM/documents/proposedmodes/gcm/gcm-spec.pdf

19. DES Modes of Operation. Federal Information Processing Standards Publication 81, December, 1980.

20. Federal Information, Processing Standards Publication 197. Announcing the Advanced Encryption Standard (AES). November 26, 2001.

21. Rogaway, P., Coppersmith, D. A Software-Optimized Encryption
Algorithm. J.Cryptology 11, 273287 (1998). https://doi.org/10.1007/s00 1459900048

Internet resurslari

1. MD5 [sayt]: https://en.wikipedia.org/wiki/MD5 (murojaat vaqti: 26.04.2021).

2. SHA-1 [sayt]: https://en.wikipedia.org/wiki/SHA-1 (murojaat vaqti: 26.04.2021).

3. HMAC [sayt]: https://en.wikipedia.org/wiki/HMAC (murojaat vaqti: 26.04.2021).

4. International Data Encryption Algorithm [sayt]: https://en.wikipedia.org/wiki/International_Data_Encryption_Algorithm (murojaat vaqti: 26.04.2021).

5. GOST 28147-89 [sayt]: https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%93%D0%9E%D0%A1%D0%A2_28147-89 (murojaat vaqti: 26.04.2021).

6. [illegible] [sayt]: [illegible] (murojaat vaqti: 26.04.2021).

7. RC4 [sayt]: https://en.wikipedia.org/wiki/RC4 (murojaat vaqti: 26.04.2021).

8. Enigma Machine Emulator [sayt]: https://www.101computing.net/enigma-machine-emulator/ (murojaat vaqti: 26.04.2021).

9. WAKE [sayt]: https://ru.wikipedia.org/wiki/WAKE (murojaat vaqti: 26.04.2021).

ATAMALARNING RUS, O'ZBEK VA INGLIZ TILLARIDAGI IZOHLI LUG'ATI

Алгоритм - упорядоченный конечный набор четко определенных правил для решения задач за конечное количество шагов.

Algoritm – amallarning cheklangan soni yordamida masala yechimini belgilovchi buyruqlarning cheklangan to'plami.

Algorithm - an ordered finite set of clearly defined rules for solving problems in a finite number of steps.

Алгоритм Rijndael - криптографический алгоритм, указанный в Advanced Encryption Standard.

Rijndael algoritmi - Advanced Encryption Standardda ko'rsatilgan kriptografik algoritm.

Rijndael – cryptographic algorithm specified in the Advanced Encryption Standard.

Алгоритм SHA - хэш-алгоритм со свойствами, которые в вычислительном отношение неосуществимы: 1) чтобы найти сообщение, которое соответствует данному дайджесту сообщения или 2) найти два различных сообщения, которые производят тот же самый дайджест сообщения.

SHA algoritmi - 1) berilgan xabar daydjestiga mos xabarni topish yoki 2) bir xil xabar daydjestini hosil qiluvchi ikkita turli xabarlarni hisoblash orqali topish imkonsiz bo'lgan xususiyatlarga ega xesh - algoritm.

Secure hash algorithm (SHA) – a hash algorithm with the property that is computationally infeasible 1) to find a message that corresponds to a given message digest, or 2) to find two different messages that produce the same message digest.

Алгоритм шифрования блочный базовый - алгоритм шифрования, реализующий при каждом фиксированном значении ключа одно обратимое отображение множества блоков текста открытого, имеющих фиксированную длину. Представляет собой алгоритм простой замены блоков текста фиксированной длины.

Shifrlashning bazaviy blokli algoritmi - kalitning har bir muayyan qiymatida belgilangan uzunlikdagi ochiq matn bloklari to'plami ustida bitta qaytariluvchi akslantirishni amalga oshiruvchi shifrlash algoritmi. Belgilangan uzunlikdagi matn bloklarini oddiy almashtirish algoritmi hisoblanadi.

Basic block encryption algorithm – the encoding algorithm that implements each fixed key value one reversible mapping from a set of plaintext blocks, having a fixed length. The algorithm is a simple replacement of blocks of text of fixed length.

