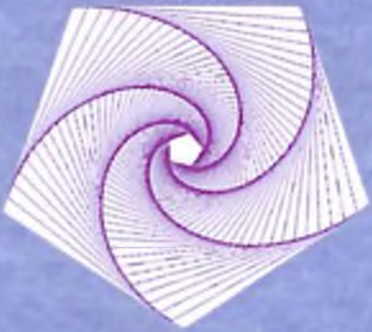
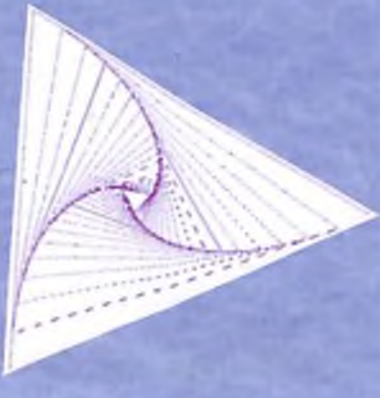
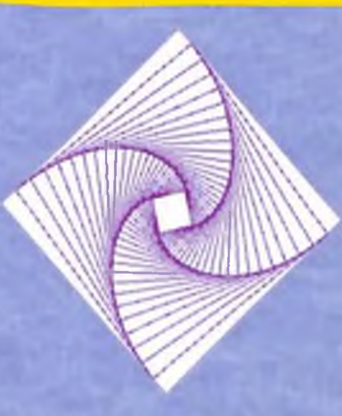
Ш.А. НАЗИРОВ, Ш.А. АНАРОВА, Ф.М. НУРАЛИЕВ



ФРАКТАЛЛАР НАЗАРИЯСИ АСОСЛАРИ





ЎЗБЕКИСТОН РЕСПУБЛИКАСИ
ОЛИЙ ВА ЎРТА МАХСУС ТАЪЛИМ ВАЗИРЛИГИ

МУҲАММАД АЛ-ХОРАЗМИЙ НОМИДАГИ ТОШКЕНТ АХБОРОТ ТЕХНОЛОГИЯЛАРИ УНИВЕРСИТЕТИ

АХБОРОТ-КОММУНИКАЦИЯ ТЕХНОЛОГИЯЛАРИ
ИЛМИЙ-ИННОВАЦИОН МАРКАЗИ

Ш.А. НАЗИРОВ, Ш.А. АНАРОВА, Ф.М. НУРАЛИЕВ

ФРАКТАЛЛАР НАЗАРИЯСИ
АСОСЛАРИ

ТОШКЕНТ-201
«НАВРЎЗ» НАШРИЁТИ

КВК 72.10(Ў)7
М 94
UO'K: 84.54

Ш.А. НАЗИРОВ, Ш.А. АНАРОВА, Ф.М. НУРАЛИЕВ.
«ФРАКТАЛЛАР НАЗАРИЯСИ АСОСЛАРИ».
–Тошкент: «Наврўз» нашриёти, 2017. 128 б.

Маъсул муҳаррир:

Равшанов Н. – т.ф.д., Муҳаммад ал-Хоразмий номидаги ТАТУ ҳузуридаги Ахборот коммуникация технологиялари илмий-инновацион маркази “Мураккаб тизимларни математик моделлаштириш” лабораторияси мудири

Такризчилар:

Арипов М.– ф.-м.ф.д., Ўзбекистон Миллий Университети профессори

Зайнидинов Ҳ. – т.ф.д., профессор, “Ахборот технологиялари” кафедраси мудири

Мухамадиев А. – ф.-м.ф.н., доцент, “Аудиовизуал технологиялар” кафедраси мудири

Ушбу монография фракталларни қуришнинг мухим масалаларига бағишланган. Монографияда фракталлар назариясининг асосий тушунчалари келтирилган. Классик ва замонавий фракталларни қуришнинг математик моделлари L-тизимлари, Итерацион функциялар тизимлари (IFS-Iterated Function Systems), алгебромантиқий усули ҳисобланган R-функция (Рвачев функцияси)га ва рекурсив процедураларга асосан ҳисоблаш алгоритмлари ишлаб чиқарилган.

Монография фракталлар назариясини мустақил ўрганувчиларга, талабаларга, магистрларга, илмий ходимларга мўлжалланган.

ISBN 978-9943-381-08-7

МУНДАРИЖА

КИРИШ

> *“Нима учун кўпчилик геометрия фанини совуқ ва қуриқ деб ҳисоблайди? Бунинг асосий сабабларидан бири, унинг булутлар, тоғлар, дарахтлар ёки денгиз қирғоғининг шаклини тушунтириб бера олмаслигидир.*
>
> *Булут - бу шар эмас, тоғлар - бу конуслар эмас, қирғоқ чизиқлари эса - бу доиралар эмас ва пўстлоқ силлиқ бўлмайди ёхуд чақмоқ тўғри чизиқ бўйлаб тарқалмайди... Табиат бизга нафақат ўзининг жуда юксак даражасини, балки тамомила бошқача мураккаблик даражасини кўрсатмоқда. Тузилмалардаги узунликларнинг турли миқёслари сони доимо чексиздир.*
>
> **Б. Мандельброт**

Фракталлар ноёб объектлар бўлиб, хаотик дунёнинг айтиб бўлмайдиган даражадаги ҳаракатларидан пайдо бўлади. Уларни жуда кичик бўлган мембрана ҳужайраларидан тортиб, жуда катта ҳисобланган Қуёш тизимидан ҳам топиш мумкин. Дарахтларнинг барглари, қўлнинг вена қон томирлари, дарёларнинг, денгизларнинг, океанларнинг қирғоқлари, қимматбаҳо қоғозларнинг бозорини башорат қилиш - буларнинг ҳаммаси фракталлардир. Қадимги замон тараққиёти вакилларидан то ҳозирги куннинг тараққиёти вакиллари, олимлар, математиклар ва ижодкорлар, шунингдек ер юзида яшовчи одамлар фракталлар билан ҳайратланган ҳамда улардан ўзларининг ишларида фойдаланган. Шунингдек, дастурчилар ва компьютер техникаси соҳасидаги мутахассислар фракталлардан чексиз мураккабликдаги гўзалликни оддий формулалар орқали ЭҲМларнинг дастурий имкониятларидан фойдаланиб қуришлари мумкин.

Фракталларнинг ихтиро этилиши фан ва математикада, санъатдаги янги эстетиканинг очилишидир, шунингдек инсоннинг оламни идрок қилишдаги кашфиётдир.

“Фрактал” сўзи бу биз яшаб турган кунда кўпчилик инсонлар, физиклардан тортиб мактаб ўқувчисигача гап юритадиган тушунчадир. У кўплаб дарсликлар ва илмий журналлар муқоваларида ҳамда компьютерларнинг дастурий таъминоти қутиларида пайдо бўлди. Бугун фракталларнинг рангли суратини ҳамма жойда учратиш мумкин: табрикномалардан тортиб футболкаларгача. Оддийгина тилда айтиш мумкин: *Фрактал - бу геометрик шакл бўлиб, аниқ бир қисми ўлчамлари ўзгарган ҳолда қайта-қайта такрорланишидир.*

Бу ердан ўзига-ўзи ўхшашлик хусусияти келиб чиқади. Фракталлар ўзига-ўзи ўхшашдир, улар барча даражаларда ўхшашдир. Бироқ фракталлар-мураккаб шакллар бўлиб қолмай, балки компьютерларда бўғимларга бўлинган. Хулоса шуки, тасодифий ва тартибсиз ҳаракатлар фракталлардир. Назарий томондан мавжуд оламдаги барча нарсалар, булутларми ёки кичкина кислород молекуласи буларнинг ҳаммаси фракталлардир.

Фракталлар хаос сўзи билан доимо алоқададир. Фракталларни хаоснинг қисми сифатида аниқлаш мақсадга мувофиқдир. Фракталлар тартибсиз ва тасодифий бўлиши билан хаотик ҳатти-ҳаракатларни намоён этади. Агар жуда яқиндан қаралса фракталнинг ичида жуда кўп ўзига-ўзи ўхшашлик томонларни кўриш мумкин.

Хаос сўзи кўпчилик одамларнинг хаёлига тартибсиз ва сўз билан ифодалаб бўлмайдиган нарсаларни олиб келади. Аслида бундай эмас. Демак, хаос қанчалик хаотик? Жавоб шундай, ҳақиқатда хаос нима етарлича тартибланган ва аниқ қонуниятга амал қилади. Муаммо шундаки, бу қонунларни қидириб топмоқ жуда мураккаб. Хаос ва фракталларни ўрганишдан мақсад - айтиб бўлмайдиган ва хаотик тизимдаги қонуниятларни башорат қилишдир.

Хаологлар булутли тасвирларни, об-ҳавони, сув оқимини, ҳайвонларнинг кўчишини, шунингдек она табиат ҳаётидан кўплаб аспектларни ўрганишни ёқтиришади. Тизим - бу буюмлар тўплами, ёки ўрганиш соҳаси. Шундай қилиб, бизни ўраб турган дунё фракталлардан иборатдир.

Кўплаб хаологлар учун хаос ва фракталларни ўрганиш дунёни билишни янги соҳаси бўлиб қолмай, математиклар, назарий физиклар, санъат ва компьютер технология соҳасидаги мутахассисларни бирлаштирувчи инқилобдир. Бу кашфиёт нафақат дарсликларда кўрадиган, балки табиатда ҳамда чексиз оламда бизни ўраб турган борлиқни ифодалаб берувчи геометриянинг янги туридир.

Бу янги соҳани ўрганувчилар фракталлар назариясининг отаси деб Америка математиги профессор Бенуа Б.Мандельброт (Францияда таваллуд топган) деб ҳисоблайдилар. 1960 - йилларнинг охирларида Мандельброт ишлаган илмий ижодини *фрактал геометрия* ёки *табиат геометрияси* деб атайди (бу ҳақида У ўзининг Табиатнинг фрактал геометрияси - “The fractal geometry of nature”номли асарида ёзади). Фрактал геометриянинг мақсади – синдирилган, буришган ва норавшан шаклларни таҳлил қилишдан иборат. Мандельброт парчаланган ва қисмлардан ташкил топган бу шакллар учун фрактал сўзидан фойдаланган.

Мандельброт бошқа олимлар Клиффорд А.Пикковер (Clifford A.Pickover), Джеймс Глейк (James Gleick) ёки Г.О.Пейтген (H.O.Peitgen) фрактал геометриянинг соҳасини кенгайтиришга ҳаракат қиладилар, яъни бутун дунёда уларни амалий қўллашга, бозордаги қимматли қоғозларни нархларини башорат қилишдан тортиб назарий физиканинг янги кашфиётларини бажаришгача.

Республикамизда фракталлар назариясини ривожлантириш бўйича ф.-м.ф.д., академик Б.А.Бондаренконинг ишларини келтириш мумкин. Б.А.Бондаренко арифметик хусусиятлар назариясига асосан умумлашган паскал учбурчаклари ва пирамидаларини, уларнинг фракталларини тенгламаларни яратган.

Фракталлар фанда кўпдан - кўп қўлланилмоқда. Бунинг асосий сабаби у мавжуд борлиқни анъанавий физика ёки математикага нисбатан жуда аниқ баён этади. Бир неча мисол келтирамиз: компьютер графикаси, компьютер тизимлари, телекоммуникация, радиотехника, кино, суюқлик механикаси, сиртлар физикаси, астрономия, тиббиёт, биология, мусиқа, криптография, санъат соҳаси ва бошқаларда. Ушбу соҳаларда ҳозирги вақтда радиотехникада антенналарни лойиҳалашда, телекоммуникацияда сигналларни қайта ишлашда, кино ҳамда телевиденияда махсус эффектлар ва визуализация элементлари сифатида, ахборот хавфсизлиги криптографияда, енгил саноатда газлама ва гиламларга замонавий дизайнлар учун нақшлар чизишда ва ҳ.к.

Монография 3 та бобдан иборат бўлиб, биринчи бобида фракталлар назариясининг асосий тушунчалари: фракталларнинг пайдо бўлиш тарихи, фракталларнинг таърифлари, фракталларнинг ўзига хос асосий хусусиятлари, фракталларнинг турлари, фракталларнинг қўлланиш соҳалари ўрганилган. Шунингдек, фракталларга доир бўлган умумий тушунчалар баён этилган.

Монографиянинг иккинчи боби фракталлар қуриш усулларини ўрганишга бағишланган. Фракталларнинг тенгламаларини қуриш учун бир неча усуллардан фойдаланилади, булар IFS (Itered function systems-Итерацион функциялар тизимлари (ИФТ)) усули, L-тизимлар усули, биномиал базис кўпҳадлар ва арифметик хусусиятлар назариясига асосланган усул, R-функция (Рвачев функцияси) усули, тўпламлар назарияси усули ва бошқалар. Бу усуллардан фойдаланиб қурилган тенгламаларнинг натижалари расмларда келтирилган.

Монографиянинг учинчи боби геометриянинг асосий тушунчаларидан фойдаланган ҳолда янги турдаги фракталлар қуриш учун геометрик моделлар ва рекурсив алгоритмлар ишлаб чиқишга бағишланган. Рекурсиянинг турли қийматларида олинган натижаларнинг расмлари келтирилган.

I БОБ. ФРАКТАЛЛАР НАЗАРИЯСИНИНГ АСОСИЙ ТУШУНЧАЛАРИ

Монографиянинг бу боби фракталлар назариясининг асосий тушунчаларини ўрганишга бағишланган бўлиб, фракталларнинг пайдо бўлиш тарихи, фракталларнинг таърифлари, фракталларнинг ўзига хос асосий хусусиятлари ҳамда фракталларга доир бўлган умумий тушунчалар ўрганилади.

1.1. Масаланинг қўйилиши

Фракталлар ҳақидаги фан математиканинг алоҳида соҳаси сифатида 20 асрнинг 70-йилларидан шакллана бошлади. Фракталларни ўрганишга қизиқишнинг пайдо бўлиши абстракт ва табиий фанларларнинг мақсадларини бир-бири билан алоқада бўлиши учун хизмат қилади. Бу жараённинг бошланиши деб Б.Мандельбротнинг 1977-йилда нашрдан чиққан "Табиатнинг фрактал геометрияси" (Mandelbrot B.B. "The fractal geometry of nature") номли китобини келтириш мумкин. Бу китоб ўзида кўп сонли миқдордаги турли хил фракталлар тасвирларининг тўпламларини сақлайди ва табиатда фрактал объектларни мавжудлигининг исботлари мавжуд.

Бугунги кунда фракталлар назариясининг математик жиҳатларини тадқиқи, шунингдек табиий жараёнлар ва ҳодисаларни фракталлар назарияси ғояларидан фойдаланиб тавсифлаш усуллари - фаннинг мустақил янги соҳасидир.

Ҳозирги кунда у шу қадар кенгайиб кетдики у бир неча тор ихтисосликлар соҳаларига бўлиб ўрганилмоқда. Фракталлар назарияси фанларни боғловчи бўлиб улгурди. Табиатнинг фрактал геометриясига хизмат қилувчи жараёнларни ўрганишга қизиқиш физикада, математикада, биологияда, материалшуносликда ва бошқа фанларда янги илмий йўналишларни пайдо бўлишига олиб келди. Турли хил илмий йўналишларнинг ягона структурага асосан ёндошиши тасодифий эмас, балки фрактали тузилиш хусусиятларининг натижаси ҳисобланади.

1.2. Фракталларнинг пайдо бўлиш тарихи, таърифлари ва уларнинг асосий хусусиятлари

Фракталларнинг тарихи. Фрактал сўзи лотинча «fractus» сўзидан олинган бўлиб, «бўлакланган», «қисмлардан ташкил топган» деган маънони англатади ва у «fraction, fractional» (бўлув, бўлинма) терминларидан келиб чиққан. Ҳозирги кунга қадар фрактал тушунчаси айнан таърифга эга эмас, бироқ математик нуқтаи назардан фрактал - бу касрли ўлчамлар тўпламидан иборатдир [4,14,15,34,37,37,42,46,47,56,60,64,65,67,68,70].

Фрактал ва фрактал геометрия тушунчаси 20-асрнинг 70-80 йиллари ўрталарида математиклар ҳамда дастурчиларнинг илмий изланишларига қатъий равишда кириб келди.

Фракталларнинг таърифлари. Қуйида фракталларга берилган таърифларни келтирамиз.

Юқорида айтиб ўтганимиздек, фрактал аниқ бир таърифга эга эмас, бироқ адабиётларда унга берилган турлича таърифларни учратамиз [4,14,15,34,37,37,42,46,47, 56,60,64,65,67,68,70].

Фрактал - бу геометрик фрактал бўлиб, қисмлардан ташкил топган ҳамда уларнинг ҳар бири бутун фракталнинг нусхасини кичиклаштирган ҳолатини ифодалайди.

Фрактал - аниқ бир қисм ўлчамини ўзгартирган ҳолда қайта ва қайта такрорловчи геометрик шаклдир.

Фрактал - қисмлардан ташкил топган, қайсидир маънода тўлалигича ўзига-ўзи ўхшаш тузилишдир.

Фрактал - бу синган фазовий шакл, текис ёки нотекис, хаотик ёки ботартиб ва ўзига-ўзини турли машстабда такрорлайдиган мураккаб тузилиш ҳисобланади.

Фрактал масштабига боғлиқ бўлмаган тасвирларнинг ўзига-ўзи ўхшаш тузилишларидир.

Фрактал - Хаусдорф ўлчами топологик ўлчамидан қатъий катта бўлган тўплам.

Фрактал - нобутун ўлчамли ўзига-ўзи ўхшаш тўпламлар ва чексиз ўзига-ўзи ўхшаш шакллардир, ўлчами касрий тўпламдир. Бундай таърифлардан яна бир нечтасини келтириш мумкин.

Юқоридаги таърифлардан келиб чиқиб уларни қуйидаги иккита гуруҳга ажратиш мумкин:

Фракталларнинг математик таърифи. Фракталлар чексиз рекурсив жараёнлар натижасида ифодаланган функционал ёки ҳосил бўлувчи тўплам ва қуйидаги хусусиятларга эга:

– ўзига-ўзи ўхшаш ёки масштабнинг инвариантлиги (чексиз скейлинг), яъни кичик масштабда ва ўрта масштабда худди катта масштабдаги каби кўринади;

– касрли ўлчами (Хаусдорф ўлчами) топологик ўлчамидан қатьий катта;

– дифференциалланмайди ва касрли кўпайтмалар ҳамда интегралларда аниқлаштирилади.

Фракталларнинг физик таърифи. Фракталлар - кучли қирқилган тузилишни ифодаловчи ҳамда чегараланган масштабда ўзига-ўзи ўхшаш хусусиятини эгалловчи геометрик объектлар (чизиқ, сирт, жисм)дир.

Фрактал бу аввало абстракт, назарий модель, реалликда мавжуд бўлмаган чегаравий ўтиш натижаларидир.

Бироқ фракталларнинг қатьий аниқ таърифи мавжуд эмас. Аммо фрактал геометрия табиат геометриясидир.

Фракталларнинг хусусиятлари.

1. ***Ўзига-ўзи ўхшашлик.*** Энг оддий ҳолатда фракталларнинг катта бўлмаган қисми улар ҳақидаги барча ахборотларни ўзида сақлайди.

2. ***Касрийлик.*** Фракталларнинг касрийлиги фракталлар нотўғрилигининг ўлчамини математик ифодалаш дейилади.

3. ***Номунтазамлик.*** Агар фрактал функция таърифланган бўлса математика терминларида номунтазам функция ҳеч бир нуқтада текис эмас ва дифференциалланмайди.

1.3. Фрактал ўлчов тушунчаси

Фрактал геометриянинг асосий ғояларидан бири борлиқда ўлчовлар миқдори учун бутун бўлмаган қийматлар ғоясидир. Мандельброт бутун бўлмаган ўлчов 2.76 ни фрактал ўлчов деб номлади. Оддий евклид геометрияси мавжуд борлиқ текис ва силлиқ эканлигини таъкидлайди.

Бундай борлиқнинг хусусияти нукталар, чизиқлар, бурчаклар, учбурчаклар, кублар, сфералар, тетраэдрлар ва бошқаларни беради.

Табиатдаги кўплаб объектлар (масалан, инсон танаси) бири иккинчиси билан қўшилган фракталлар тўпламидан ташкил топган бўлиб, ҳар бир фрактал бошқаларидан фарқ қиладиган ўзининг ўлчамига эга. Масалан, инсоннинг икки ўлчамли сиртидаги томирли тизимлари эгилади, тармоқланади, буралади ва қисилади, унинг фрактал ўлчами 3.0 га тенг. Аммо агар у алоҳида бўлакларга бўлинган бўлса, артерия қон томирининг фрактал ўлчами фақатгина 2.7 га тенг бўлади, унда ўпка бранхиал йўлидиги фрактал ўлчам 1.07 га тенг.

Евклид геометриясида ўлчам тушунчаси мавжуддир. Яъни кесманинг ўлчами бир, айлананинг ўлчами икки, шарнинг ўлчами эса учдир. Масалан, кесма узунлигининг ўлчамини бўлакларга бўлсак, унда кесманинг ўлчами N, кесмани иккига бўлсак 2N, кесмани ўнта бўлакка бўлсак 10N га тенг. Бу ҳолатда тўғри пропорционал боғланиш кузатилади. Биз майдонни ўлчаш вақтида қуйидаги қийматларни оламиз: 4N, 100N яъни бу ерда боғлиқлик квадратикдир. Уч ўлчовли шаклнинг ҳажми кубнинг чизиқли ўлчовларига пропорционалдир. Агар бу қоидани фрактал объектларга қўлласак каср сонлардан иборат парадокс ҳолат номаён бўлади.

Доимо ўлчам тушунчасини интиутив равишда тушунарли деб ҳисобланиб, математик жиҳатдан осон аниқланган. Чизиқли фазонинг ўлчами тушунчаси элементар геометрия ва чизиқли алгебрадан маълумдир. Кўпхиллилик ўлчами - бу Евклид шарларидан бириктирилган кўпхиллилик ўлчамидир ва ҳ.к. Бироқ математика, механика ва физикада шундай тўпламлар учрайдики, улар учун ўлчам тушунчаси алоҳида талқин қилиниши зарур ва яна шунингдек, улар учун бир неча турли ўлчамларни аниқлаш мумкин. Бу ўлчамлар бир-бири билан устма-уст тушмаслиги ҳам мумкин. Қатъий равишда айтадиган бўлсак ихтиёрий топологик фазо учун турли ўлчамлар тушунчаларини аниқласа бўлади. Аммо кўпхиллилик тегишли бўлган фазолар учун бу сонлар (ўлчамлар) устма-уст тушади. Бироқ биз мураккаб, экзотик (баъзида қандайдир маънода «патологик» бўлган) объектларни қарайдиган бўлсак, турли ўлчам тушунчалари учун турли сонларга эга бўламиз. Илгари бу асосан амалиётда кам учрайдиган фазолар синфи учун ўринли деб ҳисобланар эди. Ҳозир бундай объектлар математиканинг классик соҳаларида доимо учрайди. Булар ***фрактал***лардир.

Қуйида ўлчов тушунчасини кўриб чиқамиз [1,4,10-12,14-18,21,22,26,31,34,37,40-43,60,64-68,70].

dim **Топологик ўлчови.** Агар ҳар бир $x\in X(\forall x\in X)$нуқта U_i тўпламларнинг ҳеч бўлмаганда бирортасига тегишли яъни $\forall x\in X\,\exists U_i\in\{U_i\}|x\in U_i$ бўлса, X топологик фазо $\{U_i\}$ қисм тўпламлар тизимининг қобиғи дейилади.

Қобиқлар чекли бўлган ҳолатларни қараймиз. Агар $\{U_i\}$ қобиқнинг бўш бўлмаган кесишмасидан иборат бўлмаган n та элемент мавжуд бўлса, шундай n $(n\in\{0\}\bigcup N)$-бутун номанфий сонлардан энг каттасига $\{U_i\}$қобиқнинг карралиги деб айтилади (яъни, қобиқнинг n та турли элементларга бир вақтнинг ўзида $\{U_j\}(j=\overline{1,n})$ қобиқларнинг барчасига тегишли бўлган ҳеч бўлмаганда битта нуқтаси мавжуддир).

Брауэр, Урисона, Менгер ишларига кўтарилувчи топологик ўлчов тушунчасини расмийлаштирамиз.

Ёпиқ чекли тўпламни қараймиз. Ҳар бир компакт $\forall\varepsilon>0$да ε-қобиққа эга, яъни уни ҳар бири εдан кичик диаметрга эга бўлган чекли сондаги ёпиқ тўпламларнинг бирлашмаси кўринишида ифодалаш мумкин (агар $\forall V_j$ ҳеч бўлмаганда битта $U_i\in\{U_i\}$га тегишли бўлса, $\{V_j\}$ тўпламлар тизими қисмқобиқ дейилади).

Таъриф. Агар X фазонинг исталган очиқ қобиғига, карралиги $n+1$дан катта бўлмаган ёпиқ қисм қобиқни киритиш мумкин бўлса, шундай n та бутун сонларнинг энг каттасига X нинг d_T топологик ўлчови ёки dim компакти деб айтилади. Агар бундай сонлар мавжуд бўлмаса $dimX \overset{def}{=} +\infty$ деб фараз қилинади. Топологик ўлчов, шунингдек Брауэр ўлчови ёки оддий ўлчов деб ҳам юритилади.

d_H **Хаусдорф ўлчови (ёки фрактал ўлчов).** Айтиб ўтганимиздек, нуқтанинг ўлчови нолга, кесма, айлана, умуман олганда текисликдаги ёки фазодаги ихтиёрий эгри чизиқнинг ўлчови бирга, доира, сферанинг ўлчови иккига, жисмларнинг ўлчови эса учга тенгдир. Барча келтирилган мисолларда ўлчов қаралаётган объектда нуқтани белгилаш зарур бўлган боғлиқсиз ўзгарувчилар сонига тенгдир. Бироқ «ўлчов» тушунчаси кенгроқдир. У фақат хусусий ҳолларда объектни аниқлаш учун зарур бўлган боғлиқсиз ўзгарувчилар сони билан устма-уст тушади. Бир ўлчовли объектларни узунлик тушунчаси билан, *2* ўлчовли объектларни юзалар тушунчаси билан боғлаймиз ва ҳ.к. Бироқ *3/2* ўлчовга эга бўлган тўпламни қандай тасаввур қилиш мумкин? 1919 йили Феликс Хаусдорф ихтиёрий $\alpha\geq 0,(\alpha\in R)$ учун α-ўлчовни аниқлайди ва шу асосда евклид фазосида ҳар бир тўпламга метрик ўлчов деб номланадиган сонни мос қўяди.

Бизга маълум бўлган узунлик, юза ва шарнинг ҳажми тушунчаларини Евклид фазосида кўриб чиқамиз.

R^1 да r радиусли шарнинг диаметри (узунлиги) *2r* га тенг. R^2 да шарнинг юзаси πr^2 га тенг. R^3 да ҳажм $\frac{4}{3}\pi r^3$ га тенг. Бу формулалар ихтиёрий бутун сон ўлчовли евклид фазосида куйидагича ифодаланади:

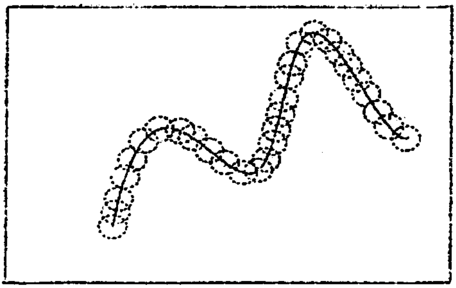
$$V_d=\gamma(d)\cdot r^d,\ d=1,2,3,... \qquad (1)$$

$\gamma(d)=\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)^d\Big/\Gamma\left(1+\frac{1}{2}\right)$, бу ерда $\Gamma(x)$-Эйлер гамма-функцияси:

$$\Gamma(x)=\int_0^\infty e^{-t}\cdot t^{x-1}dt,\quad x>0.$$

R^n да r радиусли шарнинг d-ўлчовини аниқлаш орқали каср кўринишдаги ўлчов назариясини қуришда биринчи қадам қўйилади. Бунда d-ихтиёрий номанфий ҳақиқий сон. Бунга барча ҳақиқий $d>0$ларда (1) формула бажарилиши орқали эришилади. Масалан, 3/2–ўлчовли фазода шарнинг ўлчови $\gamma(3/2)\cdot r^{3/2}$ га тенг.

Навбатдаги қадамда d-ўлчов тушунчаси шарнинг ихтиёрий $A\subset R^n$ тўплами учун ўтказилади. Бунинг учун $B_\varepsilon(x_i)$ шарлар тўплами орқали A қобиқни қурамиз (1.1-расм).



1.1-расм. Шарлар тўпламидан иборат A қобиқ

Уларнинг ҳажмларини қўшиб чиқамиз:

$$\sum_{i=1}^{M} \gamma(d)\cdot\varepsilon^{d}.$$

Таъриф. Тўпламнинг ε-фрактали d-ўлчови деб қуйидаги сонга айтилади:

$$\mu(A,d,\varepsilon) \overset{def}{=} \min\{M\}\cdot\varepsilon^{d} \equiv N(\varepsilon)\cdot\varepsilon^{d} \qquad (2)$$

ёки A тўпламнинг мумкин бўлган барча қобиқлари $\mu(A,d,\varepsilon)=\inf\{\sum\gamma(d)\cdot\varepsilon^{d}$ га айтилади.

Масалан, агар $A_1=[0,1]\in R^1$, бунда $N(\varepsilon)=\left[\frac{1}{2\varepsilon}\right]+1$.

$\varepsilon\to 0$ да бу inf фақат ўсиши мумкин. Демак, $\varepsilon\to 0$ да $\mu(A,d,\varepsilon)$ чегара мавжуд бўлади.

Таъриф. Хаусдорфнинг фрактали d-ўлчовли сферик ўлчови деб қуйидаги сонга айтилади:

$$\mu_F(A,d)=\lim_{\varepsilon\to 0}\sup\mu(A,d,\varepsilon)=\lim_{\varepsilon\to 0+}\sup\mu(\varepsilon^{d}\cdot N(\varepsilon))\equiv\mu_F(A,d)$$

кўпинча қуйидагича бўлиши ҳам мумкин:

$$\mu_F = \lim_{\varepsilon \to 0} \mu(A, d, \varepsilon).$$

Безикович ҳар бир X учун ҳар доим $d_H \in R$ сони мавжуд эканлигини, X компактининг d - ўлчовли Хаусдорф ўлчови $d<d_H$да чексиз, ва аксинча $d>d_H$ да 0 га тенг эканлигини кўрсатди.

Агар A_1=[0,1] бўлса,

$d=1$ да $\mu_F(A_1,1)=\lim\limits_{\varepsilon\to 0+}\varepsilon\cdot N(\varepsilon)=\lim\limits_{\varepsilon\to 0+}\varepsilon\cdot\left(\left[\frac{1}{2\varepsilon}\right]+1\right)=\frac{1}{2}$,

$d>1$ да $\mu_F(A_1,1)=\lim\limits_{\varepsilon\to 0+}\varepsilon^d\cdot\left(\left[\frac{1}{2\varepsilon}\right]+1\right)=0$;

$d<1$ да $\mu_F(A_1,1)=\lim\limits_{\varepsilon\to 0+}\varepsilon^d\cdot\left(\left[\frac{1}{2\varepsilon}\right]+1\right)=\infty$ бўлади.

