O'ZBEKISTON RESPUBLIKASI OLIY VA O'RTA
MAXSUS TA'LIM VAZIRLIGI

A. ABDURAHIMOV, N.A.NIYAZOVA

MIQDORIY TAHLIL VA OPERATSIYALARNI TEKSHIRISH

2- QISM

Oliy va o'rta maxsus ta'lim vazirligi tomonidan 5340100- „Iqtisodiyot", 5340200- „Menejment", 5340600- „Moliya", 5340700- „Bank ishi", 5340800- „Soliq va soliqqa tortish", 5340900- „Buxgalteriya hisobi va audit" bakalavriat ta'lim yo'nalishlari talabalari uchun Matematik programmalashtirish fanidan o'quv qo'llanma sifatida tavsiya etilgan

Cho'lpon nomidagi nashriyot-matbaa ijodiy uyi
Toshkent — 2005

Ma'sul muharrir:

S.T.Mirzayev — fizika-matematika fanlari nomzodi, dotsent.

Taqrizchilar:

***F.B.Badalov** — fizika-matematika fanlari doktori, professor (Toshkent Davlat Aviatsiya instituti „Oliy matematika va informatika“ kafedrasi),*

***G'.I.Ibragimov** — fizika-matematika fanlari nomzodi, dotsent (Jahon iqtisodi va diplomatiya universiteti „Iqtisodda miqdoriy usullar“ kafedrasi).*

Mazkur o'quv qo'llanmada matematik programmalashtirish kursining asosi bo'lgan miqdoriy tahlil va operatsiyalarni tekshirishning nazariy va amaliy jihatlari bayon etilgan.

Qo'llanma Oliy texnika o'quv yurtlarining iqtisod yo'nalishi bo'yicha o'qiyotgan talabalarga mo'ljallangan bo'lib, undan iqtisodchilar va shu sohada mustaqil shug'ullanuvchilar ham foydalanishlari mumkin.

$A_1 N \frac{1602000000-84}{360(04)-2005} - 2005$

ISBN 5-8250-0983-3

KIRISH

Ilmiy texnika taraqqiyoti xalq xo'jaligining barcha sohalarida rejalashtirish va boshqarishning matematik modellashtirish va optimallashtirish usullarini keng qo'llashni talab etmoqda. Hozirda bu sohalarda faoliyat yuritayotgan boshqaruvchi mutaxassislar ishbilarmon va tadbirkor bo'lishlari, kelajakni hisobga olgan holda iqtisodiy jihatdan samarali qarorlar qabul qilishlari lozim bo'ladi. Ayniqsa, iqtisodchi mutaxassislarni tayyorlash uchun, talabalarda aniq fikrlash va tadbirkorlikni shakllantirish, ularda iqtisodiy matematik usullar va zamonaviy hisoblash mashinalaridan foydalanish tajribasini mujassamlantirish muhim ahamiyatga ega.

Rejalashtirish va boshqarish jarayonlari biror aniq maqsadga yo'naltirilgan bo'lib, ular jamiyat a'zolari talabini, mavjud resurslardan eng samarali bo'lgan usulda foydalanib, qondirishga qaratilgan bo'ladi. Bunday jarayonlar matematik programmalash, operatsiyalarni tekshirish, o'yinlar nazariyasini o'z ichiga olgan qaror qabul qilish nazariyasida o'rganiladi. Bu fanlar bir-biri bilan uzviy bog'liq va ular o'z navbatida avtomatlashtirilgan boshqaruv tizimining asosini tashkil qiladi.

Mazkur qo'llanma talabalarga iqtisodiyot, ishlab chiqarish va boshqa sohalarda bo'ladigan iqtisodiy muammolarni o'rganish, yechish va tahlil qilishning iqtisodiy matematik usullarini o'rganishda yordam beradi.

Usbu qo'llanmaning ikkinchi qismi operatsiyalarni tekshirish fanidagi chiziqsiz programmalashtirish, dinamik programmalashtirirish va matritsali o'yinlar nazariyasiga oid.

Ko'p iqtisodiy jarayonlar uchun operatsiyalarni tekshirishda o'zgaruvchi va o'zgarmas omillar orasidagi munosabatlar birinchi yaqinlashishda chiziqli deb hisoblanadi, biroq ularning chiziqsiz ekanligi ma'lum. Foyda, tannarx, ishlab chiqarishdagi kapital xarajatlar kabi ko'rsatkichlar ishlab chiqarish hajmi, xomashyo sarfi va boshqalarga chiziqsiz bog'liq bo'ladi. Bu hollarda chiziqsiz programmalashtirish masalasi hosil bo'ladi.

n o'zgaruvchili funksiyaning ekstremumini topish — statsionar nuqtalarni topish, ularning ekstremum mavjudligi zaruriy va yetarli shartlariga ko'ra, minimum yoki maksimum nuqtalar ekanligini aniqlash, ya'ni lokal ekstremumlarni aniqlash demakdir.

Agar qo'yilgan masalada cheklashlar ichida tengsizliklar bo'lmasa, o'zgaruvchilarga manfiymaslik va butun sonlilik sharti qo'yilmasa, cheklashlar soni noma'lumlar sonidan kichik bo'lib, maqsad funksiyasi, cheklash shartlaridagi funksiyalar uzluksiz va hech bo'lmaganda ikkinchi tartibli xususiy hosilalarga ega bo'lsa, oddiy optimallashtirish usullaridan foydalaniladı.

Optimallashtirish usullarini qo'llaganda funksiyaning lokal ekstremumi, global ekstremumi va shartli ekstremumi tushunchalari o'rtasidagi farqni ajratish kerak bo'ladi.

Iqtisodiy masalalarda funksiyaning biror sohadagi eng katta va eng kichik qiymatlarini, ya'ni global ekstremumni aniqlash muhim hisoblanadi. Bunda funksiya bu sohaning faqat ichida emas, chegarasida ham ekstremal qiymatga erishishi mumkin. Sohaning chegarasi o'zgaruvchilarga nisbatan biror bog'liqlik, shartlar bilan berilgan bo'ladi.

Funksiyaning cheklash shartlari bilan berilgan chegaradagi ekstremumini aniqlash uchun shartli ekstremum masalasini yechishga to'g'ri keladi. Shundan kelib chiqadigan bo'lsak, *chiziqsiz programmalashtirish* ekstremal masalalarni o'rganish va ularni yechishda miqdoriy usullarni tatbiq qilish bilan shug'ullanadi.

Ekstremal masalaning matematik qo'yilishi berilgan cheklashlarda maqsad funksiyasining eng katta yoki eng kichik qiymatini topishdan iborat:

$$f(x_1, x_2, ..., x_n) \to \max(\min)$$

$$g_i(x_1, x_2, ..., x_n) \le b_i, i = \overline{1, m}$$

bunda, f va g_i — berilgan funksiyalar, b_i — biror haqiqiy son.

$f(X)$ va $g_i(X), X=(x_1,x_2,...x_n)$ funksiyalarning xossalariga qarab qator matematik programmalashtirish bo'limlarini o'rganishga to'g'ri keladi. Avvalo masalalar ikki tur, chiziqli va chiziqsiz programmalashtirish masalalariga bo'linadi.

Qo'llanmaning 1- qismida ko'rib o'tganimizdek, $f(X)$ va $g_i(X)$ chiziqli bo'lsa, masala *chiziqli programmalashtirsh masalasi* deyiladi. Agar bu funksiyalardan hech bo'lmaganda bittasi chiziqsiz bo'lsa, masala *chiziqsiz programmalashtirish masalasi* deyiladi. Chiziqsiz programmalashtirish masalalarini yechishning universal usuli bo'lmaydi. Chunki chiziqsiz funksiyalarning ko'rinishi turlicha bo'ladi. $f(X)$ va $g_i(X)$, $i=\overline{1,m}$ funksiyalar qavariq va botiq funksiyalar bo'lgan hol ko'pgina masalalarni yechishni osonlashtiradi. Shuning uchun qavariq programmalashtirish masalalarini tahlil qilish, qavariq funksiyalarning xossalarini bilish maqsadga muvofiqdir.

Cheklashlarga ega chiziqsiz masalalarni yechish usullari to'g'ri va to'g'ri bo'lmagan usullarga bo'linadi.

To'g'ri usullar optimal nuqtaga yaqinlashuvchi nuqtalar ketma-ketligini topish imkonini beradi. Bu usullarga *gradiyent usullar* va *chiziqli kombinatsiyalar usuli* kiradi. To'g'ri bo'lmagan usullar yordamida esa berilgan chiziqsiz programmalashtirish masalasini yechish undan hosil qilingan bir yoki bir nechta chiziqli masalalarni yechishga keltiriladi.

Bunday usullarga kvadratik, *separabel, geometrik va stoxastik programmalashtirish usullari* kiradi. Iqtisodiy va ishlab chiqarish masalalarini bu usullarda yechish bilan berilgan masalaning aniq yoki unga yaqinlashuvchi yechimi topiladi. Xususan, kvadratik programmalashtirish masalalarida Kun-Takker shartlaridan foydalanib aniq yechim topiladi. Kvadratik programmalashtirish masalalarida maqsad funksiyasi aniq manfiy yoki aniq musbat kvadratik ko'rinishga ega, joiz yechimlar to'plami chiziqli shartlardan iborat.

Geometrik programmalashtirish usuli yordamida maxsus ko'rinishdagi chiziqsiz masalalar yechiladi. Bu usulda berilgan masalaning yechimi, unga mos ikki yoqlama masalani yechish yo'li bilan olinadi, bu yondashish qator hisoblashlarni soddalashtirishga imkon beradi.

Separabel programmalashtirish bilan esa maqsad funksiyasi va cheklash shartlaridagi funksiyalar separabel bo'lgan chiziqsiz masalalar ko'riladi. Agar ko'p o'zgaruvchili funksiyani bir o'zgaruvchili funksiyalar yig'indisi ko'rinishida yozish mumkin bo'lsa, bunday funksiyalar *separabel* deyiladi. Ixtiyoriy separabel programmalashtirish masalasini qisman butun sonli programmalashtirish usullari yordamida yechish mumkin. Bunda bo'lish nuqtalari sonini ortishi bilan cheklashlar miqdori tez ko'payishiga bog'liq qiyinchiliklar yuzaga keladi. Berilgan funksiyalar qavariq va botiq bo'lib, yechimlar to'plami qavariq bo'lsa, bu usul ancha yengillashadi.

Firma biror mezonga asosan optimal bo'lgan ishlab chiqarish rejasini aniqlashi kerak deylik. Bunda firma ishlab chiqaradigan mahsulot nomi, ishlab chiqarish quvvati, ishlab chiqarishni xomashyo, yarim tayyor mahsulot, energiya, ishchi kuchi va hokazolar bilan ta'minlashdagi imkoniyatlar, baho va reklama imkoniyatlari ma'lum bo'lsin deylik.

Firma ishlab chiqarish rejasini tuzar ekan u turli optimallashtirish maqsadini ko'zda tutadi. Masalan, ko'proq foyda olish, mahsulot miqdorini maksimal ko'paytirish, mahsulot ishlab chiqarishni kengaytirish va hakozo. Bunda cheklashlar ishlab chiqarish omillari sarfi bilan ishlab chiqarilgan mahsulot hajmi o'rtasidagi texnologik bog'liqlik, qiymat, reklama va talab kattaligi o'rtasidagi bog'liqlik bo'ladi. Bular ko'pincha bo'lakli chiziqli funksiyalarga keltiriladi.

Transport masalasida, agar yuk birligini tashish narxi tashiladigan yuk umumiy miqdoriga bog'liq bo'lsa, masala chiziqsiz bo'ladi.

1951- yili G.V.Kun va A.V.Takker chiziqsiz masalalar uchun optimallikning zaruriy va yetarlilik shartlarini e'lon qilishdi va bular chiziqsiz programmalashtirishda bundan keyingi tekshirishlar uchun asos bo'lib xizmat qildi.1954-yili A.Charnes va K.E.Lemke maqsad funksiyasi separabel qavariq funksiyalar bo'lgan chiziqli cheklash shartlariga ega masalalar yechishning yaqinlashtiruvchi usuli bilan shug'ullandilar. 1955- yildan boshlab kvadratik programmalashtirishga oid qator ishlar dunyoga keldi. E.Barankin, R.Dorfman, E.M.Bill, M.Frank va F.Volf ishlari shular jumlasidandir. Gradiyent usullar bilan esa D.B.Dennis, D.B.Rozen va G.Zoytendeyklar shug'ullangan.

Qator hollarda, masalan berilgan sonlar diskret miqdorlar bo'lganda, maqsad funksiyasini differensiallab bo'lmaydi. Qo'yilgan ekstremum masalasi shunday masalaga keltiriladiki, u avvalgisidan ham qiyinroq yechiladi. Shuning uchun masalalar yechish jarayoni bosqichma-bosqich olib borilsa, yechimni topish osonroq bo'ladi. Iqtisodiy jarayonda vaqtga bog'liq bo'lgan, ya'ni bir necha davr, bosqichlarga bog'liq bo'lgan masalalar *ko'p bosqichli masalalar* deyiladi. Ularda jarayonning bosqichma-bosqich rivojlanishi hisobga olinadi, ya'ni ular dinamik xarakterga ega bo'ladi. Bu masalalarni yechishda iqtisodiy jarayonlar dinamikasi va qaror qabul qilishning ko'p qadamli xarakterini hisobga oladigan *dinamik programmalashtirish usuli* ishlab chiqilgan. Dinamik programmalashtirish mustaqil fan sifatida o'tgan asrning 50- yillarida shakllana boshladi. Uning rivojlanishiga amerikalik olim R.Bellman katta hissa qo'shgan. Bunday masalalarga korxonalar o'rtasida xomashyoning reja davri yillari bo'yicha taqsimlanishi, jihozlarni ta'mirlash va almashtirish masalalari, bo'linmas yuklarni joylashtirish va eng qisqa yo'lni topish masalalari kiradi. Qo'llanmada bunday masalalarga misollar keltirilgan va ularni yechish usullari aniq ma'lumotlar asosida ko'rsatilgan.

Ko'pincha noaniqlik sharoitida qaror qabul qilish zaruriyati tug'iladigan masalalarga duch kelamiz. Ya'ni, ikki (yoki undan ko'p) tomon turli maqsadni ko'zlagan va natijada ulardan biri boshlagan harakat ikkinchisi tutgan yo'lga bog'liq bo'lgan holatlarni kuzatamiz. Bunday holatlar shaxmat, shashka, domino o'yinlarida uchraydi va ular *ziddiyatli o'yinlar* yoki ba'zi adabiyotlarda *mojaroli o'yinlar* deb ataladi. Bunda har bir o'yinchining yurishi raqib javobiga bog'liq bo'ladi va o'yin maqsadi taraflardan biri yutug'i bilan belgilanadi. Iqtisodiyotda ziddiyatli holatlar ko'p uchraydi va ular ko'p qirrali xarakterga ega bo'ladi. Bularga masalan, ta'minotchi va iste'molchi, sotuvchi va xaridor, bank va mijoz o'rtasidagi munosabatlar kiradi. Hamma hollarda ham ziddiyatli holat raqiblarning qiziqish va talablari har xilligi, ular oldiga qo'ygan maqsadni yuqori darajada ta'minlaydigan optimal qarorlar qabul qilishga intilishi natijasida kelib chiqadi. Bunda ular nafaqat o'z maqsadi balki raqib maqsadi bilan ham qiziqishi va raqib tomon qabul qiladigan noma'lum qarorlarni ham hisobga olishlari kerak bo'ladi. Shuning uchun ziddiyatli holat masalalarini yechishda ilmiy asoslangan usullar kerak. *Matritsali o'yinlar nazariyasi* shunday masalalarni hal qilish bilan shug'ullanadi.