Алгоритм шифрования поточный - алгоритм шифрования, реализующий при каждом фиксированном значении ключа последовательность обратимых отображений, действующую на последовательность блоков текста открытого.

Oqimli shifrlash algoritmi - kalitning har bir muayyan qiymatida ochiq matn bloklari ketma-ketligiga ta'sir etuvchi qaytariluvchi akslantirish ketma-ketligini amalga oshiruvchi shifrlash algoritmi.

Stream encryption algorithm - an encryption algorithm that implements, for each fixed value of key, sequence of reversible mapping that acting on a sequence of blocks of plaintext.

Алгоритм шифрования - алгоритм криптографический, реализующий функцию шифрования. В случае шифрсистем блочных получается использованием алгоритма шифрования блочного базового в конкретном режиме шифрования.

Shifrlash algoritmi - shifrlash funksiyasini amalga oshiruvchi kriptografik algoritm. Blokli shifrtizim holida shifrlashning muayyan rejimida shifrlashning bazaviy blokli algoritmidan foydalanib hosil qilinadi.

Encryption algorithm - a cryptographic algorithm that implements the function of encryption. In the case of block cipher system is obtained using the algorithm of the base block encryption in a particular mode of encryption.

Алгоритм кодирования имитозащищающего - алгоритм криптографического преобразования информации, обеспечивающий контроль ее целостности (как правило за счет внесения избыточности). В отличие от алгоритма формирования подписи цифровой использует криптосистемы симметричные. Примерами а. к. и. являются код аутентификации, некоторые автоматные преобразования и алгоритмы шифрования.

Imitohimoyalovchi kodlash algoritmi – axborot yaxlitligini (odatda, ortiqchalikni kiritish evaziga) nazoratlashni ta'minlovchi axborotni kriptografik o'zgartirish algoritmi. Raqamli imzoni shakllantirish algoritmidan farqli holda simmetrik kriptotizim ishlatiladi. Misol sifatida autentifikatsiyalash kodini, ba'zi avtomatik o'zgartirishlarni va shifrlash algoritmlarini ko'rsatish mumkin.

Integrity protection coding algorithm - the algorithm of cryptographic transformation of information, providing control its integrity (usually by introducing redundancy). In contrast to the algorithm for generating the digital signature uses a symmetric cryptosystem. Examples of the integrity protection coding algorithm are authentication code, some automatic conversion and encryption algorithms.

Алгоритм криптографический - алгоритм, реализующий вычисление одной из функций криптографических.

Kriptografik algoritm – kriptografik funksiyalardan birini hisoblashni amalga oshiruvchi algoritm.

Cryptographic algorithm - the algorithm that implements the calculation of one cryptographic functions.

Алгоритм расшифрования - алгоритм криптографический, обратный к алгоритму шифрования и реализующий функцию расшифрования.

Deshifrlash algoritmi – deshifrlash funksiyasini amalga oshiruvchi va shifrlash algoritmiga teskari algoritm.

Decryption algorithm – the cryptographic algorithm which is inverse to the encryption algorithm that implements the decryption function.

Алгоритм формирования подписи цифровой - составная часть схемы подписи цифровой. Алгоритм (вообще говоря, рандомизированный), на вход которого подаются подписываемое сообщение, ключ секретный, а также открытые параметры схемы подписи цифровой. Результатом работы алгоритма является подпись цифровая. В некоторых разновидностях схемы подписи цифровой при формировании подписи используется протокол.

Raqamli imzoni shakllantirish algoritmi – raqamli imzo sxemasining tarkibiy qismi. Kirish yo'liga imzolanuvchi xabar, maxfiy kalit, hamda raqamli imzo sxemasining ochiq parametrlari beriluvchi algoritm (umuman randomizatsiyalangan algoritm). Algoritm ishining natijasi raqamli imzo hisoblanadi. Raqamli imzo sxemasining ba'zi turlarida imzoni shakllantirishda protokol ishlatiladi.

The algorithm for generating a digital signature - an integral part of the digital signature scheme. The algorithm (generally randomized), the input of which serves a signed message, secret key and public parameters of the signature scheme digital. The result of the algorithm is the digital signature. In some versions of this signature scheme in the formation of the digital signature protocol is used.