Умумий ҳолда ёпиқ, агар чегараланган А тўплам учун $\mu_F(A,d^1)>+\infty$ ўринли бўлса, ихтиёрий $d>d^1$ учун $\mu_F(A,d^1)>0$ ўринлидир. Агар $\mu_F(A,d^1)>0$ бўлса, у ҳолда $\forall d<d^1 \Rightarrow \mu_F(A,d)=+\infty$. Демак, шундай $d_H\in[0,+\infty)$ сони мавжудки, $d>d_H$да $\mu_F(A,d)=0$ ва $\mu_F(A,d)=\infty$га тенг. $\forall d<d_H$бўлганда, бунда $\mu_F(A,d)$сони [0,+] интервалга тегишли бўлган ихтиёрий сон бўлиши мумкин. Равшанки,

$$d_H=\inf\{d\}|\mu_F(A,d)=0.$$

Таъриф. А тўпламнинг Хаусдорф - Безикович (метрик ёки фрактал ўлчов) ўлчови деб, $d_H=\inf\{d\}|\mu_F(A,d)=0$.

муносабатни қаноатлантирувчи d_H сонига айтилади ва у d, d_H кўринишида ёки d_F кўринишида белгиланади.

Масалан, $A_1=[0,1]$ учун $\mu_F(A_1,d)=\begin{cases}0, & d>1;\\ +\infty, & d<1;\\ \frac{1}{2}, & d=1.\end{cases}$

Демак, $d_H(A_1)=1$.

(2) формулага қайтамиз:

$$\mu(A,d,\varepsilon)=N(\varepsilon)\cdot\varepsilon^d \Rightarrow N(\varepsilon)=\frac{\mu}{\varepsilon^d}.$$

Иккала қисмини логарифмлаймиз:

$$\log N(\varepsilon)=\log\mu-\log\varepsilon^d \Rightarrow d=-\frac{\ln N(\varepsilon)}{\ln\varepsilon}$$

ёки

$$d=d_H=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\ln N(\varepsilon)}{\ln\frac{1}{\varepsilon}}.$$

Кўпчилик «ажойиб» объектлар, фазолар, тўпламлар учун ***dim*** ва d_H устма-уст тушади, бироқ $\dim<d_H$ бўлган объектлар ҳам мавжуд. Булар ***фрактал***лардир.

d_M Минковский ўлчови. Минковский ўлчови, Хаусдорф - Безикович ўлчови билан ўхшаш ва амалий масалаларни ечишда жуда қулай ҳисобланади. Бироқ Минковский ўлчовини аниқлаш алгоритми бироз соддароқ. Умуман (фрактал ёки текис) эгри чизиқ учун d_M Минковский ўлчовини қуйидагича аниқланади. Фараз қилайлик, r радиусли катта бўлмаган Евклид шари (айлана)нинг маркази эгри чизиқ бўйлаб, шар ҳаракати билан ҳосил бўлувчи $S(r)$ Минковский юзасини қоплаб туриб ҳаракатланади. $S(r)$ юзани $2r$ га нисбатини оламиз. Текис эгри чизиқ бўлган ҳолда эгри чизиқнинг узунлигини ҳосил қиламиз, бироқ фрактал эгри чизиқ учун натижа чексиз бўлади. Ҳақиқатан ҳам, $F(r)/2r$ нисбат r^1-d_M миқдорга пропорционал, бу миқдор $d_M>1$ да $r\to 0$ учун узоқлашади. d_m миқдорнинг қиймати узоқлашиш тезлиги ўлчови бўлади ва Минковский-Булиган ўлчови деб айтилади. Уни қуйидаги:

$$d_M=\lim_{r\to 0}\frac{\ln S(r)}{\ln\left(\frac{1}{r}\right)}+2,$$

формула бўйича ҳисобланади. Текис эгри чизиқ бўлган ҳолда $S(r)\sim r$ ва $d_M=-1+2=1$.

Барча қатъий ўзига ўхшаш фракталлар учун d_M Минковский ўлчови d_H Хаусдорф - Безикович ўлчовига тенг. Агар бу ўлчовлар тенг бўлмаса, у ҳолда

$$d_M>d_H.$$

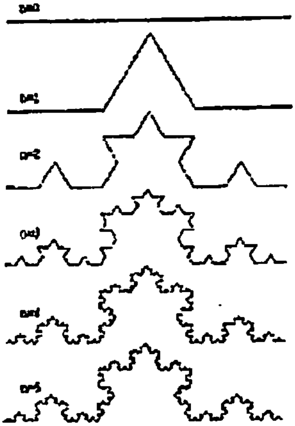
Бундан келиб чиқадики Минковский ўлчови, Хаусдорф-Безикович ўлчовидан бирмунча «ноқулайдир», чунки у объектнинг баъзи-бир майда тузилишини ҳисобга олмайди [34,37].

1.4. Фракталларнинг турлари

Фракталларни ўрганиш учун уларни аниқ синфларга ажратиш керак.

Табиатда фракталларнинг бир неча кўринишини (турини) учратиш мумкин: геометрик фракталлар, алгебраик фракталлар, стохастик фракталлар ва бошқалар [4,14,15,17,34,37,39,57,60,64,65,67,68,70].

Геометрик фракталлар - бу турдаги Кох триад эгри чизиғи, Леви эгри чизиғи, Гильберт эгри чизиғи, Хартера-Хейтуэя аждари номли синиқ чизиқлар, Контор тўплами, Серпин учбурчаги, Серпин гилами, Пифагор дарахти ва ҳоказо каби фракталлар гуруҳи энг кўргазмали ҳисобланади.



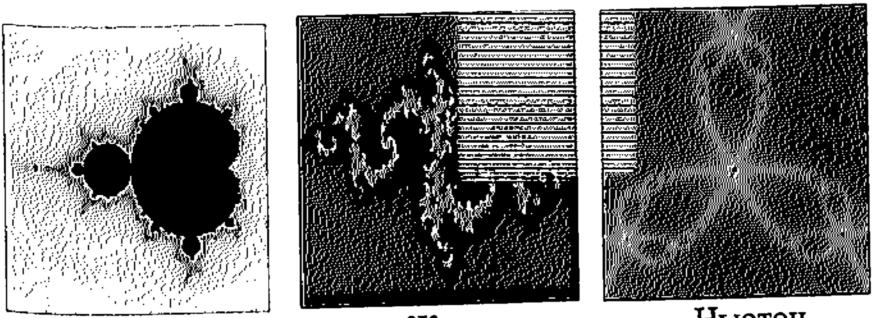
1.2-расм. n=1,…,5 ларда Кох триад эгри чизиғи

Фракталлар тарихи айнан шу фракталлардан бошланади. Геометрик фракталларни лойиҳавий фракталлар ҳам юритилади.

Бу турдаги фракталлар оддий геометрик қуриш йўли билан шунингдек, итерацион функциялар тизими, L-тизимлар усули, R-функция (Рвачев функцияси) усули, Арифметик хусусиятлар назарияси ва Тўпламлар назариясига асосан ҳосил қилинади. Одатда бу турдаги фракталларни қуриш учун маълум «кесма–аксиома–

ўлаклар йиғиндиси» каби қоида ўринлидир. Масалан, Кох гри чизиқлари, Серпин учбурчаклари ва бошқалар.

Алгебраик фракталлар - фракталларнинг яна бир катта уруҳидир. Улар ўз номларига оддий алгебраик формулаларга асосан қурилгани учун эга бўлган. Уларни ночизиқ жараёнлар ёрдами билан n-ўлчовли фазоларда ҳосил қилинади. Маълумки, ночизиқ динамик тизимлар бир неча арқарор ҳолатларни ўзида мужассамлаштиради. Булардан иттаси, бир неча такрорлашлар сонидан кейин бошланғич шартга боғлиқ бўлиб қолади.



Мандельброт фрактали

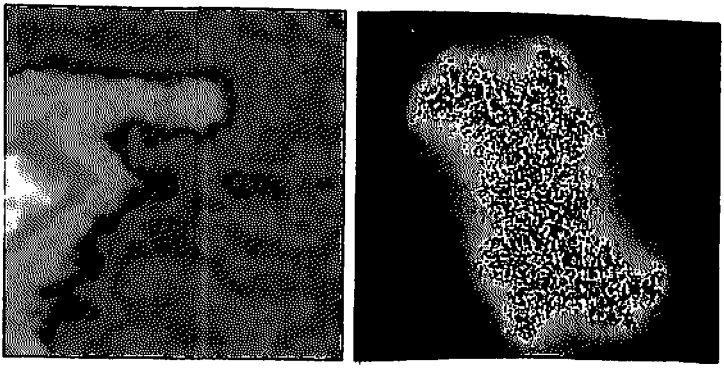
Жюлиа Фрактали

Ньютон фрактали

1.3-расм.

Шунинг учун ҳар бир барқарор ҳолат, бир неча бошланғич ҳолат соҳаларини ўзида намоён этади. Улардан энг таниқлилари Мандельброт, Жулиа, Ньютон тўпламлари (1.3-расм) ва бошқалар.

Стохастик фракталлар - энг таниқли фракталлар гуруҳи ҳисобланади. Улар итерацион жараёнда тўсатдан бирорта параметрни ўзгартириши ҳолатидан пайдо бўлади (1.4-расм). «Стохостик» термини грек сўзидан келиб чиққан бўлиб, «фараз» (тасаввур)ни англатади.



1.4-расм. Стохастик фракталлар

Фракталларни яна бир қизиқ синфларга ажратиш мавжуд. Бунда фракталлар иккита синфга ажаратилади: қўл - ижодий (идеал) фракталлар ва табиий (физик) фракталлар.

Қўл-ижодий фракталлар - олимлар томонидан ўйлаб топилган ва ихтиёрий масштабда фракталлар хусусиятларини ўзида намоён этадиган фракталлар.

Табиий фракталлар - мавжудлик соҳасида чегарага эга фракталлар.

1.5. Фракталларнинг қўлланиш соҳалари

Ҳозирги кунда фракталлар ривожланишнинг барча соҳаларда кенг қўлланилмокда.

Компьютер графикасида. Фракталлар асосан замонавий компьютер графикасида қўлланилади. Улар ёрдами билан ясси тўпламларни ва жуда мураккаб шакллар текислигини яратиш мумкин. Шуни айтиш мумкинки олимлар табиий шаклларни эслатувчи мураккаб объектларни ифодалашни энг оддий усулини аниқлашди. Дарахт ва папоротниклар баргларини, сунъий тоғ-адирларни, булут ҳамда табиатда мавжуд бўлмаган планеталарни чизувчи қулай замонавий компьютер дастурлари фракталлар назариясига катта бойлик олиб кирди.

Компьютер тизимлари соҳасида. Компьютер илмида маълумотларни фрактал қисиш уларни энг фойдали қўллаш деб юритилади. Бу кўринишдаги қисишга асосланиб қуйидаги фактни келтириш мумкин, яъни ҳақиқий борлиқ фрактал геометрияни яхши ёритади. Бунда расмлар доимий усулларга нисбатан анча қулай қисилади. Фрактал қисишни яна қулайлиги шундан иборатки расмларни катталаштиргани билан пикселлар таъсирининг самараси кузатилмайди. Шуни айтиш мумкинки фрактал қисиш ёрдамида расмларни катталаштиргандан кейин олдингисига нисбатан аниқ кўринади.

Телекоммуникация соҳасида. Масофага маълумотларни узатишда уларнинг ўлчами ва оғирлигини кучли камайтирадиган фрактал шаклларга эга бўлган антенналар ишлатилади. Антенналар тузилишини лойиҳалашда фрактал геометрияни қўллашни биринчилардан бўлиб америкалик муҳандис Натон Кэн ишлатган. У вақтларда бинолар ташқарисида антенналар ўрнатиш тақиқланган. Натон алюминий зар қоғоздан Кох эгри чизиғи шаклидаги фигураларни қирқиб, уларни қоғоз варағига ёпиштиради ва уни приёмникга улайди. Шу билан Кэн Натон шахсий компаниясига асос солган ҳамда уларни серияли чиқаришни ташкил қилган.

Марказлаштирилган тармоқларда. Netsukuku тармоғида IP-адресни қўллаш тармоқ тугунларидаги маълумотларни компакт сақлаш учун маълумотларни фракталли қисиш принципларидан фойдаланилади. Netsukuku тармоғининг ҳар қайси тугуни қўшни тугунлар ҳақидаги 4 кб маълумотни сақлайди. Бунда ихтиёрий янги тугун марказлашган IP-адрессиз умумий тармоқга уланади, масалан, бу Internet тармоғи учун характерли. Шундай қилиб, маълумотларни фракталли қисиш принципи тўлиқ марказлаштиришга кафолат, барча тармоқларни максимал барқарор ишлашига имкон беради.

Кинода. Фракталлар визуализация ва махсус эффектлар элементи сифатида қўлланилади. Фракталлар ўзининг гўзаллиги ҳамда чексизлиги билан ўзига жалб қилади ҳамда мафтун этади. Шунинг учун ҳам компьютер графикасида махсус эффектлар, видеоинсталляция, визуализацияларнинг турли авлодларини яратиш учун қўлланилади.

Суюқликлар ва газлар механикаси соҳасида. Оқимдаги турбулент (тартибсиз) ҳолатни ўрганиш фракталларда жуда яхши қурилади. Турбулент оқимлар хаотик бўлиб, уларнинг моделини қуриш жуда мураккаб. Бунда мураккаб оқимларнинг динамикасини тушинишга имкон берувчи фрактал ифодалашга ўтиш муҳандислар ва физикларни ишини анча енгиллаштиради.

Сиртлар физикаси соҳасида. Сиртлар эгри чизиқларини баён этиш учун фракталлар ишлатилади. Тенг бўлмаган сирт иккита турлича фракталлар комбинациясида тавсифланади. Фракталлар ёрдамида жуда мураккаб физик жараёнларни моделини, шунингдек ёғду тилларини моделлаштириш мумкин. Жуда мураккаб геометрик тузилишга эга ғовак буюмларни фрактал шакллар яхши узатади. Бу билим нефт ҳақидаги фанда ишлатилади.

Фракталлар назарияси *Ер шарининг тузилишини ўрганиш*да ишлатилади.

Биология соҳасида. Бу ерда биосенсор ўзаро таъсир ва юрак уриши, хаотик жараёнларни моделлаштириш, ички органлар тизимини баён этиш учун ҳамда популяциянинг моделини ёзиш кабиларда фракталлардан фойдаланилади.

Санъат соҳасида. Фракталларни қўллашнинг яна баҳсли соҳаларидан бири компьютер санъати соҳасидир. Фрактал нафақат олимларга хизмат қилади, балки рассомларга ҳам фикрларини, ҳиссиёт ва кайфиятларини, энг зўр тасаввурларини узатишда ёрдам беради. Шунингдек, ҳар бир ноталарни ёзишда айнан фрактал тузилишли алгоритмлар қўлланилади.

Физика ва бошқа табиий фанларда. Фракталлар ночизиқли жараёнларни яъни ёлқин, суюқликларнинг гирдобли ҳаракати, булут, диффузион-ютилиш (адсорбция) каби мураккаб жараёнларни моделлаштиришда қўлланилади. Ғовак материалларни моделлаштиришда ҳам фракталлар қўлланилади.

Фракталларнинг хусусиятлари ва уларнинг қўлланиш имкониятларини ўрганиб, ҳаётда учрайдиган турли жараёнларни моделлаштиришда фракталлар хизмати катта эканлигини айтиш мумкин.

I боб бўйича хулоса

Биринчи бобда кириш келтирилган. Шунингдек, фракталлар назариясининг пайдо бўлиш тарихи, асосий тушунчалари, таърифлари, турлари, қўлланиш соҳалари ўрганилган ва кенг доирада баён этилган.

II БОБ. ФРАКТАЛЛАРНИ ҚУРИШ УСУЛЛАРИ

Фракталлар қуриш учун уларнинг тенгламасини турли усуллардан фойдаланган ҳолда қуриш керак. Бунда бир неча усуллардан фойдаланилади, булар IFS (Itered function systems-Итерацион функциялар тизимлари (ИФТ)) усули [3-5,12,-15,17,29,34,37,39,56,60,64,68], L-тизимлар усули (Lindenmayer номидан келиб чиққан) [4,5,10,12,15,17,27,29, 34,37,39,56,57,60,62,64,68], биномиал базис кўпҳадлар ва арифметик хусусиятлар назариясига асосланган усул [14,15,24,37,49-51,60], R-функция (Рвачев функцияси) усули [28,32,33,41-48,63,67,70], тўпламлар назарияси усули [22,57,60] ва бошқалар.

2.1. L-тизимлар усули ва улардан фракталларни қуришда фойдаланиш

Мандельброт томонидан фрактал тушунчасига энг умумий фикр билдирилган: «Фрактал деб қисмлардан ташкил топган, қайсидир маънода тўлалигича ўхшаш тузилишга айтилади». Ўзига ўхшаш объектларни ўрганиш муаммосини оддий бўлмаган хусусиятларини классик математиклар нуқтаи назардан XIX асрнинг охири XX асрнинг бошларида Жюлиа, Пуанкаре, Пеано, Кантора, Хаусдорф ва бошқа олимлар ўз ишларида кўрганлар. Бироқ, Мандельброт биринчи бўлиб тарқалган илмий ишлар натижаларини бирлаштиришга ва уларни амалий қийматини кўрсатишга муваффақ бўлган. У илмий журналлардан бирида нашр қилинган ўзининг «Буюк Британия қирғоқларининг узунлиги қанча?» номли мақоласида географик картани қуриш ва унинг ўлчамини ўлчаш билан боғлиқ муаммони баён этган. Мақоладан шу нарса маълум бўладики картанинг масштаби қанчалик катта бўлса, қирғоқнинг тасвири шунча аниқ бўлади.

Қуйида фракталларни қуришни L-тизимлар усулига асосан кўриб чиқамиз.

1968 йили Аристидом Линденмайер (У маълумоти бўйича биолог) томонидан ишлаб чиқилган L-тизимлар усули геометрик фракталларни қуришда энг оддий ҳисобланади. Линденмайер табиатнинг мураккаб объектларини бир нечта қоидалар ҳамда оддий ташкил этувчилар ёрдами билан ифодалаш жараёнлари усулини таклиф қилган. L-тизимлар расмий тилларни ўрганишда киритилган, шунингдек ундан селекциянинг биологик моделларини ишлаб чиқишда фойдаланган. Бунда *бўгим*лар қоидаларига таянилган ва символли сатрларга алмаштирилган аниқ расмий грамматикадан фойдаланган.

L-тизимлар усули бир неча тилларнинг етарли даражада оддий грамматикаси бўлиб, улар устида турли муҳитлар ёрдамида инициатор ва алмаштиришларни баён этувчи Лого тилининг аналогик воситаларидир (текисликда ва фазода оддий геометрик шаклларни мумкин бўлган алмаштиришларини аксиоматик баён этиш).

L-тизимлар усули ёрдамида кўпгина аниқ ўхшаш фракталларни қуриш мумкин, яъни Кох қор томчиси, Серпин учбурчаклари, Пеано эгри чизиқлари ва бошқа мураккаб қуришлар ҳам амалга оширилади.

Фараз қиламизки ихтиёрий символлардан ташкил топган *аксиома* деб аталувчи қатор ва *қоидалар* деб аталувчи қаторлар мажмуаси мавжуд. Ҳар бир қоида қуйидаги кўринишда бўлсин: символ→қатор

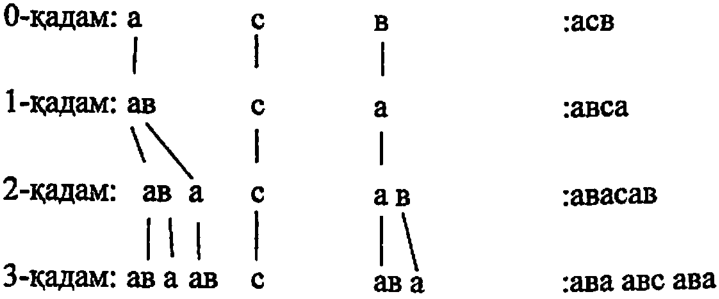
Масалан,

Аксиома: а с в

Қоида а→ав

в→а

0-қадамда натижавий қатор «0»га тенг. Кейин қатор чапдан ўнгга қараб бошланади. Агар навбатдаги белги ҳеч қанақа қоида бермаса, уни янги натижавий қаторга ўтказилади. Агар навбатдаги символ бирор қоиданинг биринчи символи бўлса, унда у мос қоидада қатор билан алмаштирилади.



ва ҳ.к.

Линденмайер L-тизимларни биологик объектлар ривожланишини баён этишнинг расмий усули деб қарайди.

Сув ўтининг қуйидаги L-тизимларни келтириб ўтамиз:

Аксиома: А В

Қоида: А→В

В→АВ

Бунда Сув ўтининг биринчи ўн қадамдаги ҳолатни қараймиз.

0 A
1 B
2 AB
3 BAB
4 ABBAB
5 BABABBAB
6 ABBABBABABBAB
7 BABABBABABBABBABABBAB
8 ABBABBABABBABBABABBABABBABBABABBAB
9 BABABBABABBABBABABBABABBABBABABBABBABABBABABBABBABABBAB

Кейинчалик L-тизимларни компьютер графикасида қўллаш мумкинлиги топилди. Бу тизимлар ёрдамида ўзига ўхшаш тузилишлардан иборат турли фракталларни чизиш жуда қулай. Ва албатта L-тизимлар янги фракталларнинг чексиз кўринишларига йўл очади, компьютер графикасида фрактал моделлар қуриш учун улардан кенг фойдаланишга сабабчи бўлиб хизмат қилади.

L-тизимларни қўллаб қўйидагига эга бўлиш мумкин. Умумий қабул қилинган белгилашларда L-тизимлар қанақа кодланади: олдинга ҳаракат F ҳарфи билан белгиланади (Forward-олдинга), соат стрелкаси бўйича бурилишни «+» белгиланади, тескари йўналишни эса «–» билан, чизмасдан орқага қайтишни B (Back-орқага) ҳарфи билан белгиланади. Қаерга қайтиш нуқтаси «[» билан белгиланади, қаердан қайтиш нуқтаси эса «]» билан белгиланади.

L-тизимлар татбиғи учун қисм тизимлари сифатида Turtle (тошбақа алгоритми) графика деб аталувчи тизимлар қўлланилади. Бунда тошбақа нуқтаси экран бўйича, дискрет қадамлар билан қоидадаги каби ўз изини чизиб ҳаракатланади ёки керак бўлса чизмасдан кўчади.

Фараз қиламизки буйруқлар тўпламини бажарувчилар тошбақа бўлсин. Тошбақа текислик бўйича кўчади. Тошбақанинг бошланғич ҳолатининг координатасини x,y ва тошбақа фойдаланувчи йўналишни аниқловчи бурчак α бўлсин. Тошбақанинг хотираси бор деб тасаввур қилинади. Тошбақанинг бошланғич жойлашган координатасини x_0,y_0 ва ҳаракат йўналиши α_0, шунингдек h қадамнинг қиймати берилган, тошбақа «олдинга» буйруғи бўйича кўчади ва ўнгга ёки чапга буйруғи бўйича β бурчакка бурилади.

Тошбақа қуйидаги буйруқларни бажара оладиган бўлсин:

«F» - α йўналишда h қадам олдинга из қолдириб;

«f» - α йўналишда h қадам олдинга из қолдирмай;

«+» - β бурчак остида (соат стрелкаси бўйича) ўнгга бурилиш;

«–» - β бурчак остида (соат стрелкаси бўйича) чапга бурилиш;

«[» - (x,y,α) бошланғич ҳолатини хотирага сақлаб қолиш;

«]» - охирги сақланганларни ҳолати (x,y,α)ни эслаб қолиш.

1 - мисол сифатида Кох триад эгри чизиғи (2.1-расм) учун бошқарувчи қатор қуришни қараймиз. Бунда:

Аксиома: F

Қоида: F→F-F++F-F

Бурчак β=360/6; $\beta=60^0$

0 - қадам: F;

1-қадам: F-F++F-F;

2-қадам: F-F++F-F–F-F++F-F++F-F++F-F–F-F++F-F;

3-қадам: F-F++F-F–F-F++F-F++F-F++F-F–F-F++F-F–F-F++F-F–F-F++F-F++F-F++F-F–F-F++F-F++F-F++F-F–F-F++F-F++F-F++F-F–F-F++F-F–F-F++F-F– F-F++F-F++F-F++F-F–F-F++F-F ва ҳ.к.

2-мисол сифатида Серпин учбурчаги (2.2-расм) учун бошқарувчи қатор қуришни қараймиз:

Аксиома: F×F–FF–FF

Қоида: F→ FF

×→ –F×F++F×F++F×F–

Бурчак β=360/6; β=60^0;

0 - қадам: F×F–FF–FF

1-қадам:(FF—F×F++F×F++F×F—FF–FF–FF;)

F–F×F++F×F++F×F–FF–FF–FF

2-қадам:FFFF–FF–F×F++F×F++F×F–FF++FF–F×F++F×F++F×F–FF++FF–F×F++F×F++F×F–FF–FFFF–FFFF–FFFF;

3-қадам:FFFFFFFF–FFFF–FF–F×F++F×F++F×F–FF++FF–F×F++F×F++F×F–FF++FF–F×F++F×F++F×F–FF–FFFF++FFFF–FF–F×F++F×F++F×F–FF++FF–F×F++F×F++F×F–FF++FF–F×F++F×F++F×F–FFFF++FFFF–FF–F×F++F×F++F×F–FF++FF–F×F++F×F++F×F–FF++FF–F×F++F×F++F×F–FF–FFFF–FFFFFFFF–FFFFFFFF–FFFFFFFF ва ҳ.к.

3-мисол сифатида Тупбутоқнинг (2.3-расм) учун бошқарувчи қатор қуришни қараймиз:

Аксиома: F

Қоида: F→ -F+F+[+F-F-]-[-F+F+F]

Бурчак β=180^0/8.

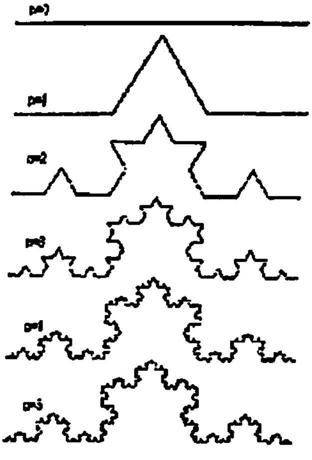
0 - қадам: -F+F+[+F-F-]-[-F+F+F];

1 - қадам: --F+F+[+F-F-]-[-F+F+F]+ -F+F+[+F-F-]-[-F+F+F]+ [-F+F+[+F-F-]-[-F+F+F]- -F+F+[+F-F-]-[-F+F+F]-]-[--F+F+[+F-F-]-[-F+F+F]+ -F+F+[+F-F-]-[-F+F+F]+ -F+F+[+F-F-]-[-F+F+F] ва ҳ.к.

Юқорида келтирилганидек фракталларни учта энг гуруҳларга ажратиш қабул қилинган: геометрик, алгебраик, стохастик.

Геометрик фракталларни қуриш жуда оддий ва энг кўргазмали. Энг оддий икки ўлчовли ҳолатда уларни бир неча синиқ чизиқлар ёрдамида *бўғим* деб аталувчи чизиқни ҳосил қилиш билан амалга оширилади.

Мисол сифатида Кох триад эгри чизиқларини қуриш жараёнини қараймиз. Бу эгри чизиқ 1904 йили швед олими Гельге фон Кох томонидан кўриб чиқилган (ўрганилган).



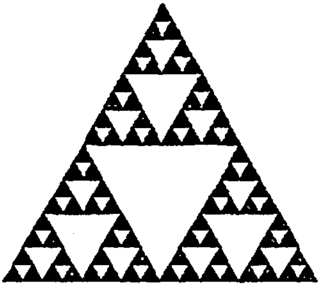
2.1-расм. n=1,…,5 бўлганда Кох триад эгри чизиғи

0-қадам: Эгри чизиқни қуриш жараёни бирлик кесмадан бошланади.

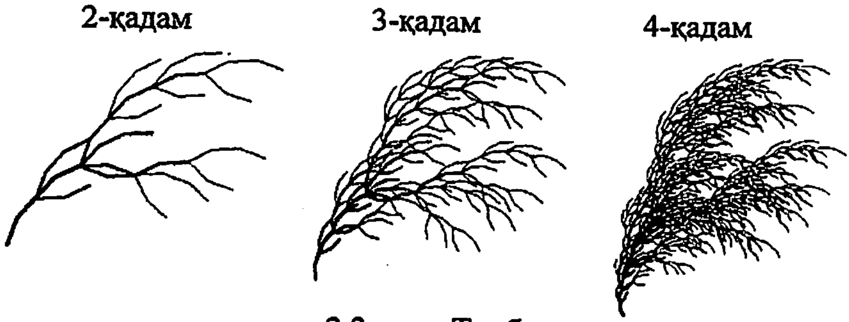
1-қадам: Бу кесмани тенг учта бўлакка бўламиз ва унинг ўртадагисини иккита боғланган шу узунликдаги кесма билан худди 2.1-расмда кўрсатилганидек алмаштирамиз. Кейинги қадамда ҳам шу жараён ҳар бир звенолар учун алоҳида қўлланилади.

Натижада янги синиқ чизиқ ҳосил бўлади, ҳамда уларнинг ҳар бирининг учи кейингисининг учи бўлиб келади. 2.1-расмда эгри чизиқнинг бешта авлоди келтирилган. Бу жараённи чексиз давом эттириб, Кох триад эгри чизиғидан иборат фрактални ҳосил қиламиз. Ихтиёрий n-қадамдан олинадиган эгри чизиқлар олдфрактал деб аталиши қабул қилинган.

Фрактал объект учун бошқа бир мисол Серпин гиламини қараб чиқамиз. Нолинчи қадамда оддий тенг томонли учбурчак олинади. Биринчи кадамда учбурчакнинг томонларини тенг иккига бўлинади ва томон ўрталарини кесмалар билан туташтирилади. Кейинги қадамда ҳар бир учбурчаклар учун шу жараён алоҳида қўлланилади ва марказдаги учубурчак бундан мустаснодир. Натижада янги учбурчаклар ҳосил бўлади. Бу жараённи чексиз давом эттириб, Серпин учбурчак фракталини ҳосил қилинади.



2.2-расм. Серпин учбурчаги



2-қадам 3-қадам 4-қадам

2.3-расм.Тупбутоқ

Бундай тўпламларнинг тасвири аниқ чизилган чегараларга эга бўлмайди.

2.2. Итерацион функциялар тизимлари (ИФТ (Iterated Function Systems-IFS))усули ва ундан фракталларни қуришда фойдаланиш

Фракталлар тузилишини ҳосил қилишнинг оддий воситаларидан ҳисобланган IFS усули 1980-йилларнинг ўрталарида пайдо бўлган. IFS қисилувчи аффин алмаштиришлар тўпламидир. Маълумки аффин алмаштиришлар масштаблаштириш, буриш ва параллел кўчиришни ўз ичига олади. Агар масштаблаштириш коэффициенти 1 дан кичик бўлса, аффин алмаштириш қисилувчи ҳисобланади.

Бундай тўпламларнинг тасвири аниқ чизилган чегараларга эга бўлмайди. Фракталларнинг ўзига хос хусусияти шундан иборатки, тасвирнинг энг кичик бўлаги ҳам охир оқибат бутунлигича ўзини ифодалайди, айниқса бу самарани Жюлиа тўплами (1.3-расм) мисолида кузатиш мумкин. Фракталларнинг бу хусусиятига кўра маълумотларни фрактал қисишга асос солинган.

IFS бир нечта фиксирланган функциялар тизимини ўзида ифодалайди. Энг оддий IFS текисликнинг аффин алмаштиришдан ташкил топган:

$$X' = A*X + B*Y + C,\ Y' = D*X + E*Y + F.$$

1988 йили америкалик таниқли мутахассислар Барнсли ва Слоан график маълумотларни қисиш ва сақлаш учун динамик тизимлар назариясига асосланган мулоҳазали фикрларни таклиф этадилар. Улар ўз усулларини ахборотларни фрактал қисиш усули деб номлайдилар. Бундай номнинг келиб чиқиши бу усулдан пайдо бўлувчи геометрик шакллар билан боғлиқдир.