Mazkur qo'llanma lotin alifbosida ilk marta chop etilayongani sababli xato va kamchiliklardan holi deb bo'lmaydi. Shu bois qo'llanmaning sifatini yaxshilash va mazmunini boyitishga qaratilgan har qanday fikr hamda mulohazalar kitobning keyingi nashrlarida albatta inobatga olinadi.

Mualliflar

I bob. Chiziqsiz programmalashtirish

1-§. Chiziqsiz programmalashtirish masalalarining qo'yilishi

Chiziqsiz programmalashtirish n o'zgaruvchiga bog'liq bo'lgan funksiyalarning cheklanish shartlarini qanoatlantiradigan ekstremum qiymatlarini topish masalasini yechadi:

$$Z = f(x_1, x_2, ..., x_n) = f(X) \to \min(\max),\ X = (x_1, x_2, ..., x_n),$$

$$g_i(x_1, x_2, ..., x_n) = g_i(X) \le b_i, i = \overline{1, m}, \qquad (1.1.1)$$

$$x_j \ge 0, j = \overline{1, n}.$$

Agar $f(X)$ va $g_i(X)$ funksiyalar chiziqli, ya'ni

$$f(X) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j,\ g_i(X) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i, i = \overline{1, m} \qquad (1.1.2)$$

bo'lsa, u holda bu masala *chiziqli programmalashtirish masalasi* deyiladi.

Funksiya ekstremumi mavjudligi zaruriy shartlarini tekshirishda qaralayotgan funksiya Veyershtrass teoremasi shartlarini qanoatlantiradi, ya'ni ekstremum masalasi yechimga ega, deb faraz qilinadi. Chunki, Veyershtrass teoremasiga asosan, agar funksiya biror yopiq oraliqda aniqlangan va uzluksiz bo'lsa, bu oraliqda u o'zining aniq quyi yoki yuqori chegarasiga erishadi [6].

Ushbu

$$Z = f(x_1, x_2, ... x_n) \qquad (1.1.3)$$

funksiyaning quyidagi

$$g_i(x_1, x_2, ..., x_n) = 0, i = \overline{1, m} \qquad (1.1.4)$$

tenglamalar sistemasini qanoatlantiradigan ekstremumini topish talab qilingan bo'lsin. Boshqacha aytganda, tenglamalar sistemasi (1.1.4) ni qanoatlantiradigan shunday $x_1, x_2, ..., x_n$ larni topish kerakki, x_i larning shu qiymatlarida (1.1.3) funksiya ekstremumga erishsin. Agar quyidagi

$$X = (x_1, x_2,..., x_n), g(X) = (g_1(X), g_2(X),... g_m(X))$$
vektorlar kiritilsa, (1.1.3)—(1.1.4)ni qisqacha quyidagicha yozish mumkin: $f(X) \to \min(\max)$, $g(X) = 0$, $X \in R^n$.

Endi yuqorida keltirilgan masalani quyidagicha talqin qilish mumkin:

n o'lchovli R^n fazoda $g(X) = 0$ tenglamalarni qanoatlantiradigan shunday $X_0 \in R^n$ nuqtani topish kerakki

$$f(X_0) = \min f(X), \left(f(X_0) = \max f(X) \right) \qquad (1.1.5)$$

tenglik R^n dagi hamma X lar uchun o'rinli bo'lsin, ya'ni

$$f(X_0) \leq f(X) \quad \left(f(X_0) \geq f(X) \right) \qquad (1.1.6)$$

tengsizlik bajarilsin.

(1.1.4)—(1.1.6) shartlarni qanotlantiradigan X_0 nuqta (1.1.3) funksiyaga shartli global ekstremum beruvchi nuqta deb, qo'yilgan masala esa shartli global ekstremum masalasi deb ataladi. (1.1.4) tenglamani qanoatlantiradigan nuqtalar to'plami qo'yilgan masalaning mumkin bo'lgan (joiz) nuqtalar to'plami deyiladi va quyidagicha yoziladi:

$$X = \{X : g(X) = 0\}.$$

Shartli ekstremum masalasining qo'yilishi quyidagicha bo'ladi: n o'lchovli R^n fazoda shunday X_0 nuqtani topish talab qilinadiki, oldindan berilgan $\varepsilon > 0$ son uchun $\|X - X_0\| < \varepsilon$ va $g(X_0) = 0$ bo'lganda (1.1.6) tengsizlik R^n dagi hamma X lar uchun o'rinli bo'lsin, yoki qisqacha aytganda

$$f(X_0) \leq f(X) \quad (f(X_0) \geq f(X));$$

$$g(X_0) = 0, \ \|X - X_0\| < \varepsilon, X \in R^n \qquad (1.1.7)$$

ni qanoatlantiradigan X_0 nuqta shartli lokal ekstremum beruvchi nuqta, qo'yilgan masala esa *shartli lokal ekstremum masalasi* deyiladi.

1. Shartli ekstremum masalalarini shartsiz ekstremum masalalariga keltirish usullari.

Bazis o'zgaruvchilarni yo'qotish usuli. Agar tenglamalar sistemasi (1.1.4) ni m ta bazis (bog'liq) o'zgaruvchiga nisbatan, masalan, $x_1, x_2, ..., x_m$ ga nisbatan yechish mumkin bo'lsa, ya'ni

$$x_i = \varphi_i(x_{m+1}, ..., x_n), \quad i = \overline{1, m} \qquad (1.1.8)$$

bo'lsa, shartli ekstremum masalasini shartsiz ekstremum masalasiga keltirish mumkin. Haqiqatan ham (1.1.7) ni (1.1.3)ga qo'yilsa, $m - n$ erkli o'zgaruvchiga bog'liq bo'lgan

$$f(x_{m+1}, ..., x_n) = f[\varphi_1(x_{m+1}, ..., x_n), ..., \varphi_m(x_{m+1}, ..., x_n)] \quad (1.1.9)$$

funksiya hosil bo'ladi. Demak, (1.1.9) tenglikdagi $x_{m+1}, ..., x_n$ erkli o'zgaruvchilar (1.1.4) tenglamalar sistemasining yechimlari bilan bog'liq bo'lmaganligi uchun shartli ekstremum masalasi shartsiz ekstremum masalasiga aylanadi.

Bunda, ko'rinib turibdiki, agar $\left(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, ..., x_m^{(0)}\right)$ nuqta (1.1.3) funksiyaga shartli ekstremum beruvchi nuqta bo'lsa, $\left(x_{m+1}^{(0)}, x_{m+2}^{(0)}, ..., x_n^{(0)}\right)$ nuqta shartsiz ekstremum beruvchi nuqta bo'ladi. Bazis o'zgaruvchilarni yo'qotish usuli bilan shartli ekstremum masalalarini yechishda ma'lum qiyinchilik tug'iladi. Chunki (1.1.4) tenglamalar sistemasini m o'zgaruvchilarga nisbatan yechish mumkin bo'lsa ham ko'p hollarda ularni yechish murakkab bo'ladi. Shuning uchun, (1.1.4) tenglamalar sistemasini yechishga ehtiyoj qolmaydigan qulay usul — *Lagranj aniqmas ko'paytuvchilar usuli*dir. Bizdan (1.1.3) funksiyaning (1.1.4) cheklash tenglamalar sistemasini qanoatlantiradigan ekstremumini topish talab qilingan bo'lsa, quyidagi

$$L(x_1, x_2, ..., x_n, \lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m) = \lambda_0 f(x_1, x_2 ..., x_n) +$$

$$+ \sum_{i=1}^{m} \lambda_i g_i(x_1, x_2, ..., x_n) \qquad (1.1.10)$$

yoki qisqacha

$$L=(X,\lambda_0,\lambda)=\lambda_0 f(X)+\sum_{i=1}^{m}\lambda_i g_i(X),$$

$$X=(x_1,x_2,...,x_n),\lambda=(\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_m)$$

funksiyani tuzamiz. Bu funksiya *Lagranj funksiyasi* deyiladi. $\lambda=(\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_m)$ Lagranjning aniqmas ko'paytuvchilari deyiladi. Agar $\lambda_0=1$ bo'lsa, Lagranjning normal funksiyasi bilan ish ko'riladi.

Lagranj funksiyasidan $x_j\left(j=\overline{1,n}\right)$ va $\lambda_i\left(i=\overline{1,m}\right)$ o'zgaruvchilar bo'yicha xususiy hosilalar olib nolga tenglashtirilsa, quyidagi

$$\frac{\partial L}{\partial x_j}=\frac{\partial f}{\partial x_j}+\sum_{i=1}^{m}\lambda_i\frac{\partial g_i}{\partial x_j}=0,\ j=\overline{1,n}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_i}=g_i(X)=0,\ i=\overline{1,m} \qquad (1.1.11)$$

tenglamalar sistemasi hosil bo'ladi. Uni qisqacha vektor shaklida quyidagicha yozish mumkin:

$$\frac{\partial L}{\partial X}=\frac{\partial f}{\partial X}+\lambda\frac{\partial g}{\partial X}=0;\ \frac{\partial L}{\partial \lambda}=g(X)=0.$$

Shunday qilib, Lagranj usuli bilan n noma'lumli $m+1$ tenglamalar sistemasini $n+m$ noma'lumli $n+m$ ta tenglamalar sistemasiga keltirdik yoki boshqacha aytganda, berilgan shartli ekstremum masalasini shartsiz ekstremum masalasiga keltirildi. (1.1.11) sistemani qanoatlantiradigan X_0 nuqta normal ekstremum nuqta, qo'yilgan masala esa normal shartli ekstremum masalasi deyiladi. $(x_1^0,x_2^0,...,x_n^0,$ $\lambda_1^0,\lambda_n^0,...,\lambda_n^0)$ nuqtaga qo'yilgan masalaning yechimi yoki Lagranj funksiyasining statsionar nuqtasi deyiladi. 2- § da shu usul haqida batafsil to'xtalib o'tiladi

Agar cheklanish shartlarida qatnashadigan funksiyalar chiziqli bo‘lsa, joiz yechimlar sohasi hamma vaqt qavariq bo‘lib, chekli son uchki nuqtalarga ega bo‘ladi.

Agar chiziqli programmalashtirish masalalarini optimal yechimlari qavariq V sohaning chekli son uchki nuqtalar to‘plami ichidan topilsa, chiziqsiz programmalashtirish masalalarining optimal yechimlari esa umumiy holda qavariq bo‘lmagan sohaning cheksiz ko‘p nuqtalar to‘plami ichidan topiladi.

Maqsad funksiyaning chiziqli bo‘lmasligi ham masalani yechishda ma’lum qiyinchiliklarni yuzaga keltiradi. Haqiqatan ham, agar chiziqli maqsad funksiyasi o‘z ekstremum qiymatiga joiz yechimlar sohasining chegarasida erishsa, chiziqsiz maqsad funksiyasi sohaning faqatgina chegarasida emas, balki ichki nuqtalarida ham bir necha lokal ekstremumlarga ega bo‘lishi mumkin. Bu esa topilgan lokal ekstremum beruvchi nuqtalarning qaysi biri global ekstremum beruvchi nuqta ekanligini aniqlashda qo‘shimcha qiyinchilikka olib keladi.

2. Qavariq funksiyalar va ularning xossalari.

Agar chiziqsiz programmalashtirish masalalarini yechishda V soha va maqsad funksiyasi qavariq deb olinsa, bu masalalarni yechish ancha osonlashadi. Shuning uchun, quyida qavariq funksiyalar va ularning xossalariga qisqacha to‘xtalib o‘tiladi.

Qavariq X to‘plamda aniqlangan $f(X)$ funksiya, agar bu to‘plamga qarashli ixtiyoriy $x_1, x_2 \in X$ nuqtalar uchun $0 \le \lambda \le 1$ shartini qanoatlantiruvchi hamma λ larda quyidagi

$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \le \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2)$$

tengsizlik o‘rinli bo‘lsa, *qavariq* (yoki quyiga qavariq) *funksiya* deyiladi. Agar x_1, x_2 va λ larning shu qiymatlarida quyidagi

$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \ge \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2)$$

tengsizlik bajarilsa, u holda $f(X)$ funksiya botiq deyiladi.

Qavariq funksiya quyidagi xossalarga ega:

1. Agar $f(X)$ funksiya qavariq bo'lsa, $-f(X)$ botiq va aksincha.

2. $f(x) = cx$ chiziqli funksiya bir vaqtda ham qavariq va ham botiq, bunda ixtiyoriy x_1, x_2 va λ uchun quyidagi tenglik o'rinli.

$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) = \lambda c x_1 + (1-\lambda)c x_2 = \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2).$$

$f(x) = c$ va $f(x) = ax + b$ chiziqli funksiya hamma yerda botiq va qavariq.

3. Agar $f_i(x), i = \overline{1,m},\ x \in X$ funksiyalar qavariq bo'lsa, $\alpha_i \geq 0$ lar uchun

$$f(x) = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i f_i(x), \tag{1.1.12}$$

$$f(x) = \max_{1 \leq i \leq m} f_i(x) \tag{1.1.13}$$

funksiya ham qavariq.

Avvalo (1.1.12) isbot qilinadi:

$$f(z) = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i f_i(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \leq \lambda \sum_{i=1}^{m} \alpha_i f_i(x_1) +$$

$$+(1-\lambda)\sum_{i=1}^{m} \alpha_i f_i(x_2) = \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2), z = \lambda x_1 + (1-\lambda)x_2.$$

Demak, (1.1.12) funksiya qavariq. Endi (1.1.13) isbot qilinadi:

$$f(z) = \max_{1 \leq i \leq m} f_i(z) \leq \lambda \max_{1 \leq i \leq m} f_i(x_1) + (1-\lambda) \max_{1 \leq i \leq m} f_i(x_2) =$$

$$= \lambda f_i(x_1) + (1-\lambda) f_i(x_2).$$

Bu xossalar orqali berilgan funksiyaning qavariq yoki botiq ekanligini aniqlash ancha murakkab. Ba'zi hollarda funksiyaning qavariq yoki botiq ekanligini tekshirish ancha osonlashadi. Masalan, berilgan funksiya ikki marta differensiallanuvchi bo'lsa, uning qavariq yoki botiq funksiya ekanligini tekshirish uchun quyidagi eng qulay xossadan foydalanish maqsadga muvofiq bo'ladi.

4. Agar $f(x)$ funksiya qavariq bo'lsa, u holda ixtiyoriy α son uchun $f(x) < \alpha$ tengsizlikning yechimlar to'plami qavariq yoki bo'sh to'plam bo'ladi.

5. Agar $\varphi_i(x)$ funksiyalar qavariq bo'lsa, u holda $\varphi_i(x) < b_i, i = 1,\overline{m}$ tengsizliklar sistemasining yechimlar to'plami (agar to'plam bo'sh bo'lmasa) qavariq bo'ladi.

6. Qavariq funksiya $f(x)$, $x \in X$, X to'plamining hamma ichki nuqtalarida uzluksiz, ya'ni, qavariq funksiya X to'plamning faqat chegaraviy nuqtalarida uzilishi mumkin.