Алгоритм хеширования - в криптографии - алгоритм, реализующий хеш-функцию криптографическую. В математике и программировании - алгоритм преобразования строк символов, как правило, уменьшающий длину строки и такой, что значение каждого символа выходной строки зависит сложным образом от большого количества входных символов (в идеале - от всех). Обычно, алгоритм хеширования преобразует строки произвольной длины в строки фиксированной длины.

Xeshlash algoritmi – kriptografiyada kriptografik xesh-funksiyani amalga oshiruvchi algoritm. Matematika va dasturlashda – odatda, satr uzunligini kamaytiruvchi simvollar satrini o'zgartiruvchi algoritm. Chiqish yo'li satrining har bir simvolining qiymati kirish yo'li simvollarining katta soniga (idealda – barchasiga) murakkab tarzda

bog'liq. Odatda xeshlash algoritmi ixtiyoriy uzunlikdagi satrni belgilangan uzunlikdagi satrga o'zgartiradi.

Hashing algorithm – in cryptography, an algorithm that implements the cryptographic hash function. In mathematics and computer programming - algorithm for converting strings of characters, generally reducing the length of the string and such that the value of each symbol of the output string depends in a complex way from a large number of input characters (ideally all). Usually, hashing algorithm converts strings of arbitrary length to strings of fixed length.

Алгоритм цифровой подписи - асимметричный алгоритм, используемый для цифровой подписи данных.

Raqamli imzo algoritmi - ma'lumotlarni raqamli imzolash uchun foydalaniluvchi asimetrik algoritm.

Digital signature algorithm – asymmetric algorithm used for digitally signing data.

Алгоритм шифрования RSA - алгоритм шифрования, предложенный в 1978 г. Р. Райвестом, А. Шамиром и Л. Адлеманом и предназначенный для построения шифрсистем асимметричных.

RSA shifrlash algoritmi – 1978 yili R. Rayvest, A Shamir va L.Adleman tomonidan taklif etilgan va asimetrik shifr tizimlarini qurishga mo'ljallangan shifrlash algoritmi.

RSA encryption algorithm - the encryption algorithm proposed in 1978 by R. Rivest, A. Shamir and L. Adleman and is designed to build asymmetric ciphers.

Алгоритм шифрования инволютивный - алгоритм шифрования, для которого алгоритмы шифрования и расшифрования совпадают. Другими словами, если к тексту открытому дважды применить алгоритм шифрования, то получится тот же самый открытый текст. Исторически для таких алгоритмов употребляется название «обратимый», но правильно называть их именно «инволютивными», в соответствии с общим пониманием инволюции в математике.

Involyutiv shifrlash algoritmi – shifrlash va deshifrlash algoritmlari bir xil bo'lgan shifrlash algoritmi. Boshqacha aytganda, agar ochiq matnga shifrlash algoritmi ikki marta ko'llanilsa, dastlabki ochik matn olinadi. Tarixan, bunday algoritmlarga "qaytalanuvchi" iborasi ishlatiladi. ammo matematikadagi involyutsiya tushunchasiga mos xolda aynan "involyutiv" iborasi ishlatilgani to'g'ri bo'ladi.

Involutive encryption algorithm - the encryption algorithm for which the encryption and decryption algorithms are the same. In other words, if the encoding algorithm is applied to the plaintext twice, we get the same plaintext. Historically, such algorithms used the name "reversible", but the correct name for them is "involutive", in accordance with the common understanding of involution in mathematics.

Алгоритм шифрования итеративный - алгоритм шифрования, для которого соответствующие алгоритм шифрования и алгоритм расшифрования состоят из последовательных однотипных циклов шифрования.

Iterativ shifrlash algoritmi – mos shifrlash algoritmi va deshifrlash algoritmi shifrlashning ketma-ket bir xil sikllardan tashkil topgan shifrlash algoritmi.

Iterative encryption algorithm - the encryption algorithm for which the corresponding encoding algorithm and the decryption algorithm consist of sequential identical cycles of encryption.