Барнсли ва Слоан ушбу фикрларга асосланиб ахборотларни 500-1000 маротоба қисишга имконият берувчи алгоритм яратдилар. Буни қисқача қуйидаги кўринишда баён этиш мумкин. Тасвир бир нечта оддий алмаштиришлар билан кодланади, яъни бу алмаштиришларнинг коэффициентлари бизнинг аффин ҳолатда A,B,C,D,E,F лардан иборат.

Масалан, бирорта тасвирни иккита аффин алмаштириш билан кодланса, уларни 12 та коэффициентлар ёрдамида бир қийматли аниқланади. Агар бошланғич нуқта X = 0, Y = 0 деб олинса ва итерацион жараён қўлланилса, унда биринчи итерациядан сўнг 2 та, иккинчи итерациядан сўнг 4 та, учинчи итерациядан сўнг 8 та, тўртинчи итерациядан сўнг 16 та ва ҳ.к. бўлади. Бир неча итерациялардан сўнг олинган нуқталар тўплами кодланган тасвирни ифодалайди. Бироқ муаммо шундан иборатки, ихтиёрий тасвирни кодлаган IFS коэффициентларини топиш жуда қийин.

IFS қуришда аффин алмаштиришдан бошқа, параметрлар сони катта бўлмаган оддий геометрик алмаштиришлар ҳам қўлланилади.

Масалан, лойиҳавий:

$$X' = (A1*X + B1*Y + C1) / (D1*X + E1*Y + F1),$$

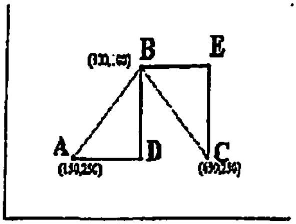
$$Y' = (A2*X + B2*Y + C2) / (D2*X + E2*Y + F2).$$

Ёки текисликдаги квадратик алмаштиришлар:

$$X' = A1*X*X + B1*X*Y + C1*Y*Y + D1*X + E1*Y + F1,$$

$$Y' = A2*X*X + B2*X*Y + C2*Y*Y + D2*X + E2*Y + F2.$$

Мисол тариқасида Хартера-Хейтуэя «аждари» (2.4-расм) ва Кох эгри чизиғи (2.1-расм) фрактал тузилишларини қуриш учун IFS қўллашни қараймиз. Бу тузилишларда ўхшаш қисмларни белгилаймиз ва уларнинг ҳар бири учун аффин алмаштириш коэффициентларини ҳисоблаймиз. Бутун тасвирга ўхшаш нечта қисм бор бўлса шунча аффин алмаштиришлар аффин коллажига киритилади.



2.4-расм. IFS усулида Хартера-Хейтуэя «аждари» қуриш учун тайёргарлик

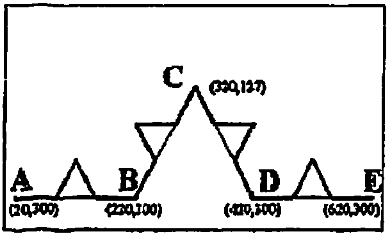
Хартера-Хейтуэя «аждари» учун IFS қурамиз. Бунинг учун 640x350 дисплей тўрлари координатасида бу фракталнинг биринчи авлодини жойлаштирамиз. Ҳосил бўлувчи синиқ чизиқ нуқталарини A,B,C деб белгилаймиз. Қуриш қоидаси бўйича бу фрактал 2 та қисмдан иборат бўлиб, расмдаги синиқ чизиқлар ADB ва BEC синиқ чизиқларга тўлалигича ўхшаш.

Бу кесмаларнинг четлари координаталарини билиб, ABC синиқ чизиғини ADB ва BEC ўтказувчи иккита аффин алмаштириш коэффициентларини ҳисоблаш мумкин:

$X' = -0.5*X -0.5*Y + 490;$
$Y' = 0.5*X -0.5*Y + 120;$

$X' = 0.5*X -0.5*Y + 340;$
$Y' = 0.5*X +0.5*Y - 110.$

2.5-расм. 640x350 тўғри бурчагида IFS усули ёрдамида қурилган Хартера-Хейтуэя «аждари»



2.6-расм. IFS усулида Кох триад эгри чизиғи қуриш учун тайёргарлик

Бошланғич нуқталарини (x=0, y=0) деб олиб, уларга IFS итерацион таъсир эттирсак, ўнта итерациядан кейин экранда 2.5-расмда тасвирланган ўзида Хартера-Хейтуэя «аждари»ни ифодаловчи фрактал тузилишга эга бўламиз. Унинг коди (қисиб ёзганда) иккита аффин алмаштиришнинг коэффициентлар тўплами дейилади.

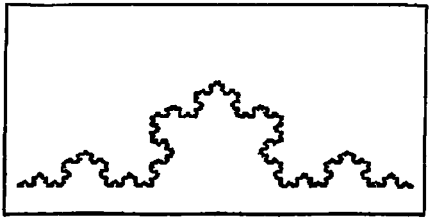
Юқоридагига ўхшаш Кох триад эгри чизиғи учун IFS қуриш мумкин. Бу эгри чизиқ тўртта қисмдан иборат бўлиб, 2.1-расмда n=2 даги эгри чизиққа бутунлигича ўхшаш. IFS ни топиш учун фракталнинг биринчи авлодини 640x350 дисплей тўрлари координатасида жойлаштирилади.

Уни қуриш учун тўртта алмаштиришдан ташкил топган аффин алмаштиришлар тўплами талаб этилади:

$X' = 0.333*X + 13.333;$
$Y' = 0.333*Y + 200;$
$X' = 0.167*X + 0.289*Y + 130;$
$Y' = -0.289*X + 0.167*Y + 256;$

$X' = 0.333*X + 413.333;$
$Y' = 0.333*Y + 200;$
$X' = 0.167*X - 0.289*Y + 403;$
$Y' = 0.289*X + 0.167*Y + 71.$

Бу аффин алмаштиришнинг қўллаш натижасини ўнта итерациядан кейин 2.7-расмдаги ҳолатни кўриш мумкин.

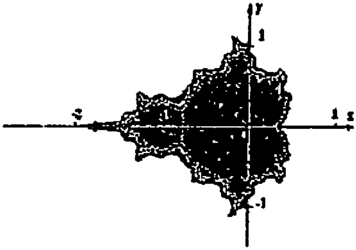


2.7-расм. 640х350 тўғри бурчагида IFS усули ёрдами билан қурилган Кох эгри чизиғи

Фракталларнинг энг катта гуруҳидан бири-алгебраик фракталлардир. Уларни *n*-ўлчовли фазода ночизиқ жараёнлар ёрдами билан ҳосил қилинади. Икки ўлчовли жараёнлар энг кўп ўрганилган. Ночизиқ итерацион жараённи дискрет динамик тизим каби изоҳласак, бу тизим назарияси терминологиясидан фойдаланиш мумкин: фазали портрет, барқарор жараён, тортилиш нуқтаси ва бошқалар.

Маълумки, ночизиқ динамик тизимлар бир неча турғун ҳолатларга эга. Итерациянинг бир неча сонидан кейин динамик тизимнинг ҳолати унинг бошланғич ҳолатига боғлиқ бўлади. Шунинг учун ҳар бир турғун ҳолат бошланғич ҳолатнинг бир неча соҳасини эгаллайди ва албатта тизим қўрилаётган охирги ҳолатга тушади. Худди шундай фазалар фазоси аттракторлар тортилиш соҳасига бўлинади. Агар икки ўлчовли фазо фазали бўлса, тортилиш нуқталари соҳасини турли ранглар билан бўяб бу тизимларнинг рангли фазалар портретини олиш мумкин. Рангларни танлаш алгоритмини алмаштириб фрактал тасвирларни олиш мумкин.

Кутилмаганда математиклар учун примитив алгоритмлар ёрдамида жуда мураккаб нотривиал тузилишларни яратиш имконияти пайдо бўлади.



2.8-расм. Мандельброт тўплами

Мисол сифатида Манделброт тўпламини қараймиз (2.8-расм). Уни қуриш алгоритми етарлича оддий итератив (такрорий) ифодага асосланган:

$$Z[i+1] = Z[i] * Z[i] + C,$$

бу ерда Z_i ва C лар комплекс ўзгарувчилар.

Итерация ҳар бир бошланғич нуқта учун бажарилади. Тўғрибурчакли ёки квадратик қисм тўплам комплекс текислигидир. Итерацион жараён *Z[i]* маркази (0,0) нуқтада ётадиган, радиуси *2* га тенг айлана чегарасидан чиқмагунга қадар давом этади, ёки итерациялар сони етарлича катта бўлгандан кейин (масалан, 200-500) *Z[i]* айлананинг қайсидир бир нуқтасига киради (агар *Z[i]* етарлича катта итерациялар сони давомида айлана ичида қолса, итерацион жараён тўхтилади). Юқорида баён этилган алгоритм Мандельброт тўплами деб аталувига яқинлашишни беради.

Мандельброт тўпламига итерация сони чексиз бўлган вақтда, чексизликка кетмайдиган нуқталар киради. Тўплам чегараларида ётувчи (кирувчи) нуқталар (айнан шу ерда мураккаб тузилишлар пайдо бўлади) итерациялар сонининг охиридан кейин чексизликка кетади, тўплам ичида ётувчи нуқталар бир неча итерациялардан кейин чексизликка кетади.

2.3. R-функция усули ёрдамида фракталлар қуриш

Фракталлар тасвирини газлама, гилам, чинни ва керамик буюмларга нусхалаш (штамплаш) учун уларнинг тенгламасини ёзиш керак бўлади, яъни R-функция усулини қўллаб фракталлар соҳаси геометрияси тенгламасини қуришни амалга ошириш мумкин [28,32,33,41-48].

Соҳа геометриялари чегараси тенгламаларини қуриш таянч функциялар каби R-функция тизимларидан мосини танлаб аналитик тенгламанинг кўринишини чиқаришга имкон берувчи мантиқий формулаларни ҳам талаб этади. Бу R-функция усули билан таниш бўлмаган аналитик ҳамда дифференциал геометриянинг муҳандислари ва тадқиқотчилари учун қийин бўлган тизимни бажарадиган қатъий математик билимни ва малакани талаб этади. Бу йўналишдаги истиқбол - ташкил этилган геометрик объектларни шакллантиришни ўзида ифодалайди.

Шуни айтиш мумкинки, фракталлар соҳаси геометриянинг аналитик тенгламаларини ёзиш учун имкон берувчи усулларидан бири В.Л.Рвачевнинг R-функция усули ҳисобланади. R-функция усули бўйича асосий тушунчаларни келтирамиз.

R-функция ҳақиқий ўзгарувчили сонли функция бўлиб, унинг ишоралари тўлиқлигича сонлар ўқи интервалари $(-\infty,0)$ ва $[0,\infty)$нинг мос бўлакларида аргументлар ишоралари билан аниқланади.

Агар шундай эргашувчи *Ф* мантиқий функция мавжуд бўлиб унинг аргументлари $sign(z)=\Phi(sign(x), sign(y))$ бўлса, $z=z(x,y)$сонли функция R-функция деб аталади.

Ҳар бир R-функция ягона эргашувчи мантиқ функцияга мос тушади.

R-функциялар тўплами R-функцияларнинг устма-уст тушиши маъносида ёпиқдир. Агарда *H* нинг барча устма-уст тушувчи элементлари тўплами R-функциялар тўпламининг ҳар бир тармоғи билан бўш бўлмаган кесишишга эга бўлса, R-функциялар тизими *H* етарлича тўлиқ дейилади.

Энг кўп фойдаланиладиган R-функция тўлиқ тизими

$$(-1<\alpha\le 1) \text{ да } R_\alpha \quad x\wedge_\alpha y\equiv\frac{1}{1+\alpha}\left(x+y-\sqrt{x^2+y^2-2\alpha xy}\right);$$

$$x\vee_\alpha y\equiv\frac{1}{1+\alpha}\left(x+y+\sqrt{x^2+y^2-2\alpha xy}\right);$$

$$\overline{x}\equiv -x.$$

тизимдир.

$\alpha=0$ да R_0тизимга эга бўламиз:

$$x\wedge_0 y\equiv\left(x+y-\sqrt{x^2+y^2}\right);$$

$$x\vee_0 y\equiv\left(x+y+\sqrt{x^2+y^2}\right);$$

$$\overline{x}\equiv -x.$$

$\alpha=1$ да R_1 тизимга эга бўламиз:

$$x\wedge_1 y\equiv\frac{1}{2}(x+y-|x-y|);$$
$$x\vee_1 y\equiv\frac{1}{2}(x+y+|x-y|);$$
$$\overline{x}\equiv -x.$$

R-функцияларнинг охирги ҳолатида коньюнкциялар ва дизъюнкциялари қуйидагилар билан мос тушади:

$$x\wedge y\equiv\min(x,y),\ x\vee y\equiv\max(x,y).$$

R-функция ёрдамида оддий соҳаларнинг маълум тенгламалари бўйича тузилган соҳаларнинг чегараси тенгламаларини ошкормас шаклини қуриш мумкин.

R-функцияларни чексиз қийматли мантиқ ёки тоқмантиқ инструменти сифатида қараш мумкин.

R-функциялар кенг доирадаги математика, физика масалалари (эластиклик назарияси, электродинамика, иссиқлик ўтказувчанлик назарияси ва бошқалар) синфини ҳал қилишда, сигналлар ва тасвирларни кўп ўлчовли рақамли қайта ишлашда, компьютер графикаси ва бошқа соҳаларда қўлланилади.

Соҳа геометрияси тенгламаларини (яъни нормаллашган тенгламасини) қуриш усуллари бу тенгламаларни ташкил қилиш жараёнини автоматлаштириш учун яхши технологик асосни ўзида ифодалайди. Аслида фақат предикат тенгламаларни қуриш жараёнини автоматлаштириш керак, бу тенгламалардан соҳа геометриясининг оддий элементар тенгламаларига ўтиш мантиқ функция символларини

R-функциянинг мос символлари билан алмаштириш орқали бажарилади, соҳа символлари - уларнинг мос чап қисмларига тенг эмас.

Шундай қилиб, алгоритм учун кирувчи маълумот қуйидагилар:

1. Фойдаланиладиган стандарт примитивларнинг кўриниши: тўғри чизиқ, доира, эллипс, тўртбурчак, учбурчак, қавариқ кўпбурчак, айлана, мунтазам кўпбурчак ва бошқалар (фойдаланувчининг сўровига қараб меню ёки уларнинг кўриниши тўлдирилиб борилади).

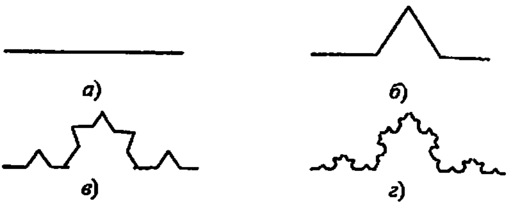
2. Стандарт примитивларни ўлчами ва ўрнини аниқловчи геометрик параметрлар.

Бу маълумотлар асосида таянч функциялар автоматик шакллантирилади, чақирилган примитивларнинг нормаллашган тенгламаси ва белгилар бўйича ташкил этилган соҳа геометриясининг "ичкари томон" - "ташқари томон"ларининг предикат ҳамда аналитик функциялари шакллантирилади.

Фракталлар назарияси ва уларнинг амалий татбиқи бўйича радиофизика ва радиотехника соҳасида Россия фанлар академиясининг В.А.Котельников номидаги радиотехника ва электроника институтида тадқиқотлар олиб борилмокда. 20 асрнинг 80-йилларидан бошлаб улар янги фундаментал илмий йўналиш "Фрактал радиофизика ва фрактал радиотехника: Фрактал радиотизимни лойиҳалаштириш"га солди ва ривожлантирди.

[58,59]да ажратиб кўрсатилганидек, фракталлар, касрли операторлар ва скейлинглар амалиёт сўровларига ҳамда замонавий математиканинг абстракт лойиҳаларига мувофиқ келувчи тадқиқотнинг муҳим инструментлари ҳисобланади.

R-функция усули асосида Кох эгри чизиғининг тенгламасини қуришни қараймиз (2.9-расм).



2.9-расм Кох эгри чизиғини қуриш

Қуришни $-3a \leq x \leq 3a$ интервалда бажарамиз. У ҳолда

$$\omega_0 = -y \geq 0; \quad \omega_{00} = \omega_0 \wedge_0 (f_1 \wedge_0 f_2) \geq 0;$$

$$f_1 = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{3} - y + a\sqrt{3}\right) \geq 0; \quad f_2 = \frac{1}{2}\left(-x\sqrt{3} - y + a\sqrt{3}\right) \geq 0.$$

бўлади.

Бу ҳолатда ω_{00} тенг ёнли учбурчакнинг тенгламасидир. Агар ω_{00} нинг ўрнига тенгламанинг кўринишини

$$\omega_1 = \omega_0 \vee_0 (f_1 \wedge_0 f_2) \geq 0,$$

деб ёзсак, унда 2.9 *в*) расмдаги графикка мос тенгламани оламиз. Шундай қилиб,

$$\omega_1 = \omega_0 \vee_0 (f_1 \wedge_0 f_2) \geq 0; \quad \omega_{21} = \omega_1\left(3(x+2a), 3y\right) \geq 0;$$

$$\omega_{22}=\omega_1\left(3\left(\frac{x+a/2}{2}+\left(y-\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right),$$

$$3\left(-(x+a-2)\frac{\sqrt{3}}{2}+\left(y-\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)\frac{1}{2}\right)\geq 0;$$

$$\omega_2=(\omega_{21}(x,y)\vee_0\omega_{22}(x,y))\wedge_0(-x,y)\vee_0\omega_{22}(-x,y))\geq 0;$$

$$\omega_{k1}=\omega_{k-1}(3(x+2a),3y)\geq 0;$$

$$\omega_{k2}=\omega_{k-1}\left(3\left(\frac{x+\alpha/2}{2}+\left(y-\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)\frac{\sqrt{3}}{2}\right),3\left(-(x+a/2)\frac{\sqrt{3}}{2}+\left(y-\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)\frac{1}{2}\right)\right)\geq 0;$$

$$\omega_k=\left(\omega_{k1}(x,y)\vee_0\omega_{k2}(x,y)\right)\wedge_0\left(\omega_{k1}(-x,y)\vee_0\omega_{k2}(-x,y)\right)\geq 0\left(k=3,4,\ldots\right)$$

ҳосил бўлади.

2.9-расмда $\omega_k(x,y)\geq 0$ функция даражалари чизиқларининг тасвири келтирилган бўлиб, k нинг турли қийматлари учун Кох эгри чизиғини беради.

2. Серпин Гилами. Серпин Гилами қуйидаги тартибда қурилади. Берилган квадрат 9 та бир хил катталикдаги квадратларга бўлинади, бунда марказдаги квадрат бундан мустасно (2.10-расм). Кейин бу жараён ҳосил қилинган квадратларда такрор бажарилади ва чексиз давом эттирилади ҳамда натижада фрактал объект ҳисобланган Серпин гиламини ҳосил қилинади. Унинг касрли ўлчами $D=\lg 8$ / $\lg 3\approx 1{:}893$ га тенг. Агарда чексиз жараённи k-тартибда тўхтатилса, k-тартибдаги олдфрактал ҳосил қилинади. [32,33]га асосан Серпин олдфрактали чегараларини функцияси қуйидаги

$$f_1=\frac{a^2-x^2}{2a}\geq 0,\quad f_2=\frac{b^2-y^2}{2b}\geq 0.$$

кўринишни олади, $\omega_0=f_1\wedge_0 f_2\geq 0$ – 0-тартибдаги олдфрактал дир.

Узига-ўзи ўхшашлик хусусиятидан фойдаланиб ёрдамчи функцияларни қараймиз:

$$\omega_1(x,y)=\frac{\overline{\omega_0(3x,3y)}}{3}\geq 0,\quad \omega_k(x,y)=\frac{\omega_{k-1}(3\mu_{hx},3\mu_{hy})}{3}\geq 0...(k=2,3,...)$$

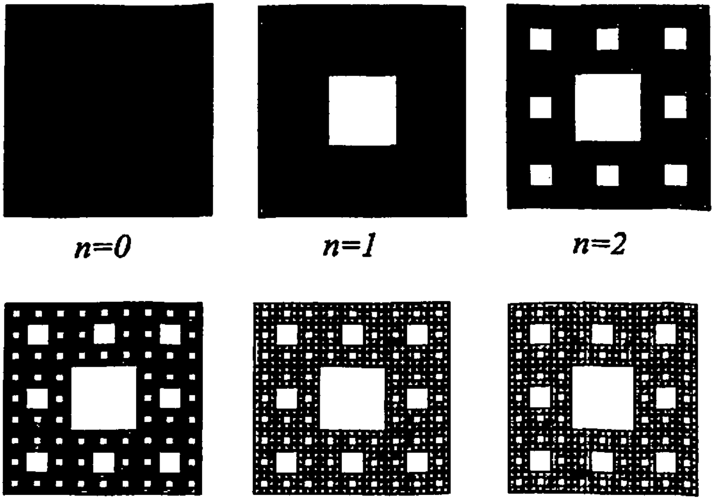
бу ерда

$$\mu_{h_x}=\frac{h_x}{\pi}\arcsin\left(sin\frac{\pi x}{h_x}\right),\quad \mu_{h_y}=\frac{h_y}{\pi}\arcsin\left(sin\frac{\pi y}{h_y}\right),\quad h_x=\frac{2a}{3},\quad h_y=\frac{2b}{3}.$$

Унда

$$K_\omega(x,y)=\omega_0(x,y)\wedge_0\omega_1(x,y)\wedge_0\omega_2(x,y)\wedge_0...\wedge_0\omega_k(x,y)\geq 0.$$

2.10-расмда k нинг турли қийматларида Серпин гиламини берувчи функция $K_{\omega_k}(x,y)\geq 0$нинг турли тартибдаги чизиқлари тасвирлари қурилган.



n=0 n=1 n=2

n=3 n=4 n=5

2.10-расм. Квадратик Серпин гиламини қуриш

3. Серпин Салфеткаси. [32,33]да Серпин салфеткаси ёки учбурчакнинг тенгламаси қурилган. Уни қуриш учун тенг томонли учбурчак марказидан учбурчак “қирқиб” оламиз. Ҳосил бўлган учбурчакларда худди шу жараён такроран бажарилади (марказдаги учбурчак бундан мустасно) ва чексиз давом эттирилади. Агар шу ҳосил бўлган учбурчаклардан ихтиёрий биттасини олиб катталаштирилса, бошланғич учбурчак нусхаси пайдо бўлади. Бу ҳолатда тўлиқ ўзига-ўзи ўхшашлик хусусияти бажарилади. Бу фракталда инициатор ва генератор олдинги фракталдаги каби бир хилдир.

Ҳар бир итерацияда унинг нусхасини кичиклашгани генераторнинг ҳар бир бурчакларига қўшилиб боради. Ҳар бир итерацияда ҳар генераторнинг бурчакларига нусхаларнинг кичиклаштирилгани қўшилади ва ҳ.к. Агар бу фрактални яратишда чексиз сондаги итерациялар олиб борилса у бутун бир текисликни эгаллайди. Шунинг учун унинг фрактал ўлчови $\frac{\ln 9}{\ln 3}=2$дир.

Тўғри бурчакли учбурчакнинг тенгламасини қуйидаги кўринишда ёзиб оламиз:

$$\omega_0(x,y)=-\sqrt{x^2+y^2}\cos\left(\frac{2}{3}\arcsin\left(\sin\frac{3\theta}{2}\right)\right)+R\geq 0,$$

ёки

$$\omega_0(x,y)=-x1+R\geq 0,$$

бу ерда

$$x1=r\cos\mu;\ y1=r\sin\mu;\ \mu(\theta)=\frac{2}{3}\arcsin\left(\sin\frac{3\theta}{2}\right);$$

$$r=\sqrt{x^2+y^2};\ \theta=arctg\frac{y}{x};$$

R - ички чизилган айлана радиуси.

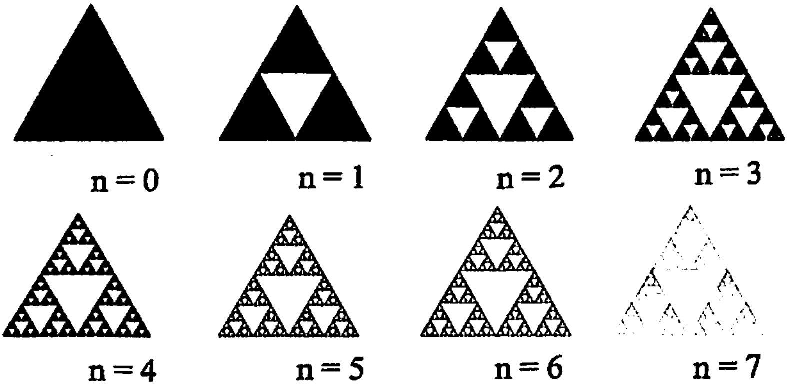
Унда

$$\omega_1(x,y)=\omega_0(-2(x1-R),\ 2y1)/2\geq 0,$$

ва мос

$$\omega_k(x,y)=\omega_{k-1}(2(x1-R), 2y1)/2\geq 0, \ (k=2,3,...).$$

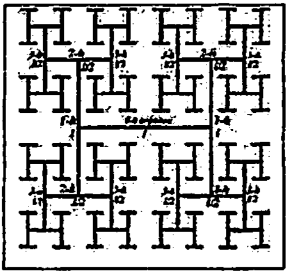
Таъкидлаймизки бу ҳолатда R-функция қўлланилмайди. 2.11-расмда Серпин салфеткасини ҳосил этувчи k нинг турли қийматлари учун $\omega_k(x,y)\geq 0$ функциянинг турли тартибдаги чизиқлари тасвирлари қурилган.


n = 0 n = 1 n = 2 n = 3

n = 4 n = 5 n = 6 n = 7

2.11-расм. Серпин салфеткаси

4. Кейли дарахтига асосланган фрактал антенналар. Фрактал антенна турли узунликлардаги ўтказгичлар бўлаклари қаторини ифодалайди. Ҳар бир янги итерацияда антеннага аниқ узунликдаги бўлаклар қўшилади, яъни ҳар бир тоқ итерацияда узунлик илгаригидек қолади, жуфт итерацияда узунлик икки мартага камаяди (2.12-расм). [52,53]да 6-тартибли “Кейли дарахти” антеннасида токнинг тақсимланиши тадқиқ қилинган бўлиб, антенна параметрларини расмийлаштиришда апературанинг янги қисмлари роль ўйнайди.



2.12-расм. 6-тартибдаги «Кейли дарахти»

Энди R-функция усулига асосан «Кейли дарахти» тенгламасини қурамиз.

1-қадам.

$$i=1;\quad a_1=l/2;\ b_1=l/2;$$

$$f_{oe}(x,y)=\frac{a_{11}^2-(x+a_1)^2}{2a_{11}}\geq 0,\ (a_{11}\text{ – кичик сон}),$$

$$f_{op}=\frac{a_{11}^2-(a_1-x)^2}{2a_{11}}\geq 0,\ \ \varphi_o(x,y)=\frac{b_1^2-y^2}{2b_1}\geq 0;$$

$$f_1=f_{oe}(x,y)\wedge\varphi_0(x,y)\geq 0,$$

$$f_2(x,y)=f_{op}(x,y)\wedge_0\varphi_0(x,y)\geq 0,$$

$$\omega_{01}(x,y)=f_1(x,y)\vee_0 f_2(x,y)\geq 0,$$

$$f_3(x,y)=\frac{a_1^2-x^2}{2a_1}\geq 0,\ \ f_4(x,y)=\frac{\mathrm{b}_{11}^2-y^2}{2b_{11}}\geq 0,$$

(* b_{11} - етарлича кичик сон*),

$$\omega_{02}(x,y)=f_3(x,y)\wedge_0 f_4(x,y)\geq 0,$$

$$f_{1ay}(x,y)=\frac{b_{11}^2-(y+b_1)^2}{2b_{11}}\geq 0,\quad f_{1by}(x,y)=\frac{b_{11}^2-(b-y)^2}{2b_{11}}\geq 0,\ c=b_1/2,$$

$$\varphi_{1\ell x}(x,y)=\frac{c^2-(x+a_1)^2}{2c}\geq 0,\quad \varphi_{1px}=\frac{c^2-(x-a_1)^2}{2c}\geq 0,$$

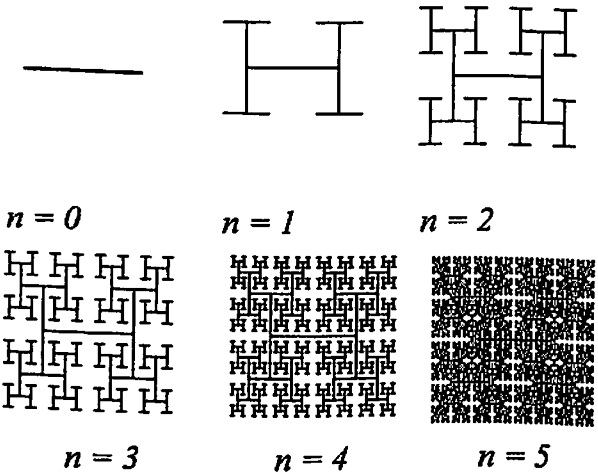
$$\omega_{03}(x,y)=(f_{1ay}(x,y)\wedge_0\varphi_{1lx}(x,y))\vee_0(f_{1ay}(x,y)\wedge_0\varphi_{1px}(x,y))\vee_0$$
$$\vee_0(f_{1by}(x,y)\wedge_0\varphi_{1lx}(x,y))\vee_0(f_{1by}(x,y)\wedge_0\varphi_{1px}(x,y))\geq 0,$$

$$\omega_1(x,y)=\omega_{01}(x,y)\vee_0\omega_{02}(x,y)\vee_0\omega_{03}(x,y)\geq 0,$$

2-қадам.

$$i=2;\ \ a_1=a_1/2;\ b_1=b_1/2;$$

$$\omega_2(x,y)=\omega_1(x-a_1,y-b_1)\vee_0\omega_1(x+a_1,y-b_1)\vee_0$$
$$\vee_0\omega_1(x+a_1,y+b_1)\vee_0\omega_1(x-a_1,y+b_1)\vee_0\omega_1(x,y)\geq 0.$$



n = 0 *n = 1* *n = 2*

n = 3 *n = 4* *n = 5*

2.13-расм. «Кейли дарахти»

Энди итерацион жараённи қурамиз ва натижада қуйидагига эга бўламиз:

$$i=k;\ \ a_l=a_l/2;\ b_l=b_l/2;$$

$$\omega_k(x,y)=\omega_{k-1}(x-a_1,y-b_1)\vee_0\omega_{k-1}(x+a_1,y-b_1)\vee_0$$
$$\vee_0\omega_{k-1}(x+a_1,y+b_1)\vee_0\omega_{k-1}(x-a_1,y+b_1)\vee_0\omega_{k-1}(x,y)\geq 0,\ \ \mathrm{k}=3,4,5,...$$

k нинг турли қийматларидаги ҳисоб натижалари 2.13-расмда келтирилган.

5. Эксклюзив фрактал ҳалқалар. Фрактал ҳалқали тузилишлар тадқиқотини биринчи бўлиб [52,53] ишларида таклиф этилган. Бунда асосан симметрия ва ўхшашлик хусусиятлари ҳисобга олинган.

1. А1 да фрактал антенна тузилишининг асосий элементи сифатида биринчи итерацияда радиуси 11 мм, *Ох* ўқи бўйича қалинлиги 0,4 мм ва радиуси бўйича 0,2 мм бўлган ҳалқа олинган.