7. Har qanday qat'iy qavariq (botiq) funksiya bittadan ko'p bo'lmagan statsionar nuqta (ya'ni, hamma xususiy hosilalari 0 ga teng bo'lgan nuqta)ga ega. Bunda bu nuqta qavariq (botiq) funksiyaning lokal va global ekstremum nuqtasi bo'ladi.

8. Ikki marta differensiallanuvchi funksiya $f(X) = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ birorta $X_0 = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, ..., x_n^{(0)})$ nuqtaning atrofida, agar shu nuqtada quyidagi

$$\Delta_1 = \frac{\partial_2 f(x_0)}{\partial x_1^2} < 0, \ \Delta_2 = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f(x_0)}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f(x_0)}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \frac{\partial^2 f(x_0)}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f(x_0)}{\partial x_2^2} \end{vmatrix} > 0,$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f(x_0)}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f(x_0)}{\partial x_1 \partial x_2} & \frac{\partial^2 f(x_0)}{\partial x_1 \partial x_3} \\ \frac{\partial^2 f(x_0)}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f(x_0)}{\partial x_2^2} & \frac{\partial x^2 f(x_0)}{\partial x_2 \partial x_3} \\ \frac{\partial^2 f(x_0)}{\partial x_3 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f(x_0)}{\partial x_3 \partial x_2} & \frac{\partial^2 f(x_0)}{\partial x_3^2} \end{vmatrix} < 0$$

shartlar o'rinli bo'lsa, qat'iy botiq bo'ladi. Boshqacha qilib aytganda, berilgan funksiyaning ikkinchi tartibli hosilalaridan tuzilgan hamma toq tartibli determinantlar manfiy bo'lib, juft tartibli determinantlar musbat bo'lsa, bu funksiya qat'iy botiqdir.

Agar yuqorida keltirilgan hamma juft va toq tartibli determinantlar musbat bo'lsa, $f(X)$ funksiya X_0 nuqta atrofida qat'iy qavariq bo'ladi.

1-masala. Quyidagi funksiyaning qavariq ekanligini ko'rsating.

$$f(X)=5x_1^2+x_2^2-x_1x_2+2x_1-x_2+3.$$

Yechish.

Funksiyaning xususiy hosilalari topiladi:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}=10x_1-x_2+2,$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_2}=2x_2-x_1-1,\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1\partial x_1}=10,\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1\partial x_2}=-1,\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2\partial x_2}=2.$$

Ikkinchi tartibli hosilalar matritsasi quyidagicha bo'ladi:

$$A=\begin{pmatrix}10 & -1\\ -1 & 2\end{pmatrix}.$$

$\Delta_1=10>0,\ \Delta_2=19>0$ 8- xossaga ko'ra, $f(X)$ funksiya X ning hamma qiymatlarida qat'iy qavariq ekan.

2- masala. $f(X)$ funksiyaning X_0 nuqta atrofida qavariq yoki botiq ekanligini aniqlang $f(X)=2x_1^3-x_1^2x_2^2$ $X_0=(1;1)$.

Yechish. $\frac{\partial f}{\partial x_1}=6x_1^2-2x_1x_2^2,\ \frac{\partial f}{\partial x_2}=-2x_2x_1^2,$,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1\partial x_1}=12x_1-2x_2^2,\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1\partial x_2}=-4x_1x_2,\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2\partial x_2}=-2x_1^2,$$

$$\Delta_1(X_0) = 10, \quad \Delta_2(X_0) = \begin{vmatrix} 10 & -4 \\ -4 & -2 \end{vmatrix} = -36.$$

Berilgan funksiya X_0 nuqta atrofida qat'iy botiq funksiya ekan.

2- §. Cheklashlari tenglik ko'rinishida berilgan masalalar

Optimallashtirish nazariyasida, funksiyaning cheklash shartlari berilgan yoki mavjud bo'lmagan hollarda, minimum va maksimum nuqtalarni topish uchun differensial hisob usullarini qo'llash masalalari qadimdan yechib kelingan. Ko'pgina ekstremal masalalarni yechishda bunday usullar hamma vaqt ham qo'llanilmaydi. Lekin ular chiziqsiz programmalashtirish masalalarini yechish uchun asos bo'lib xizmat qiladi.

Qo'llanmaning 1- qismida funksiyalarni cheklash shartlarisiz ekstremumlarini topish, ular mavjudligining zaruriy va yetarli shartlari ko'rib chiqilgan edi. Endi masalalarda cheklash shartlari berilgan holda, agar ular tenglama ko'rinishida bo'lsa, Yakobi va Lagranj usullari bilan tengsizlik ko'rinishda esa Kun—Takker shartlari bilan tanishiladi. Cheklashlari tenglik ko'rinishda berilgan masalalarni Yakobi usulida yechish simpleks usulining umumlashmasi bo'ladi. Lagranj usuli esa u bilan uzviy bog'liq.

1. Keltirilgan gradiyent usuli (Yakobi usuli)

Quyidagi chiziqsiz programmalashtirish masalasi ko'rib chiqiladi:

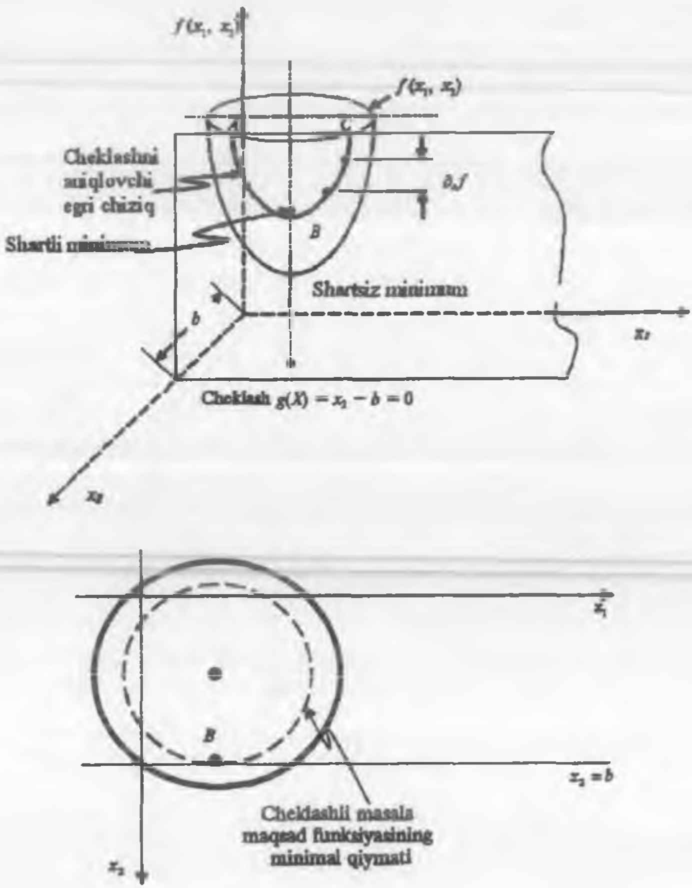
$$Z = f(X) \to \min \qquad (1.2.1)$$

$$g(X) = 0, \quad (1.2.2)$$

$X = (x_1, x_2, \ldots, x_n), g = (g_1, g_2, \ldots g_m)^T$ bunda $f(X)$ va $g_i(X), i = 1,2\ldots m$ funksiyalar ikki marta uzluksiz differensiallanuvchi.

Bu masalani *keltirilgan gradiyent usuli* bilan yechishning ma'nosi $f(X)$ funksiyaning birinchi xususiy hosilalarini

$g(X) = 0$ cheklash shartlarini qanoatlantiradigan barcha nuqtalarda topishdan iborat [20]. Bunda bu xususiy hosilalar 0 ga aylanadigan nuqtalar statsionar nuqtalar bo‘ladi. Ular ekstremum mavjudligining yetarli shartlari yordamida turlanadi. Buni tahlil qilish uchun 1- rasmda grafik tarzida ko‘rsatilgan $f(x_1, x_2)$ funksiya ko‘rib chiqiladi. $g_1(x_1, x_2) = x_2 - b = 0$ cheklashlarda bu funksiyani minimallashtirish talab qilingan bo‘lsin. Bunda b — o‘zgarmas son.



1- rasm.

1- rasmdan ko'rinib turibdiki, berilgan cheklashlarni qanoatlantiruvchi nuqtalarda $f(x_1,x_2)$ qiymatlari A, B va C nuqtalardan o'tadigan egri chiziqda yotibdi. Yakobi usuliga ko'ra, egri chiziq ABC ning har bir nuqtasida $f(x_1,x_2)$ funksiyaning keltirilgan gradiyent komponentlari aniqlanadi. Nuqtada keltirilgan hosilalar 0 ga aylansa, shu nuqta cheklashlar bilan berilgan masala uchun statsionar hisoblanadi (1- rasm, B nuqta). f funksiyaning $d_c f$ yetarlicha kichik mumkin bo'lgan orttirmasi qanday aniqlanishi chizmada ko'rsatilgan.

Shuningdek, umumiy holda Teylor teoremasidan X nuqtaning mumkin bo'lgan atrofidan olingan $X+\Delta X$ nuqtasi uchun quyidagi formulani yozish mumkin:

$$f(X+\Delta X)-f(X)=\nabla f(X)\Delta X+0(\Delta x_j^2),$$

$$g(X+\Delta X)-g(X)=\nabla g(X)\Delta X+0(\Delta x_j^2).$$

Agar $\Delta x_j \to 0$ unda $\partial f(X)=\nabla f(X)dX$ $\partial g(X)=\nabla g(X)dX$

$g(X)=0$ bo'lgani uchun, joiz sohada $\partial g(X)=0$ bo'ladi. Bundan,

$$\partial f(X)-\nabla f(X)dX=0,$$

$$\nabla g(X)dX=0. \qquad (1.2.3)$$

Bu sistema noma'lumlari $\partial f(X)$ va ∂X bo'lgan $(n+1)$ noma'lumli $(m+1)$ tenglamalarni o'z ichiga oladi. Agar vektor ∂X topilsa, aniqmas kattalik $\partial f(X)$ ni aniqlash mumkin. Bu bilan tenglamalar va noma'lumlar bittaga kamayadi.

Agar $m>n$, unda hech bo'lmaganda $(m-n)$ tenglamalar ortiqcha bo'ladi. Ortiqchalarini yo'qotgandan keyin sistemadagi erkin tenglamalar miqdori $m \leq n$ ga teng bo'ladi. $m=n$ bo'lgan holda yechim $\partial X=0$. Bunda yechimlar to'plami bitta nuqtadan iborat. $m<n$ bo'lgan hol batafsil ko'rib chiqiladi.

$X = (Y, Z)$ bo'lsin, bunda X vektorning komponentlari mos ravishda bazis (bog'liq) va erkin o'zgaruvchilar

$$Y = (y_1, y_2 \dots y_m) \text{ va } Z = (z_1, z_2 \dots z_{n-m})$$

ga ajratiladi.

Yangi belgilashlarga ko'ra f va g funksiyalarining gradiyentlari quyidagi ko'rinishda bo'ladi:

$$\nabla f(Y, Z) = (\nabla_Y f, \nabla_Z f),$$
$$\nabla g(Y, Z) = (\nabla_Y g, \nabla_Z g).$$

Ikkita matritsa quyidagicha belgilanadi va ta'riflanadi:

$$J = \nabla_Y g = \begin{pmatrix} \nabla_Y g_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \nabla_Y g_m \end{pmatrix}, \quad C = \nabla_Z g = \begin{pmatrix} \nabla_Z g_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \nabla_Z g_m \end{pmatrix}. \quad (1.2.4)$$

$J_{m \times m}$ — matritsani *Yakobi matritsasi*, $C_{m \times (n-m)}$ — *boshqaruv matritsasi* deyiladi. Yakobi matritsasi J xosmas, deb faraz qilinadi. Bu taxmin har doim o'rinli, chunki ko'rib chiqilayotgan m tenglamalar har doim erkin tenglamalar bo'ladi. Bundan kelib chiqadiki, Y vektor komponentlarini X vektor komponentlari ichidan J matritsa xosmas bo'ladigan qilib tanlash kerak.

Yuqoridagi belgilardan foydalanib, $\partial f(X)$ va ∂X noma'lumli tenglamalar sistemasi quyidagicha yoziladi:

$$\partial f(Y, Z) = \nabla_Y f \partial Y + \nabla_Z f \partial Z, \; J \partial Y = -C \partial Z. \quad (1.2.5)$$

J — matritsa xosmas bo'lgani uchun unga J^{-1} — teskari matritsa mavjud, ya'ni $\partial Y = -J^{-1} C \partial Z$.

Bu tenglamalarda ∂Y ni ∂Z orqali ifodalanadi, chunki Z erkin o'zgaruvchilar vektori hisoblanadi. $\partial f(Y, Z)$ uchun yozilgan tenglamada ∂Y o'rnini almashtirish ∂f ni ∂Z orqali ifodalash imkonini beradi:

$$\partial f(Y, Z) = (\nabla_Z f - \nabla_Y f J^{-1} C) dZ.$$

Bu tenglamalardan kelib chiqadiki, f funksiyaning erkin o'zgaruvchilar Z vektori bo'yicha differensiallash quyidagi formulani beradi:

$$\nabla_c f = \frac{\partial_c f(Y,Z)}{\partial_c Z} = \nabla_Z f - \nabla_Y f J^{-1} C, \qquad (1.2.6)$$

bunda $\nabla_c f$ – f funksiyaning *keltirilgan gradiyenti* (yoki shartli gradiyenti) deyiladi. $\nabla_c f(Y,Z)$ vektor statsionar nuqtalarda 0 ga teng bo'lishi kerak.