Атака на криптосистему - попытка противника и/или нарушителя понизить уровень безопасности конкретной системы криптографической на основе определенных методов криптоанализа и при некоторых предположениях криптоанализа. Совокупность различных атак постоянно расширяется за счет развития теоретических методов и возможностей техники.

Kriptotizimga hujum – dushmanning va/yoki buzg'unchining kriptotahlilning ma'lum usullari asosida va kriptotahlilning ba'zi taxminlarida muayyan kriptografik tizim xavfsizligi darajasini

pasaytirishga urinishi. Turli hujumlar majmui nazariy usullar va texnika imkoniyatlarining rivoji evaziga doimo kengaya boradi.

The attack on the cryptosystem - attempt of the opponent and/or the offender to decrease the level of security of specific cryptographic systems based on specific methods of cryptanalysis under certain assumptions cryptanalysis. The combination of different attacks is constantly expanding due to the development of theoretical methods and the potential of technology.

Бит (двоичный код) - минимальная единица количества информации в компьютере, равная одному двоичному разряду.

Bit (ikkili kod) – kompyuterdagi bitta ikkili xonaga teng axborot miqdorining minimal birligi.

Bit (binary) - the minimum unit of the amount of information in a computer, equal to one binary digit.

Бит достоверности - бит, добавляемый к слову в памяти компьютера для указания достоверности информации.

Haqiqiylik biti – axborot haqiqiyligini ko'rsatish maqsadida kompyuter xotirasidagi so'zga qo'shiladigan bit.

Validity bit - the bit added to the word in the computer memory to indicate the reliability of the information.

Бит защиты - двоичный разряд в ключе памяти, устанавливающий защиту соответствующего блока памяти от записи либо от выборки и записи.

Himoya biti – xotiraning mos blokiga yozish yoki undan tanlash va unga yozishdan himoyalash uchun o'rnatiladigan xotira kalitidagi ikkili xona.

Protection bit - binary digit in the memory key setting protection of a corresponding memory block from write or from select and write.

Бит контроля на четность - контрольный бит, добавляемый к данным для контроля их верности таким образом, чтобы сумма

двоичных единиц, составляющих данное, включая и единицу контрольного бита, всегда была четной (либо всегда нечетной).
Juftlikka tekshirish biti – ma`lumotlarga, ularning to`g`riligini nazorat qilish uchun ma`lumotni tashkil etuvchi ikkili birliklarning. jumladan. nazorat biti birligining yig`indigi doimo juft (yoki doimo toq) bo'lishligini ta'minlash maqsadida qo'shiladigan nazorat biti.
Parity bit - control bits added to the data to control their loyalty so that the sum of binary units, the components of this, including the unit control a bit, was always even (or always odd).

Бит маски - сочетание битов, устанавливаемых в нулевое или единичное значение для разрешения или запрета определенных операций либо для проверки или изменения содержимого поля.
Niqob biti – ma'lum amallar bajarilishiga ruxsat berish yoki rad etish yoki hoshiya tarkibini tekshirish yoki o'zgartirish uchun nul yoki bir qiymatiga o'rnatiluvchi bitlar birikmasi.
Mask bit - the combination of bits set to zero or a single value to allow or prevent certain operations or to verify or modify the field contents.

Блок – последовательность бинарных битов, которые включают ввод, вывод, состояние и раунд ключа. Длина последовательности - число битов, которые он содержит. Блоки также интерпретируются как массивы байтов.
Blok – kalitning kirish, chiqish, holat va raundini o'z ichiga oluvchi binar bitlar ketma – ketligi. Ketma – ketlik uzunligi - u tashkil topgan bitlar soni. Bloklar baytlar massivlari shaklida ham izohlanadi.
Block – sequence of binary bits that comprise the input, output, state, and round key. The length of a sequence is the number of bits it contains. Blocks are also interpreted as arrays of bytes.

Блок текста — мулътиграмма текста (текста открытого, текста шифрованного или промежуточного), составленная из подряд идущих знаков. Обычно текст разбивается на блоки одинаковой длины.