2.14 - расмда ифодаланган фрактал апертуранинг тузилишини қуриш алгоритми қуйидагича ифодаланади.

0 - итерацияда асосий ҳалқага берилган ҳалқага нисбатан уч марта кичик бўлган 7 та ҳалқалар жойлаштирилади. Бошқа элементлари (эни ва ҳалқанинг қалинлиги) ўзгаришсиз қолдирилади. 6 та кичик айлананинг маркази олтибурчакнинг учига R*2/3 масофада жойлаштирилади. Еттинчи айлананинг маркази асосий антеннанинг маркази билан устма-уст тушади. Бу қуришни итерацион алгоритмнинг биринчи цикли деб атаймиз ва уни А1 аббревиатураси билан белгилаймиз.

2. Иккинчи итерациядаги А2 эксклюзив ҳалқаларни қуриш учун А1 модел учун қўлланган алгортмдан фойдаланилади (2.15 - расм).

Ҳар бир айланага олдинги радиусдан икки марта кичик бўлган олтита айлана қўйилади, маркази олтибурчакнинг учидаги бошланғич радиусдан R*2/3 масофада жойлаштирилади. Еттинчи айлана асосий айлана марказида жойлаштирилади. Шундай қилиб, расмда келтирилган фрактал антенна модели ҳосил қилинади. Худди 1 даги каби коаксиал чизиқларнинг диаметри 0,5 мм. Антенналарнинг қалинлиги 0,4 мм, ҳалқанинг эни 0,2 мм. Ташқи айланинг радиуслари R = 11 мм, R1 = R/3, R2 = R/9.

A1 эксклюзив антеннанинг тенгламасини қурамиз:

0-қадам.

$$\omega_{00}=\frac{R_0^2-x^2-y^2}{2R},$$

1 - қадам.

$$r_1=\frac{1}{3}R_0,\quad a_1=\frac{2}{3}R_0,\quad dx=\frac{\sqrt{3}}{3}R_0,\quad dy=\frac{1}{3}R_0,$$

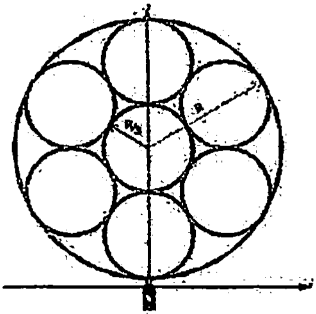
$$\omega_{10}=\frac{r_1^2-x^2-y^2}{2r_1},\ \omega_{11}=\frac{r_1^2-x^2-(y-a\ \ ^2}{2r_1},$$

$$\omega_{12}=\frac{r_1^2-x^2-(y+a\ \ ^2}{2r_1},\ \omega_{14}=\frac{r_1^2-(x+dx)^2-(y+dy)^2}{2r_1},$$

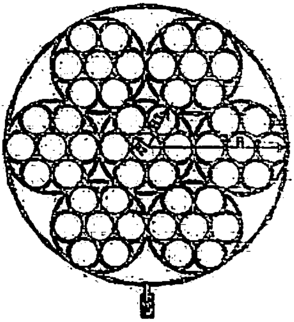
$$\omega_{15}=\frac{r_1^2-(x-dx)^2-(y+dy)^2}{2r_1},\ \omega_{16}=\frac{r_1^2-(x-dx)^2-(y-dy)^2}{2r_1},$$

$$\omega=(\omega_{00}\vee_0(\omega_{10}\vee_0\omega_{11}\vee_0\omega_{12}\vee_0\omega_{13}\vee_0\omega_{14}\vee_0\omega_{15}\vee_0\omega_{16}));$$

Бу тенглама A1 эксклюзив антеннанинг тенгламасини беради



2.14-расм. A1 эксклюзив антеннанинг модели



2.15-расм. A2 эксклюзив антеннанинг модели

dr кичик сон - айлана қалинлиги

$$\omega_0 = \frac{R_0^2 - x^2 - y^2}{2R} \wedge_0 \frac{x^2 + y^2 - (R - dr)^2}{2R} \geq 0;$$

1-қадам. $r_1 = \frac{1}{3} R_0, \quad a_1 = \frac{2}{3} R_0, \quad dx = \frac{\sqrt{3}}{3} R_0, \quad dy = \frac{1}{3} R_0.$

$$\omega_{10} = \omega_0(r_1, x, y),\ \omega_{11} = \omega_0(r_1, x, y - a_1),\ \omega_{12} = \omega_0(r_1, x, y + a_1),$$

$$\omega_{13} = \omega_0(r_1, x + dx, y - dy), \omega_{14} = \omega_0(r_1, x + dx, y + dy),$$

$$\omega_{15} = \omega_0(r_1, x - dx, y + dy), \omega_{16} = \omega_0(r_1, x - dx, y - dy),$$

$$\omega_1 = (\omega_{00} \vee_0 (\omega_{10} \vee_0 \omega_{11} \vee_0 \omega_{12} \vee_0 \omega_{13} \vee_0 \omega_{14} \vee_0 \omega_{15} \vee_0 \omega_{16}));$$

Барча олдингилардан i - қадамни аниқлаймиз.

$$r_i=\frac{1}{3}r_{i-1},\quad a_i=\frac{2}{3}r_{i-1},\quad dx=\frac{\sqrt{3}}{3}r_{i-1},\quad dy=\frac{1}{3}r_{i-1};$$

$$\omega_{i0}=\omega_{i-1}(r_i,x,y),\ \omega_{i1}=\omega_{i-1}(r_i,x,y-a_i),\ \omega_{i2}=\omega_{i-1}(r_i,x,y+a_i),$$

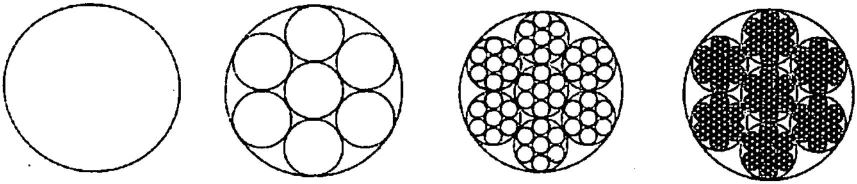
$$\omega_{i3}=\omega_{i-1}(r_i,x+dx,y-dy),\ \omega_{i4}=\omega_{i-1}(r_i,x+dx,y+dy),$$

$$\omega_{i5}=\omega_{i-1}(r_i,x-dx,y+dy),\ \omega_{i6}=\omega_{i-1}(r_i,x-dx,y-dy),$$

$$\omega=(\omega_{00}\vee_0(\omega_{i0}\vee_0\omega_{i1}\vee_0\omega_{i2}\vee_0\omega_{i3}\vee_0\omega_{i4}\vee_0\omega_{i5}\vee_0\omega_{i6})),$$

$i=2,3,4,\ldots$

Ажратиб кўрсатиш мумкинки i=2 да А2 антеннанинг моделини оламиз, i= 0, 1, 2, 3, 4 ҳисоблашлар натижалари 2.16 - расмда келтирилган.



$n=0$ $n=1$ $n=2$ $n=3$

2.16-расм. А2 эксклюзив антенна

Серпин эгри чизиғи [20]. Аввало асоснинг тенгламасини қурамиз:

$$x_1=x\cos(\alpha_1)+y\sin(\alpha_1),\quad y_1=-x\sin(\alpha_1)+y\cos(\alpha_1),$$

$$x_2=x\cos(\alpha_2)+y\sin(\alpha_2),\quad y_2=-x\sin(\alpha_2)+y\cos(\alpha_2),$$

$$f_1(x,y)=(a^2-x_1^2)\wedge_0(a^2-y_1^2)\geq 0,\ f_2(x,y)=(a^2-x_2^2)\wedge_0(a^2-y_2^2)\geq 0,$$

$$f_3(x,y)=f_2(-x,y),\ \omega_1(x,y)=f_1(x,y)\vee_0 f_2(x,y)\vee_0 f_3(x,y).$$

Бу ерда ўқларнинг бурилиш формулалари қўлланилган ва у кейин ҳам керак бўлади.

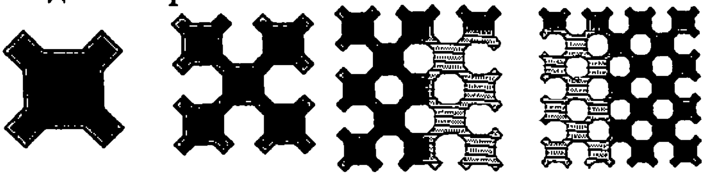
Итерацион жараённи қурамиз ва натижада қуйидагига эга бўламиз:

$$\omega_n(x,y)=\omega_{n-1}(x,y)\vee_0\omega_{n-1}(x-2a,y-2a)\vee_0\omega_{n-1}(x+2a,y-2a)\vee_0$$

$$\vee_0\omega_{n-1}(x+2a,y+2a)\vee_0\omega_{n-1}(x-2a,y+2a),\ \mathrm{n}=2,3,4,5,\ldots$$

Ҳисоблашда $a_1=\frac{3}{8}a$, $b_1=\frac{7}{4}a$,

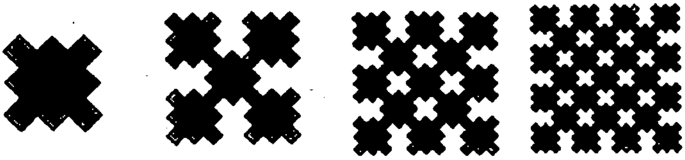
дан фойдаланилган. Ҳисоблашларнинг натижалари $\alpha_1=0$ ва $\alpha_2=\frac{\pi}{4}$ ларда ва турли қийматларидаги натижалар 2.17-расмда келтирилган.



n=1(α_1=0, α_2=π/4) n=2 (α_1=0, α_2=π/4) n=3 (α_1=0, α_2=π/4) n=4(α_1=0, α_2=π/4)

2.17-расм. Серпин эгри чизиғи

$\alpha_1=\alpha_2=\pi/4$ бўлганда *n* нинг турли қийматларидаги ҳисоб натижалари 2.18-расмда келтирилган.



n=1 (α_1=π/4, α_2=π/4)   *n=2 (α_1=π/4, α_2=π/4)*   *n = 3 (α_1 = π/4, α_2 = π/4)*   *n=4 (α_1 = π/4, α_2 = π/4)*

2.18-расм. Серпин эгри чизиғи

2. **Серпин гилами** тенгламаси қуйидаги тартибда қурилади. Бошланғич квадрат бир хил квадратларга бўлинади, марказдаги бундан мустасно (2.19-расм). Кейин ҳосил қилинган квадратларда шу жараён такроран қўлланилади ва ҳ.к. Бу жараён чексиз давом эттирилса натижада фрактал объект Серпин гиламини оламиз. Унинг касрли ўлчами D=lg 8/lg ≈ 1.893га тенг. Агар чексиз жараённи k-қадамда тўхтатилса унда k-тартибдаги олдфрактал ҳосил қилинади. [25]га мос Серпин олдфрактали чегараси қуйидаги

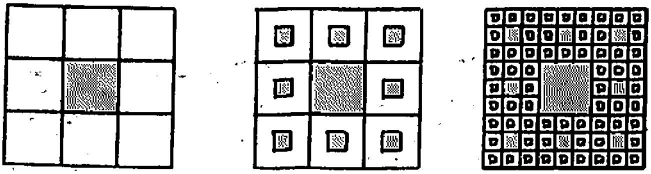
$$\omega_k(x,y)=\begin{cases}\omega_0(x,y), k=0\\ \omega_{k-1}(x,y)\wedge F_k(x,y), k=1,2,...,\end{cases}$$

бу ерда

$$F_k(x,y)=-3^{-k}\omega_0\left[6\arcsin\left[\sin(3^{k-1}\pi x/2)\right]/\pi 6\arcsin\left[3^{k-1}\pi y/2\right]/\pi\right],$$

$$\omega_0(x,y)=\left[\left(\alpha^2-x^2\right)\wedge\left(\alpha^2-y^2\right)\right]/2\alpha$$

кўринишда ифодаланади.



2.19-расм. Серпин квадрат гиламини қуриш

Кох эгри чизиғи (Иккинчи усул). Кох эгри чизиғи қуйидаги процедура йўли билан қурилади. Бошланғич оралиқдан марказдаги бўлаги олиб ташланади ва тенг томонли учбурчак билан алмаштирилади. Кейин ҳосил қилинган барча учбурчакларга шу процедура қўлланилади.

$y \leq 0$ ярим текислиги бошланғич соҳа бўлсин, унда унинг чегаралари тенгламаси $\omega_0 = -y = 0$ бўлади. $(k \geq 1)$ k-тартибли олдфракталларни R-функция усулига асосан тенгламасини топиш алгоритми икки этапдан иборат:

1. ω_{k-1} функциянинг R-дизъюнкцияси тўғри чизиқга нисбатан ўзининг акс эттирилиши билан

$$y = -x\sqrt{3} + 3^{k-1}\sqrt{3}:$$

$$\varpi_k(x,y) = \omega_{k-1}(x,y) \vee$$

$$\vee\, \omega_{k-1}\left[\left(-x - y\sqrt{3} + 3^k\right)/2, \left(-x\sqrt{3} + y + 3^{k-1}\sqrt{3}\right)/2\right],$$

2. ϖ_k функциянинг R-конъюнкцияси чизиқга нисбатан ўзининг акс эттирилиши билан

$$x = 3^k / 2:$$

$$\omega_k(x,y) = \varpi_k(x,y) \wedge \varpi_k(3^k - x, y).$$

Тенг томонли учбурчакларнинг томонларида қурилган Кох эгри чизиғи Кох қорпачаси номли геометрик объектни беради [63]. Кох қорпарчаси чегаралари тенгламалари бир-бири билан 60^0 бурчакка буралган учта операция R-конъюнкцияни қўллаш билан олинади:

$$W_k(x,y) = \omega_k(y + 3^k/2, x - 3^{k-1}\sqrt{3}/2) \wedge$$

$$\wedge [\omega_k [y - x\sqrt{3} + 3^k)/2, (-x - y\sqrt{3} - 3^{k-1}\sqrt{3})/2] \wedge$$
$$\wedge \omega_k [(-y - x\sqrt{3} + 3^k)/2, (-x + y\sqrt{3} - 3^{k-1}\sqrt{3})/2]].$$

Олдинги бўлимда Кох эгри чизиғи, Серпин салфеткаси ва гилами, фрактал антенна ва бошқа турдаги фракталларнинг тенгламаларини В.Л.Рвачевнинг [63] R-функция усулига асосан қуриш келтирилган [32,33].

Энди В.Л.Рвачевнинг R-функция усулига асосан (d=1 ўлчамли) Кантор тўплами, Гильберт ва Госпер эгри чизиқлари ва бошқа кўринишдаги фракталларнинг тенгламаларини қурамиз.

Кантор тўплами (чанглари). Жуда кўп таниқли фракталлар Кантор тўпламига яқин қариндош ҳисобланилади, шунинг учун Кантор тўпламининг фрактал хусусиятлари катта аҳамиятга эга.

Кантор тўпламини қуриш бирлик кесмадан ўртадаги қисмини ташлаб юбориш билан бошланади, бунда кесманинг охирлари кирмайди. Яъни [0,1] кесма бошланғич тўплам бўлиб, биринчи қадам (1/3, 2/3) очиқ интервални ўчиришдан иборат. Навбатдаги ва кейинги барча қадамларда жорий қадамдаги барча кесма (охирлари кирмайди)ларда ўртадаги қисми ташлаб юборилади. Шу тартибда тўпламлар кетма-кетлик ўлчами d ≈ 0,9542 бўлган Кантор тўпламини оламиз.

Ўлчами d = 1 Кантор тўплами. Тўғри чизиқдан текисликка ўтиб ўлчами d = 1 бўлган Кантор тўпламини қуриш мумкин. Навбатдаги мисол Магди Муҳаммадга тегишли. Бошланғич тўплам бирлик квадратдан иборат ва учларини (0,0), (1,0), (1,1) ва (0,1) деб фараз қиламиз. Ҳар бир қадамда олдинги квадратдан тўрт борабар кичик бўлган квадратларни ҳосил қиламиз. Бу қуришнинг чегаравий тўплами $N = 4$ билан ўзига-ўзи ўхшаш тўплам ва ўхшашлик коэффициенти $r = ¼$. Унинг ўлчами

$$d = \log(4)/\log(4) = 1.$$

га тенг.

Қуришлардан кўриниб турибдики, ҳосил қилинган тўплам Кантор тўплами бўлиб, ихчам, баркамол ва тўлиқ узлукли.

Бу фракталнинг тенгламасини В.Л.Рвачевнинг R-функция усулини қўллаб қурамиз.

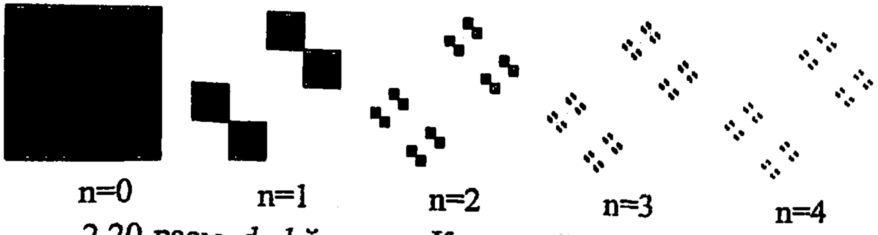
$$\omega_0(a,x,y) = \frac{a^2 - x^2}{2a} \wedge_0 \frac{a^2 - y^2}{2a} \geq 0$$

- квадрат тенгламаси.

d=1 ўлчамли Контор тўплами шартига асосан, яъни итерацион жараённи қурамиз ва натижада қуйидагини оламиз:

$$\omega_n(a,x,y) = \omega_{n-1}(\frac{a}{4}, x - \frac{3a}{4}, y - \frac{a}{4}) \vee_0 \omega_{n-1}(\frac{a}{4}, x - \frac{a}{4}, y - \frac{3a}{4}) \vee_0$$
$$\vee_0 \omega_{n-1}(\frac{a}{4}, x + \frac{3a}{4}, y + \frac{a}{4}) \vee_0 \omega_{n-1}(\frac{a}{4}, x + \frac{a}{4}, y + \frac{3a}{4}) \vee_0$$
$$\vee_0 (x(a^2 - x^2) = 0 \wedge (a^2 - y^2)) \vee_0 (y(a^2 - y^2) = 0 \wedge (a^2 - x^2)) \geq 0; n = 1,2,3,...$$

d=1 бўлганда ва *n* нинг турли қийматларида олинган натижалар расмда келтирилган.



2.20-расм *d=1* ўлчамли Кантор тўпламини қуриш

Гильберт эгри чизиғи. ω_0-бўш тўплам (расмда ҳеч нарса чиқмайди). Масалан ω_0 сифатида қуйидагини оламиз

$$\left(\omega_0(x,y)=(-1-x^2)\geq 0\right);$$

Энди Гильберт эгри чизиқларининг тартибларини бошқариш учун қуйидаги формулалар керак бўлади:

$$\begin{cases} m_0=0 \\ m_n=2m_{n-1}+a. \end{cases}$$

Бу ерда m_n - n-тартибли Гилберт чизиғининг ўлчами (a -ўлчамнинг бирлиги).

$$f_1(x,y)=((y=0)\wedge_0(x-m_{n-1})\wedge_0(m_{n-1}+a-x))\geq 0;$$

(пастки бирлаштирувчи чизиқ)

$$f_2(x,y)=((x-m_{n-1}=0)\wedge_0(y-m_{n-1})\wedge_0(m_{n-1}+a-y))\geq 0;$$

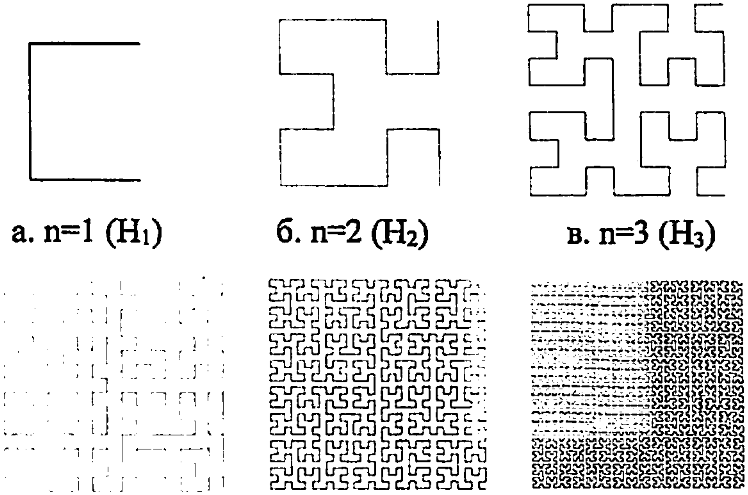
(чап бирлаштирувчи чизиқ)

$$f_3(x,y)=((y-2m_{n-1}-a=0)\wedge_0(x-m_{n-1})\wedge_0(m_{n-1}+a-x))\geq 0;$$

(тепа бирлаштирувчи чизиқ).

Рекурсив процедурага асосан қуйидагига эга бўламиз:

$$\omega_n(x,y)=\omega_{n-1}(x,y)\vee_0 f_1(x,y)\vee_0 \omega_{n-1}(m_{n-l}-y,x-m_{n-l}-a)\vee_0 f_2(x,y)\vee_0$$
$$\vee_0\omega_{n-1}(x,y-m_{n-l}-a)\vee_0 f_3(x,y)\vee_0 \omega_{n-1}(y-m_{n-l}-a,x-m_{n-l}-a),\ n=1,2,3,...$$



а. n=1 (H_1) б. n=2 (H_2) в. n=3 (H_3)

г. n=4 (H_4) д. n=5 (H_5) е. n=6 (H_6)

2.21-расм. (H_1…H_6) Гильберт эгри чизиғи

2.21-расмда $\omega_n(x,y)\geq 0$ функция тенгламалари чизиқларининг чизмалари келтирилган.

Госпер эгри чизиғи. Госпер эгри чизиғи нисбатан Серпин эгри чизиғига ўхшаш бўлиб, фарқи шундаки Госпер эгри чизиғининг бурчаклари *ОХ* ва *ОУ* ўқларига нисбатан оғишган бўлади [64]:

$$\omega_1(a,x,y)=\left(\frac{a^2}{4}-\left(x-\frac{a}{2}\right)^2\right)\wedge_0(a^2_{11}-y^2)\geq 0,$$

Бу ерда a_{11}-етарли даражада кичик сон (чизиқнинг қалинлиги).

Энди қўзғалмас координаталар системасига нисбатан ўқлар системасида оғиш бурчаги қийматини ҳисоблаймиз ва бу ерда кўчириш ҳамда буриш формулаларини қўллаймиз.

$$\varphi = \arctan(\frac{\sqrt{3}}{5}); a_{ky} = \frac{a}{\sqrt{7}}; a_{mv} = a_{ky}\frac{\sqrt{\ }}{\ };$$

$$x_{ky} = x\cos(\varphi) + y\sin(\varphi); y_{ky} = -x\sin(\varphi) + y\cos(\varphi) + a_{mv};$$

Энди рекурсияни қўллаб қуйидагини оламиз:

$$\omega_n(a,x,y) \quad \omega_{n-1}(a_{ky}, x_{ky}\ , y_{ky} - a_{mv}) \vee_0$$

$$\vee_0 \omega_{n-1}(a_{ky}, (x_{ky} - \frac{3a_{ky}}{2})\cos(\frac{2\pi}{3}) + y_{ky}\sin(\frac{2\pi}{3})\ , -(x_{ky} - \frac{3a_{ky}}{2})\sin(\frac{2\pi}{3}) + y_{ky}\cos(\frac{2\pi}{3})) \vee$$

$${}_0 \omega_{n-1}(a_{ky}, x_{ky} - \frac{a_{ky}}{2}, y_{ky}) \vee_0$$

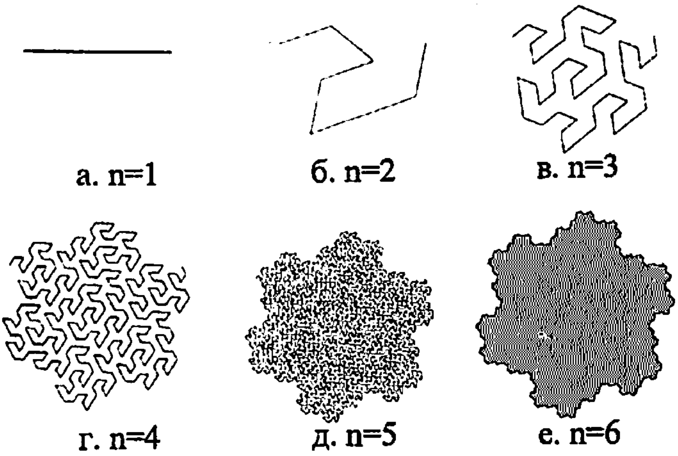
$$\vee_0 \omega_{n-1}(a_{ky}, (x_{ky} - \frac{a_{ky}}{2})\cos(-\frac{2\pi}{3}) + y_{ky}\sin(-\frac{2\pi}{3})\ , -(x_{ky} - \frac{a_{ky}}{2})\sin(-\frac{2\pi}{3}) + y_{ky}\cos(-\frac{2\pi}{3})) \vee$$

$$\vee_0 \omega_{n-1}(a_{ky}, x_{ky}\ , y_{ky} + a_{mv}) \vee_0 \omega_{n-1}(a_{ky}, x_{ky} - a_{ky}\ , y_{ky} + a_{mv}) \vee_0$$

$$\vee_0 \omega_{n-}(a_{ky}, (x_{ky} - \frac{5a_{ky}}{2})\cos(-\frac{2\pi}{3}) + y_{ky}\sin(-\frac{2\pi}{3})\ , -(x_{ky} - \frac{5a_{ky}}{2})\sin(-\frac{2\pi}{3}) + y_{ky}\cos(-\frac{2\pi}{3}))$$

$n = 2,3,4,\ldots$

n нинг турли қийматларидаги ҳисоб натижалари 2.22-расмда келтирилган.



а. n=1 б. n=2 в. n=3

г. n=4 д. n=5 е. n=6

2.22-расм *n* нинг турли қийматларидаги Госпер эгри чизиғи

Айланалардан иборат фракталлар. Фракталлар назариясининг асосий иловаларидан бири айланалардан иборат фракталларни генерациялашдир. Ҳозирги вақтда фракталлар тенгламасини қуришни бир неча усули мавжуддир: L-тизимлари усули, итерацион функциялар тизимлари усули ва бошқалар. Улардан фарқли бўлган R-функция алгебра мантиқ усулининг лойиҳалаш муҳити фракталлар тенгламасини қуриш имкониятини яратади. Кейин бу тенгламалар бўйича фракталларнинг визуал тасвирини қуриш мумкин. Шундай қилиб, қуйида В.Л.Рвачевнинг лойиҳавий муҳити R-функция усулига асосан айланалардан иборат фракталларнинг тенгламаларини қуриш қаралган.

Боғланган айланалар. Ташқи айлана тенгламаси қуйидагича аниқланган:

$$\omega_{00} = \omega_{00}(R,x,y) = (R^2 - x^2 - y^2 \geq 0),$$

айланага боғланувчи айлананинг тенгламаси қуйидаги кўринишни олади:

$$\omega_0 = \omega_{00} \wedge_0 (x^2 + y^2 - (R-a)^2 \geq 0),$$

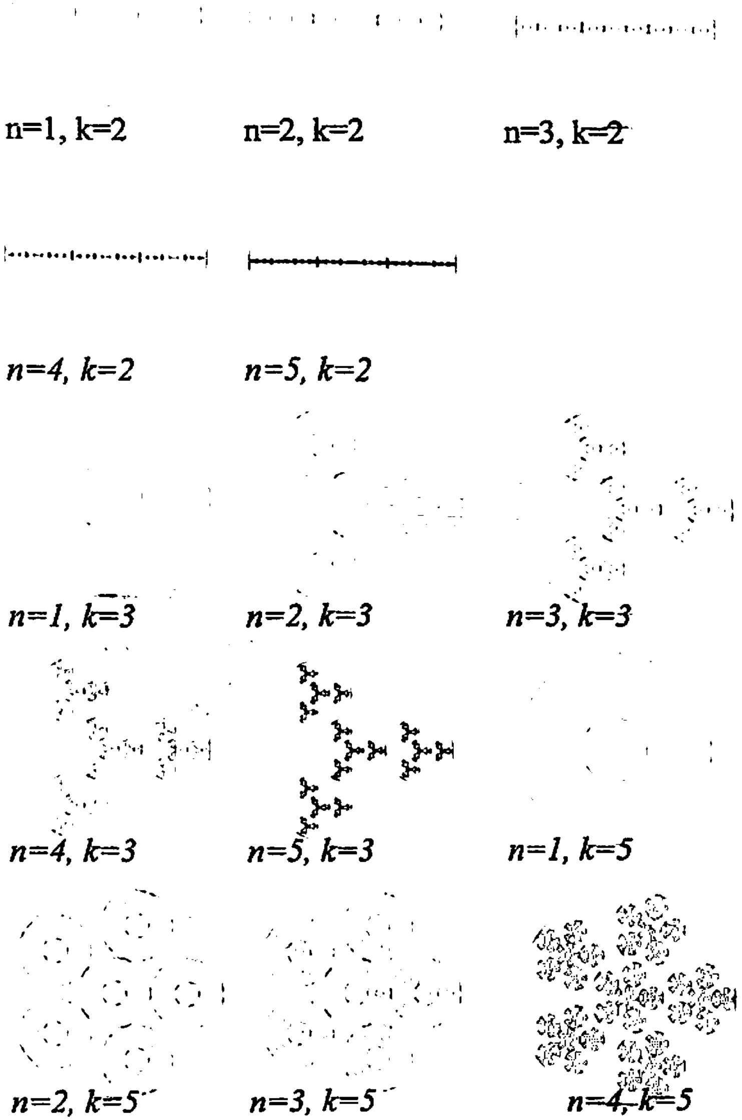
Бу ерда *a*-айлананинг қалинлиги (айлананинг қалинлиги 2a га), *R*-ташқи айлананинг радиуси, $\alpha = \frac{2\pi}{k}$; *k* - ҳар бир итерациядан кейинги ички айланаларнинг сони k=2,3,4,...