Bu holda Gesse matritsasi elementlari Z bog'liq bo'lmagan o'zgaruvchi komponentlariga mos keladi, keltirilgan ikkinchi hosilalar bo'ladi va ularni quyidagi tenglikdan foydalanib hisoblash mumkin:

$$\Delta_c f = \nabla_z f - WC. \qquad (1.2.7)$$

$\partial\Delta_c f / \partial z_i$ vektor keltirilgan Gesse matritsasining i qatorini belgilaydi. "W"–Y o'zgaruvchining, "Y" — esa Z o'zgaruvchining funksiyasi hisoblanadi, bunda

$$\partial Y = -J^{-1} C \partial Z. \qquad (1.2.8)$$

Shunday qilib, z_i bo'yicha $\nabla_c f$ xususiy hosila hisoblanganda W komponentlariga murakkab funksiyani differensiallash qoidasini qo'llash kerak, ya'ni:

$$\partial w_j / \partial z_i = (\partial w_j / \partial y_j)(\partial y_j / \partial z_i).$$

1- masala. $f(X) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \to \min$ funksiyani quyidagi cheklashlardagi minimumini toping:

$$g_1(X) = x_1 + x_2 + 3x_3 - 2 = 0,$$

$$g_2(X) = 5x_1 + 2x_2 + x_3 - 5 = 0.$$

Berilgan masalani Yakobi usulida yechish uchun maqsad funksiyasining, cheklashlarni hisobga olgan holda, ekstremumlari topiladi. Faraz qilaylik,

$$Y = (x_1, x_2) \quad Z = x_3.$$

Bunda $\nabla_Y f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}\right) = (2x_1, 2x_2)$, $\nabla_Z f = \frac{\partial f}{\partial x_3} = 2x_3$,

$$J=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 5 & 2\end{pmatrix},\ J^{-1}=\begin{pmatrix}-2/3 & 1/3\\ 5/3 & -1/3\end{pmatrix},\ \ C=\begin{pmatrix}3\\ 1\end{pmatrix}.$$

Maqsad funksiyasining keltirilgan gradiyenti quyidagicha topiladi:

$$\nabla_c f=\frac{\partial_c f}{\partial_c x_3}=2x_3-(2x_1,\ 2x_2)\begin{pmatrix}-2/3 & 1/3\\ 5/3 & -1/3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\ 1\end{pmatrix}=$$

$$=(10/3)x_1-(28/3)x_2+2x_3.$$

Stasionar nuqtani $\nabla_c f=0$ shart va $g_1(X)=0$, $g_2(X)=0$ tenglamalardan hosil bo'lgan sistema yechilib topiladi:

$$\begin{pmatrix}10 & -28 & 6\\ 1 & 1 & 3\\ 5 & 2 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 2\\ 5\end{pmatrix}.$$

Bu sistemaning yechimi: $X^0\approx(0{,}81;\ 0{,}35;\ 0{,}28)$ ga teng. Endi bu nuqtadagi yetarli shartlarni tekshiriladi.

x_3 erkin o'zgaruvchi bo'lgan holda $\nabla_c f$ dan

$$\frac{\partial_c^2 f}{\partial_c x_3^2}=\frac{10}{3}\left(\frac{dx_1}{dx_3}\right)-\frac{28}{3}\left(\frac{dx_2}{dx_3}\right)+2=\left(\frac{10}{3}-\frac{28}{3}\right)\begin{pmatrix}\dfrac{dx_1}{dx_3}\\ \dfrac{dx_2}{dx_3}\end{pmatrix}+2$$

kelib chiqadi. Yakobi usuli yordamida quyidagi formula hosil bo'ladi:

$$\begin{pmatrix}\dfrac{dx_1}{dx_3}\\ \dfrac{dx_2}{dx_3}\end{pmatrix}=-J^{-1}C=\begin{pmatrix}5/3\\ -14/3\end{pmatrix}.$$

Bu formuladan $\partial_c^2 f/\partial_c x_3^2=460/9>0$. Bunda X^0 — minimum nuqtasi.

2- masala. Yuqoridagi masala erkin va bazis o'zgaruvchilar o'zgartirilib yechiladi:

$$Y = (x_1;\ x_3) \quad Z = x_2 .$$

U holda yuqoridagidek:

$$\nabla_Y f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1};\frac{\partial f}{\partial x_3}\right) = (2x_1;2x_3),\ \nabla_Z f = 2x_2 .$$

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \frac{\partial g_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial g_2}{\partial x_1} & \frac{\partial g_2}{\partial x_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 1 \end{pmatrix};\quad J^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{14} & \frac{3}{14} \\ \frac{5}{14} & -\frac{1}{14} \end{pmatrix};\ C = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial g_2}{\partial x_2} \end{pmatrix};$$

$$\nabla_c f = \frac{\partial_c f}{\partial_c x_2} = \nabla_z f - \nabla_z f \cdot J^{-1} \cdot C = 2x_2 - (2x_1, 2x_3)\times$$

$$\times \begin{pmatrix} -\frac{1}{14} & \frac{3}{14} \\ \frac{5}{14} & -\frac{1}{14} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = 2x_2 - \frac{10}{14}x_1 - \frac{6}{14}x_3.$$

Stasionar nuqta $\nabla_c f = 0,\ g_1(X) = 0,\ g_2(X) = 0$ tenglamalar sistemasidan topiladi:

$$\begin{pmatrix} 10 & -28 & 6 \\ 1 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Bu sistemaning yechimi $X^0 = (0{,}81;\ 0{,}35;\ 0{,}28)$

$$\frac{\partial_c^2 f}{\partial_c x_2^2} = \frac{-10}{14}\left(\frac{dx_1}{dx_2}\right) + 2 - \frac{6}{14}\frac{dx_3}{dx_2} = \left(-\frac{10}{14}; -\frac{6}{14}\right)\begin{pmatrix} \frac{5}{14} \\ \frac{3}{14} \end{pmatrix} + 2 =$$

$$= 2 - \frac{10}{14}\cdot\frac{5}{14} - \frac{6}{14}\cdot\frac{3}{14} = 2 - \frac{65}{196} = 1{,}65 > 0$$

bunda, X^0 — minimum nuqtasi.

Yakobi usulini qo'llashda asosiy qiyinchiliklardan biri, cheklashlar soni yetarli darajada ko'p bo'lganida J^{-1} ni hosil qilish bilan bog'liq. Bunday holda Kramer qoidasidan foydalanish mumkin. U ∂f ni ∂Z orqali ifodalashga imkon beradi. Agar z_j, Z ning j — komponentasi va y_i, Y ning i — komponentasi bo'lsa, u holda

$$\frac{\partial_c f}{\partial_c z_j} = \frac{\partial(f, g_1, \dots g_m) / \partial(z_j, y_1, \dots y_m)}{\partial(g_1, \dots, g_m) / \partial(y_1, \dots y_m)}. \qquad (1.2.9)$$

Bunda

$$\frac{\partial(f, g_1, \dots, g_m)}{\partial(z_j, y_1, \dots, y_m)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial z_j} & \frac{\partial f}{\partial y_1} \dots & \frac{\partial f}{\partial y_m} \\ \frac{\partial g_1}{\partial z_j} & \frac{\partial g_1}{\partial y_1} \dots & \frac{\partial g_1}{\partial y_m} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial g_m}{\partial z_j} & \frac{\partial g_m}{\partial y_1} \dots & \frac{\partial g_m}{\partial y_m} \end{vmatrix},$$

$$\frac{\partial(g_1, \dots, g_m)}{\partial(y_1, \dots, y_m)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial y_1} & \frac{\partial g_1}{\partial y_2} \dots & \frac{\partial g_1}{\partial y_m} \\ \frac{\partial g_2}{\partial y_1} & \frac{\partial g_2}{\partial y_2} \dots & \frac{\partial g_2}{\partial g_m} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial g_m}{\partial y_1} & \frac{\partial g_m}{\partial y_2} \dots & \frac{\partial g_m}{\partial y_m} \end{vmatrix} = |J|. \qquad (1.2.10)$$

Shunday qilib, zaruriy shartlar quyidagi ko'rinishda bo'ladi:

$$\frac{\partial_c f}{\partial_c z_j} = 0, \; j = \overline{1, n-m} \qquad (1.2.11)$$

matritsaning (i, j) — elementi shunga o'xshash quyidagi formulaga muvofiq holda hisoblanadi:

$$\frac{\partial y_i}{\partial z_j} = -\frac{\partial(g_1,\dots,g_m)/\partial(y_1,\dots,y_{i-1},z_j,y_{i+1},\dots,y_m)}{\partial(g_1,\dots,g_m)/\partial(y_1,\dots,y_m)}.$$

Bu formula bog'liq o'zgaruvchi y_i ning erkin o'zgaruvchi z_j o'zgarishiga nisbatan o'zgarish tezligini belgilaydi. Nihoyat, ekstremum mavjudligining yetarli shartini olish uchun $W = \nabla_Y f J^{-1}$ vektor elementlarini mos determinantlar orqali ifodalash zarur.

W ning i- elementi quyidagi formuladan topiladi:

$$w_i = \frac{\partial(g_1,\dots,g_{i-1},f,g_{i+1},\dots,g_m)/\partial(y_1,\dots y_m)}{\partial(g_1,\dots g_m)/\partial(y_1,\dots y_m)}.$$

Bu usul imkoniyatlarini ko'rsatish maqsadida ekstremum mavjudligining zaruriy sharti yoziladi. Buning uchun 1-masalada (1.2.9)—(1.2.11)dan $w\frac{\partial_c f}{\partial_c x_3}$ ning ifodasi quyidagicha topiladi:

$$\frac{\partial_c f}{\partial_c x_3} = \frac{\begin{vmatrix} 2x_3 & 2x_1 & 2x_2 \\ 3 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{10}{3}x_1 - \frac{28}{3}x_2 + 2x_3 .$$

2. Yakobi usuli yordamida sezgirlikni tekshirish

Yakobi usuli f optimal qiymati cheklashlari o'ng qismidagi kichik o'zgarishlarga sezgirligini tekshirishda qo'llanilishi mumkin. Faraz qilaylik, masalan, i — cheklash $g_i(x) = 0$ ning o'ng tomoni 0ga teng emas, ∂g_i ga teng bo'lsin. Bu f ning optimal qiymatiga qanday aks etadi? Bunday tekshirish *sezgirlikni tekshirish yoki sezgirlikni tahlil qilish* deb nomlangan va chiziqsiz programmalashtirishdagi sezgirlik tahlilida olingan natijalar faqat ekstremum nuqtasi kichik atrofi uchun o'rinli.

Shunga qaramay bu tahlil Lagranjning aniqmas ko'paytiruvchilar usulini o'rganishda foydali bo'ladi.

Yuqorida ko'rsatilganidek,

$$\partial f(Y,Z) = \nabla_Y f \partial Y + \nabla_Z f dZ ,$$

$$\partial g = J\partial Y + C\partial Z . \qquad (1.2.12)$$

Aytaylik, $\partial g \neq 0$ bo'lsin; u holda

$$\partial Y = J^{-1}\partial g - J^{-1}C\partial Z .$$

Bu ifodani $\partial f(Y,Z)$ (12) tenglamaga qo'yilsa, quyidagi tenglama hosil bo'ladi:

$$\partial f(Y,Z) = \nabla_Y f J^{-1} dg + \nabla_C f \partial Z$$

bunda $$\nabla_C f = \nabla_Z f - \nabla_Y f J^{-1} C \qquad (1.2.13)$$

avvalgi ta'rif (6)ga mos keladi.

$\partial f(Y,Z)$ uchun ifoda X^0 joiz nuqtaning joiz atrofida, ∂g va ∂Z kichik o'zgarishlar natijasida vujudga kelgan f o'zgarishining tahlilida qo'llanilishi mumkin.

$X_0 = (Y_0, Z_0)$ — ekstremum (aniqroq, ixtiyoriy statsionar) nuqtasida keltirilgan gradiyent $\nabla_C f$ nolga teng bo'lishi kerak.

Shunday qilib, X_0 nuqtasida quyidagi tenglik o'rinli:

$$\partial f(Y_0, Z_0) = \nabla_{Y_0} f J^{-1} \partial g(Y_0, Z_0)$$

yoki $$\frac{\partial f}{\partial q} = \nabla_{Y_0} f J^{-1} . \qquad (1.2.14)$$

Demak, f optimal qiymatiga kichik o'zgarishlar $g(= \partial g)$ ta'sirini g ning o'zgarishiga nisbatan f o'zgarish tezligini baholash yo'li bilan tahlil qilish mumkin. Bu kattaliklar, odatda, *sezish koeffitsiyentlari* deyiladi.

Ekstremum nuqtasida $\partial f / \partial g$ koeffitsiyentlar Y vektorni tashkil qiluvchi o'zgaruvchilarning aniq tanlanganligiga bog'liq emas va sezish koeffitsiyentlarini belgilaydigan ifoda Zni o'z ichiga olmaydi. Shuning uchun X vektorning Y va Z

larga bo'linishi, ayni vaziyatda muhim omil hisoblanmaydi. Shunday qilib, sezish koeffitsiyentlari Y vektorni xohlaganicha tanlab olinganida ham o'zgarmas bo'lib qolaveradi.

3. Chiziqli programmalashtirish masalalarini yechishning Yakobi usuli

Chiziqli programmalashtirish masalasi berilgan [20]:

3- masala. $Z = 2x_1 + 3x_2 \to \max$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \le 5 \\ x_1 + x_2 \le 3 \end{cases}$$

$$x_j \ge 0, j = \overline{1,4}.$$

Yechish. Sistemani kanonik holga keltilsa,

$$Z = 2x_1 + 3x_2 \to \max$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 5, \\ x_1 + x_2 + x_4 = 3, \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \ge 0. \end{cases}$$

ω_j^2 — qo'shimcha o'zgaruvchilar kiritiladi. Unda $x_j - \omega_j^2 = 0$ yoki $x_j = \omega_j^2$. O'zgaruvchilarni bunday almashtirish manfiymaslik shartlariga hojat qoldirmaydi va boshlang'ich masala quyidagi ko'rinishni oladi:

$$Z = 2\omega_1^2 + 3\omega_2^2$$

maqsad funksiyasining quyidagi cheklashlarda:

$$\begin{cases} \omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2 = 5, \\ \omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_4^2 = 3 \end{cases}$$

maksimumini toping.

Yakobi usulini qo'llash uchun

$$Y = (\omega_1, \omega_2) \text{ va } Z = (\omega_3, \omega_4).$$

(Chiziqli programmalashtirish belgilashlari qo'llanilganda Y va Z vektorlar mos ravishda bazis va bazis bo'lmagan o'zgaruvchilardan tashkil topganligi ma'qul bo'ladi). Berilgan masala uchun quyidagilar ifodalanadi:

$$J=\begin{pmatrix}2\omega_1, 2\omega_2\\ 2\omega_1 - 2\omega_2\end{pmatrix} \quad J^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{4\omega_1} & \frac{1}{4\omega_1}\\ \frac{1}{4\omega_2} & \frac{-1}{4\omega_2}\end{pmatrix};$$

$$C=\begin{pmatrix}2\omega_3 & 0\\ 0 & 2\omega_4\end{pmatrix}, \ \nabla_Y f=(4\omega_1, 6\omega_2), \ \nabla_Z f=(0;0) \ \omega_1\neq 0$$

va $\omega_2 \neq 0$,

$$\nabla_c f=(0,0)-(4\omega_1,6\omega_2)\begin{pmatrix}\frac{1}{4\omega_1} & \frac{1}{4\omega_1}\\ \frac{1}{4\omega_2} & \frac{-1}{4\omega_2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\omega_3 & 0\\ 0 & 2\omega_4\end{pmatrix}=(-5\omega_3,\omega_4).$$

$\nabla_c f=0$ tenglamaning yechilishi statsionar nuqtani $(\omega_1=2, \omega_2=1, \omega_3=0, \omega_4=0)$ aniqlashga imkon beradi. Bunda Gesse matritsasi quyidagi ko'rinishga ega bo'ladi:

$$H_C=\begin{pmatrix}\frac{\partial_c^2 f}{\partial_c\omega_3^2} & \frac{\partial_c^2 f}{\partial_c\omega_3\partial_c\omega_4}\\ \frac{\partial_c^2 f}{\partial_c\omega_3\partial_c\omega_4} & \frac{\partial_c^2 f}{\partial_c\omega_4^2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-5 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

H_C — aniqmas matritsa bo'lgani uchun, statsionar nuqta maksimum nuqtasi emas.

Haqiqatan ham olingan natija kutilmagan emas, chunki chiziqli programmalashtirish nazariyasidan kelib chiqadiki ω_3 va ω_4 (bazis bo'lmagan) o'zgaruvchilar (shu tufayli x_3 va x_4) 0 ga teng. Bu shuni bildiradiki, Yakobi usuli yordamida olingan, Y va X ning aniq tanlanishiga bog'liq yechim joiz yechimlar to'plamining mos ekstremum nuqtasini aniqlaydi. Bunda yechim optimal bo'lmasligi mumkin. Lekin Yakobi usuli optimal nuqtani etarli shartlardan foydalangan holda topishga imkon beradi:

$$\nabla_C f = (4\omega_1, 0) - (6\omega_2, 0)\begin{pmatrix} \frac{1}{2\omega_2} & 0 \\ \frac{1}{2\omega_4} & \frac{1}{2\omega_4} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2\omega_1 & 2\omega_3 \\ 2\omega_1 & 0 \end{pmatrix} = (-2\omega_1, -6\omega_3)$$

Stasionar nuqta $\omega_1 = 0, \omega_2 = \sqrt{5}, \omega_3 = 0, \omega_4 = \sqrt{8}$ topildi.