Matn bloki - ketma–ket keluvchi belgilardan tuzilgan matn multigrammasi (ochiq matn, shifrlangan matn, oraliq matn). Odatda matn uzunligi bir xil bloklarga ajratiladi.

Text block - multigram text (plaintext, ciphertext, or intermediate text), made up of consecutive digits. Usually the text is divided into blocks of equal length.

Блокнот одноразовый — записанный на некотором материальном носителе (например, в специальных бумажных блокнотах) набор данных, используемых для получения последовательностей, управляющих для однократного шифрования. Этот набор данных, обладающий определенными свойствами, должен обеспечивать стойкость (шифрсистемы) совершенную при однократном применении.

Bir martali bloknot - bir martali shifrlash uchun boshqaruvchi ketma-ketlikni olish maqsadida ishlatiluvchi qandaydir moddiy eltuvchida (masalan, maxsus qog'oz bloknotlarda) yozilgan ma'lumotlar nabori. Ma'lum xususiyatlarga ega bo'lgan ushbu ma'lumotlar nabori bir martali ishlatilishida mutlaqo bardoshlikni (kiriptotizim bardoshligini) ta'minlashi lozim.

One-time pad - recorded on some tangible medium (e.g., special paper, notebooks) data set used to obtain the sequences of governors for a one-time encryption. This dataset, have certain properties that must ensure stability (cipher system) perfect after a single use.

Блочный алгоритм шифрования - алгоритм шифрования, осуществляющий криптографическое преобразование исходной информации путем выполнения криптографических операций над *n*-битными блоками открытого текста.

Shifrlashning blokli algoritmi – ochiq matnning *n*-bitli bloklari ustida kriptografik amallarni bajarish yo'li bilan dastlabki axborotning kriptografik o'zgartirishni amalga oshiruvchi shifrlash algoritmi.

Block encryption algorithm - the encryption algorithm performing a cryptographic transformation of the original information by performing cryptographic operations on *n*-bit blocks of plain text.

Гамма шифра - псевдослучайная двоичная последовательность, вырабатываемая по заданному алгоритму для шифрования открытой информации и расшифрования шифрованной.
Shifr gammasi – ochiq axborotni shifrlash va deshifrlash uchun berilgan algoritm bo'yicha ishlab chiqiladigan psevdotasodifiy ikkili ketma-ketlik.
Gamma cipher - pseudorandom binary sequence generated by a given algorithm for encoding public information and decrypt the encrypted.

Гаммирование - процесс наложения по определенному закону гаммы шифра на открытые данные.
Gammalash – ochiq ma'lumotlarga ma'lum qonuniyat bo'yicha gamma shifrini qo'yish jarayoni.
Gamming - the overlay process under the particular law of gamma cipher on the open data.

Генератор ключей - техническое устройство или программа, предназначенные для выработки массивов чисел или других данных, используемых в качестве ключей (криптосистемы), последовательности ключевой, векторов инициализации и т. п.
Kalitlar generatori - kalit (kriptotizim kaliti), kalit ketma-ketligi, inisilizatsiya vektorlari va h. sifatida ishlatiluvchi son massivlari yoki boshqa ma'lumotlarni ishlab chiqarishga mo'ljallangan texnik qurilma yoki dastur.
Key generator - a technical device or program that is designed to generate arrays of numbers or other data used as a key (cryptosystem), the sequence of key, initialization vectors, etc.

Генератор последовательностей псевдослучайных — техническое устройство или программа, для выработки последовательностей псевдослучайных.

Psevdotasodifiy ketma-ketliklar generatori - psevdotasodifiy ketma-ketliklarni ishlab chiqaruvchi texnik qurilma yoki dastur.
Pseudorandom sequences generator - a technical device or program to generate pseudorandom sequences.

Дешифрование - операция, обратная шифрованию и связанная с восстановлением исходного текста из шифрованного.
Deshifrlash – shifrlangan matnni dastlabki matnga tiklash bilan bog'liq shifrlashga teskari amal.
Decryption - the inverse operation of encryption and associated with the restoration of the original text from the encrypted.