Бу ерда итерацияни қўллаб қуйидагига эга бўламиз:

$$\omega_n(R,x,y) = \omega_0(R,x,y) \vee_0 \omega_{n-1}\left(\frac{R}{3},x,y\right) \vee_0$$
$$\vee_0 \omega_{n-1}\left(\frac{R}{3}, x - \frac{2R}{3}\cos(0), y - \frac{2R}{3}\sin(0)\right) \vee_0$$
$$\vee_0 \omega_{n-1}\left(\frac{R}{3}, x - \frac{2R}{3}\cos(\alpha), y - \frac{2R}{3}\sin(\alpha)\right) \vee_0$$
$$\vee_0 \omega_{n-1}\left(\frac{R}{3}, x - \frac{2R}{3}\cos(2\alpha), y - \frac{2R}{3}\sin(2\alpha)\right) \vee_0 \dots \vee_0$$
$$\vee_0 \omega_{n-1}\left(\frac{R}{3}, x - \frac{2R}{3}\cos((k-1)\alpha), y - \frac{2R}{3}\sin((k-1)\alpha)\right) \geq 0;$$

$n = 1, 2, 3, \dots$

Ҳисоблаш экспериментининг натижалари 2.23-расмда келтирилган.



n=1, k=2 n=2, k=2 n=3, k=2

n=4, k=2 *n=5, k=2*

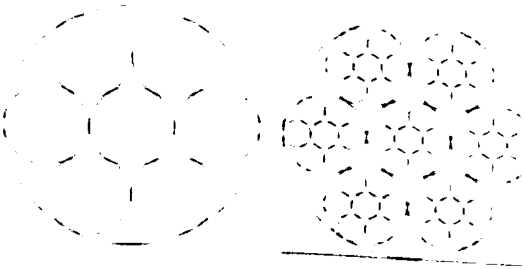
n=1, k=3 *n=2, k=3* *n=3, k=3*

n=4, k=3 *n=5, k=3* *n=1, k=5*

n=2, k=5 *n=3, k=5* *n=4, k=5*

2.23-расм. Боғланган айланалардан иборат фракталлар

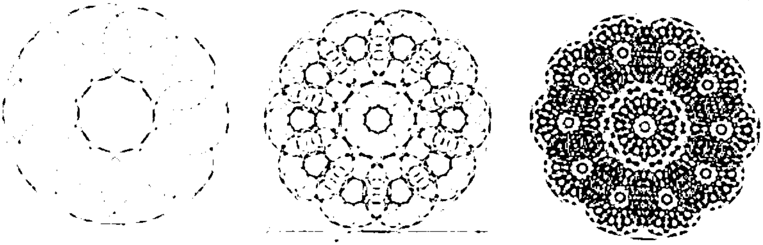
Энди (1)да k=6 даги ҳолатни қараймиз. Бунда эксклюзив ҳалқали фракталларни оламиз.



n=1, k=6 n=2, k=6

2.24 – расм. Эксклюзив ҳалқали фракталлар

Ажратиб кўрсатиш мумкинки, агар k<6 да ички айланалар бир-бирига уринмайди, k=6 да ички айланалар уринади, k>6 да ички айланалар кесишади (2.25-расм).



n=1, k=10 *n=2, k=10* *n=3, k=10*

2.25-расм. Эксклюзив ҳалқали фракталлар

Уринишли кесишадиган айланали фракталлар. Энди катта айлана ичида иккита айлана бўлган ҳолатни қараймиз. Бу айланалар уринади. Ўз навбатида ички айланаларда яна иккита айлана ҳосил бўлади ва ҳ.к. Худди шу фракталнинг тенгламасини қурамиз.

Бу ҳолатда 1 - қадамда фракталнинг тенгламаси қуйидаги кўринишни олади

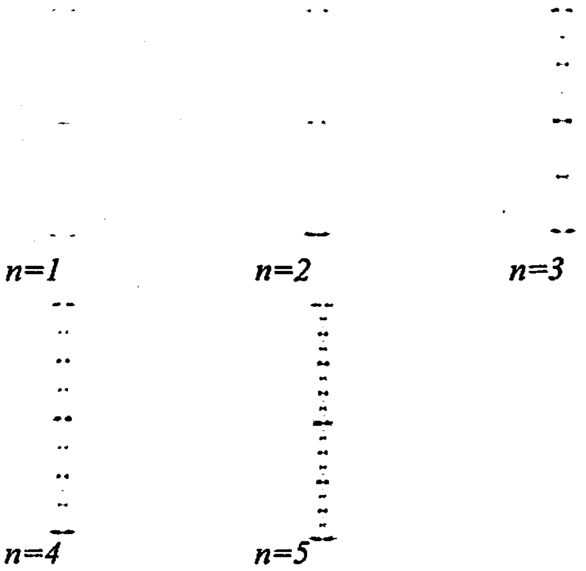
$$\omega\ (R,x,y)=(R^2-x^2-y^2\geq 0)\wedge_0(x^2+y^2-(R-a)^2\geq 0),$$

Бу ерда a-айлана қалинлиги (айлананинг қалинлиги $2a$ га тенг), R-ташқи айлананинг радиуси.

Итерация процедурасини қўллагандан кейин қуйидагини ҳосил қиламиз

$$\omega_n(R,x,y)=\omega_0(R,x,y)\vee_0\omega_{n-1}(\frac{R}{2},x,y-\frac{R}{2})\vee_0$$
$$\vee_0\omega_{n-1}(\frac{R}{2},x,y+\frac{R}{2})\geq 0;\quad n=1,2,3,\ldots$$

n нинг турли қийматларидаги ҳисоб натижалари 2.26-расмда келтирилган



$n=1$ $n=2$ $n=3$

$n=4$ $n=5$

2.26-расм. Уринишли кесишадиган айланали фракталлар

Энди кесишадиган ва кичиклашадиган ички айланаларни қараймиз. Шу мақсадда (l)да камайиш коэффициенти l ни киритамиз.

Энди ички айланалар кесишадиган ва камаядиган ҳолатни қараймиз. Шу мақсад учун l камаючи коэффициентини киритамиз.

Биринчи масаладаги каби кесишадиган айланаларнинг тенгламасини аниқлаймиз

$$\omega_0(R,x,y)=(R^2-x^2-y^2\geq 0)\wedge_0(x^2+y^2-(R-a)^2\geq 0)$$

бу ерда a - айлананинг қалинлиги (айлананинг қалинлиги $2a$ га тенг).

$$\alpha=\frac{2\pi}{k};$$

k - ҳар бир итерациядан кейинги ички айланалар сони k=2,3,4,...

l - ҳар бир итерациядан кейинги ички айланаларнинг камайиш коэффициенти, l=2,3,4,...

R - ташқи айлананинг радиуси.

Итерация процедурасини қўллаб қуйидагини оламиз

$$\omega_n(R,x,y)=\omega_0(R,x,y)\vee_0\omega_{n-1}(\frac{R}{l},x,y)\vee_0$$

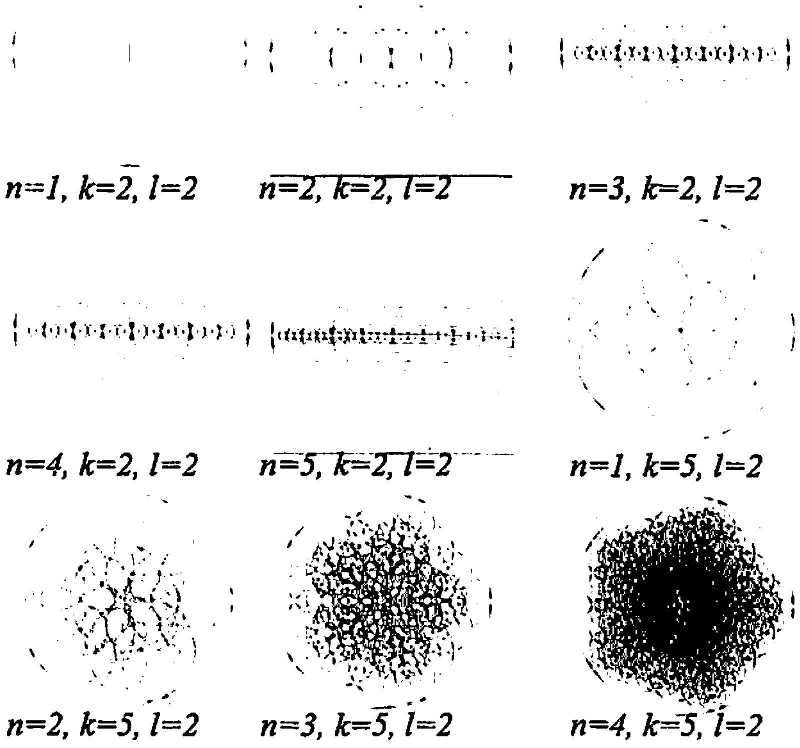
$$\vee_0\omega_{n-1}(\frac{R}{l},x-\frac{(l-1)R}{l}\cos(0),y-\frac{(l-1)R}{l}\sin(0))\vee_0$$

$$\vee_0\omega_{n-1}(\frac{R}{l},x-\frac{(l-1)R}{l}\cos(\alpha),y-\frac{(l-1)R}{l}\sin(\alpha))\vee_0$$

$$\vee_0\omega_{n-1}(\frac{R}{l},x-\frac{(l-1)R}{l}\cos(2\alpha),y-\frac{(l-1)R}{l}\sin(2\alpha))\vee_0\dots\vee_0$$

$$\vee_0\omega_{n-1}(\frac{R}{l},x-\frac{(l-1)R}{l}\cos((k-1)\alpha),y-\frac{(l-1)R}{l}\sin((k-1)\alpha))\geq 0;\quad n=1,2,3,\dots$$

n, k, l ларнинг турли қийматларидаги натижалар 2.27-расмда келтирилган



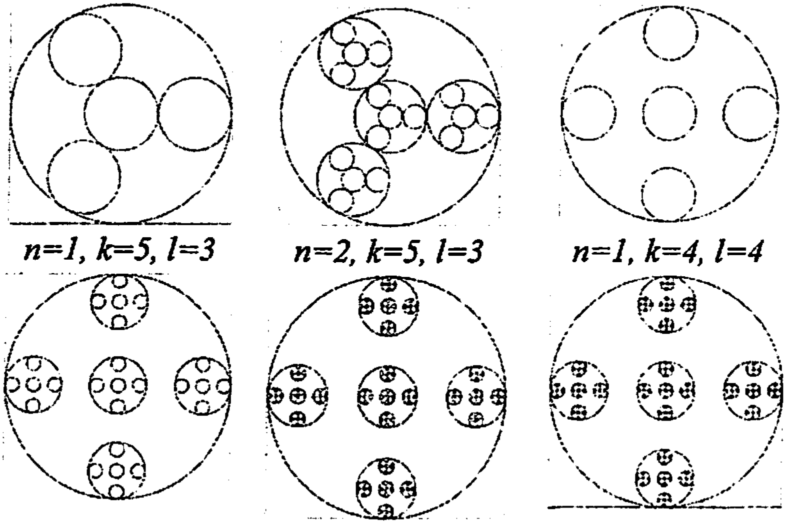
$n=1, k=2, l=2$ $n=2, k=2, l=2$ $n=3, k=2, l=2$

$n=4, k=2, l=2$ $n=5, k=2, l=2$ $n=1, k=5, l=2$

$n=2, k=5, l=2$ $n=3, k=5, l=2$ $n=4, k=5, l=2$

2.27-расм. Кесишадиган ва кичиклашадиган ички айланали фракталлар

$l = 3$ да боғланган айланалардан иборат фракталлар чизилади. Бу натижалар 2.28 - расмда келтирилган.

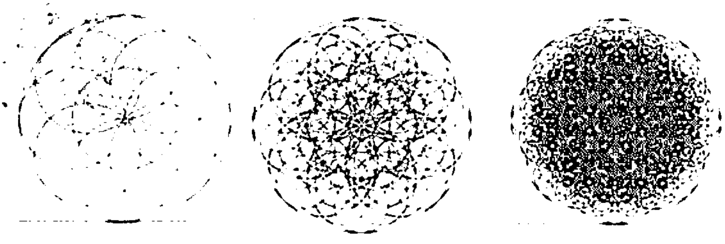


n=1, k=5, l=3 *n=2, k=5, l=3* *n=1, k=4, l=4*

n=2, k=4, l=4 *n=3, k=4, l=4* *n=4, k=4, l=4*

2.28 – расм. Боғланган айланалардан иборат фракталлар

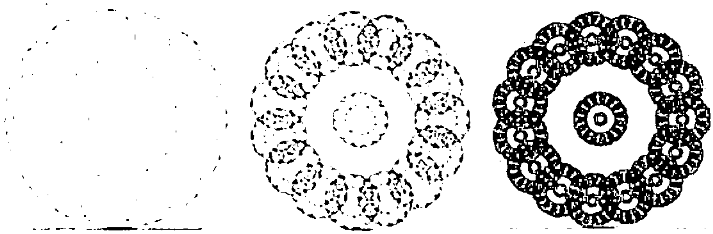
Итерацион фракталлар $k=8$, $l=2$ и $n=\overline{1,2,3}$ да олинади ва 2.29-расмда ифодаланган.



n=1, k=8, l=2 *n=2, k=8, l=2* *n=3, k=8, l=2*

2.29-расм. Боғланган айланалардан иборат фракталлар

$k=15$, $l=4$да n нинг турли қийматларидаги ҳисоб натижалари 2.30-расмда келтирилган.



n=1, k=15, l=4   *n=2, k=15, l=4*   *n=3, k=15, l=4*

2.30-расм. Боғланган айланалардан иборат фракталлар

Дарахт кўринишдаги фракталлар. Маълумки геометрик фракталларни асосий расмни қуллаган инициатор шаклдан бошланиб расмийлаштирилади. Детерминаллашган фракталлар рекурсив жараёнда ифодаланади. Детерминаллашган фракталларда ўзига ўхшашлик барча тартибларда намоён бўлади. Аниқ тасвирларни олиш учун бундай фракталлар 4-6 марта итерацияланади.

Ҳозирги кунда фракталлар радиотехникада антенна қурилмаларини лойиҳалашда, компьютер графикасида, физикада, нефтхимияда, биологияда ва бошқа соҳаларда кенг қўлланилмоқда. Шунинг учун фракталларга бўлган қизиқиш кундан-кунга тезликда ўсиб бормоқда. Ҳар куни фракталлар назарияси ва амалиёти бўйича юзлаб янги ишлар пайдо бўлмоқда.

Бу бўлимда В.Л.Рвачевнинг R-функция усулига асосан дарахт кўринишдаги фракталларни тенгламасини қурамиз.

Айланалардан дарахт тенгламасини қуришни қараймиз. Ораликнинг охирлари (x_1,y_1) ва (x_2,y_2) нуқталар бўлсин. Берилган нуқталар (x_1,y_1) ва (x_2, y_2)лардан эркин ўтувчи тўғри чизиқ тенгламасини қурамиз.

$$f(x_1,y_1,x_2,y_2,x,y)=\Bigg(\bigg(\frac{1}{2}((x_2-x_1\bigg)\cos\bigg(\arctan\bigg(\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}\bigg)\bigg)+(y_2-y_1)\sin\bigg(\arctan\bigg(\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}\bigg)\bigg)\bigg)^2-$$

$$-\bigg((x-x_1)\cos\bigg(\arctan\bigg(\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}\bigg)\bigg)+(y-y_1)\sin\bigg(\arctan\bigg(\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}\bigg)\bigg)-$$

$$-\bigg(\frac{1}{2}(x_2-x_1)\cos(\arctan\bigg(\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}\bigg)+(y_2-y_1)\sin\bigg(\arctan\bigg(\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}\bigg)\bigg)\bigg)^2\geq 0\Bigg)\wedge_0$$

$$\wedge_0\bigg(a^2-\bigg(-(x-x_1)\sin\bigg(\arctan\bigg(\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}\bigg)\bigg)\bigg)\bigg)+(y-y_1)\cos\bigg(\arctan\bigg(\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}\bigg)\bigg)\bigg)^2\geq 0\bigg)$$

Бу ерда a - ораликнинг баландлиги (ораликнинг баландлиги $2a$ га тенг).

Агар k жуфт бўлса, унда $\varphi_0=0$, акс ҳолда $\varphi_0=\frac{\alpha}{2}$.

n=1 да куйидаги тенгламага эга бўламиз: $\alpha=\frac{2\pi}{k}$

$$\omega_1(x,y)=f(0,0,R\cos(\varphi_0+0),R\sin(\varphi_0+0),x,y)\vee_0$$
$$\vee_0 f(0,0,R\cos(\varphi_0+\alpha),R\sin(\varphi_0+\alpha),x,y)\vee_0$$
$$\vee_0 f(0,0,R\cos(\varphi_0+2\alpha),R\sin(\varphi_0+2\alpha),x,y)\vee_0\ldots\vee_0$$
$$\vee_0 f(0,0,R\cos(\varphi_0+(k-1)\alpha),R\sin(\varphi_0+(k-1)\alpha),x,y)$$

n=2,3,4… да

$$\alpha=\frac{2\pi}{k^{n-1}};k_1=-[k/2];\ R_{n-1}=2R(1-\frac{1}{2^{n-1}});\ R_n=2R(1-\frac{1}{2^n});$$

R_n – n-итерацияда айлана чегараларнинг радиуси *($R_1=R$)*.

Агар k жуфт бўлса, унда $k_2=[k/2]$, акс ҳолда $k_2=[k/2]-1$.

Эслатма: [x] - x сонининг бутун қисми.

Итерация процедурасини қўллаб куйидагига эга бўламиз:

$$\omega_{nx1}(x,y)=f(R_{n\ 1}\cos(\varphi_0+\alpha),R_{n-1}\sin(\varphi_0+\alpha),$$

$$R_n\cos(\varphi_0+\alpha+\frac{(\varphi_0+k_1\alpha)}{k}),\ R\ \sin(\varphi_0+\alpha+\frac{(\varphi_0+\ _1\alpha)}{k}),x,y)\vee_0$$

$$\vee_0 f(R_{n\ 1}\cos(\varphi_0+\alpha),R_{\ -1}\sin(\varphi_0+\alpha),$$

$$R_n\cos(\varphi_0+\alpha+\frac{(\varphi_0+(k_1+1)\alpha)}{k}),\ R\ \sin(\varphi_0+\alpha+\frac{(\varphi_0+(k_1+1)\alpha)}{k}),x,y)\vee_0$$

$$\vee_0 f(R_{\ -1}\cos(\varphi_0+\alpha),R_{n\ 1}\sin(\varphi_0+\alpha),$$

$$R\ \cos(\varphi_0+\alpha+\frac{(\varphi_0+(\ _1+2)\alpha)}{k}),\ R_n\sin(\varphi_0+\alpha+\frac{(\varphi_0+(k_1+2)\alpha)}{k}),x,y)\vee_0\dots\vee_0$$

$$\vee_0 f(R_{n\ 1}\cos(\varphi_0+\alpha),R_{\ -1}\sin(\varphi_0+\alpha),$$

$$R\ \cos(\varphi\ \ +\alpha+\frac{(\varphi_0+k_2\alpha)}{k}),\ R_n\sin(\varphi_0+\alpha+\frac{(\varphi_0+\ _2\alpha)}{k}),x,y)$$

$$\omega_{nx2}(x,y)=f(R_{n\ 1}\cos(\varphi_0+2\alpha),R_{n-1}\sin(\varphi_0+2\alpha),R_n\cos(\varphi_0+2\alpha+\frac{\varphi_0+k\,\alpha)}{k}),$$

$$R_n\sin(\varphi\ \ +2\alpha+\frac{\varphi_0+k\,\alpha)}{k}),x,y)\vee_0$$

$$\vee_0 f(R_{n\ 1}\cos(\varphi_0+2\alpha),R_{n-1}\sin(\varphi_0+2\alpha),R_n\cos(\varphi_0+2\alpha+\frac{(\varphi_0+(k\ \ +1)\alpha)}{k}),$$

$$R_n\sin(\varphi_0+2\alpha+\frac{(\varphi_0+(k\ \ +1)\alpha)}{k}),x,y)\vee$$

$$\vee_0 f(R_{n\ 1}\cos(\varphi_0+2\alpha),R_{n-1}\sin(\varphi_0+2\alpha),R_n\cos(\varphi_0+2\alpha+\frac{(\varphi_0+(k\ \ +2)\alpha)}{k}),$$

$$R_n\sin(\varphi_0+2\alpha+\frac{(\varphi_0+(k\ \ +2)\alpha)}{k}),x,y)\vee_0\dots\vee_0$$

$$\vee_0 f(R_{n\ 1}\cos(\varphi_0+2\alpha),R_{n-1}\sin(\varphi_0+2\alpha),R_n\cos(\varphi_0+2\alpha+\frac{(\varphi_0+k\ \alpha\ }{k}),$$

$$R_n\sin(\varphi_0+2\alpha+\frac{(\varphi_0+k\ \alpha\ }{k}),x,y)$$

Бу учун эга бўламиз $1\le i\le k^{n-1}$:

$$\omega_{nxi}(x,y)=f(R_{n-1}\cos(\varphi_0+i\alpha),R_{n-1}\sin(\varphi_0+i\alpha),R_n\cos(\varphi_0+i\alpha+\frac{(\varphi_0+k_1\alpha)}{k}),$$

$$R_n\sin(\varphi_0+i\alpha+\frac{(\varphi_0+k_1\alpha)}{k}),x,y)\vee_0$$

$$\vee_0 f(R_{n-1}\cos(\varphi_0+i\alpha),R_{n-1}\sin(\varphi_0+i\alpha),$$

$$R_n\cos(\varphi_0+i\alpha+\frac{(\varphi_0+(k_1+1)\alpha)}{k}),R_n\sin(\varphi_0+i\alpha+\frac{(\varphi_0+(k_1+1)\alpha)}{k}),x,y)\vee_0$$

$$\vee_0 f(R_{n-1}\cos(\varphi_0+i\alpha),R_{n-1}\sin(\varphi_0+i\alpha),$$

$$R_n\cos(\varphi_0+i\alpha+\frac{(\varphi_0+(k_1+2)\alpha)}{k}),R_n\sin(\varphi_0+i\alpha+\frac{(\varphi_0+(k_1+2)\alpha)}{k}),x,y)\vee_0\ldots\vee$$

$$\vee_0 f(R_{n-1}\cos(\varphi_0+i\alpha),R_{n-1}\sin(\varphi_0+i\alpha),$$

$$R_n\cos(\varphi_0+i\alpha+\frac{(\varphi_0+k_2\alpha)}{k}),R_n\sin(\varphi_0+i\alpha+\frac{(\varphi_0+k_2\alpha)}{k}),x,y)$$

$$\omega_n(x,y)=\omega_{n-1}(x,y)\vee_0\omega_{nx1}(x,y)\vee_0\omega_{nx2}(x,y)\vee_0\ldots$$

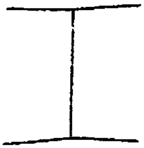
$$\vee_0\omega_{nxi}(x,y)\vee_0\ldots\vee_0\omega_{nxk^{n-1}}(x,y).$$

Олдинги формулаларда k=2, 3, 4, 5, ….

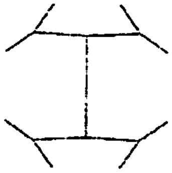
Барча чизиқлар учун R_n радиус билан ташқи доира чизиш мумкин. (n–тартибли итерация).

n ва k нинг турли қийматларидаги ҳисоб натижалари 2.31–расмда келтирилган.

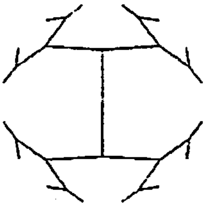
$n=1$, $k=2$



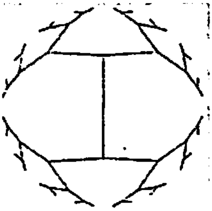
$n=2$, $k=2$



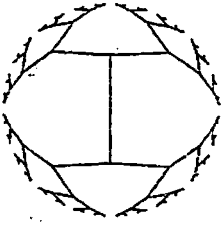
$n=3$, $k=2$



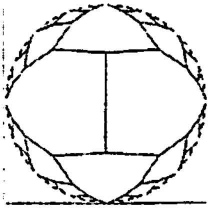
n=4, k=2



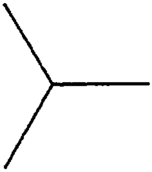
n=5, k=2



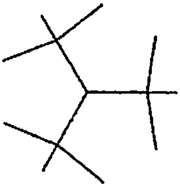
n=6, k=2



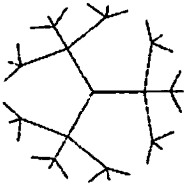
n=7, k=2



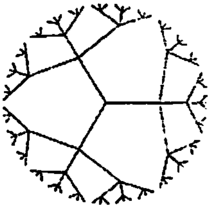
n=1, k=3



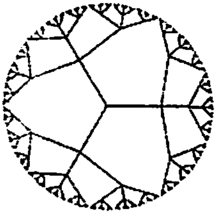
n=2, k=3



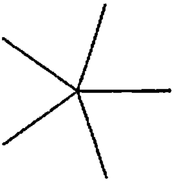
n=3, k=3



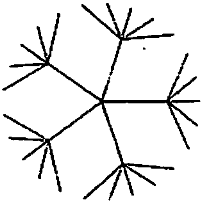
n=4, k=3



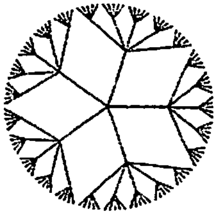
n=5, k=3



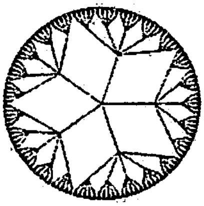
n=1, k=5

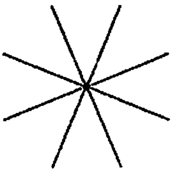


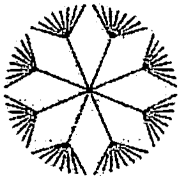
n=2, k=5

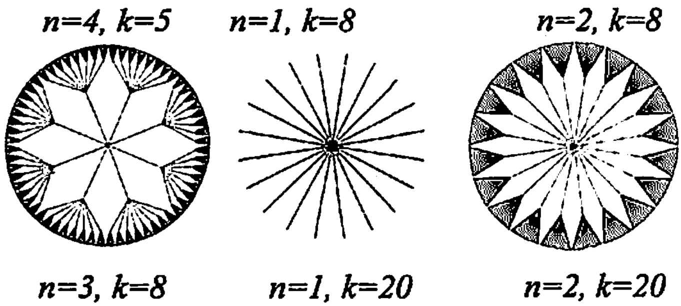


n=3, k=5









2.31-расм. Дарахт кўринишдаги фракталлар

Пифагор дарахти. Пифагор, ўзининг теоремасини исботлаб, тўғри учбурчаклар томонларига квадратлар жойлаштирилган фигурани қурди. Агар бу жараённи давом эттирилса Пифагор дарахти ҳосил қилинади. Квадрат тенгламаларидан фойдаланиб дарахтнинг тенгламасини қурамиз, яъни

$$\omega_0(a,x,y)=((a^2-x^2\ge 0)\wedge_0((b^2-(y-a)^2\ge 0)\vee_0(b^2-(y+a)^2\ge 0)))\vee_0$$
$$\vee_0((a^2-y^2\ge 0)\wedge_0((b^2-(x-a)^2\ge 0)\vee_0(b^2-(x+a)^2\ge 0)))\ge 0$$

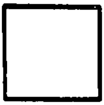
Бу ерда $\omega_0(a,x,y)$ - томони $2a$ ва унинг қалинлиги 2b га тенг бўлган квадрат.

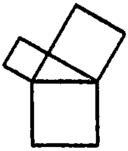
Рекурсия процедурасини қўллаб қуйидагини ҳосил қиламиз.

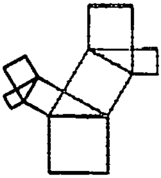
$$\omega_n(a,x,y)=\omega_0(a,x,y)\vee_0$$
$$\vee_0\omega_{n-1}(a\cos(\alpha),(x+a-a\sqrt{2}\cos(\alpha)\sin(\frac{\pi}{4}-\alpha))\cos(\alpha)+(y-a-a\sqrt{2}\cos(\alpha)\cos(\frac{\pi}{4}-\alpha))\sin(\alpha)$$
$$-(x+a-a\sqrt{2}\cos(\alpha)\sin(\frac{\pi}{4}-\alpha))\sin(\alpha)+(y-a-a\sqrt{2}\cos(\alpha)\cos(\frac{\pi}{4}-\alpha))\cos(\alpha))\vee_0$$

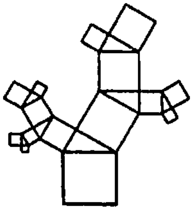
$$\vee_0 \omega_{n-1}(a\sin(\alpha), -(x-a-a\sqrt{2}\sin(\alpha)\sin(\frac{\pi}{4}-\alpha))\sin(\alpha)+(y-a-a\sqrt{2}\sin(\alpha)\cos(\frac{\pi}{4}-\alpha))\cos(\alpha),$$
$$(x-a-a\sqrt{2}\sin(\alpha)\sin(\frac{\pi}{4}-\alpha))\cos(\alpha)+(y-a-a\sqrt{2}\sin(\alpha)\cos(\frac{\pi}{4}-\alpha))\sin(\alpha))$$

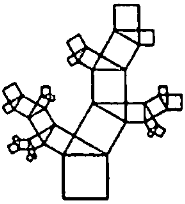
Бу ерда α - дарахт шохининг чапга бургандаги буриш бурчаги $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$ интервалда қийматни олади, ўнгга бургандаги буриш бурчаги $\frac{\pi}{2}-\alpha$ га тенг. n, α нинг турли қийматларидаги ҳисоблашлар натижалари 2.32–расмда келтирилган.

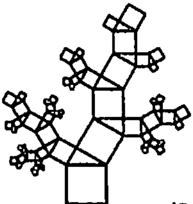

n=0, α=π/3

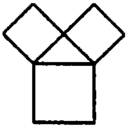

n=1, α=π/3

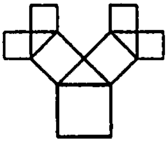

n=2, α=π/3

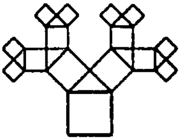

n=3, α=π/3

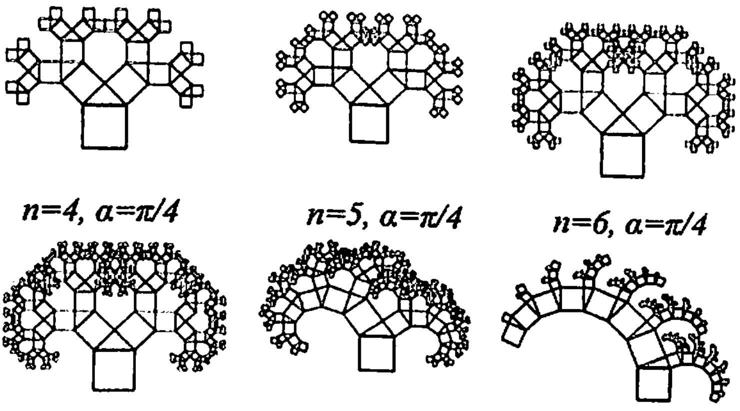

n=4, α=π/3 13


n=5, α=π/3


n=1, α=π/4


n=2, α=π/4


n=3, α=π/4



$n=4,\ \alpha=\pi/4$ $n=5,\ \alpha=\pi/4$ $n=6,\ \alpha=\pi/4$

$n=7,\ \alpha=\pi/4$ $n=7,\ \alpha=\pi/5$ $n=7,\ \alpha=\pi/8$

2.32-расм. Пифагор дарахти фрактали

Дарахт кўринишдаги фракталлар энг оддий фракталлар ҳисобланилади. Тўғри чизиқ тенгламаси ҳамда R-функция усулининг лойиҳавий муҳити, яъни R_0: R-конъюнкция, R-дизъюнкция ва R-инкордан фойдаланиб турли дарахт шаклли фракталларнинг тенгламасини қуриш мумкин. Бу тенгламаларга асосан итерациялар сонини ва бурилш бурчаги α ни бериб компьютерли пейзажларда, турли иллюстрацияларда, текстил саноатида ва бошқаларда қўлланиладиган турли олдфракталларни ташкил этиш мумкин.

Спиралсимон фракталлар. Спиралсимон фракталлар ички квадратларни ташқи квадратларни ичида бурилш йўли билан тасвифланади.

Квадрат тенгламаларини қурамиз

$$\omega_0(a,x,y)=((a^2-x^2\geq 0)\wedge_0((b^2-(y-a)^2\geq 0)\vee_0(b^2-(y+a)^2\geq 0)))\vee_0$$
$$\vee_0((a^2-y^2\geq 0)\wedge_0((b^2-(x-a)^2\geq 0)\vee_0(b^2-(x+a)^2\geq 0)))$$

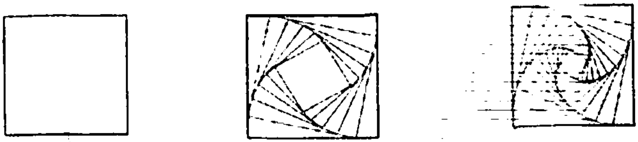
бу ерда a-ташқи квадрат ўлчами, b-чизиқнинг қалинлиги (чизиқнинг қалинлиги 2а га тенг).