Matritsa $H_C = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -6 \end{pmatrix}$ aniq manfiy bo'lgani uchun bu nuqta maksimum nuqtasi bo'ladi.

Birinchi yechim $(x_1 = 4, x_2 = 1)$ optimal yechim emas, ikkinchi yechim $(x_1 = 0, x_2 = 5)$ optimal yechim bo'ladi.

Mumkin bo'lgan yechimlar to'plamining ikkita qolgan ekstremum nuqtalari maksimum nuqtasi emas. Bundan tashqari, yetarli shartlardan foydalanib, funksiya ekstremum nuqtasida $(x_1 = 0, x_2 = 0)$ minimumga egaligini ko'rsatish mumkin. Chiziqli programmalashtirish masalasini yechishda sezish koeffitsiyentlari $\nabla_{Y_0} f J^{-1}$ ikki yoqlama masala o'zgaruvchilari rolini o'ynaydi. Yuqoridagi masalada u_1 va u_2 — ikki yoqlama masalani mos o'zgaruvchilari bo'lsin. Ularning qiymatlari $\omega_1 = 0, \omega_2 = \sqrt{5}, \omega_3 = 0, \omega_4 = \sqrt{8}$ optimal nuqtada quyidagi formula bo'yicha hisoblanadi:

$$(u_1, u_2) = \nabla_{Y_0} f J^{-1} = (6\omega_2, 0)\begin{pmatrix} \frac{1}{2\omega_2} & 0 \\ \frac{1}{2\omega_4} & \frac{1}{2\omega_4} \end{pmatrix} = (3; 0).$$

Ikki yoqlama masala maqsad funksiyasining mos qiymati $5u_1 + 3u_2 = 15$ ga teng va to'g'ri masala maqsad funksiyasining optimal qiymati bilan mos keladi. Olingan yechim ikki yoqlama masala cheklashlarini qanoatlantiradi va shundan uning optimalligi kelib chiqadi.

Bu esa sezish koeffitsiyentlari ikki yoqlama masala o'zgaruvchilariga mos kelishini bildiradi. Haqiqatan ham, ular bir xil ma'noni anglatadi.

Yakobi usulini chiziqli programmalashtirish masalalarini yechishda qo'llash natijasida quyidagi xulosalarga kelamiz. Yuqoridagi masala ekstremum mavjudligi zaruriy shartlaridan erkin o'zgaruvchilarning 0 ga tengligi kelib chiqishini ko'rsatadi. Yetarli shartlarga ko'ra, Gesse matritsasining hamma diagonal elementlari musbat bo'lsa, minimum mavjud bo'ladi va manfiy bo'lsa, maksimum mavjud bo'ladi. Bundan ekstremum mavjudligining zaruriy sharti optimal yechimni topish uchun faqat joiz bazis yechimni tekshirish kerakligi kelib chiqadi. Bunday hollarda erkin o'zgaruvchilar chiziqli programmalashtirishda nobazis o'zgaruvchilar vazifasini bajaradi. Yetarli shartlar Gesse matritsasi diagonal elementlari va simpleks usuli yordamida olingan $z_j - c_j$ ikki yoqlama baholar o'rtasida aniq moslik mavjudligini tasdiqlaydi.

4. Lagranj ko'paytuvchilar usuli

Yuqorida $\partial f / \partial g = \nabla_{Y_0} f J^{-1}$ sezgirlik koeffitsiyentlari maqsad funksiyasining f optimal qiymati cheklashlariga o'ng qismdagi kichik o'zgarishlar ta'sirini tekshirish uchun qo'llanish mumkinligi, bundan tashqari bu koeffitsiyentlar o'zgarmas kattaliklar ekanligi ko'rsatilgan. Sezgirlik koeffitsiyentlarining bu xossasi tenglik ko'rinishidagi cheklashli masalalarni yechishda qo'l keladi [20] .

$\lambda = \nabla_{Y_0} f J^{-1} = \partial f / \partial g$ bo'lsin, bundan $\partial f - \lambda \partial g = 0$ ligi kelib chiqadi. Bu tenglama statsionar nuqtalarning zaruriy shartini ko'rsatadi, chunki $\partial f / \partial g$ uchun formula $\nabla_c f = 0$ dan kelib chiqqan. Agar hamma x_j lar bo'yicha xususiy hosilalarga o'tilsa, tenglamani qulayroq shaklda olish mumkin va bu quyidagi sistemaga olib keladi: $\frac{\partial}{\partial x_j}(f-\lambda g)=0, j=\overline{1,n}$.

Yuqoridagi tenglamalar $g=0$ cheklashlar bilan birgalikda statsionarlik zaruriy shartlarini qanoatlantiradigan X va λ joiz vektorlarni aniqlash imkonini beradi. Bu mulohazalar tenglamalar ko'rinishidagi cheklashlarga ega masalalarda statsionar nuqtalarni topish imkonini beradigan *Lagranj ko'paytiruvchilar usuli*ga asos bo'la oladi. Ushbu usul sxemasi quyidagicha bayon etiladi:

$$L(X,\lambda)=f(X)-\lambda g(X).$$

Bunda L — funksiya *Lagranj funksiyasi* deyiladi. λ — parametrlar *Lagranj ko'paytiruvchilari* deyiladi va 1- §ning 1- bandidagi sezgirlik koeffitsiyentlari bilan bir xil ma'noni anglatadi.

$\partial L/\partial\lambda=0$ va $\partial L/\partial X=0$ tenglamalar yuqorida ko'rib chiqilgan ekstremumlar mavjudligi zaruriy shartlarini ifodalaydi va bu shartlar Lagranj funksiyasi bilan topiladi. Shunday qilib, $f(X)$ maqsad funksiyasi $g(X)=0$ cheklashlarda optimallikka erishish masalasi $L(X,\lambda)$ Lagranj funksiyasining shartsiz ekstremumini topish masalasiga keltiriladi. Lagranj ko'paytiruvchilar usulini qo'llashda ishlatiladigan yetarli shartlar quyidagicha ifodalanadi va buning uchun quyidagi matritsani aniqlaymiz:

$$H^B\left(\frac{0|P}{P^T|Q}\right)_{(m+n)\times(m+n)},\ \text{bunda}$$

$$P=\begin{pmatrix}\nabla g_1(X)\\ \vdots\\ \nabla g_m(X)\end{pmatrix}_{m\times n}\quad \text{va}\quad Q=\left\|\frac{\partial^2 L(X,\lambda)}{\partial x_i\partial x_j}\right\|_{n\times n}\quad \text{barcha } i$$

va j lar uchun H^B — mag'izlangan *Gesse matritsasi* deyiladi. Lagranj funksiyasi $L(X,\lambda)$ ning statsionar nuqtasi (X_0,λ_0)

berilgan bo'lsin. H^B matritsa mos elementarning (X_0, λ_0) nuqtadagi qiymatlaridan tashkil topgan bo'lsin. U holda:

1) Agar $(m+1)$ tartibli bosh minordan boshlab, H^B matritsaning $(n-m)$ ta bosh minorlari o'zgaruvchan ishorali sonli qatorni tashkil qilsa va bu qatorning birinchi hadi ishorasi $(-1)^{m+1}$ ko'paytuvchi bilan aniqlansa, X_0 nuqta maksimum nuqtasi bo'ladi.

2) Agar $(m+1)$ tartibli bosh minordan boshlab, H^B matritsaning $(n-m)$ bosh minorları ishorasi $(-1)^m$ ko'paytuvchi bilan aniqlansa, X_0 nuqta minimum nuqtasi bo'ladi.

Yuqoridagi shartlar ekstremum nuqtasini topish uchun yetarli lekin zaruriy emas. Boshqacha aytganda, bu shartlarni qanoatlantirmaydigan statsionar nuqta ekstremum nuqtasi bo'lishi mumkin.

Ekstremum nuqtalarini topishning boshqa shartlari ham mavjud. Ular zaruriy bo'lish bilan birga yetarli hamdir. Lekin bu shartlarni ayrim holda qo'llash qiyin.

(X_0, λ_0) statsionar nuqtada mos funksiyaning qiymatlaridan tashkil topgan matritsa aniqlaniladi $\Delta = \left(\frac{0 | P}{P^T | Q - \mu I} \right)$,

bunda μ — noma'lum parametr, P va Q — yuqorida aniqlangan, $|\Delta|$ — Δ matritsaning determinanti bo'lsin.

U holda $|\Delta| = 0$ ko'phadning $(n-m)$ haqiqiy ildizlaridan har biri:

1) agar manfiy bo'lsa, X_0 — maksimum nuqtasi bo'ladi;

2) agar musbat bo'lsa, X_0 — minimum nuqtasi bo'ladi.

4- masala. Ushbu $f(X) = x_1x_2 + x_2x_3$ funksiyaning quyidagi

$$g_1(X) = x_1 + x_2 - 2 = 0,$$

$$g_2(X) = x_2 + x_3 - 2 = 0$$

cheklanish shartlarini qanoatlantiradigan shartli minimum nuqtasini toping.

Yechish. Qo'yilgan masala uchun Lagranj funksiyasi quyidagicha tuziladi:

$$L(X,\lambda_1,\lambda_2)=f(X)+\sum_{i=1}^{2}\lambda_i g_i(X)=x_1x_2+x_2x_3+$$
$$+\lambda_1(x_1+x_2-2)+\lambda_2(x_2+x_3-2).$$

Shartlardan quyidagi tenglamalar sistemasi hosil bo'ladi:

$$\left.\begin{array}{l} x_2+\lambda_1=0,\\ x_1+x_3+\lambda_1+\lambda_2=0,\\ x_2+\lambda_2=0,\\ x_1+x_2-2=0,\\ x_2+x_3-2=0 \end{array}\right|$$

Birinchi va uchinchi tenglamadan $\lambda_1=\lambda_2=-x_2$ ekanligini e'tiborga olinsa:

$$x_1+x_3-2x_2=0$$
$$x_1+x_2-2=0$$
$$x_2+x_3-2=0$$

tenglamalar sistemasi kelib chiqadi. Bu sistemaning yechimi:

$$x_1^0=x_2^0=x_3^0=1,\ \lambda_1^0=\lambda_2^0=-1 \text{ bo'lib,}$$

$$f_{\min}(X)=f\left(X^0\right)=1\cdot1+1\cdot1=2,\quad X^0=(1;\ 1;\ 1) \text{ bo'ladi.}$$

5- masala. Quyidagi masalaning yechimi topilsin:

$$f(X)=x_1^2+x_2^2+x_3^2\rightarrow\min$$

$$g_1(X)=x_1+x_2+3x_3-2=0,$$
$$g_2(X)=5x_1+2x_2+x_3-5=0.$$

Yechish. Buning uchun quyidagi Lagranj funksiyasi yoziladi:

$$L(X,\lambda)=x_1^2+x_2^2+x_3^2-\lambda_1(x_1+x_2+3x_3-2)-\lambda_2(5x_1+2x_2+x_3-5).$$

Ekstremum mavjudligining zaruriy shartlariga asoslanib, quyidagi tenglamalar sistemasi hosil bo'ladi.

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = 2x_1 - \lambda_1 - 5\lambda_2 = 0,$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_2} = 2x_2 - \lambda_1 - 2\lambda_2 = 0,$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_3} = 2x_3 - 3\lambda_1 - \lambda_2 = 0,$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_1} = -(x_1 + x_2 + 3x_3 - 2) = 0,$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_2} = -(5x_1 + 2x_2 + x_3 - 5) = 0.$$

Bu sistemaning yechimi:

$$X_0 = (x_1^0, x_2^0, x_3^0) = (0{,}81;\ 0{,}35;\ 0{,}28),$$

$$\lambda_0 = (\lambda_1^0,\ \lambda_2^0) = (0{,}0867;\ 0{,}3067).$$

Bu nuqta minimum nuqtasi ekanligi quyidagi matritsadan ko'rinib turibdi:

$$H^B = \left(\begin{array}{cc|ccc} 0 & 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 5 & 2 & 1 \\ \hline 1 & 5 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right).$$

Unda $n = 3$ va $m = 2$, $n - m = 1$. H^B matritsa determinantining ishorasi $(-1)^2$ musbat bo'lganligi uchun, ya'ni $\det H^B = 460 > 0$ bo'lgani uchun X^0 — minimum nuqtasi bo'ladi.

6- masala. Cheklashlari tenglik ko'rinishidagi quyidagi masalani Lagranj usuli bilan yeching.

$$z = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \to \min$$

$$4x_1 + x_2^2 + 2x_3 - 14 = 0.$$

Yechish. Quyidagi Lagranj funksiyasi yoziladi:

$$L(X,\lambda) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - \lambda\left(4x_1 + x_2^2 + 2x_3 - 14\right).$$

Ekstremum mavjudligining zaruriy shartlaridan hosil bo'lgan ushbu sistema

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = 2x_1 - 4\lambda = 0,$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_2} = 2x_2 - 2\lambda x_2 = 0,$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_3} = 2x_3 - 2\lambda = 0,$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = -(4x_1 + x_2^2 + 2x_3 - 14) = 0,$$

yechilsa, quyidagi vektorlar hosil bo'ladi:

$$(X_0,\lambda_0)_1 = (2;\ 2;\ 1;\ 1),$$

$$(X_0,\lambda_0)_2 = (2; -2;\ 1;\ 1),$$

$$(X_0,\lambda_0)_3 = (2{,}8;\ 0;\ 1{,}4;\ 1{,}4).$$

Yetarli shartlarni quyidagi matritsa elementlari hisoblab tekshiriladi:

$$H = \left[\begin{array}{c|ccc} 0 & 4 & 2x_2 & 2 \\ \hline 4 & 2 & 0 & 2 \\ 2x_2 & 0 & 2-2\lambda & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

$m = 1, n = 3$ bo'lgani uchun $3 - 1 = 2$ ligidan bosh minorlar $(-1)^m = -1$ ishora bilan aniqlanadi va statsionar nuqta minimum nuqtasi bo'ladi. $(X_0,\lambda_0)_1 = (2;2;1;1)$ nuqtada

$$\begin{vmatrix} 0 & 4 & 4 \\ 4 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -32 < 0 \qquad \begin{vmatrix} 0 & 4 & 4 & 2 \\ 4 & 2 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -64 < 0,$$

$(X_0,\lambda_0)_2 = (2;-2;1;1)$ nuqtada

$$\begin{vmatrix} 0 & 4 & -4 \\ 4 & 2 & 0 \\ -4 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -32 < 0 \qquad \begin{vmatrix} 0 & 4 & -4 & 2 \\ 4 & 2 & 0 & 0 \\ -4 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -64 < 0,$$

$(X_0,\lambda_0)_3 = (2{,}8;\ 0;\ 1{,}4;\ 1{,}4)$ nuqtada

$$\begin{vmatrix} 4 & 4 & 0 \\ 4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -0{,}8 \end{vmatrix} = 12{,}8 > 0 \qquad \begin{vmatrix} 0 & 4 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0{,}8 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 32 > 0$$

ekanligidan ma'lum bo'ldiki, $(X_0)_1$ va $(X_0)_2$ minimum nuqtalari. $(X_0)_3$ esa yetarlilik shartlarini qanoatlantirmaydi, lekin u ekstremum nuqtasi bo'lishi mumkin. Yetarlilik shartlarining boshqa ifodasidan foydalanamiz.

$$\Delta = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 2x_2 & 2 \\ 4 & 2-\mu & 0 & 0 \\ 2x_2 & 0 & 2-2\lambda-\mu & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 2-\mu \end{bmatrix}$$

matritsaning determinantini 0ga tenglab, $(X_0,\lambda_0)_1 = (2,2,1,1)$ nuqtada quyidagi tenglama mavjud:

$$|\Delta| = 9\mu^2 - 26\mu + 16 = 0.$$

Uning yechimi $\mu=2$, $\mu=\frac{8}{9}$. Barcha $\mu>0$ bo'lgani uchun $(X_0)_1=(2,\ 1,\ 1\ )$ nuqta minimum nuqtasi bo'ladi. $(X_0,\ \lambda_0)_2=(2,\ \ -2,\ \ 1,\ \ 1)$ nuqtada esa

$$|\Delta|=9\mu^2-26\mu+16=0,$$

tenglama (yuqoridagi tenglama bilan bir xil) kelib chiqadi. Bu esa ikkinchi nuqta $(X_0,\ \lambda_0)_2=(2;\ \ -2;\ \ 1)$ ham minimum nuqtasi ekanligini bildiradi. $(X_0)_3=(2,\ 8;\ 0;\ 1,\ 4;\ 1,4)$ nuqtada tenglama quyidagi ko'rinishda bo'ladi:

$$|\Delta|=5\mu^2-6\mu-8=0$$

uning yechimlari $\mu=2$ va $\mu=-0,8$. Bu uchinchi nuqta ekstremum nuqta emasligini bildiradi.