Ключ бинарный — ключ, заданный вектором с двоичными координатами.
Ikkili kalit – ikkili koordinatali vektor ko'rinishida berilgan kalit.
Binary key — the key specified by the vector with integer coordinates.

Ключ главный — элемент ключа составного, который используется для шифрования ключей, предназначенных для шифрования ключей разовых или для генерации других видов ключей посредством шифрования определённых данных.
Bosh kalit - bir martali kalitlarni shifrlashga yoki ma'lum ma'lumotlarni shifrlash orqali kalitlarning boshqa turini generatsiyalash uchun mo'ljallangan kalitlarni shifrlashda ishlatiluvchi tarkibiy kalit elementi.
Master key — item composite key, used to encrypt keys for a single encryption key or to generate other types of keys through encryption of certain data.

Ключ долговременный — элемент ключей составных, действующий в неизменном виде длительное время.
Davomli kalit - uzoq vaqt davomida o'zgarmagan holda ishlatiluvchi tarkibiy kalit elementi.
Long-term key — item composite key, valid unchanged for a long time.

Ключ шифрования — ключ, используемый при шифровании.
Shifrlash kaliti - shifrlashda ishlatiluvchi kalit.
Encryption key — the key used in the encoding.

Ключ шифрованный - криптографический ключ, который был шифрован с помощью аттестованной функции безопасности с ключом ключа шифрования, ПИН-кода или пароля для того, чтобы скрыть значение базового ключа открытого текста.
Shifrlangan kalit - ochiq matnning bazaviy kaliti qiymatini yashirish maqsadida attestatsiyadan o'tgan xavfsizlik funksiyasi bilan kalitni shifrlash kaliti, PIN kod yoki parol yordamida shifrlangan kriptografik kalit.
Encrypted key – a cryptographic key that has been encrypted using an approved security function with a key encrypting key, a PIN, or a password in order to disguise the value of the underlying plaintext key.

Ключ симметричный - криптографический ключ, использующийся для выполнения как криптографической операции и её инверсии, например, для шифрования и дешифрования, или создать код аутентификации сообщения и проверки кода.
Simmetrik kalit - har ikkala, kriptografik amal va uning inversiyasini, masalan, shifrlash va deshifrlashni yoki xabarni autentifikatsiyalash kodini hosil qilish va kodni tekshirishni amalga oshirish uchun foydalaniluvchi kriptografik kalit.
Symmetric key – a cryptographic key that is used to perform both the cryptographic operation and its inverse, for example to encrypt and decrypt, or create a message authentication code and to verify the code.

Ключ слабый — ключ криптосистемы, при котором заметно ухудшаются характеристики стойкости криптографической криптосистемы по сравнению со средними значениями тех же характеристик при ключе, случайно равновероятно выбранном из множества ключевого криптосистемы.

Zaif kalit - kriptotizim kaliti bo'lib, unda kriptotizimning kriptobardoshlik xarakteristikalari, kriptotizim kalitlari to'plamidan tasodifan, teng ehtimollik tarzda tanlangan kalitning o'sha xarakteristikalarining o'rtacha qiymatlariga nisbatan sezilarli darajada yomonlashadi.

Weak key — key cryptosystem, which significantly degraded the strength of cryptographic cryptosystem in comparison with the average values of the same characteristics when key randomly uniformly chosen from the set key of the cryptosystem.

Код аутентификации — вид алгоритма кодирования имитозащищающего информации. Как правило, код аутентификации сопоставляет сообщение с его кодом аутентичности. Алгоритм принятия решения о подлинности информации основан на проверке значения кода аутентичности сообщения.

Autentifikatsiya kodi – axborotni imitohimoyalovchi kodlash algoritmining turi. Odatda, autentifikatsiya kodi xabarni uning haqiqiylik kodi bilan taqqoslaydi. Axborotning haqiqiyligi xususida qaror qabul qilish algoritmi xabar haqiqiyligi kodi qiymatini tekshirishga asoslangan.