Рекурсияни қўллаб қуйидагига эга бўламиз:

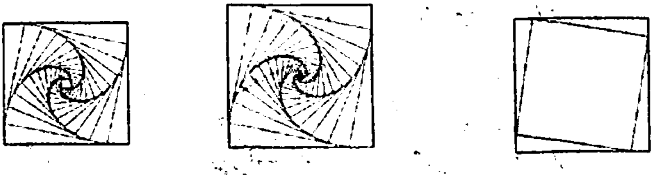
$$\omega_n(a,x,y)=\omega_0(a,x,y)\vee_0\omega_{n-1}(\frac{a}{\sqrt{2}\sin(\alpha+\frac{\pi}{4})},x\cos(\alpha)-y\sin(\alpha),x\sin(\alpha)+y\cos(\alpha))\geq 0$$

бу ерда n=1,2,3,...; α - буралиш бурчаги.

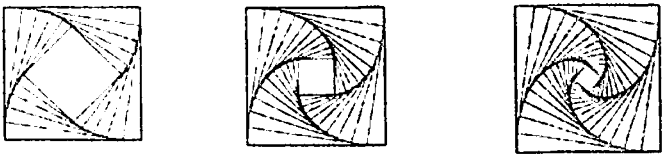
n ва α нинг турли қийматларидаги ҳисобларнинг натижалари 2.33-расмда келтирилган.



$n=0,\ \alpha=\pi/15$ $n=5,\ \alpha=\pi/15$ $n=10,\ \alpha=\pi/15$

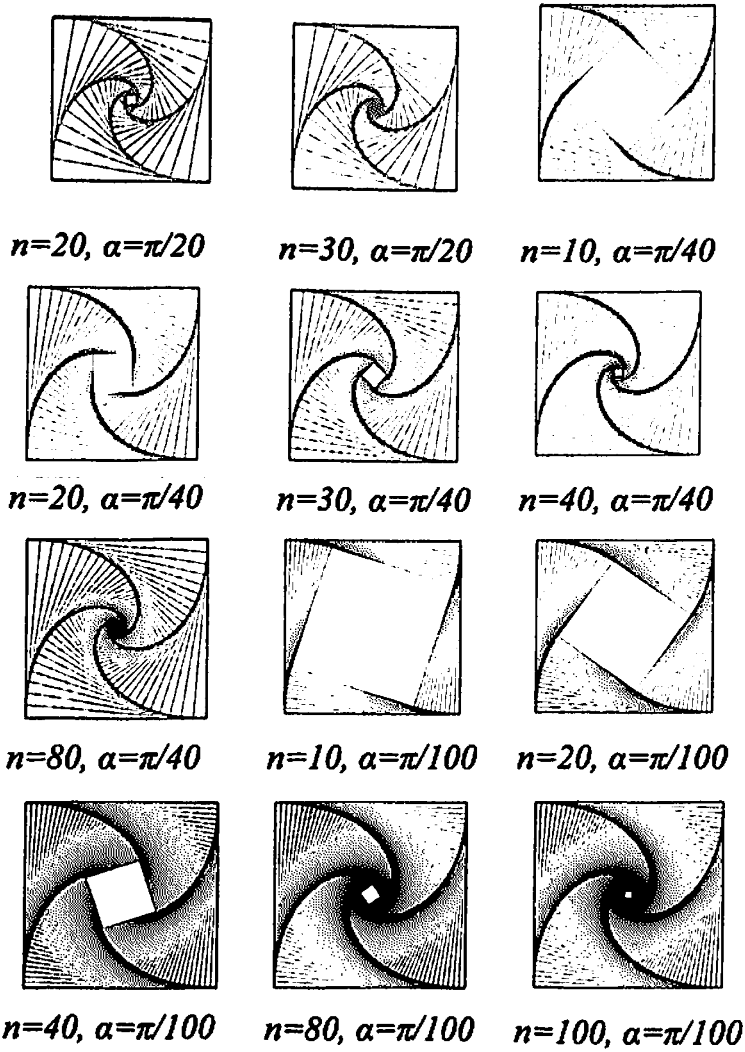


$n=15,\ \alpha=\pi/15$ $n=30,\ \alpha=\pi/15$ $n=1,\ \alpha=\pi/20$



$n=5,\ \alpha=\pi/20$ $n=10,\ \alpha=\pi/20$ $n=15,\ \alpha=\pi/20$

2.33-расм. Спиралсимон фракталлар



$n=20,\ \alpha=\pi/20$ $n=30,\ \alpha=\pi/20$ $n=10,\ \alpha=\pi/40$

$n=20,\ \alpha=\pi/40$ $n=30,\ \alpha=\pi/40$ $n=40,\ \alpha=\pi/40$

$n=80,\ \alpha=\pi/40$ $n=10,\ \alpha=\pi/100$ $n=20,\ \alpha=\pi/100$

$n=40,\ \alpha=\pi/100$ $n=80,\ \alpha=\pi/100$ $n=100,\ \alpha=\pi/100$

2.33-расм.(давоми) Спиралсимон фракталлар

II боб бўйича хулоса

Монографиянинг ушбу бобида фракталларни қуриш учун қўлланиладиган усуллар, уларнинг тавсифи, қўлланилиш ҳолатлари келтирилган ҳамда бу усуллар мисолларда ўрганилган.

Фракталларни қуриш усулларида классик ҳамда замонавий фракталлар учун тенгламалар қурилган, натижалар олинган ва расмлари келтирилган.

Айланалар тенгламаси ва алгебромантиқий усули R-функциянинг лойиҳалаш воситасидан фойдаланиб, айланалар кесишиши, айланалар бирлашишидан иборат фракталлар тенгламасини қуриш мумкин. Бу фракталлар жуда чиройли бўлиб, қайсики енгил саноат, телекоммуникация, керамик ва чинни буюмларга нақшларни чизиш ва бошқаларда қўлланилиши мумкин.

Мантиқ алгебраси, R-функция назарияси ва фрактал арифметика усуллари бўйича олиб борилган кўпйиллик назарий тадқиқотлар газлама ва гилам буюмларнинг рангли дизайнини замонавийлаштиришнинг алгоритмик муҳитини ишлаб чиқишда хизмат қилади.

III БОБ. ГЕОМЕТРИК ШАКЛЛАРДАН ИБОРАТ ФРАКТАЛЛАРНИ РЕКУРСИВ МОДЕЛИ, АЛГОРИТМИНИ ИШЛАБ ЧИҚИШ ВА ОЛИНГАН НАТИЖАЛАР

Ушбу бобда математиканинг бир қисми ҳисобланган геометриянинг асосий тушунчаларидан фойдаланган ҳолда янги турдаги фракталлар қуриш учун геометрик моделлар ва рекурсив алгоритмлар ишлаб чиқилган [6-9,52-54].

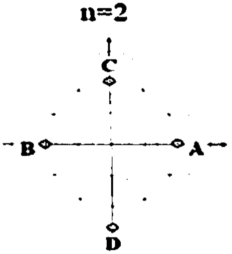
3.1. Геометрик шакллардан иборат фракталларни қуришнинг рекурсив модели ва алгоритми

1. Айланалардан иборат фрактални қуриш алгоритми

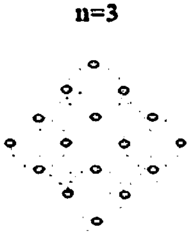
n=1 бўлганда: айлана марказининг координаталари (x,y) аниқлансин, r-радиус билан айлана чизилсин;

n=2 бўлганда: $A(x+r;y)$, $B(x;y+r)$, $C(x-r;y)$ ва $D(x;y-r)$ нуқталарда r/2 радиус билан айланалар чизилсин, натижада 5 та айланалар ҳосил қилинсин;

n=3 бўлганда: r/2 радиус билан ҳосил қилинган 4 та айланаларда 16 та нуқта координаталари аниқлансин, $r/2^2$ радиус билан айланалар чизилсин, натижада 21 та айлана ҳосил қилинсин ва ҳ.к. бу жараён $\sum_{i=1,2,\ldots}^{n} \frac{r}{2^{i-1}}$ марта бажарилсин, 4^{n-1} та айланалардан иборат фракталлар ҳосил қилинсин.



3.1-расм.Айланали фракталлар



3.2-расм. Айланали фракталлар

Тўртбурчаклардан иборат фракталларнинг қуришни рекурсив алгоритмларини ишлаб чиқиш. Квадрат, ромб ва тўғри тўртбурчак каби геометрик шакллардан фойдаланиб фракталларни қуришни кўриб чиқамиз.

Квадратлардан иборат фракталнн қуришда асосан унинг диагоналига мурожаат қиламиз 3.3-расм.

Биринчи қадам: Квадратлардан иборат фрактални қуриш учун аввало бош квадратнинг диагоналини ҳисоблаймиз. Агар квадратнинг томонлари узунликлари a дан иборат бўлса, у ҳолда $d=a\sqrt{2}$. Квадратнинг чап юқори учидаги нуқта координатаси A(x,y) ва пастки ўнг учидаги нуқта координатаси B(x1,y1) бўлсин.

Иккинчи қадам: диагонали биринчи квадратникидан икки марта кичик бўлган d/2, марказлари биринчи квадратнинг учларидан ўтадиган квадратларни чизамиз. Ҳосил қилинган квадратнинг учларидаги нуқталарнинг координаталари аниқлаб олинади, яъни

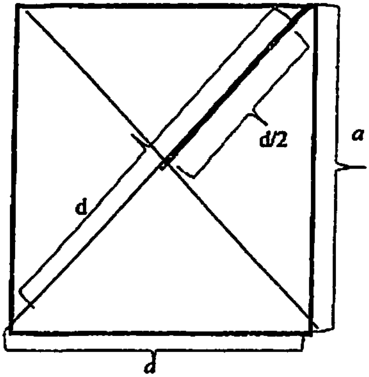
A1(x-d,y-d,x+d,y+d,d/2), B1(x1-d,y1-d,x1+d,y1+d,d/2),
C1(x-d,y1-d,x+d,y1+d,d/2), D1(x1-d,y-d,x1+d,y+d,d/2).

Учинчи қадам: диагонали иккинчи қадамда чизилган квадратларникидан икки марта кичик бўлган, марказлари иккинчи қадамда ҳосил қилинган квадратларнинг учларидан ўтадиган квадратларни чизамиз. Яъни ҳосил қилинган квадратнинг учларидаги нуқталарнинг координаталари аниқлаб олинади

$A2(x\text{-}d\text{-}d,y\text{-}d\text{-}d,x+d+d,y+d+d,d/4)$, $B2(x1\text{-}d\text{-}d,y1\text{-}d\text{-}d,x1+d+d,y1+d+d,d/4)$,

$C2(x\text{-}d\text{-}d,y1\text{-}d\text{-}d,x+d+d,y1+d+d,d/4)$, $D2(x1\text{-}d\text{-}d,y\text{-}d\text{-}d,x1+d+d,y+d+d,d/4)$

ва ҳ.к. давом эттирамиз. Натижада квадратлардан иборат бўлган фракталлар ҳосил бўлади.



3.3-расм. Квадратдан иборат фрактал учун бошланғич схема

Квадратлардан иборат фрактални қуриш

Биринчи қадам: Квадратлардан иборат фрактални қуриш учун аввало бош квадратнинг чап юқори учидаги нуқта координатаси A(x1,y1) ва пастки ўнг учидаги нуқта координатаси B(x2,y2) белгилаб оламиз.

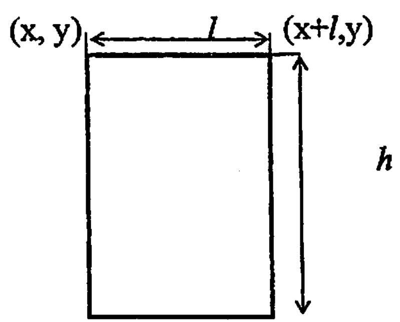
Иккинчи қадам: томони биринчи квадратникидан икки марта кичик бўлган $a/2$, марказлари биринчи квадратнинг учларидан ўтадиган квадратларни чизамиз. Яъни ҳосил қилинган квадратнинг учларида ҳосил қилинган нуқталарнинг координаталари аниқлаб олинади, яъни

$$A1(x1-a, y1-a, x1+a, y1+a, a/2);\quad B1(x2-a, y2-a, x2+a, y2+a, a/2),$$
$$C1(x1-a, y2-a, x1+a, y2+a, a/2);\quad D1(x2-a, y1-a, x2+a, y1+a, a/2).$$

Учинчи қадам: томонлари иккинчи қадамда чизилган квадратларникидан икки марта кичик бўлган, марказлари иккинчи қадамда ҳосил қилинган квадратларнинг учларидан ўтадиган квадратларни чизамиз ва ҳ.к. давом эттирамиз. Натижада квадратлардан иборат бўлган фракталлар ҳосил бўлади.

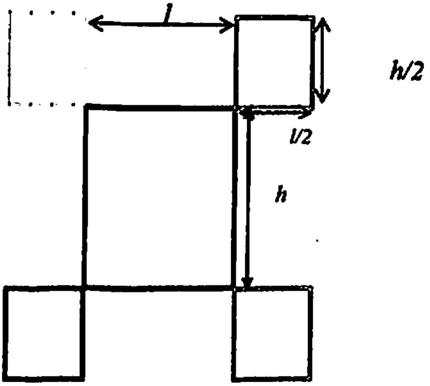
с. Тўғри тўртбурчаклардан иборат фрактални қуришда асосан унинг учлари ва томонларига мурожаат қиламиз 3.4-расм.

Биринчи қадам: Томонларнинг узунликлари, учлардаги нуқталарнинг координаталари аниқлаб олинсин. (Бу катталиклар бевосита алгоритмни қуриб олиш учун хизмат қилади)



3.4-rasm. Тўғри тўртбурчаклардан иборат фрактални қуриш бошланғич схемаси

Иккинчи қадам: Томонлар узунликлари 2 марта камайтирилсин ва тўртбурчак учларидан яна тўртта тўртбурчак чизилсин 3.5-расм.



3.5-расм. Тўғри тўртбурчаклардан иборат фракталнн қуриш навбатдаги қадам схемаси

1-кичик тўғри тўртбурчакни чизиш учун учларидаги нуқта координаталарини аниқлаб олинсин; x ўқи бўйича $l/2$га камайтирилсин; y ўқи бўйича $h/2$ марта камайтирилсин; у ҳолда томонлар ўлчамлари ҳам икки мартадан камайтирилсин ва

$A1(x1-l/2, y1 - h/2, x1, y1, l/2, h/2)$ эга бўлинсин.

2-кичик тўғри тўртбурчакни чизиш учун учларидаги нуқта координаталарини аниқлаб олинсин; x ўқи бўйича l га оширилсин, y ўқи бўйича $h/2$ марта камайтирилсин; у ҳолда томонлар ўлчамларини ҳам икки мартадан камайтирилсин ва

$B1(x1+l, y1-h/2, x2+l/2, y1, l/2, h/2)$ эга бўлсин.

3-кичик тўғри тўртбурчакни чизиш учун учларидаги нуқта координаталарини аниқлаб олинсин; x ўқи бўйича $l/2$ га оширилсин; y ўқи бўйича $h/2$ марта оширилсин; у ҳолда томонлар ўлчамларини ҳам икки мартадан камайтирилсин ва

$$C1(x2, y2, x2+l/2, y2+h/2, l/2, h/2)$$ эга бўлсин.

4-кичик тўғри тўртбурчакни чизиш учун учларидаги нуқта координаталарини аниқлаб олинсин; x ўқи бўйича $l/2$ га камайтирилсин, y ўқи бўйича h ва $3*h/2$га оширилсин; у ҳолда томонлар ўлчамларини ҳам икки мартадан камайтирилсин ва

$$D1(x1-l/2, y1+h, x1, y1+3*h/2, l/2, h/2)$$ эга бўлсин.

бу жараён n марта такрорланади, буни қуйидаги

$$1+4+16+64+\ldots+4^{n-1}=\sum_{i=1,2,\ldots}^{n}4^{i-1}.$$

формула асосида ёзиш мумкин, яъни тўртбурчаклар сони. Бу қадамдаги бурчаклар сонининг формуласи: $4(n^2-1)+4n$ каби ифодаланади.

Ромблардан иборат фрактални қуриш

Биринчи қадам: Ромблардан иборат фрактални қуриш учун аввало бош ромбнинг юқори учидаги нуқта координатаси A(x1,y1) ва пастки учидаги нуқта координатаси B(x2,y2) белгилаб олинсин. Ромб томонларининг узунликлари l ва t деб олинсин.

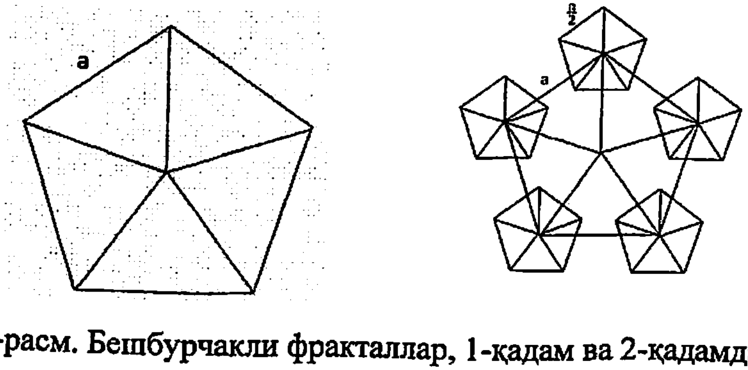
Иккинчи қадам: томони биринчи ромбникидан икки марта кичик бўлган $l/2$ ва $t/2$ томонлар ташкил этилсин, ҳосил қилиниши керак ромбларни диагоналлари кесишган нуқталари биринчи ромбнинг учларида ётадиган ромблар чизилсин. Бунда ҳосил қилинган ромбнинг учларидаги нуқталарнинг координаталари аниқлаб олинсин, яъни

$$A1(x, y-l, l/2, t/2);\quad B1(x, y+l, l/2, t/2),$$
$$C1(x-t, y, l/2, t/2);\quad D1(x+t, y, l/2, t/2).$$

Учинчи қадам: томонлари иккинчи қадамда чизилган ромбларникидан икки марта кичик бўлган, марказлари иккинчи қадамда ҳосил қилинган ромбларнинг учларидан ўтадиган ромбларни чизилсин ва ҳ.к. давом эттирилсин. Натижада ромблардан иборат бўлган фракталлар ҳосил бўлади.

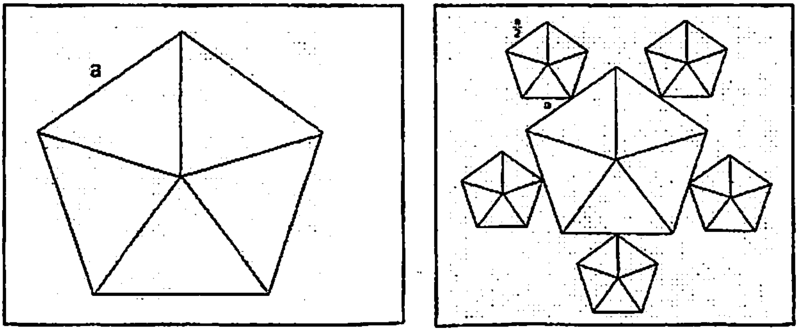
Бешбурчаклардан иборат фракталларни қуриш алгоритмлари

а) Бу турдаги фракталлари қуришда ҳам худди юқоридаги алгоритмлардаги каби иш олиб борилади. Аввало томони «а»га тенг бўлган бешбурчак чизилсин, унинг маркази аниқлаб олинсин (унинг маркази учларидан ўтказилган баландликлар кесишган нуқтадир). Бу нуқтанинг координатаси аниқлансин. Кейинги қадамда ҳосил бўлган бешбурчаклар қирралари икки марта кичик қилиб олинсин ва у биринчи бешбурчакнинг учларида жойлаштирилсин (3.6-расм).



3.6-расм. Бешбурчакли фракталлар, 1-қадам ва 2-қадамда

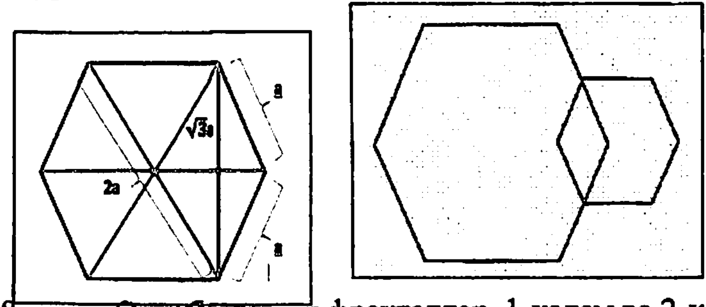
б) Бу турдаги бешбурчакларни қуриш учун а) даги каби биринчи қадамда томони «а»га бешбурчак чизиб олинсин. Иккинчи қадамда бешбурчакнинг қирраларининг ўрталари топилсин ва олдинги қадамдаги ўлчамдан икки баробар кичик ўлчамда бешбурчаклар жойлаштирилсин (3.7-расм).



3.7-расм. Бешбурчакли фракталлар, 1-қадам ва 2-қадамда

Олтибурчаклардан иборат фракталларни қуриш алгоритмлари

а) 1-қадам: аввало олтибурчак чизилсин, унинг маркази аниқлаб олинсин. Бу нуқтанинг координатаси аниқлансин. Бу турдаги фракталлари қуришда унинг диагоналларидан кенг фойдаланилади. Кейин диагонол ярми ҳисоблансин. 2-қадам: шу диагоналдан фойдаланиб олтибурчаклар чизилсин. Бу олтибурчаклар марказлари топилиб, бу олтибурчакларнинг марказлари олдинги қадамдаги олтибурчакнинг учларида бўлсин. (3.8-расм).

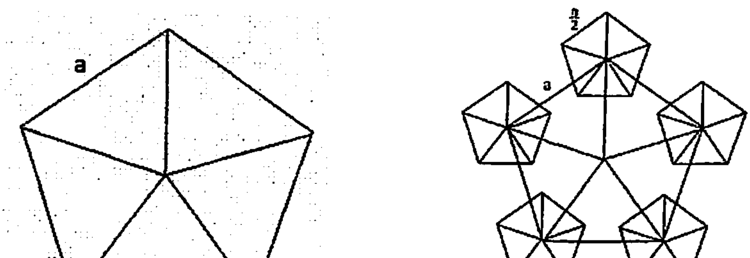


3.8-расм. Олтибурчакли фракталлар, 1-қадам ва 2-қадамда

Учинчи қадам: томонлари иккинчи қадамда чизилган ромбларникидан икки марта кичик бўлган, марказлари иккинчи қадамда ҳосил қилинган ромбларнинг учларидан ўтадиган ромбларни чизилсин ва ҳ.к. давом эттирилсин. Натижада ромблардан иборат бўлган фракталлар ҳосил бўлади.

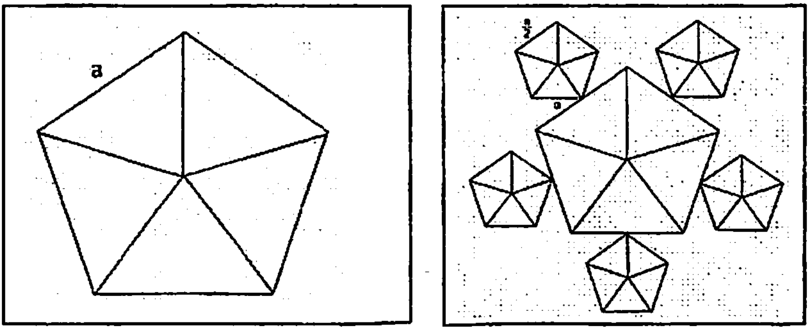
Бешбурчаклардан иборат фракталларни қуриш алгоритмлари

а) Бу турдаги фракталлари қуришда ҳам худди юқоридаги алгоритмлардаги каби иш олиб борилади. Аввало томони «а»га тенг бўлган бешбурчак чизилсин, унинг маркази аниқлаб олинсин (унинг маркази учларидан ўтказилган баландликлар кесишган нуқтадир). Бу нуқтанинг координатаси аниқлансин. Кейинги қадамда ҳосил бўлган бешбурчаклар қирралари икки марта кичик қилиб олинсин ва у биринчи бешбурчакнинг учларида жойлаштирилсин (3.6-расм).



3.6-расм. Бешбурчакли фракталлар, 1-қадам ва 2-қадамда

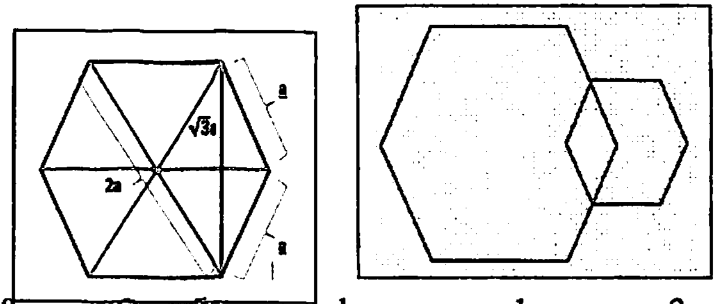
б) Бу турдаги бешбурчакларни қуриш учун а) даги каби биринчи қадамда томони «а»га бешбурчак чизиб олинсин. Иккинчи қадамда бешбурчакнинг қирраларининг ўрталари топилсин ва олдинги қадамдаги ўлчамдан икки баробар кичик ўлчамда бешбурчаклар жойлаштирилсин (3.7-расм).



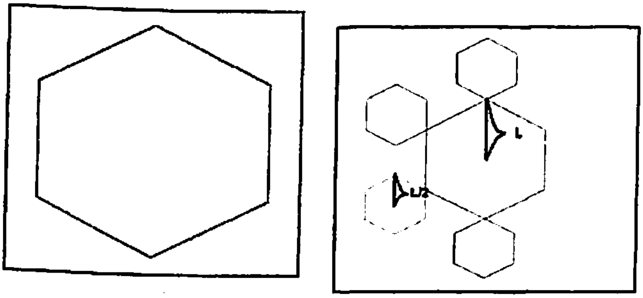
3.7-расм. Бешбурчакли фракталлар, 1-қадам ва 2-қадамда

Олтибурчаклардан иборат фракталларни қуриш алгоритмлари

а) 1-қадам: аввало олтибурчак чизилсин, унинг маркази аниқлаб олинсин. Бу нуқтанинг координатаси аниқлансин. Бу турдаги фракталлари қуришда унинг диагоналларидан кенг фойдаланилади. Кейин диагонол ярми ҳисоблансин. 2-қадам: шу диагоналдан фойдаланиб олтибурчаклар чизилсин. Бу олтибурчаклар марказлари топилиб, бу олтибурчакларнинг марказлари олдинги қадамдаги олтибурчакнинг учларида бўлсин. (3.8-расм).



3.8-расм. Олтибурчакли фракталлар, 1-қадам ва 2-қадамда б) 1-қадам: аввало олтибурчак чизилсин, унинг маркази аниқлаб олинсин. Бу нуқтанинг координатаси аниқлансин. Бу турдаги фракталлар қуришда ҳам унинг диагонал (*L*)ларидан фойдаланилади. Кейин диагонал ярми $L/2$ ҳисоблансин. 2-қадам: шу диагоналдан фойдаланиб олтибурчаклар чизилсин. Бу олтибурчаклар учларининг координаталари топилиб, бу олтибурчаклар олдинги қадамдаги олтибурчакнинг учларида жойлаштирилсин.



3.9-расм. Олтибурчакли фракталлар, 1-қадам ва 2-қадамда

Бу турдаги фракталларнинг геометрик моделини ишлаб чиқишда геометрик шакл мунтазам олтибурчак ва унинг тегишли тушунчаларидан кенг фойдаланилади. 1-қадам: аввало томони “а”га тенг мунтазам олтибурчак чизиб олинсин. 2-қадам: унинг маркази жойлашган нуқта ҳамда унинг координаталари O(x,y) аниқлансин. 3.10-расмдан мунтазам олтибурчакнинг учлари жойлашган нуқталар (A,B,C,D,E,F)нинг координаталари аниқлансин, ва кичик олтибурчакларнинг марказлари ушбу нуқталарда ётсин:

$$A\left(x+\frac{h}{\sqrt{3}};y-h\right);\ B\left(x+\frac{2h}{\sqrt{3}};y\right);\ C\left(x+\frac{h}{\sqrt{3}};y+h\right);$$

$$D\left(x-\frac{h}{\sqrt{3}};y+h\right);\ E\left(x-\frac{h}{\sqrt{3}};y+h\right);\ F\left(x-\frac{h}{\sqrt{3}};y-h\right).$$

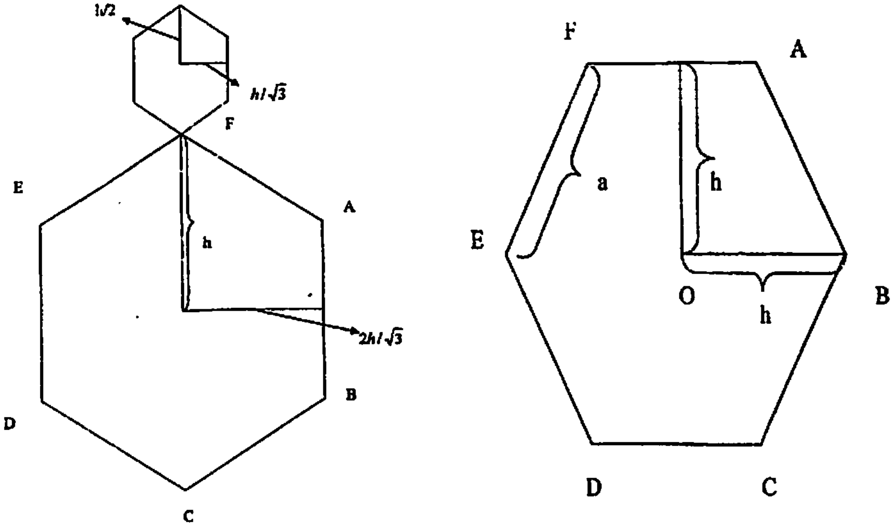
3-қадамда ушбу нукталардан томонлари “a/2”га тенг бўлган мунтазам олтибурчаклар чизилсин.

Агар асосий олтибурчакка ташқи чизилган айлани радиуси “h”га тенг бўлса, унинг учларидан чизилган мунтазам олтибурчакларга ташқи чизилган айлананинг радиуслари мос равишда “h/2”га тенг бўлади.

$$A_1\left(x+\frac{h\sqrt{3}}{2};\,y-\frac{3h}{2}\right);\ B_1\left(x+h\sqrt{3};\,y\right);\ C_1\left(x+\frac{h\sqrt{3}}{2};\,y+\frac{3h}{2}\right);$$

$$D_1\left(x-\frac{h\sqrt{3}}{2};\,y+\frac{3h}{2}\right);\ E_1\left(x-h\sqrt{3};\,y\right);\ E_1\left(x-\frac{h\sqrt{3}}{2};\,y-\frac{3h}{2}\right);$$

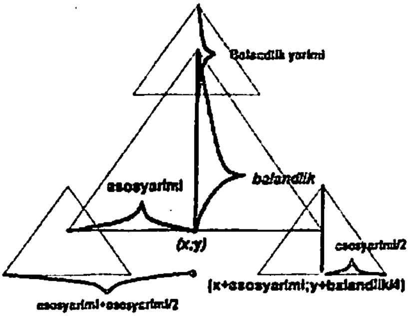
Чизилган ҳар бир функциядан рекурсив функция ҳосил қилиб бу жараённи чексиз давом эттирилсин.