3- §. Tengsizlik ko'rinishidagi cheklashlar

1. Lagranjning umumlashtirilgan ko'paytuvchilar usuli

Berilgan $Z=f(X)$ funksiyani $g_i(X)\le 0,\ i=\overline{1,m}\ X\ge 0$ cheklashlarda maksimallashtirish masalasi berilgan bo'lsin.

Agar $f(X)$ funksiyaning shartsiz ekstremum nuqtasi masalaning barcha shartlarini qanoatlantirmasa, u holda u shartli ekstremumda mumkin bo'lgan yechimlar sohasining chegara nuqtasida erishadi.

Bu m cheklashlar ichidan bitta yoki bir nechtasi aniq tenglikdek bajarilishi kerak, degan ma'noni bildiradi.

Bu usul bo'yicha hisoblashlar quyidagi qadamlarni o'z ichiga oladi.

1- qadam. Masala cheklashlarini hisobga olmagan holda uni yechish, ya'ni $Z=f(X)$ maqsad funksiyasining maksimumini topish.

Agar olingan optimal nuqtasi hamma cheklashlarni qanoatlantirsa, unda hisoblash to'xtatiladi, chunki barcha cheklashlar ortiqcha. Aks holda, $k=1$ qo'yib, 2- qadamga o'tish kerak.

2- qadam. Barcha ixtiyoriy k ta cheklashlarni faol qilib, (ya'ni ularni tenglikka aylantirib) Lagranj ko'paytuvchilar usuli yordamida, k faol cheklashlar mavjudligida, $f(X)$ funksiyaning ekstremumi topiladi. Agar olingan yechim, qolgan boshqa cheklashlarga nisbatan joiz bo'lsa, unda hisoblash to'xtatiladi va *lokal* ekstremum topiladi. Aks holda, boshqa k cheklashlarni faol qilib shu qadamni qaytarish kerak. Agar k faol cheklashlardan tuzilgan barcha qismiy to'plamlar joiz yechimga olib kelmasa, 3- qadamga o'tiladi.

3- qadam. Agar $k=m$ bo'lsa, hisoblash to'xtatiladi, chunki bu o'rinda joiz yechim yo'q. Aks holda, $k=k+1$ qo'yib, 2- qadamga o'tiladi.

Yuqorida qayd etilgan amallar ko'pincha e'tiborga olinmaydigan, muhim vaziyatlar bilan bog'liq. Masala hatto yagona yechimga ega bo'lganida ham, bu amallar global ekstremum bermaydi.

$p<g$ bo'lganda $f(X)$ning tenglama sifatida p cheklashlarni qanoatlantirgan optimal nuqtasiga har doim maqsad funksiyaning g cheklash-tengliklarni hisobga olgandagi optimal qiymatiga qaraganda "yaxshiroq" qiymatlari mos keladi. Agar p cheklashlar g cheklashlarning qismiy to'plamini tashkil qilsagina shunday bo'ladi.

7- masala. $\begin{cases} Z=-(2x_1-5)^2-(2x_2-1)^2 \\ x_1+2x_2\le 2 \\ x_1,x_2\ge 0 \end{cases}$ shartlar bilan

berilgan maqsad funksiyasining maksimumini toping.

Yechish.

$$\frac{\partial z}{\partial x_1}=-4(2x_1-5)=0 \qquad \frac{\partial z}{\partial x_2}=-4(2x_2-1)=0$$

$(x_1;x_2)=\left(\frac{5}{2};\frac{1}{2}\right)$ topilgan nuqta cheklash sharti $x_1+2x_2\le 2$ ni qanoatlantirmaydi. Cheklashlarni navbat bilan tenglikka aylantiriladi. Aytaylik, $x_1=0$ bo'lsin, bunda Lagranj funksiyasi va zaruriy shartlar quyidagicha yoziladi:

$$L=-(2x_1-5)^2-(2x_2-1)^2-\lambda x_1,$$
$$\frac{\partial L}{\partial x_1}=-4(2x_1-5)-\lambda=0,$$
$$\frac{\partial L}{\partial x_2}=-4(2x_2-1)=0,$$
$$\frac{\partial L}{\partial \lambda}=-x_1=0.$$

Bu tenglamalardan $(x_1;x_2)=\left(0;\frac{1}{2}\right)$ topiladi, uning maksimum nuqtasi ekanligini yetarli shartlardan aniqlanadi. Bu nuqta hamma cheklash shartlarini qanoatlantiradi. Demak, $\left(0;\frac{1}{2}\right)$ yechim-lokal optimal yechim bo'ladi. $x_2\ge 0$ va $x_1+2x_2\le 2$ shartlarni faol qilish bilan joiz yechimlar olib bo'lmaydi. Maqsad funksiyasining $\left(0;\frac{1}{2}\right)$ ga mos qiymati $z=-25$ ga teng.

2. Kun—Takker shartlari

Tengsizlik shaklidagi cheklashlar bilan berilgan chiziqsiz programmalashtirish masalalarida statsionar nuqtalarni topishga imkon beradigan *Kun—Takker zaruriy shartlari* ko'rib chiqiladi [20]. Lagranjning ko'paytiruvchilar usuli qo'llanadi. Agar maqsad funksiya va joiz yechimlar sohasi ba'zi bir o'ziga xos xususiyatlarga ega bo'lsa, belgilangan shartlar yetarli hisoblanadi.

Masalani qo'yilishi quyidagicha:

$g(X) \le 0$ cheklashlarda $Z = f(X)$ funksiyasini maksimumini toping. Cheklashlar — tengsizliklarni mos ravishda manfiy bo'lmagan qo'shimcha o'zgaruvchilarni kiritish orqali tenglik shakliga keltirish mumkin. Shu yo'l bilan manfiy bo'lmaslik talabini inobatga olgan holda i — cheklashning chap tomoniga qo'shish lozim bo'lgan $S_i^2 (\ge 0)$ ni qo'shimcha o'zgaruvchi sifatida kiritiladi.

$$S = (S_1, S_2, \ldots, S_m)^T \text{ va } S^2 = \left(S_1^2, S_2^2, \ldots, S_m^2\right)^T \text{ bo'lsin.}$$

Bunda m — tengsizliklar, umumiy cheklashlar soni. Bu holda Lagranj funksiyasi quyidagi shaklda yoziladi:

$$L(X, S, \lambda) = f(X) - \lambda\left[g(Z) + S^2\right]. \qquad (1.3.1)$$

Cheklashlari $g(X) \le 0$ bo'lgan maksimallashtirish (minimallashtirish) masalalarida optimallashtirishning zaruriy sharti λ ning nomanfiy (nomusbat) ligidir. Bu natija quyidagicha belgilanadi: maksimallashtirish masalasi ko'rib chiqiladigan bo'linsa, λ ko'paytuvchilar g ning o'zgarishlariga nisbatan f ning o'zgarish tezligini ifodalaydi, ya'ni,

$$\lambda = \partial f / \partial g. \qquad (1.3.2)$$

$g \le 0$ cheklashning o'ng tomoni ortishi va 0 dan katta bo'lishi bilan joiz yechimlar sohasi kengayadi. Bundan maqsad funksiyaning optimal qiymati kamayishi mumkin emasligi kelib chiqadi. Bu $\lambda \ge 0$ ekanligini bildiradi. Shunga o'xshash minimallashtirish masalalarida cheklashlarning o'ng qismi orttirilishi bilan f ning optimal qiymati ortmaydi, bundan $\lambda \le 0$ ekanligi kelib chiqadi.

Agar cheklashlar $g(x) = 0$ tengliklar shaklida berilgan bo'lsa, unda λ ishorasiga hech qanday shart yuklatilmaydi.

λ vektoriga qo'yilgan bu talablarga Kun—Takker zaruriy shartlarining bir qismi deb qarash lozim.

Quyidagi qolgan shartlar keltiriladi. L funksiyaning X, S va λ bo‘yicha xususiy hosilalarini hisoblab va ularni 0ga tenglashtirilsa, quyidagi tengliklar hosil bo‘ladi:

$$\partial L / \partial X = \nabla f(X) - \lambda \nabla g(X) = 0 \qquad (1.3.3)$$

$$\partial L / \partial S_i = -2\lambda_i S_i = 0, \ i = \overline{1,m} \qquad (1.3.4)$$

$$\partial L / \partial \lambda = -(g(x) + S^2) = 0 . \qquad (1.3.5)$$

(1.3.4) tenglamalarni tekshirish quyidagi xulosalarga olib keladi.

1. Agar $\lambda_i \geq 0$ bo‘lsa, u holda $S_i^2 = 0$ ko‘rilayotgan cheklashga mos keluvchi resurs noyobligini va hammasi ishlatilganligini bildiradi.

2. Agar $S_i^2 > 0$ bo‘lsa, $\lambda_i = 0$. Bu i- resurs noyob emasligi va uning miqdori o‘zgarishi $f(\lambda_i = \partial f / \partial g_i = 0)$ qiymatiga ta’sir qilmasligini bildiradi.

(1.3.4), (1.3.5) tenglamalaridan

$$\lambda_i g_i(X) = 0 , \ \ i = \overline{1,m} \qquad (1.3.6)$$

ekanligi kelib chiqadi. Olingan shartlar asosan oldingi xulosani tasdiqlaydi, ya’ni, $\lambda_i > 0$ bo‘lsa, $g_i(X) = 0$ bo‘ladi yoki $S_i^2 = 0$. Shunga o‘xshash agar $g_i(X) < 0$ $S_i^2 > 0$ bo‘lsa, $\lambda_i = 0$ bo‘ladi.

Endi Kun—Takkerning maksimallashtirish masalalarida statsionar nuqtalarni aniqlovchi X va λ larni qanoatlantiruvchi zaruriy shartlarni ifodalash mumkin:

$$\lambda \geq 0;$$

$$\nabla f(X) - \lambda \nabla g(X) = 0$$

$$\lambda_i g_i(X) = 0 , \ \ i = 1,2,\ldots,m \qquad (1.3.7)$$

$$g(X) \leq 0 .$$

Agar λ ning manfiy emaslik sharti o‘rniga, musbat bo‘lmaslik sharti kiritilsa, bu shartlarni minimallashtirish masalalari uchun ham qo‘llanish mumkin.

Agar cheklashlar tenglik shaklida berilgan bo'lsa, unda Lagranjning ko'paytuvchilari ishorasiga hech qanday shart qo'yilmaydi.

Agar yuqoridagi masalada Lagranj funksiyasi

$$L(X,S,\lambda)=f(X)+\lambda\left(g(X)+S^2\right) \qquad (1.3.8)$$

ko'rinishida aniqlansa, Kun—Takker shartlarida λ nomanfiylik sharti nomusbatlik sharti bilan almashadi, ya'ni, $\lambda=-\frac{\partial f}{\partial g}$ bo'ladi.

3. Kun—Takkerning yetarli shartlari

Agar maqsad funksiyasi va cheklash shartlarini qanoatlantiruvchi (joiz) yechimlar sohasi qavariqlik va botiqlik xususiyatlariga ega bo'lsa, Kun—Takkerning zarur shartlari etarli shartlar bo'lib ham hisoblanadi [20]. Bu xususiyatlar 1- jadvalda ko'rsatilgan.

1- jadval.

Optimallashtirish turi	Talab qilinayotgan xossalar	
	Maqsad funksiyasi	Joiz yechimlar sohasi
Maksimallashtirish	Botiq	Qavariq to'plam
Minimallashtirish	Qavariq	Qavariq to'plam

Odatda, joiz yechimlar sohasi qavariqligini isbotlashdan ko'ra, maqsad funksiyasini qavariq yoki botiq ekanligini aniqlash oson. Joiz yechimlar sohasi qavariqligini cheklashlardagi funksiyalarni tekshirish orqali bilish mumkin. Quyida amalda tekshirish qiyin bo'lmagan kerakli talablar ro'yxati berilgan. Bu talablarni qo'yish uchun chiziqsiz programmalashtirish masalasining umumiy qo'yilishi quyidagicha ifodalanadi:

$$Z=f(X)\to\max(\to\min)$$

$$g_i(X)\le 0,\quad i=\overline{1,r}$$

$$g_i(X)\ge 0,\quad i=\overline{r+1,p}, \qquad (1.3.9)$$

$$g_i(X)=0,\quad i=\overline{p+1,m}.$$

Bunda

$$L(X,S,\lambda) = f(X) - \sum_{i=1}^{r} \lambda_i \left[g_i(X) + S_i^2 \right] - \sum_{i=r+1}^{p} \lambda_i \left[g_i(X) - S_i^2 \right] -$$

$$- \sum_{i=p+1}^{m} \lambda_i g_i(X), \qquad (1.3.10)$$

bunda, λ_i — i cheklashga mos Lagranj ko'paytuvchisi.

Kun—Takkerning yetarli shartlari 2- jadvalda keltirilgan.

2- jadval.

Optimallashtirish turi	Talablar		
	$f(X)$	$g_i(X)$	λ_i
Maksimallashtirish	Botiq	Qavariq	$\geq 0 \ (1 \leq i \leq r)$
		Botiq	$\leq 0 \ (r+1 \leq i \leq p)$
		Chiziqli	$\infty (p+1 \leq i \leq m)$
Minimallashtirish	Qavariq	Qavariq	$\leq 0 \ (1 \leq i \leq r)$
		Botiq	$\geq 0 \ (r+1 \leq i \leq p)$
		Chiziqli	$\infty \ (p+1 \leq i \leq m)$

Shuni aytish lozimki, 2- jadval 1- jadvaldagi hamma hollarni o'z ichiga olmaydi. Bu shu bilan bog'liqki, joiz yechimlar sohasi qavariq bo'lib va shu paytning o'zida 2- jadvaldagi $g_i(x)$ funksiyalarning sanab o'tilgan talablariga mos kelmasligi mumkin.