Authentication code — the type of encoding algorithm mitsamiouli information. Typically, the authentication code matches the message code authenticity of the message. The decision algorithm on the authentication information based on the verification code value to the authenticity of the message.

Код аутентификации сообщений на основе хэш - код аутентификации сообщения, использующий криптографический ключ в сочетании с хэш-функцией.

Xeshga asoslangan xabarlarni autentifikatsiyalash kodi - xesh funksiya bilan birgalikda kriptografik kalitdan foydalanuvchi, xabarlarni autentifikatsiyalash kodi.

Hash-based message authentication code – a message authentication code that uses a cryptographic key in conjunction with a hash function.

Коды Рида Соломона - важное семейство линейных блоковых кодов с исправлением ошибок. особенно удобных для исправления пакетов ошибок. Они могут рассматриваться и как обобщение кодов Боуза Чоудхури Хокенгема, и как особый случай кодов Гоппы, могут быть отнесены к циклическим кодам.

Rid Solomon kodlari – xatoliklarni tuzatuvchi, ayniqsa, xatoliklar paketini tuzatishga qulay chiziqli blokli kodlarning muhim oilasi. Ushbu kodlarni Bouz Choudxuri Xokengem kodlarining umumlashtirilgani sifatida va Goppa kodlarining maxsus holi sifatida, siklik kodlar sifatida ko'rish mumkin.

Reed - Solomon codes - an important family of linear block codes with error correction particularly useful for correcting error bursts. They can be considered as a generalization of codes Bose Chowdhury of Hockenheim, and as a special case codes happy, can be related to cyclic codes.

Коллизия – два или больше разных типов ввода, которые осуществляют одинаковый вывод.

Kolliziya – ikki yoki undan ortiq turli kirishlarni bir xil chiqish hosil qilishi.

Collision – two or more distinct inputs produce the same output

MUNDARIJA

Muhammad al-Xorazmiy nomidagi Toshkent axborot texnologiyalari universiteti. 2023

"Kriptografik usullar"

60612100– Kiberxavfsizlik injiniringi
yo'nalishi talabalari uchun o'quv qo'llanma.

Kriptologiya kafedrasi majlisida
ko'rib chiqildi va nashr etishga ruxsat etildi.
2023 yil 12 aprel
17 - sonli bayonnoma

"Kiberxavfsizlik" fakulteti UK majlisida
ko'rib chiqildi va nashr etishga ruxsat etildi.
2023 yil 20 aprel
8 - sonli bayonnoma

Muhammad al-Xorazmiy nomidagi
TATU Kengashi majlisida
ko'rib chiqildi, nashr etishga va nashr
guvohnomasini olishga ruxsat etildi
2023 yil 27 iyun
10(712) - sonli bayonnoma

Tuzuvchilar: Z.T.Xudoyqulov
I.M.Boyquziyev
O.M.Allanov
U.R.Mardiyev
N.A.Jabbarov

Taqrizchilar: Sh.R.G'ulomov
B.F.Abduraximov

Mas'ul muharrir: Z.T.Xudoyqulov

Musahhih: _____

Z.T. XUDOYQULOV, I.M. BOYQUZIYEV, O.M. ALLANOV,
U.R. MARDIEV, N.A. JABBAROV

KRIPTOGRAFIK USULLAR

Muharrir: I. Tursunova
Badiiy muharrir: B. Haydarov
Kompyuter sahifalovchi: N. Fayziyeva
Korrektor: Sh. Hikmatova

Nashr. lits. AI № 276 15.06.2015.
Bosishga ruxsat etildi. 29.08.2023.
Bichimi 60x84 1/16 Offset qog'ozi.
Times New Roman garniturasi.
Shartli bosma tabog'i 16. Nashr hisob tabog'i 9,1.
Adadi 100 nusxada. Buyurtma № 06-10.

"LESSON PRESS" MCHJ nashriyoti.
100071. Toshkent, Komolon ko'chasi 13.

«ZUXRA BARAKA BIZNES» MChJ bosmaxonasida chop etildi.
Toshkent shahri Bunyodkor shoh ko'chasi 27 A–uy.