3.10-расм. Олтибурчакли фракталлар қуришнинг бошланғич схемалари

Учбурчакли фракталларни қуришнинг геометрик модели, рекурсив алгоритми ва дастурий муҳитини ишлаб чиқиш. Бу турдаги фракталларни қуришда мунтазам учбурчак ва унинг асосий тушунчаларидан кенг фойдаланамиз.

1-тур учбурчак



3.11-расм. Учбурчакли фракталларни қуриш схемаси

3.11-расмда учбурчак, унинг баландлиги ва асос ярмидан фойдаланган ҳолда унинг геометрик модели ишлаб чиқилади. Бунда тўрт хил ўзгарувчи олинади. Булар: х,у, баландлик-h, асосярми-asya ва улар 3.11-расмда келтирилган.

х–бошланғич учбурчак асоси ярми жойлашган нуқта абциссаси.

у–бошланғич учбурчак асоси ярми жойлашган нуқта ординатаси.

Баландлик(h)–бошланғич учбурчак баландлиги.

Асос ярми(asya)–бошланғич учбурчак асосининг ярми.

Энди рекурсив алгоритмни ишлаб чиқамиз.

1-қадам:

а) Бошланғич мунтазам учбурчак чизиб олинсин.

б) Учбурчакнинг асосининг ярми аниқлансин ва бу нуқтанинг координатаси (x,y) деб олинсин.

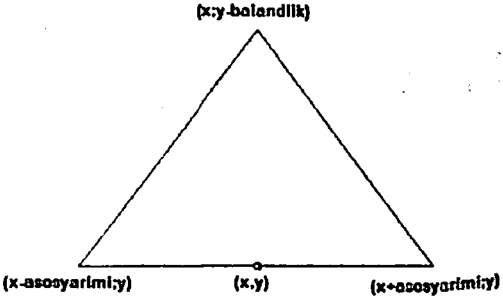
с) Учбурчакнинг баландлиги аниқлансин ва h ҳарфи билан белгилансин 3.11-расм.

д) Учбурчак учлари жойлашган нуқталарнинг координаталари аниқлансин

A(x, y-h); B(x + asya, y); C(x – asya, y) (3.12-расм).

Бу алгоритм учун дастур тузиб, расм ҳосил қилинганда фақат битта учбурчак чизилади. Бунда дастурга рекурсиялар сонини аниқлаш учун яна битта парамерт киритилади, яъни уни n деб белгилаймиз.

n=1 бўлганида, фақат битта мунтазам учбурчак чизилади 3.12-расм.



3.12-расм, n=1. Учбурчакли фракталларни қуришнинг бошланғич схемаси

2-қадам:

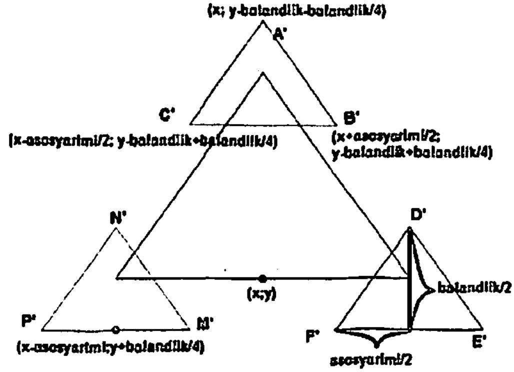
а) мунтазам учбурчак ва унинг ҳар бир учида ўлчами асосий учбурчак ўлчамидан икки баравар кичик булган учбурчаклар чизилсин.

б) Мавжуд мунтазам учбурчакларда

A^I(x, y – 5*h/4); B^I(x – asy/2; y + 3*h/4);

C^I (x – asy/2; y + 3*h/4);
D^I (x + asy; y – h/4); E^I (x + 3*asy/2; y + h/4);
F^I (x – asy/2; y + h/4);
N^I (x – asy; y – h/4); M^1 (x – asy/2; y + h/4);
P^I (x – 3*asy/2; y + h/4);
нуқта координаталари аниқлансин.

c) Аниқланган нуқталарда учбурчаклар чизилсин 3.12-расм.



3.13-расм n=2. Учбурчакли фракталларни қуришнинг новбатдаги қадам схемаси

Ва бу жараённи чексиз давом эттириб мунтазам учбурчаклардан иборат фракталнн қуриш мумкин. Ҳосил қилинган фракталлардаги учбурчаклар сони n га боғлик геометрик тарзда ўзгаради. Яьни учбурчаклар умумий сонини топиш қуйидаги формулага асосан амалга оширилади

$$S = 1 + 3 + 9 + 27 + ... + 3^{k-1} = \sum_{k=1}^{n} 3^{k-1}.$$

бу ерда n рекурсиялар сони.

2-тур учбурчак.

Бу турдаги фракталларни қуришда ҳам қуйидаги мунтазам учбурчак ва унинг асосий тушунчаларидан кенг фойдаланилади.

Бу тур мунтазам учбурчакли фракталнинг олдинги тур фракталдан фарқи шундаки уларнинг учбурчакнинг ташқариларида ҳосил қилинади. Бунинг учун аввало учбурчак томонларининг ўрталари, унинг баланлиги топиб олинади ҳамда нуқталар билан белгиланиб координаталари аниқланади.

Бунда 4 хил ўзгарувчи олинади. Булар x, y, h, tya.

x–бошланғич учбурчак асоси ярми жойлашган нуқта абциссаси.

y–бошланғич учбурчак асоси ярми жойлашган нуқта ординатаси.

h–бошланғич учбурчак баландлиги.

tya–бошланғич учбурчак томонларининг ярми.

Энди рекурсив алгоритмни ишлаб чиқамиз.

1-қадам:

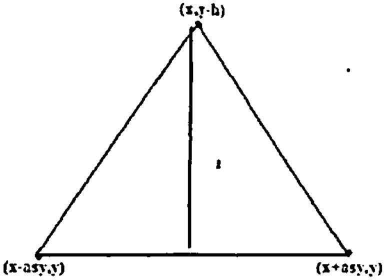
а) Учбурчак учлари жойлашган нуқталарнинг координаталари аниқлансин

A(x, y-h); B(x + tya, y); C(x – tya, y) 3.13-расм.

б) Бошланғич мунтазам учбурчак чизиб олинсин.

с) Учбурчакнинг баландлиги аниқлансин ва h ҳарфи билан белгилансин 3.13-расм.

д) Учбурчакнинг томонларининг яримлари аниқлансин ва бу нуқталарнинг координаталари аниқлансин (3.14-расм).



3.14-расм. n=1. Учбурчакли фракталларни қуришнинг бошланғич схемаси

Бу алгоритм учун дастур тузиб, расм ҳосил қилинганда фақат битта учбурчак чизилади. Бунда дастурга рекурсиялар сонини аниқлаш учун яна битта параметр киритиб, уни n деб белгилаймиз.

n=1 бўлганда фақат битта мунтазам учбурчак чизилади 3.14-расм.

2-қадам:

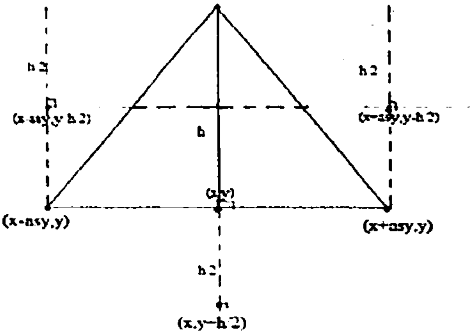
а) мунтазам учбурчак ва унинг ҳар бир учида ўлчами бошланғич учбурчак ўлчамидан икки баравар кичик бўлган учбурчаклар чизилсин.

б) Мавжуд мунтазам томонлари ўрталарида нуқта координаталари аниқлансин, яъни

$$A_1(n-1, x - tya, y - h/2, h/2, tya/2);$$
$$B_1(n-1, x + tya, y - h/2, h/2, tya/2);$$
$$C_1(n-1, x, y + h/2, h/2, tya/2);$$

кабидир.

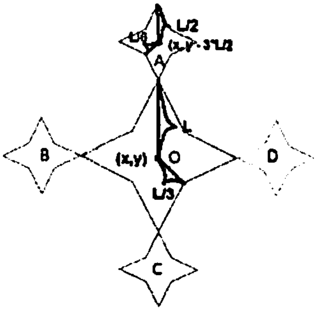
с) Аниқланган нуқталарда учбурчаклар чизилсин 3.14-расм.



3.15-расм. n=2: Учбурчакли фракталларни қуришнинг навбатдаги қадам схемаси

Ва бу жараённи чексиз давом эттириб мунтазам учбурчаклардан иборат 2-тур фрактални қуриш мумкин. Ҳосил қилинган фракталдаги учбурчаклар сонини n га боғлиқ геометрик тарзда ўзгаради. Яъни учбурчаклар умумий сонини топиш (1) формулага асосан амалга оширилади, бу ерда n рекурсиялар сони.

Тўрт қиррали юлдузсимон фрактал. Бу турдаги юлдузсимон фракталларни чизишда қуйидаги алгоритмини кўриб чиқамиз (3.16-расм).

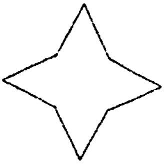


3.16-расм. n=2: Тўрт қиррали юлдузсимон фрактал қуриш

Бунда 3 хил ўзгарувчи олинади. Булар x, y, L.
x – асосий нақш маркази жойлашган нуқта абциссаси.
y – асосий нақш маркази жойлашган нуқта ординатаси.
L – асосий нақш марказидан энг узоқ учларигача бўлган масофа.

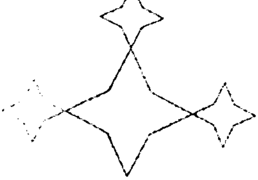
Дастуримизни ишлашда яна битта ўзгарувчи киритилди. Бу ўзгарувчи (n) фрактал такрорланиши сонини белгилаб беради.

Агар n=1 бўлганда, фақатгина асосий нақш чизилади(3.17-расм).



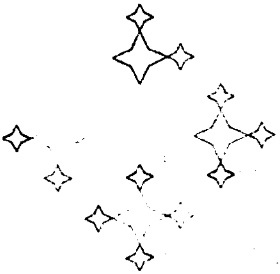
3.17-расм. n=1: Тўрт қиррали юлдузсимон фрактал

n=2 бўлганда бошланғич накш ва унинг ҳар бир учида ўлчами асосий нақш ўлчамидан икки баравар кичик бўлган нақшлар чизилади (3.18-расм).



3.18-расм. n=2: Тўрт қиррали юлдузсимон фрактал

Агар n=3 бўлганда асосий нақш ва унинг ҳар бир учида ўлчами асосий нақш ўлчамидан икки баравар кичик бўлган нақшлар чизилади, учинчи циклда эса кичкина нақшлар бурчакларида ўлчами асосий нақш ўлчамидан тўрт баравар кичик бўлган нақшлар чизилади (3.19-расм).



3.19-расм. n=3: Тўрт қиррали юлдузсимон фрактал

Биринчи циклда 1 та нақш
Иккинчи циклда 5 та нақшлар
Учинчи циклда 21 та нақшлар ҳосил бўлади.

n-циклда ҳосил бўлган нақшлар сонини қуйидаги формула бўйича топамиз:

$$N=1+4+16+64+...+4^{n-1}=\sum_{i=1,2,...}^{n}4^{i-1}.$$

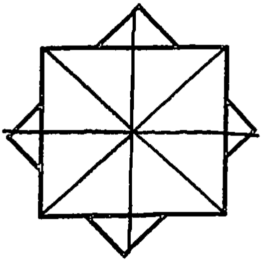
n-қадамдаги шаклнинг диоганали узунлигини ҳисоблаш формуласини аниқлаш:

$$L_n=L+\frac{L}{2}+\frac{L}{4}+\frac{L}{8}+\frac{L}{2^{n-1}}=\sum_{i=1,2,...}^{n}\frac{L}{2^{i-1}}.$$

Ҳар бир шаклдаги координаталар нуқтаси қуйидагича бўлади:

О нуқта координатаси (x;y);
А нуқта координатаси (x;y-(3L/2));
В нуқта координатаси (x-(3L/2);y);
С нуқта координатаси (x;(y+3l/2));
D нуқта координатаси ((x+3L/2);y).

Саккиз қиррали юлдузсимон фрактал. Бу турдаги фракталларни қуришда фракталларни чизишда математикага ҳам мурожат қиламиз. Саккиз қиррали юлдуз чизишда асосан иккита квадратни 45^0 да устма-уст жойлаштирилади. Бунда квадратнинг диоганаллари орқали унинг учларига кейинги юлдузни жойлаштирамиз.

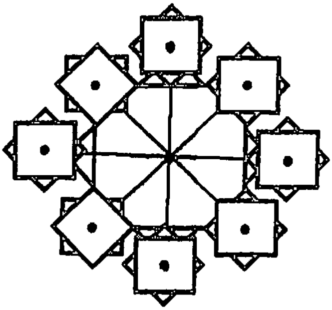


3.20 – расм. Саккиз қиррали юлдузсимон фрактал қуришнинг бошланғич схемаси

Саккиз қиррани чизиш учун қуйидаги математик формулага мурожаат этамиз:

$$d = a\sqrt{2}$$

Иккинчи қадам учун диаганали биринчи шаклдан уч марта кичик шакл чизамиз.



3.21 – расм. Саккиз қиррали юлдузсимон фрактал қуришнинг навбатдаги схемаси

Иккинчи қадамда кичик шакл марказини топамиз ва биринчи шаклнинг биринчи қиррасига жойлаштирамиз ва бу ҳолатни саккизта қиррага жойлаштирамиз.

A нуқта координатасини топиш учун нуқта

(n-1,x - r-l, y-l/16, l / 3, r / 3) формуладан фойдаланамиз;

B нуқта координатасини топиш учун

(n-1, x - r-l, y +5*l-r/15, l / 3, r / 3) формуладан фойдаланамиз;

C нуқта координатасини топиш учун

(n-1, x+3*l-r*3/7, y+5*l-r/15, l /3, r /3) формуладан фойдаланамиз;

D нуқта координатасини топиш учун

(n-1, x +3*l-r*3/7, y-l/16 , l / 3, r / 3) формуладан фойдаланамиз;

E нуқта координатасини топиш учун

(n-1, x, y - l*10/9, l / 3, r / 3) формуладан фойдаланамиз;

F нуқта координатасини топиш учун

(n-1, x, y + 6*l-r/10 , l / 3, r / 3) формуладан фойдаланамиз;

G нуқта координатасини топиш учун

(n-1, x+2*l+r, y+ r*2 -l/2 , l / 3, r / 3) формуладан фойдаланамиз;

H нуқта координатасини топиш учун

(n-1, x-2*l-r, y+ r*2 -l/2 , l / 3, /3) формуладан фойдаланамиз;

Ушбу ҳолат навбатдаги саккиз қиррали юлдузларда ҳам такрорланади.

Биринчи қадамда 1 та саккиз қиррали юлдуз чизилади;

Иккинчи қадамда 9 та саккиз қиррали юлдуз чизилади;

Учинчи қадамда 73 та саккиз қиррали юлдуз чизилади;

Умумий чизилган саккиз қиррали юлдузларни сонини топиш учун қуйидаги формуладан фойдаланамиз:

$$N=1+8+64+192+...+8^{n-1}=\sum_{k=1,2,...}^{n} 8^{k-1}.$$

Саккиз қиррали юлдуз чизиш учун, N–саккиз қиррали юлдуз диоганалини қуйидаги формула орқали топамиз:

$$D_n=D+\frac{D}{3}+\frac{D}{9}+\frac{D}{27}+...+\frac{D}{3^{n-1}}=\sum_{k=1,2,...}^{n}\frac{D}{3^{k-1}}.$$

Юқорида келтирилган геометрик моделлар ва рекурсив алгоритмлардан фойдаланиб фракталлар учун уларнинг умумий тушунчаларини келтириб ўтамиз.

Фракталлар қуришнинг математик формулалари. Бунда кўпбурчаклар сони k га боғлиқ геометрик тарзда ўзгаради. Яъни кўпбурчакларнинг умумий сонини топиш формуласи:

$$N_n=\sum_{k=1}^{n} S_k=S_1+S_2+...+S_n=\sum_{k=1}^{n} M^{k-1}.$$

k-қадамда ҳосил бўладиган кўпбурчаклар сонини аниқлаш формуласи:

$$S_k=M^{k-1}.$$

Бу ерда N_n-ҳосил бўлган кўпбурчакларнинг умумий сони; M - кўпбурчак томонлари сони; k-қадамлар сони; S_k - k қадамдаги кўпбурчаклар сони.

Айланалардан иборат фракталларни қуриш учун қуйидаги формуладан фойдаланамиз:

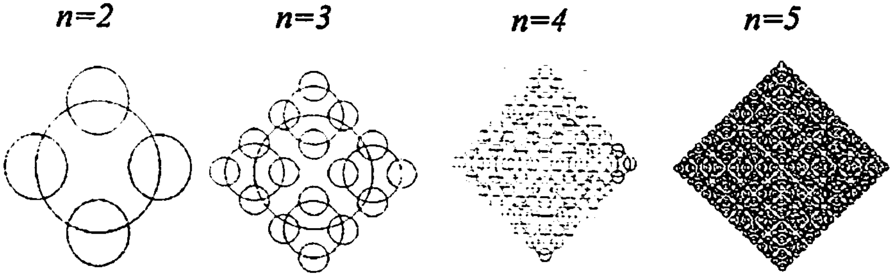
$$S_n=1+4+16+64+....+4^{n-1}=\sum_{i=1,2,...}^{n} 4^{i-1}.$$

n-қадамда ҳосил бўладиган айланалар сони: $N=4^{n-1}$.

3.2. Қурилган фракталлар бўйича ҳисоблаш натижалари таҳлили

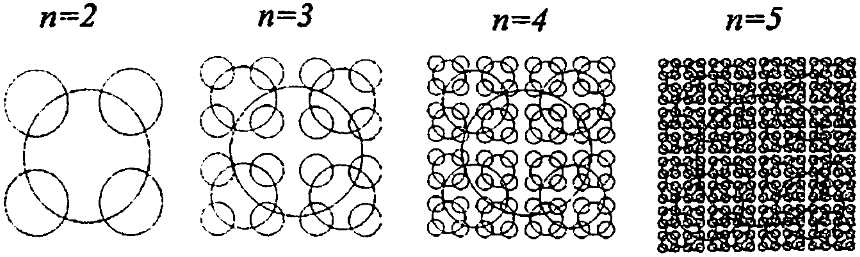
Энди юқорида ишлаб чиқарилган геометрик модел. ҳамда рекурсив алгоритм асосида яратилган дастурий восита ёрдамида *n* нинг турли қийматларидаги олинган натижаларини 3.22-3.38 - келтирамиз.

1-тур айланалардан иборат фракталлар


n=2 *n=3* *n=4* *n=5*

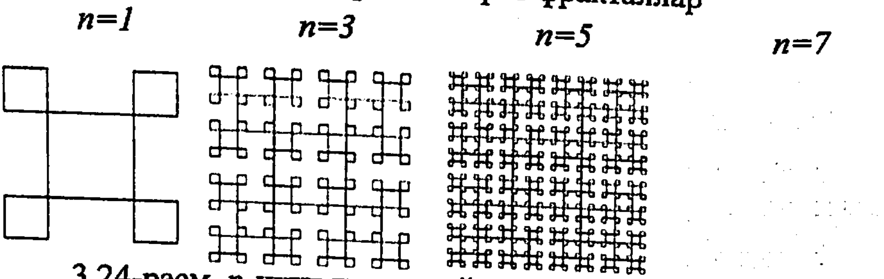
3.22-расм. n-нинг турли қийматларида бўлган фракталларнинг растрли графикаси

2-тур айланалардан иборат фракталлар


n=2 *n=3* *n=4* *n=5*

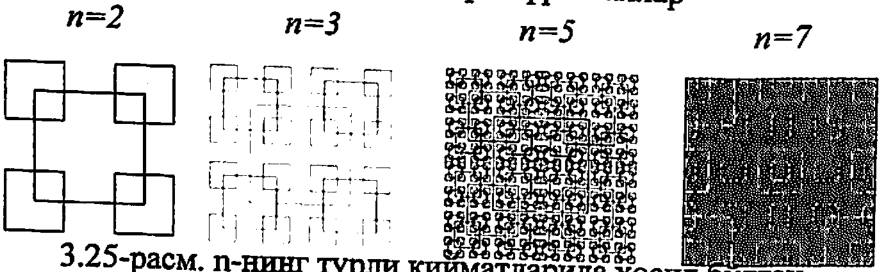
3.23-расм. n-нинг турли қийматларида ҳосил бўлган фракталларнинг растрли графикаси

1-тур тўртбурчаклардан иборат фракталлар



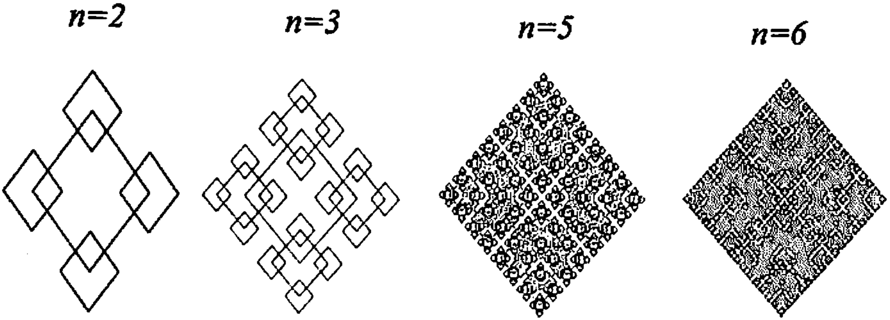
3.24-расм. n-нинг турли қийматларида ҳосил бўлган фракталларнинг растрли графикаси

2-тур тўртбурчаклардан иборат фракталлар



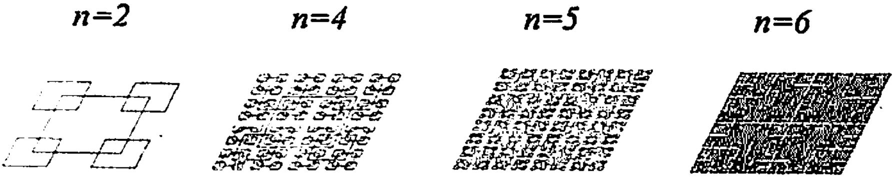
3.25-расм. n-нинг турли қийматларида ҳосил бўлган фракталларнинг растрли графикаси

Ромблардан иборат фракталлар



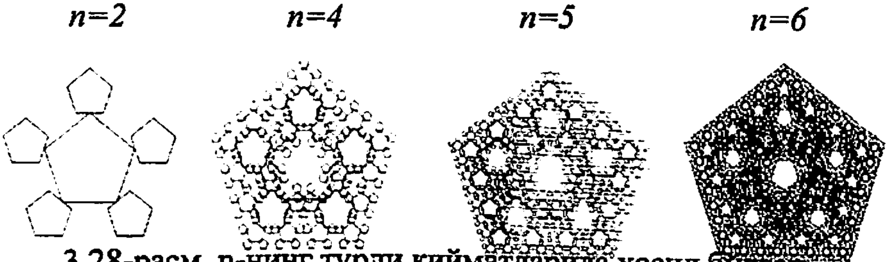
3.26-расм. n-нинг турли қийматларида ҳосил бўлган фракталларнинг растрли графикаси

Параллелограммлардан иборат фракталлар



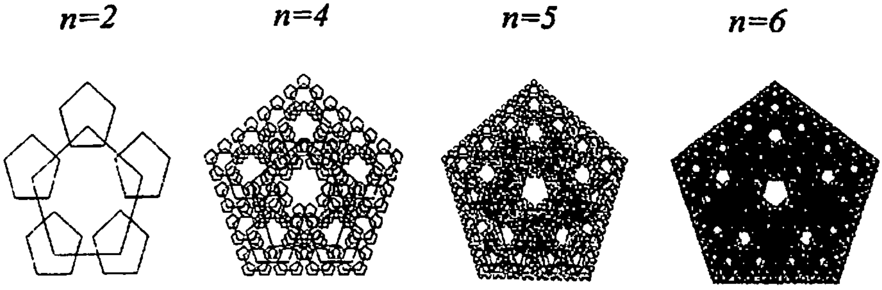
3.27-расм. n-нинг турли қийматларида ҳосил бўлган фракталларнинг растрли графикаси

1-тур бешбурчаклардан иборат фракталлар



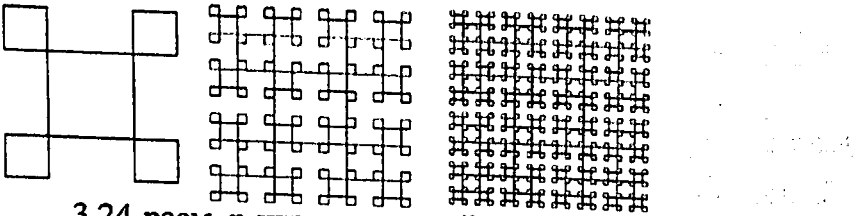
3.28-расм. n-нинг турли қийматларида ҳосил бўлган фракталларнинг растрли графикаси

2-тур бешбурчаклардан иборат фракталлар



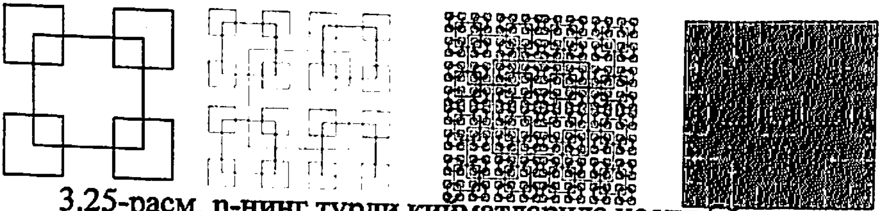
3.29-расм. n-нинг турли қийматларида ҳосил бўлган фракталларнинг растрли графикаси

1-тур тўртбурчаклардан иборат фракталлар


n=1 *n=3* *n=5* *n=7*

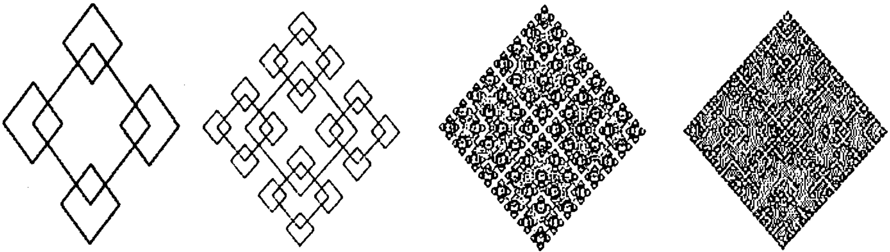
3.24-расм. n-нинг турли қийматларида ҳосил бўлган фракталларнинг растрли графикаси

2-тур тўртбурчаклардан иборат фракталлар


n=2 *n=3* *n=5* *n=7*

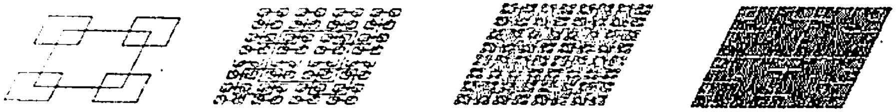
3.25-расм. n-нинг турли қийматларида ҳосил бўлган фракталларнинг растрли графикаси

Ромблардан иборат фракталлар


n=2 *n=3* *n=5* *n=6*

3.26-расм. n-нинг турли қийматларида ҳосил бўлган фракталларнинг растрли графикаси

Параллелограммлардан иборат фракталлар



n=2 *n=4* *n=5* *n=6*

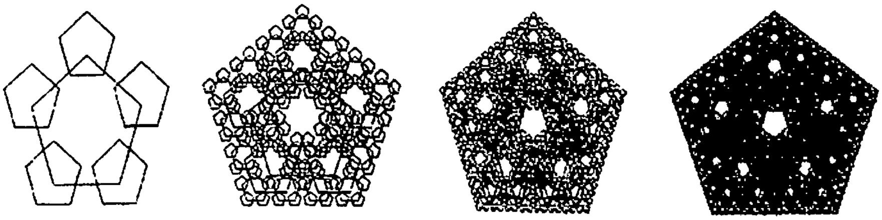
3.27-расм. n-нинг турли қийматларида ҳосил бўлган фракталларнинг растрли графикаси

1-тур бешбурчаклардан иборат фракталлар

n=2 *n=4* *n=5* *n=6*

3.28-расм. n-нинг турли қийматларида ҳосил бўлган фракталларнинг растрли графикаси

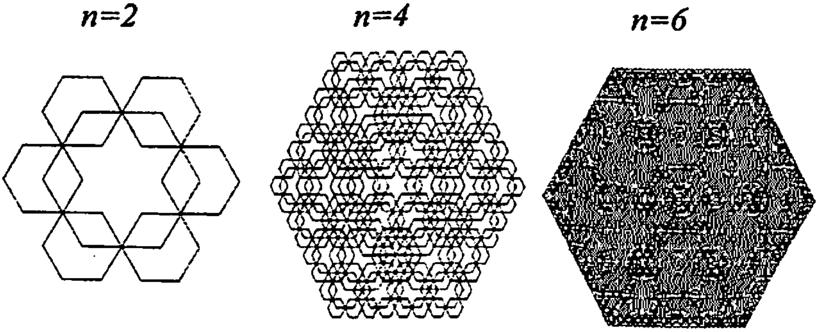
2-тур бешбурчаклардан иборат фракталлар



n=2 *n=4* *n=5* *n=6*

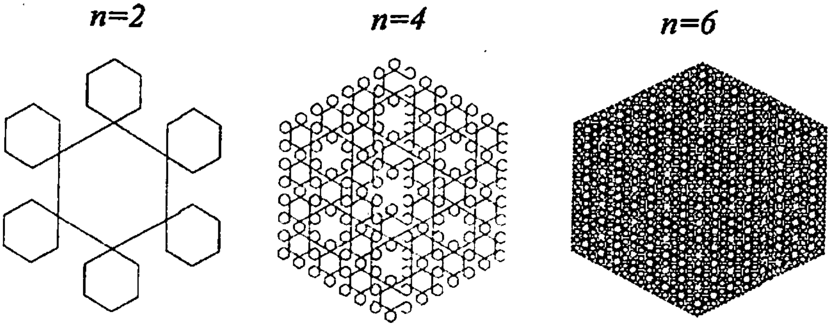
3.29-расм. n-нинг турли қийматларида ҳосил бўлган фракталларнинг растрли графикаси

1-тур олтибурчаклардан иборат фракталлар



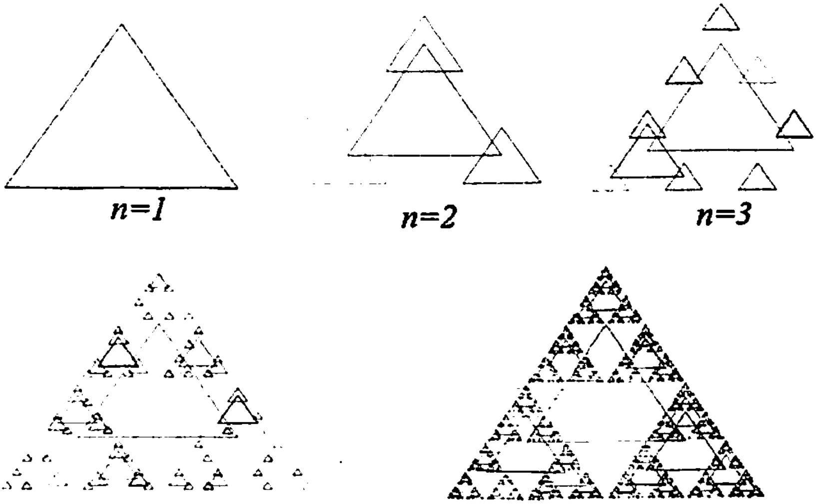
3.30-расм. n-нинг турли қийматларида ҳосил бўлган фракталларнинг растли графикаси