2- jadvaldagi keltirilgan shartlar shu bilan xarakterlanadiki, maksimallashtirishga mos keladigan cheklashlar botiq Lagranj funksiyasi $L(X,S,\lambda)$ ga va minimallashtirishga mos keladigan cheklashlar qavariq Lagranj funksiyasi $L(X,S,\lambda)$ ga tegishli. Quyidagi fikrni hisobga olgan holda bevosita buni tekshirish mumkin:

Agar $g_i(X)$ — qavariq funksiya bo'lsa, u holda $\lambda_i g_i(X)$ funksiya $\lambda_i \geq 0$ bo'lsa, qavariq bo'ladi va $\lambda_i \leq 0$ bo'lsa, botiq bo'ladi. Qolgan talablarni ham shunday mulohazalarga ko'ra asoslash mumkin. Shuni ta'kidlash kerakki, chiziqli funksiya ta'rif bo'yicha qavariq va botiq bo'lishi mumkin. Agar

f funksiya botiq bo'lsa, $-f$ funksiya qavariq bo'ladi va aksincha(bu xossalar shu bobning 1- § ida aytib o'tilgan).

Agar Lagranj funksiyasi quyidagi ko'rinishda olinsa:

$$L(X,\lambda,S)=f(X)+\sum_{i=1}^{r}\lambda_i\left(g_i(X)+S_i^2\right)+\sum_{i=r+1}^{p}\lambda_i\left(g_i(X)-S_i^2\right)+$$

$$+\sum_{i=p+1}^{m}\lambda_i g_i(X) \qquad (1.3.11)$$

uning uchun 1- jadval o'zgarmaydi, 2- jadvalda λ_i ning ishoralari qarama-qarshisiga almashadi, qolgan talablar o'zgarmaydi.

8- masala. Cheklashlari tengsizliklardan iborat bo'lgan quyidagi masalaning yechimini toping.

$$f(x)=x_1^2+x_2^2+x_3^2\to\min$$

$$g_1(X)=2x_1+x_2-5\le 0,$$

$$g_2(X)=x_1+x_3-2\le 0,$$

$$g_3(X)=1-x_1\le 0,$$

$$g_4(X)=2-x_2\le 0,$$

$$g_5(X)=-x_3\le 0.$$

Yechish. Ko'rilayotgan masala minimallashtirish masalasi bo'lgani uchun $\lambda\le 0$. Endi Kun—Takker shartlari yoziladi:

$$(\lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3,\ \lambda_4,\ \lambda_5)\le 0$$

$$(2x_1,\ 2x_2,\ 2x_3)-(\lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3,\ \lambda_4,\ \lambda_5)\begin{pmatrix}2&1&0\\1&0&1\\-1&0&0\\0&-1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}=0,$$

$$\lambda_1 g_1=\lambda_2 g_2=\ldots=\lambda_5 g_5=0$$

$$g(X)\le 0.$$

Ifodalarni soddalashtirilsa, quyidagilar hosil bo'ladi:

$$\lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3,\ \lambda_4,\ \lambda_5 \le 0, \quad \lambda_3(1-x_1)=0,$$
$$2x_1-2\lambda_1-\lambda_2+\lambda_3=0, \quad \lambda_4(2-x_2)=0,$$
$$2x_2-\lambda_1+\lambda_4=0, \quad \lambda_5 x_3=0,$$
$$2x_3-\lambda_2+\lambda_5=0, \quad 2x_1+x_2\le 5,$$
$$\lambda_1(2x_1+x_2-5)=0, \quad x_1+x_3\le 2,$$
$$x_1\ge 1, \quad x_2\ge 2, \quad x_3\ge 0,$$
$$\lambda_2(x_1+x_3-2)=0\ .$$

Bundan $x_1=1,\ x_2=2,\ x_3=0;$ $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_5=0,$ $\lambda_3=-2, \lambda_4=-4$ lar topiladi.

$f(X)$ funksiya ham joiz yechimlar to'plami $g(X)\le 0$ ham qavariq bo'lgani uchun $L(X,\ S,\ \lambda)$ ham qavariq va topilgan statsionar nuqta global shartli minimum bo'ladi. Bu masaladan ko'rinadiki, Kun—Takker shartlaridan hosil bo'lgan sistemani yechish qiyinchilik tug'diradi. Lekin shunga qaramay bu shartlar ko'pgina chiziqsiz masalalarni yechishda muhim ahamiyatga ega.

Xulosa qilib aytganda, bu bobda cheklashlar bilan berilgan chiziqsiz programmalashtirish masalalarida maksimum va minimum nuqtalarini topish haqida bayon etildi.

Bir qator hollarda Kun—Takker shartlari yuqori samara beradigan algoritmlarni vujudga keltirishda asos bo'lib xizmat qiladi. Kun—Takkerning zarur shartlarini qo'llanilishiga kvadratik programmalashtirish misol bo'ladi.

Shuni ta'kidlash lozimki, tengsizlik ko'rinishidagi cheklashli chiziqsiz masalalar uchun ekstremum mavjudligining (cheklashsiz masalalar va tenglik ko'rinishidagi cheklashli masalalarda bo'lgani kabi) yetarli shartlari yo'q.

Shunday qilib, shartini oldindan bilish mumkin bo'lgan, 1- va 2-jadvalda ko'rsatilgan hollardan tashqari biror chiziqsiz programmalashtirish algoritmi yordamida yechimning lokal yoki global ekstremum ekanligini tekshirib ko'ruvchi usullar yo'q.

4. Separabel programmalashtirish

Maqsad funksiyasi $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ ni bir o'zgaruvchili funksiyalar yig'indisi ko'rinishida yozish mumkin bo'lsa ya'ni, $f(x_1, x_2, ..., x_n) = f_1(x_1) + f_2(x_2) + ... + f_n(x_n)$ bo'lsa, bu funksiya *separabel funksiya* deyiladi [23]. Masalan, chiziqli funksiya separabel funksiyaga misol bo'la oladi:

$$f = a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n$$

bunda $a_i, i = 1,\overline{n}$ — o'zgarmas sonlar. Quyidagi funksiya separabel bo'lmagan funksiyaga misol bo'la oladi.

$$f = x_1^2 + x_1\sin(x_2 + x_3) + x_2e^{x_3}.$$

9- masala. $\begin{cases} f(\bar{X}) = 3x_1^2 - 4x_2 + 3x_3^3, \\ 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 \le 8, \\ x_j \ge 0, \quad x_j \text{ — butun}, \quad j = 1,2,3. \end{cases}$

Yechish. $f(\bar{X})$ ni bir o'zgaruvchili funksiyalar yig'indisidan iborat qilib ifodalash mumkin:

$$f(\bar{X}) = f_1(x_1) + f_2(x_2) + f_3(x_3),$$

bunda $f_1(x_1) = 3x_1^2$; $f_2(x_2) = -4x_2$; $f_3(x_3) = 3x_3^3$.

$f_1(\lambda) = \max 3x_1^2$ ni topamiz. $0 \le x_1 \le \left[\frac{\lambda}{4}\right]$ $x_1 \in \{0;1;2\}$.

λ ning har bir aniq qiymati uchun $f_1(\lambda)$ hisoblanadi va ular ichidan maksimali topiladi. λ 0 dan 8 gacha butun sonlarni qabul qilishi mumkin. Quyidagilar hisoblanadi:

$$f_2(\lambda) = \max\{-4x_2 + f_1(\lambda - 3x_2)\}, \quad 0 \le x_2 \le \left[\frac{\lambda}{3}\right],$$

$$f_3(8) = \max\{3x_3^3 + f_2(8 - 2x_3)\}, \quad 0 \le x_3 \le \left[\frac{8}{2}\right].$$

Barcha hisoblashlar 3- jadvalda keltirilgan.

3- jadval

	$f_1(\lambda)$			$f_2(\lambda)$			$f_3(\lambda)$				
λ	$x_1=0$	$x_1=1$	$x_1=2$	$x_2=0$	$x_2=1$	$x_2=2$	$x_3=0$	$x_3=1$	$x_3=2$	$x_3=3$	$x_3=4$
0	0			0							
1	0			0							
2	0			0							
3	0			0	–4						
4	0	3		0	–4						
5	0	3		0	–4						
6	0	3		0	–4	–8					
7	0	3		0	–1	–8					
8	0	3	12	0	–1	–8	12	6	27	81	192

$$\max f(\bar{X}) = \max f_3(\lambda) = f_3^*(8) = 192\,.$$

192 maksimal qiymatga to‘g‘ri keladigan optimal yechim quyidagicha topiladi. $x_3^* = 4$

$x_3^* = 0$

$$\lambda = 8 - 2x_3^* = 0 \ (f_2(\lambda) = f_2(0) = 0,\ x_2^* = 0)$$

$$x_1^* = 0,\ \lambda = 8 - 2x_3^* - 3x_2^* = 8 - 2\cdot 4 - 3\cdot 0 =$$
$$= 0(f_1(\lambda) = f_1(0) = 0,\ x_1^* = 0).$$

Berilgan masalaning optimal yechimi $X^*(0;0;4)$ bo‘ladi.

4- §. Kvadratik programmalashtirish

Kun—Takker shartlarini qo‘llash tatbiqlaridan biri chiziqsiz programmalashtirishga kiruvchi kvadratik programmalashtirish hisoblanadi. Unda maqsad funksiyasi kvadratik funksiya, cheklashlar — chiziqli tenglamalar va tengsizliklardan iborat.

Kvadratik programmalashtirish masalasi quyidagi xususiyatlarga ega:

1) $Z(X)$ maqsad funksiyasi umumiy holda kvadratik va chiziqli ko‘rinishlar yig‘indisini ifodalaydi:

$$Z(X) = \sum_{j=1}^{n} c_j \cdot x_j + \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} d_{kj} \cdot x_k \cdot x_j.$$

2) Cheklashlar sistemasidagi funksiyalar $f_i(x_1, x_2, ..., x_n)$, $i=\overline{1,m}$ x_j, $j=\overline{1,n}$ o'zgaruvchilarga nisbatan chiziqlidir.

3) Cheklashlar tenglama va tengsizliklar ko'rinishida bo'lib, x_j larning hammasiga yoki bir qismiga qo'yilgan manfiy emaslik shartlarini o'z ichiga oladi.

4) c_j va a_{ij} koeffitsiyentlar va b_i ozod hadlar ixtiyoriy haqiqiy sonlardan iborat, d_{kj} koeffitsiyentlarga esa alohida shartlar qo'yiladi.

Minimallashtirish masalalarida kvadratik forma (ko'rinish) quyiga qavariq, ya'ni musbat yarim aniqlangan bo'lishi kerak. Maksimallashtirish masalalarida esa yuqoriga qavariq, ya'ni manfiy yarim aniqlangan bo'lishi kerak.

Shunday qilib, umumiy holda kvadratik programmalashtirish masalasi quyidagicha ifodalanadi:

$$Z=\sum_{j=1}^{n} c_j \cdot x_j + \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} d_{kj}\cdot x_k \cdot x_j \to \max(\min) \qquad (1.4.1)$$

maqsad funksiyasining

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\cdot x_j \le b_i, \; i=\overline{1,u}; \qquad (1.4.2)$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\cdot x_j \ge b_i, \; i=\overline{u+1,\upsilon}; \qquad (1.4.3)$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\cdot x_j = b_i, \; i=\overline{\upsilon+1,m}; \qquad (1.4.4)$$

$$x_j \ge 0, \; j=\overline{1,n} \qquad (1.4.5)$$

cheklashlarda maksimumi (minimumi)ni toping. Joiz yechimlar to'plami (1.4.2)—(1.4.5) qavariq bo'lgani uchun kvadratik programmalashtirish masalasining lokal ekstremumi global ekstremum bo'ladi.

Qo'shimcha o'zgaruvchilar kiritib (1.4.2) — (1.4.3) cheklashlar sistemasini tenglamalar ko'rinishiga keltirish mumkin. U holda kvadratik programmalashtirish masalasi quyidagi ko'rinishni oladi:

$$Z = \sum_{j=1}^{n} c_j \cdot x_j + \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} d_{kj} \cdot x_k \cdot x_j \to \max(\min) \quad (1.4.6)$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot x_j = b_i, \; i = \overline{1,m} \quad (1.4.7)$$

$$x_j \geq 0, \; j = \overline{1,n} \quad (1.4.8)$$

yoki u matritsa ko‘rinishida bo‘ladi:

$$Z = C^T \cdot X + X^T \cdot D \cdot X$$

$$A \cdot X = B, \; X \geq 0.$$

Kvadratik programmalashtirish masalasi rejasining zaruriy va yetarli optimallik shartlari uchun maksimum masalasi qarab chiqiladi. U holda $X^T \cdot D \cdot X$ kvadratik ko‘rinish yuqoriga qavariq ya’ni, manfiy aniqlangan (Minimum masalasi ham xuddi shunday yoziladi).

(1.4.6)—(1.4.8) masalaning zarur va yetarli optimallik shartlarini ifodalash uchun Kun—Takker shartlaridan foydalaniladi. Buning uchun Lagranj funksiyasi tuziladi:

$$L(X,\Lambda) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j + \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} d_{kj} x_k x_j + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \left(b_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \right) \quad (1.4.9)$$

Kun—Takker shartlari quyidagi ko‘rinishga ega bo‘ladi:

$$\frac{\partial}{\partial x_j} L(X^0, \Lambda^0) = c_j + 2 \sum_{k=1}^{n} d_{kj} x_k^0 - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^0 a_{ij} \leq 0; \quad (1.4.10)$$

$$x_i^0 \left(c_j + 2 \sum_{k=1}^{n} d_{kj} x_k^0 - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^0 a_{ij} \right) = 0; \quad (1.4.11)$$

$$x_j^0 \geq 0; \quad (1.4.12)$$

$$\frac{\partial}{\partial \lambda_i} L(X^0, \Lambda^0) = b_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j^0 \geq 0; \quad (1.4.13)$$

$$\lambda_i^0 \left(b_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j^0 \right) = 0; \quad (1.4.14)$$

$$\lambda_i^0 \geq 0. \quad (1.4.15)$$

Agar X^0 masalaning optimal rejasi bo'lsa, u holda shunday Λ^0 vektor mavjud bo'ladiki, (1.4.10)—(1.4.15) shartlar qanoatlantiriladi.

Shartlar sistemasi qo'shimcha o'zgaruvchi kiritish yo'li bilan kanonik ko'rinishga keltiriladi:

$$\upsilon_j^* = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^0 a_{ij} - 2\sum_{k=1}^{n} d_{kj} x_k^0 - c_j$$

u holda masala rejasining optimallik shartlari shunday yoziladi:

$$c_j + 2\sum_{k=1}^{n} d_{kj} x_k^* - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^* a_{ij} + \upsilon_j^* = 0;$$

$$x_j^* \upsilon_j^* = 0, \; x_j^* \geq 0, \; \upsilon_j^* \geq 0.$$

(1.4.7) cheklashlar sistemasi tenglik ko'rinishida bo'lgani uchun Λ vektorga manfiy emaslik shartlari qo'yilmaydi, (1.4.13)—(1.4.14) shartlar ixtiyoriy joiz yechim uchun avtomatik ravishda bajariladi, ularni tushirib qoldirish mumkin.