2-тур олтибурчаклардан иборат фракталлар



3.31-расм. n - нинг турли қийматларида ҳосил бўлган фракталларнинг растли графикаси

Мунтазам учбурчаклардан иборат 1-тур фракталлар

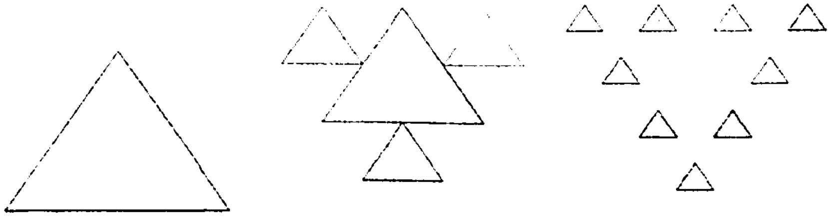


n=1 n=2 n=3

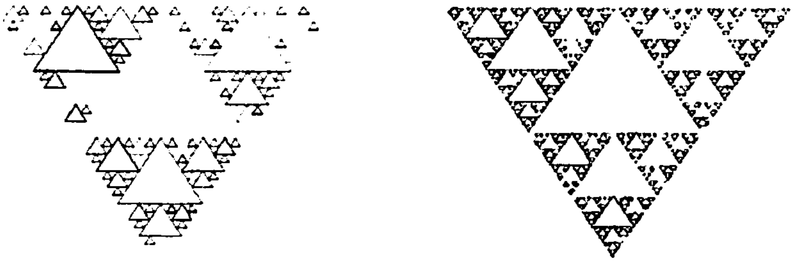
n=5 n=7

3.32-расм. n-нинг турли қийматларида ҳосил бўлган фракталларнинг растли графикаси

Мунтазам учбурчаклардан иборат 2-тур фракталлар



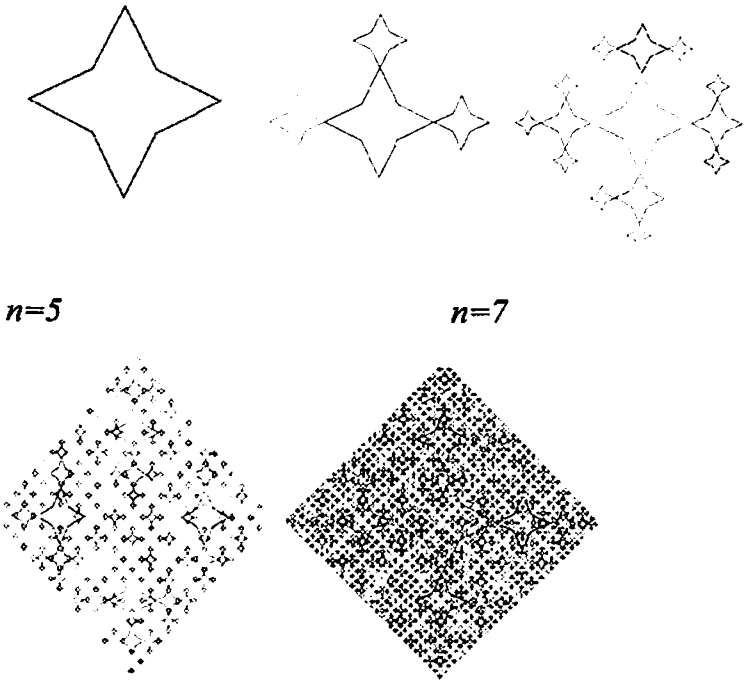
n=1 n=2 n=3



n=5 *n=7*

3.33-расм. n-нинг турли қийматларида ҳосил бўлган фракталларнинг растли графикаси

Тўрткиррали юлдузсимон фракталлар

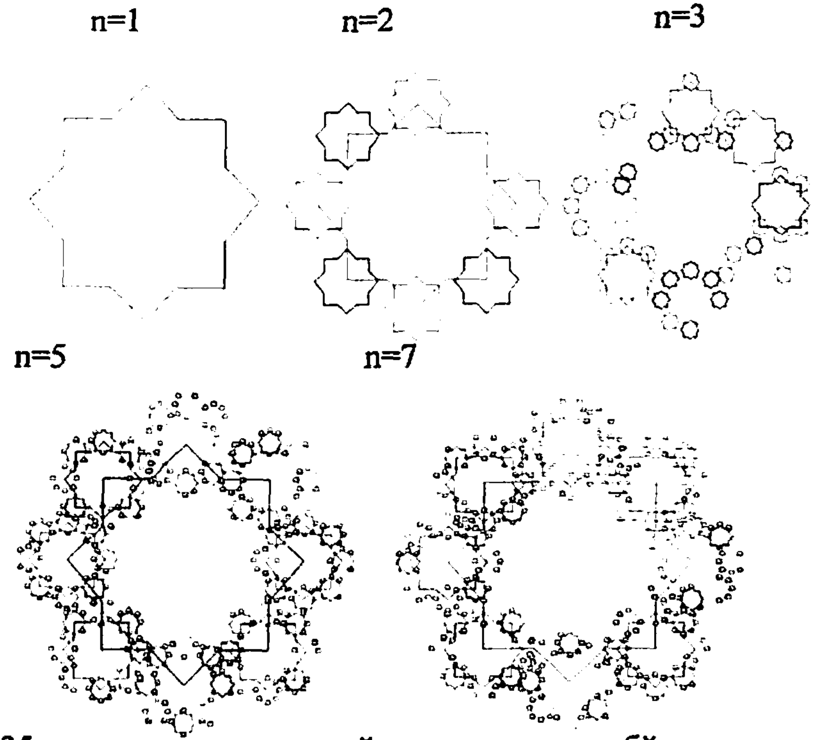


n=1 *n=2* *n=3*

n=5 *n=7*

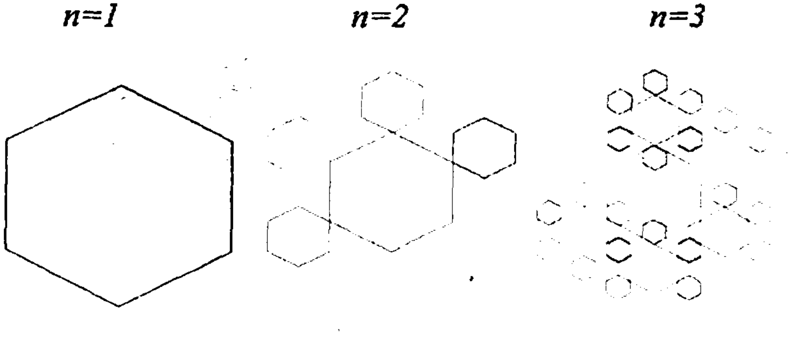
3.34-расм. n-нинг турли қийматларида ҳосил бўлган фракталларнинг растли графикаси

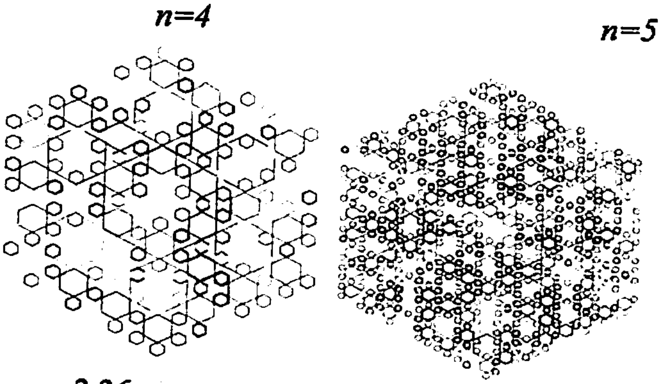
Саккизқиррали юлдузсимон фракталлар



3.35-расм. n-нинг турли қийматларида ҳосил бўлган фракталларнинг растли графикаси

Мунтазам олтибурчакли фракталлар(1-тур)

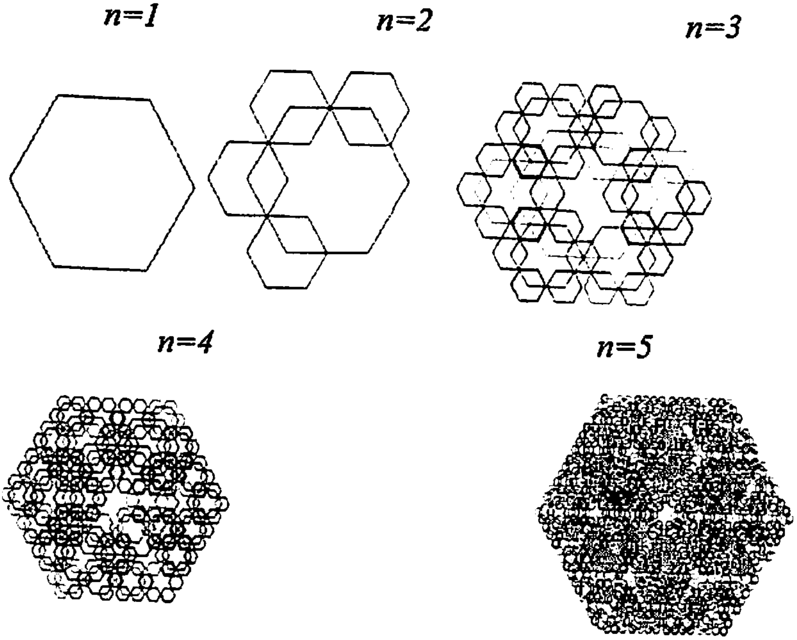




n=4 n=5

3.36-расм. n-нинг турли қийматларида ҳосил бўлган фракталларнинг растли графикаси

Мунтазам олтибурчакли фракталлар(2-тур)



n=1 n=2 n=3

n=4 n=5

3.38-расм. n-нинг турли қийматларида ҳосил бўлган фракталларнинг растли графикаси

3 - бўйича хулоса

Ушбу бобда геометриянинг асосий тушунчалари ва шаклларидан фойдаланиб фракталлар учун геометрик модел ва рекурсив алгоритм ишлаб чиқилди. Рекурсиянинг турли қийматларида, турли рангларни танлаб керакли масштабда фракталларни чизиш мумкин.

ХУЛОСА

Ушбу монографиядаги асосий натижалар қуйидагилар:

- Фракталлар назариясининг асосий тушунчалари фракталларнинг тарихи, таърифлари, хусусиятлари, турлари, қўлланиш соҳалари ўрганилди ва тадқиқ қилинди.

- Фракталларни қуриш усуллари, уларнинг тавсифи, қўлланилиш ҳолатлари ўрганилди, баъзи классик ва замонавий фракталлар учун математик формулалар қурилди натижалар олиниб расмлари келтирилди.

- Геометрик шакллар ва уларнинг асосий тушунчаларидан фойдаланиб фракталлар учун математик таъминот ишлаб чиқилди.

Олинган натижалардан фойдаланиш мумкин:

радиотехникада - фракталлар антенналарда, антенналли қурилмаларни лойиҳалашда;

компьютер графикасида - табиатда мавжуд табиий расмларни чизиш, расмларни фрактал қисишда;

енгил саноатда - газлама ва гиламларга замонавий дизайнлар учун нақшлар чизишда;

телекоммуникацияда - сигналларни қайта ишлашда;

ахборот хавфсизлиги соҳаси - хусусан криптографияда;

кино ҳамда телевиденияда махсус эффектлар ва визуализация элементлари сифатида ва ҳ.к.

Мантиқ алгебраси, R-функция назарияси ва арифметик хусусиятлар назарияси усуллари бўйича олиб борилган назарий тадқиқотлар газлама ва гилам буюмларнинг рангли дизайнини замонавийлаштиришнинг алгоритмик муҳитини ишлаб чиқишда хизмат қилади.

Ўз навбатида мамлакатимизда етиштириладиган катта ҳажмдаги пахта ва пилла, ҳамда уларнинг толаларидан газламалар ишлаб чиқиш долзарб ҳисобланади. Тайёрланган газламанинг сифати, уларга туширилган нақшларнинг етарли даражада чиройли бўлиши мижозни қизиқтиради. Бундан ташқари газламанинг нархини аниқлашда гулларнинг ранглари алоҳида ўрин эгаллайди.

АДАБИЁТЛАР РЎЙХАТИ

1. Абу Айаш Т.А. Разработка метода фрактального сжатия видеопотоков в автоматизированных системах управления хирургическими операциями // Автореф. дис. канд.т.н. – Одесса, 2005. 19с.

2. Азевич А.И. Фракталы: геометрия и искусство // Математика в школе. 2005. № 4. С. 76-78.

3. Анарова Ш.А., Адилова Г.П., Эржонов М.О. Фракталы и метод системы итерируемых функций // Вопросы вычислительной и прикладной математики. Ташкент. 2012 , вып 127. С. 75-86.

4. Анарова Ш.А., Умарова Г.Э. Фракталлар назариясининг асосий тушунчалари // Ҳисоблаш ва амалий математика масалалари, илмий изланишлар тўплами. Тошкент, 2012, №128, 155-166 б.

5. Анарова Ш.А., Рустамова М.Я., Умарова Г.Э. Фракталлар ва уларни қуриш технологиялари //Ҳисоблаш ва амалий математика масалалари, илмий изланишлар тўплами. Тошкент, 2014 №131, 103-112 б.

6. Анарова Ш.А., Мулламуҳамедова М.А. Айланалардан иборат фракталларни қуриш алгоритми // Материалы международная научная конференция «Радиоэлектроника, информационные и телекоммуникационные технологии: проблемы и развитие».Ташкент, 21–22 мая 2015. С.187-189.

7. Анарова Ш.А., Эшқораева Н.Г., Хайдарова Л.Ў., Султонов Д.У. Юлдузсимон фракталларни қуришнинг геометрик моделлари ва алгоритмлари // ТАТУ хабарлари журнали. 2016 №1(37). 40-43 б.

8. Анарова Ш.А., Ганихаджаева Д., Султонов Д.У. Мунтазам олтибурчаклардан иборат фракталларни қуриш алгоритмлари // Материалы Республиканская научно-техническая конференция «Современное состояние и перспективы применения информационных технологии в управлении» Джизак, 13–14 сентября 2016. С.41-44.

9. Анарова Ш.А., Нуралиев Ф.М., Миргазиев Ж.У. Учбурчакли фракталларни қуришни математик таъминотини ишлаб чиқиш // Материалы Республиканская научно-техническая конференция «Современное состояние и перспективы применения информационных технологии в управлении»Ташкент, 5–6 сентября 2017. С.98-101.

10. Балханов В.К. Моделирование математических и электрических характеристик физико–технических сред фрактальном методом //Автореферат., дис… канд.т.н. Улан–Удэ, 20 с.

11. Балханов В.К. Основы фрактального исчисления. Дельта реки Селенга // Горный информационно-аналитический бюллетень, 2003. №5. С. 21–25.

12. Балханов В.К. Основы фрактальной геометрии и фрактального исчисления. Отв. ред. Ю.Б. Башкуев. Улан-Удэ: Изд-во Бурятского госуниверситета, 2013. – 224 с.

13. Бирючинская Т.Я. Моделирование фрактальных структур в задачах многомерной классификации // Автореф. дис… канд.ф.-м.н. Воронеж, 2013, 18с.

14. Бондаренко Б.А. Обобщенные треугольники Паскаля, их фрактали, графы и приложения. -Ташкент: Фан, 1990. 192 с.

15. Bondarenko B.A. Generalized Pascal Triangles and Pyramids, their Fractals, Graphs, and Applications – USA, Santa

Clara: Fibonacci Associations, The Third Edition. – 2010. – 296 p.

16. Бондаренко В.А., Дольников В.Л. Фрактальное сжатие изображений по Барнсли–Слоану //Автоматика и телемеханика. –Моква, 1994.–№5. С.12–20.

17. Божокин С.В., Паршин Д.А. Фракталы и мультифракталы. – М.: Ижевск: РХД, 2001.

18. Велигоша Д.А. Разработка метода фрактального сжатия графической информации в системах обработки данных // Автореф. дис… канд.т.н. – Ставрополь, 2012. 22 с.

19. Винокуров С.В. Математическое и программное обеспечение методов повышения временной эффективности фрактального сжатия изображений // Дисс…канд.ф.-м. наук. - Москва, 2007. 126 с.

20. Вирт Н. Алгоритм и структура данных. // Пер. с англ. Изд. 2-е, испр. Спб.: Невский Диалект, 2001. -302 с.

21. Витолин Д. Применение фракталов в машинной графике //Computerworld–Россия.–1995.–№15.–С.11.

22. Вишик М.И. Фрактальная размерность множеств // Соросовский образовательный журнал. – Москва, 1998. №1, С.122–127.

23. Голоденко А.Б. Оценка адекватности фрактальной модели атомной структуры аморфного кремния// Физика и техника полупроводников, 2010; том 44, вып. 1. С. 87-91.

24. Голощапов И.В. Исследование фрактальных структур из комбинаторных чисел их компьютерная реализация и приложение // Магистр. дис. 2014, 88 с.

25. Громов Ю.Ю., Земской Н.А., Иванова О.Г., Лагутин А.В., Тютюнник В.М. Фрактальный анализ и процессы в

компьютерных сетях // Учеб. пособие. – 2-е изд., стереотип. – Тамбов: Изд-во Тамб. гос. техн. ун-та, 2007. – 108 с.

25. Дубовиков М.М, Старченко Н.В. Индекс вариации и его приложение к анализу фрактальных структур //УФН. 2007. №5. С. 34–39.

26. Иванов А.В., Короновский А.А., Минюхин И.М., Яшков И.А. Определение фрактальной размерности овражно-балочный сети города Саратова. Изв. вузов. «ПНД». Т.14. №2 С. 64-74.

27. Кальмиков А.В., Кальмиков Л.В., Кешелова А.В. Несколько новых биоподобных L-систем // - МКО-10, 2002, стр.50-63.

28. Кравченко В.Ф., Басариб М.А. Решение краевых задач электродинамики в областях фрактальной геометрии методом R–функций // Москва:. ЖТФ, 2003, том 29, вып.№24 стр.89–94.

29. Кроновер Р.М. Фракталы и хаос в динамических системах // – М.: Постмаркет, 2000.

30. Крупенин С.В. Фрактальные излучающие структуры и аналоговая модель фрактального импеданса // Автореф. дисс… канд.ф.–м.н. – Москва, 2009.

31. Леготкин Р.Л. Исследование методов фрактального анализа для целей тематического дешифрирования аэрофотоизображений // Автореф. дис… канд.т.н. – Москва, 2002.

32. Максименко-Шейко К.В., Толок А.В., Шейко Т.И. R-функции в фрактальной геометрии // Информационные технологии. М.: Издательство "Новые технологии", 2011. № 7. С.24-27.

33. Максименко-Шейко К.В. R-функции в математическом моделировании геометрических объектов и физических полей // Харьков: ИПМаш НАН Украина, 2009. 306 с.

34. *Mandelbrot B.B.* Les Objects Fractals: Forme, Hasard et Dimension.- Paris: Flammarion, 1975, 1984, 1989, 1995; *Mandelbrot B.B.* Fractals: Forme, Chance and Dimension. - San - Francisco: Freeman, 1977. - 365 p.; *Mandelbrot B.B.* The Fractals Geometry of Nature. – N.Y.: Freeman, 1982. - 468 p. (Рус. пер.: *Мандельброт Б.* Фрактальная геометрия природы: Пер. с англ. – М.: Институт компьютерных исследований, 2002. – 656 с.); *Mandelbrot B.B.* Fractals and Scaling in Finance: Discontinuity, Concentration, Risk. – N.Y.: Springer-Verlag, 1997. - 551 p.; *Mandelbrot B.B.* Fractales, Hasard et Finance (1959-1997). – Paris: Flammarion, 1997. - 246 p. (Рус. пер.: *Мандельброт Б.* Фракталы, случай и финансы / Пер. с фр. *В.В. Шуликовской.* - М.: Эдиториал УРСС, 2004. - 256 с.); *Mandelbrot B.B.* Multifractals and 1/*f* Noise: Wild Self – Affinity in Physics. – N.Y.: Springer-Verlag, 1999. - 442 p.; *Mandelbrot B.B.* Gaussian Self – Affinity and Fractals: Globality, the Earth, 1/*f*, and *R/S*. – N. Y.: Springer-Verlag, 2002. - 654 p.; *Mandelbrot B.B., M.L. Frame.* Fractals, Graphics, and Mathematics Education. – N.Y.: Springer-Verlag, 2002; *Mandelbrot B.B.* Fractals and Chaos: The Mandelbrot Set and Beyond. – N.Y.: Springer-Verlag, 2004. - 308 p.; *Mandelbrot B.B., Hudson R.L.* The (mis) Behavior of Markets. – N.Y.: Basic Books, 2004. - 328 p. (Рус. пер.: *Мандельброт Б., Хадсон Р.Л.* (Не)послушные рынки: фрактальная революция в финансах. - М.: Вильямс, 2006. - 400 с.).

35. Масюк В.М. Компьютерное моделирование физических процессов на основе нового класса атомарных и фрактальных функций в теории антенн // Автореф. дис... канд.ф.–м.н. – Москва, 2004.

36. Матвеев Е.Н. Многодиапазонные и широкополосные свойства фрактальных антенн и частотно-избирательных структур на их основе // Автореф. дис... канд.ф.-м.н. - Москва, 2009. 23 с.

37. Морозов А.Д. Введение в теорию фракталов. - Нижний Новгород: НижГУ, 1999.

38. Музиченко Я.Б. Имитационное моделирование дифракции света на мультифрактальных объектах // Автореф. дис... канд.т.н. - Санкт-Петербург, 2010. 18с.

39. Назиров Ш.А., Анарова Ш.А., Адилова Г.П., Эржанов М.О. Технология построения фракталов // Фан, таълим ва ишлаб чиқариш интеграциясини ахборот коммуникация технологиялари асосида ривожлантириш муаммолари: Республика илмий–амалий анжуман материаллари тўплами. –Қарши, 2012. -60-64 б.

40. Назиров Ш.А., Анарова Ш.А., Адилова Г.П., Эржанов М.О. Размерность фракталов // Фан, таълим ва ишлаб чиқариш интеграциясини ахборот коммуникация технологиялари асосида ривожлантириш муаммолари: Республика илмий–амалий анжуман материаллари тўплами. –Қарши, 2012. -64-71 б.

41. Назиров Ш.А., Эржанов М.О. Метод R-функций в фрактальной геометрии // Сборник докладов Республиканской научно-технической конференции «Проблемы информационных технологий и телекоммуникаций». 15-16 марта. Ташкент, 2012. С. 60-62.

42. Назиров Ш.А., Эржонов М.О. Применение метода R-функций в фрактальной геометрии // Вопросы вычислительной и прикладной математики. Вып 127. Ташкент, 2012, С. 51-61.

43. Назиров Ш.А., Эржонов М.О., Ташмухамедова Г.Х., Туйчиев Б.О. Методы построения уравнений объектов фрактальной геометрии // Вопросы вычислительной и прикладной математики. Вып 130. Ташкент, 2014. С. 5-21.

44. Назиров Ш.А., Эржонов М.О. Алгебро-логический метод R-функции в приложениях фракталов //Ахборот технологиялари ва телекоммуникация тизимларини самарали ривожлантириш истиқболлари. Республика илмий-техник анжумани. 2014 йил 13-14 март.

45. Назиров Ш.А., Эржонов М.О. Метод R-функций во фрактальной геометрии // Сборник докладов Республиканской научно-технической конференции «Проблемы информационных технологий и телекоммуникаций». 15-16 марта-Ташкент 2012., С.60-62.

46. Назиров Ш.А., Эржанов М.О. Алгебро-логический метод построения объектов фрактальной геометрии // Вестник ТУИТ. Ташкент, 2014. №1.С. 21-31.

47. Назиров Ш.А., Эржонов М.О. Построение уравнение детерминированных фракталов // Узб. журнал Проблемы информатики и энергетики. Ташкент, 2014. №1-2. С. 57-65.

48. Назиров Ш.А., Рахманов Қ.С., Эржонов М.О., Юлдашев М.О. Айланалардан иборат фракталларнинг тенгламаларини қуриш // ТАТУ хабарлари журнали. Тошкент, 2014. №4, 98-110 б.

49. Нуралиев Ф.М., Голощапов И.Г. Исследование фрактальных структур из комбинаторных чисел, их

компьютерная реализация и приложения // Сборник докладов Республиканской научно-технической конференции «Информационные технологии и проблемы телекоммуникаций». Часть 4, 14 марта 2013 г., Ташкент. С. 270-272.

50. Нуралиев Ф.М., Голощапов И.Г. Исследование фрактальных структур из комбинаторных чисел // Сборник докладов Республиканской научно-технической конференции «Перспективы эффективного развития информационных технологий и телекоммуникационных систем». Часть 4, 14 марта 2013 г., Ташкент. С. 270-272.

51. Нуралиев Ф.М., Голощапов И.Г. Исследование фрактальных структур из комбинаторных чисел // Материалы XIII ежегодной международной научно-практической конференции «Социально-экономическое развитие общества будущего: тенденции, точки роста, эффективные решения». Этюды молодых. Выпуск 13, 27-28 февраля 2014 г. Алматы-Барнаул. С. 379-382.

52. Нуралиев Ф.М., Анарова Ш.А., Мулламухамедова М.А. Фракталларни куриш муаммолари // Математика ва уни замонавий педагогик технологиялар ёрдамида ўқитиш муаммолари" мавзусидаги Республика илмий-амалий конференцияси материаллари. Навоий, 2015 йил 25- апрел.

53. Нуралиев Ф.М., Анарова Ш.А., Мулламухамедова М.А. Тўртбурчакли фракталларни қуриш учун рекурсив алгоритмларни ишлаб чиқиш // Материалы Республиканская научно-техническая конференция «Современное состояние и перспективы применения информационных технологии в управлении»Ташкент, 7–8 сентября 2015. С.59-65.

54. Нуралиев Ф.М., Анарова Ш.А., Мулламухамедова М.А., Султонов Д.У. Айланалардан ва тўртбурчаклардан иборат фракталларни қуришнинг рекурсив алгоритмлари // ТАТУ хабарлари журнали. 2015 №4(36). С. 82-88.

55. Павлов Д.Г., Панчелюга М.С., Малыхин А.В., Панчелюга В.А. О фрактальности аналогов множеств Мандельброта и Жюлиа на плоскости двойной // Гиперкомплексные числа в геометрии и физике, 1(11), 2009.-С.135-145.

56. Пайтген Х.О., Рихтер П.Х. Красота фракталов. -М.: Мир, 1993.

57. Паршнев С.В. Реализация в MATLAB алгоритмов построения фрактальных объектов // Мастерская решений (Россия). №3(3), 2003.-С. 72-82.

58. Патопов А.А., Гильмутдинов А.Х., Ушаков П.А. Системные принципы и элементная база фрактальной радиоэлектроники. Этапы становления и состояние // Радиотехника ва электроника, 2008. №9, С. 1033-1080.

59. Потапов А.А. Фракталы, Скейлинг и дробные операторы в радиотехнике и электронике: Современное состояние и развитие // Журнал радиоэлектроники №1, 2010.

60. Перерва Л.М., Юдин В.В. Фрактальное моделирование // Учебное пособие. под общ. ред. В.Н. Гряника. – Владивосток: Изд-во ВГУЭС, 2007. – 186 с.

61. Пильщиков В.Н., Горячая И.В., Бордаченкова Е.А. Решение задач с использованием рекурсии // Учебно-методическое пособие, М.: МГУ, 2012. - 38 с.

62. Рахманов Қ.С., Юлдашев Ш.А. Метод построения уравнений объектов фрактальной геометрии. // Радиотехника, телекоммуникация ва ахборот

технологиялари: муаммолари ва келажак ривожи. Халқаро илмий - техник конференция. Тошкент, 2015 йил 21–22 май, 161–165 б.

63. Рвачев В.Л. Метод R–функция и ее некоторые применения. - Киев, «Науково-думка». 1982.-552с.

64. Ричард М. Кроновер. Фракталы и хаос в динамических системах. Основы теории - М.: ПОСТМАРКЕТ, 2000. 350с.

65. Саква Д.Ю. Фракталы вокруг нас [Электронный ресурс] - Режим доступа. - URL: http://www.codenet.ru/progr/fract/Fractals-Around/ (дата обращения 20.12.2012).

66. Спиридонов К.Н. Применение спектра обобщённых фрактальных размерностей Реньи для сравнения текстур изображений // Автореф. дис. канд.т.н. – Титрозаводск, 2008. 19 с.

67. Ташмухамедова Г.Х. Разработка логические метод построение фракталов // Магист. дис. 2014-йил, 98 б.

68. Федер Е. Фракталы. Пер. с англ. М.: Мир,1991. –254с. (Jens Feder, Plenum Press, NewYork, 1988).

69. Шишкин Е.И. Моделирование и анализ пространственных и временных фрактальных объектов // Уральский государственный университет, 2004. 88с.

70. Эржонов М.О. Разработка алгоритмов и программного обеспечения построение геометрические фракталов на базе R-функция // Маг. дис. 2012-йил, 100 с.

Ш.А. НАЗИРОВ, Ш.А. АНАРОВА, Ф.М. НУРАЛИЕВ

ФРАКТАЛЛАР НАЗАРИЯСИ АСОСЛАРИ

Нашриёт лицензияси № AI 170. 23.12.2009
Нашриёт манзили: Тошкент шаҳри, А.Темур кўчаси, 19-уй.
Нашр табоғи 8. Босишга берилди 23.10.2017.

Офсет қоғози. Бичими $60x84^{1/16}$.
Times гарнитурасида офсет усули. Шартли босма табоғи 8.
Адади 100 нусха. Буюртма № 54
«Munis design group» МЧЖ босмахонаси.
100170, Тошкент шаҳри, Дўрмон йўли кўчаси, 25-уй.

Назиров Шодмонқул Абдуразиқович - физико-математика фанлари доктори, профессор. «Алгоритмлаш», «Мураккаб тизимларни математик моделлаштириш», «Дастурлаш технологиялари», «Ахборотларни қайта ишлаш» соҳаларининг етук мутахассиси. Ш.А.Назиров 500 га яқин илмий ишлар, 30 дан кўпроқ монография ва ўқув услубий қўлланма муаллифи. Ҳалқаро ва республика миқёсидаги илмий лойиҳалар раҳбари бўлган. Ш.А.Назиров 10 дан ортиқ фан номзодлари ва бир нечта фан докторларига раҳбарлик қилган.

Анарова Шаҳзода Аманбаевна - техника фанлари номзоди. Муҳаммад ал-Хоразмий номидаги Тошкент ахборот технологиялари университети ҳузуридаги «Ахборот-коммуникация технологиялари илмий-инновацион» маркази катта илмий ходими. «Аудиовизуал технологиялари» кафедраси доценти. «Алгоритмлаш», «Мураккаб тизимларни математик моделлаштириш», «Деформацияланувчи қаттиқ жисмлар механикаси» соҳаларининг мутахассиси. Ш.А.Анарова 70 дан ортиқ илмий ишлар, 3 та ўқув қўлланма, 1 та монография, 6 та электрон ҳисоблаш машиналари учун яратилган дастур гувоҳномалари муаллифи.

Нуралиев Фахриддин Муродиллевич - техника фанлари доктори, «Аудиовизуал технологиялари» кафедраси доценти. Муҳаммад ал-Хоразмий номидаги Тошкент ахборот технологиялари университети Телевизион технологиялар факультети декани. «Алгоритмлаш», «Мураккаб тизимларни математик моделлаштириш», «Компьютер графикаси» соҳаларининг етук мутахассиси. Ф.М.Нуралиев 100 дан ортиқ илмий ишлар, 10 та ўқув қўлланма, 10 тадан ортиқ электрон ҳисоблаш машиналари учун яратилган дастур гувоҳномалари муаллифи.

ISBN 978-9943-381-08-7

9 789943 381087