Kvadratik programmalashtirish masalasi quyidagi shartlarni qanoatlantiruvchi ixtiyoriy $X \geq 0$, $V \geq 0$ yechimga ega:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i; \tag{1.4.16}$$

$$2\sum_{k=1}^{n} d_{kj} x_k - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i a_{ij} + \upsilon_j = -c_j; \tag{1.4.17}$$

$$x_j \upsilon_j = 0, \tag{1.4.18}$$

$x_j, j = \overline{1,n}$ vektorni beradiki, u manfiy yarim aniqlangan kvadratik ko'rinishdagi masalaning optimal yechimi bo'ladi.

$$x_j \geq 0, \; \upsilon_j \geq 0. \tag{1.4.19}$$

$$\begin{aligned} &AX = B; \\ &2DX - A^T \Lambda + V = -C^T; \\ &X^T V = 0. \end{aligned} \tag{1.4.20}$$

(1.4.20) sistemaning $X \geq 0$, $V \geq 0$ yechimlari qanday bo'lishiga qarab berilgan masalaning yechimlari to'g'risida fikr yuritiladi. (1.4.16)—(1.4.17) tenglamalar chiziqli bo'lgani uchun yechimlar to'plamining uchki nuqtalarida optimal yechimga erishadi, ya'ni, (1.4.16)—(1.4.17) yechimlari ichidan $X^T V = 0$. tenglamalarni qanoatlantiradigan yechimlar tanlab olinadi.

1- masala. $Z = -4x_1^2 - 6x_2^2 + 8x_1 + 44x_2 + 2x_1x_2 \to \max$ maqsad funksiyasining quyidagi cheklashlarda maksimumini toping $x_1 + 2x_2 \le 13; 2x_1 + x_2 \le 9; x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$.

Buning uchun avval Lagranj funksiyasi tuziladi:

$$L(X;\Lambda) = -4x_1^2 - 6x_2^2 + 8x_1 + 44x_2 + 2x_1x_2 +$$
$$+\lambda_1(13 - x_1 - 2x_2) + \lambda_2(9 - 2x_1 - x_2).$$

Keyin $L(X,\Lambda)$ funksiyaga Kun—Takker teoremasi qo'llaniladi va quyidagi shartlar hosil bo'ladi:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial L}{\partial x_1} = -8x_1 + 8 + 2x_2 - \lambda_1 - 2\lambda_2 \le 0; \\ &\frac{\partial L}{\partial x_2} = -12x_2 + 44 + 2x_1 - 2\lambda_1 - \lambda_2 \le 0; \\ &\frac{\partial L}{\partial \lambda_1} = 13 - x_1 - 2x_2 \le 0; \\ &\frac{\partial L}{\partial \lambda_2} = 9 - 2x_1 - x_2 \le 0. \end{aligned}\right\} \qquad (1.4.21)$$

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial L}{\partial x_1} x_1 = 0; \\ &\frac{\partial L}{\partial x_2} x_2 = 0; \\ &\frac{\partial L}{\partial \lambda_1} \lambda_1 = 0; \\ &\frac{\partial L}{\partial \lambda_2} \lambda_2 = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (1.4.22)$$

(1.4.21) tengsizlik sistemasi yechimlari ichidan (1.4.22) tenglamalar sistemasini qanoatlantiradiganini tanlanadi. Yuqorida ko'rsatilgandek, berilgan kvadratik programmalashtirish masalasi yechimini (1.4.21) tengsizliklar sistemasi bilan aniqlanadigan yechimlar ko'pburchagi uchlaridagi qiymatlardan qidirish kerak. Manfiy bo'lmagan qo'shimcha o'zgaruvchilarni $\upsilon_1, \upsilon_2, \upsilon_3, \upsilon_4$ kiritib

$$\begin{cases} 8x_1 - 2x_2 + \lambda_1 + 2\lambda_2 \geq 8, & -\upsilon_1; \\ -2x_1 + 12x_2 + 2\lambda_1 + \lambda_2 \geq 44, & -\upsilon_2; \\ x_1 + 2x_2 \leq 13, & +\upsilon_3; \\ 2x_1 + x \leq 9, & +\upsilon_4; \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad \lambda_1 \geq 0, \quad \lambda_2 \geq 0 \end{cases} \tag{1.4.23}$$

sistema kanonik ko'rinishga keltiriladi:

$$\begin{array}{l} 8x_1 - 2x_2 + \lambda_1 + 2\lambda_2 - \upsilon_1 = 8; \\ -2x_1 + 12x_2 + 2\lambda_1 + \lambda_2 - \upsilon_2 = 44; \\ x_1 + 2x_2 + \upsilon_3 = 13, \\ 2x_1 + x_2 + \upsilon_4 = 9. \end{array} \tag{1.4.24}$$

(1.4.22) shartlardan kelib chiqadiki, qo'shimcha o'zgaruvchilar quyidagi shartlarni qanoatlantiradi:

$$x_1\upsilon_1 = 0, \; x_2\upsilon_2 = 0, \; \lambda_1\upsilon_3 = 0, \; \lambda_2\upsilon_4 = 0\,. \tag{1.4.25}$$

(1.4.24) sistemaning bazis yechimlarini topish uchun sun'iy bazis o'zgaruvchilar $\omega_1 \geq 0, \omega_2 \geq 0$ kiritiladi va quyidagi chiziqli programmalashtirish masalasi hosil bo'ladi:

$$Z = M\omega_1 + M\omega_2 \to \min \tag{1.4.26}$$

$$\begin{array}{l} 8x_1 - 2x_2 + \lambda_1 + 2\lambda_2 - \upsilon_1 + \omega_1 = 8; \\ -2x_1 + 12x_2 + 2\lambda_1 + \lambda_2 - \upsilon_2 + \omega_2 = 44; \\ x_1 + 2x_2 + \upsilon_3 = 13; \\ 2x_1 + x_2 + \upsilon_4 = 9; \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0; \quad \lambda_1 \geq 0, \quad \lambda_2 \geq 0; \\ \upsilon_1 \geq 0, \quad \upsilon_2 \geq 0; \quad \upsilon_3 \geq 0, \quad \upsilon_4 \geq 0; \\ \omega_1 \geq 0, \quad \omega_2 \geq 0. \end{array} \tag{1.4.27}$$

4- jadval.

Bazis reja	C_i	A_0	x_1	x_2	λ_1	λ_2	υ_1	υ_2	υ_3	υ_4	ω_1	ω_2
			0	0	0	0	0	0	0	0	M	M
ω_1	M	8	8	−2	1	2	−1	0	0	0	1	0
ω_2	M	44	−2	12	2	1	0	−1	0	0	0	1
ω_3	0	13	1	2	0	0	0	0	1	0	0	0
ω_4	0	19	2	1	0	0	0	0	0	1	0	0
Maqsad funksiyasi		$52M$	$6M$	$10M$	$3M$	$-M$	$-M$	0	0	0	0	0
ω_1	M	46/3	23/3	0	4/3	13/6	−1	−1/6	0	0	1	
x_2	0	11/3	−1/6	1	1/6	1/12	0	−1/12	0	0	0	
υ_3	0	17/3	4/3	0	−1/3	−1/6	0	1/6	1	0	0	
υ_4	0	16/3	13/6	0	−1/6	−1/12	0	1/12	0	1	0	
Maqsad funksiyasi		$46/3M$	$23/3M$	0	$4/3M$	$13/6M$	$-M$	$-1/6\ M$	0	0	0	
x_1	0	2										
x_2	0	4										
υ_3	0	3										
υ_4	0	1										
Maqsad funksiyasi		0	0	0	0	0	0	0	0	0		

(1.4.26) — (1.4.27) masalaning bazis yechimlari orasidan (1.4.25) shartlarni qanoatlantiradigani topiladi va u berilgan masalaning optimal yechimi bo‘ladi (4- jadval).

Shunday qilib, (1.4.26)—(1.4.27) masalaning optimal yechimi topiladi:

$$x_1^* = 2,\ x_2^* = 4,\ \lambda_1^* = 0,\quad \lambda_2^* = 0\,,\quad \upsilon_1^* = 0,$$

$$\upsilon_2^* = 0,\quad \upsilon_3^* = 3,\quad \upsilon_4^* = 1\,.$$

(1.4.25) shartlarni tekshirib ko‘rish mumkin.

$$x_1 \cdot \upsilon_1 = 2 \cdot 0 = 0,\quad x_2 \cdot \upsilon_2 = 4 \cdot 0 = 0,$$

$$\lambda_1 \cdot \upsilon_3 = 0 \cdot 3 = 0\,,\quad \lambda_2 \cdot \upsilon_4 = 0 \cdot 1$$

Demak, masalaning yechimi $x_1^* = 2,\ x_2^* = 4,\ Z\left(X^*\right) = 96$ bo‘ladi.

2- masala. $F = -2x_1^2 - 2x_2^2 + 4x_1 + 6x_2 - 2x_1x_2 \to max$ maqsad funksiyasining quyidagi cheklashlarda maksimumini toping $\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 2; \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}$.

Lagranj funksiyasi tuziladi:

$$L(X;\Lambda) = -2x_1^2 - 2x_2^2 + 4x_1 + 6x_2 - 2x_1x_2 + \lambda(2 - x_1 - 2x_2).$$

$L(X,\Lambda)$ funksiyaga Kun—Takker teoremasini qo'llab egar nuqta uchun quyidagi shartlar olinadi:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial x_1} &= -4x_1 + 4 - 2x_2 - \lambda \le 0; \\ \frac{\partial L}{\partial x_2} &= -2x_1 + 6 - 4x_2 - 2\lambda \le 0; \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda_1} &= 2 - x_1 - 2x_2 \ge 0. \end{aligned}\right\} \qquad (1.4.28)$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial x_1} x_1 &= 0; \\ \frac{\partial L}{\partial x_2} x_2 &= 0; \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda_1} \lambda_1 &= 0; \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda_2} \lambda_2 &= 0. \end{aligned}\right\} \qquad (1.4.29)$$

(1.4.28) tengsizliklar sistemasi yechimlari ichidan (1.4.29) tenglamalar sistemasini qanoatlantiradigani tanlanadi. Yuqorida ko'rsatilgandek, berilgan kvadratik programmalashtirish masalasi yechimini (1.4.28) tengsizliklar sistemasi bilan aniqlanadigan yechimlar ko'pburchagining uchlaridagi qiymatlardan qidirish kerak. Manfiymas qo'shimcha o'zgaruvchilar $\upsilon_1, \upsilon_2, \upsilon_3$ kiritib,

$$\left|\begin{array}{l} 4x_1 + 2x_2 + \lambda \ge 4, \\ 2x_1 + 4x_2 + 2\lambda \ge 6, \\ x_1 + 2x_2 \le 2, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, \lambda \ge 0, \end{array}\right| \begin{array}{l} -\upsilon_1; \\ -\upsilon_2; \\ +\upsilon_3; \\ \end{array} \qquad (1.4.30)$$

sistema kanonik ko'rinishga keltiriladi:

$$\left.\begin{array}{l} x_1 - 2x_2 + \lambda - \upsilon_1 = 4; \\ 2x_1 + 4x_2 + 2\lambda - \upsilon_2 = 6; \\ x_1 + 2x_2 + \upsilon_3 = 2. \end{array}\right\} \qquad (1.4.31)$$

(1.4.29) shartlardan kelib chiqadiki, qo'shimcha o'zgaruvchilar quyidagi shartlarni qanoatlantiradi:

$$x_1\upsilon_1 = 0, \quad x_2\upsilon_2 = 0, \quad \lambda\upsilon_3 = 0. \qquad (1.4.32)$$

(1.4.31) sistemaning tayanch yechimlarini topish uchun sun'iy bazis o'zgaruvchilar $\omega_1 \ge 0$, $\omega_2 \ge 0$ kiritiladi va chiziqli programmalashtirish masalasi olinadi:

$$\min F = M\omega_1 + M\omega_2 . \qquad (1.4.33)$$

$$\left.\begin{array}{l} 4x_1 - 2x_2 + \lambda - \upsilon_1 + \omega_1 = 4; \\ 2x_1 + 4x_2 + 2\lambda - \upsilon_2 + \omega_2 = 6; \\ x_1 + 2x_2 + \upsilon_3 = 2; \\ \\ x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0; \quad \lambda \ge 0, \\ \upsilon_1 \ge 0. \quad \upsilon_2 \ge 0; \quad \upsilon_3 \ge 0, \quad ; \\ \omega_1 \ge 0, \quad \omega_2 \ge 0. \end{array}\right\} \qquad (1.4.34)$$

(1.4.33)—(1.4.34) masalaning bazis yechimlari orasidan (1.4.32) shartlarni qanoatlantiradigani topiladi. U berilgan masalaning optimal yechimi bo'ladi (5- jadval).

(1.4.33)—(1.4.34) masalaning bazis optimal yechimi quyidagidan iborat:

$$x_1^* = \frac{1}{3}, \; x_2^* = \frac{5}{6}, \; \lambda = 1, \; \upsilon_1^* = 0, \; \upsilon_2^* = 0, \; \upsilon_3^* = 0, .$$

5- jadval.

Bazis	C_B	A_0	0	0	0	0	0	0	M	M
			x_1	x_2	λ	υ_1	υ_2	υ_3	ω_1	ω_2
ω_1	M	4	4	2	1	−1	0	0	1	0
ω_2	M	6	2	4	2	0	−1	0	0	1
υ_3	0	2	1	2	0	0	0	1	0	0
Maqsad funksiyasi		$10M$	$6M$	$6M$	$3M$	$-M$	$-M$	0	0	0
x_1	0	1	1	1/2	1/4	−1/4	0	0	1/4	0
ω_2	M	4	0	3	3/2	1/2	−1	0	−1/2	1
υ_3	0	1	0	3/2	−1/4	1/4	0	1	−1/4	0
Maqsad funksiyasi		$10M$	$6M$	$6M$	$3M$	$-M$	$-M$	0	$-3/2M$	0
x_1	0	2/3	1	0	1/3	−1/3	0	−1/3	1/3	0
ω_2	M	2	0	0	2	0	−1	−2	0	1
x_2	0	2/3	0	1	−1/6	1/6	0	2/3	−1/6	0
Maqsad funksiyasi		$2M$	0	0	$2M$	$-M$	$-2M$	$-M$	$-M$	0
x_1	0	1/3	1	0	0	−1/3	1/6	0		
λ	0	1	0	0	1	0	−1/2	−1		
x_2	0	5/6	0	1	0	1/6	0	1/2		
Maqsad funksiyasi		0	0	0	0	0	0	0		

(1.4.32) shartlarning bajarilishini tekshirib ko'rish mumkin.

$$x_1\upsilon_1 = 0,\ x_2\upsilon_2 = 0,\quad \lambda\upsilon_3 = 0.$$

Shunday qilib, berilgan masalaning yechimi topildi:

$$x_1^* = \frac{1}{3},\quad x_2^* = \frac{5}{6},\quad F\left(X^*\right) = 96.$$

5- §. Geometrik programmalashtirish

Chiziqsiz programmalashtirishning maxsus bo'limlaridan biri geometrik programmalashtirishdir. Unga 1964- yilda P.Daffin va K.Zener tomonidan asos solingan. Geometrik programmalashtirish usuliga ko'ra maqsad funksiyasi maxsus ko'rinishda bo'lganda berilgan masalaning yechimini unga ikki yoqlama masalaning yechimidan topish va qator hisoblashlarni yengillashtirish mumkin. Ko'pgina iqtisodiy masalalarni yechishda masalaning maqsad funksiyasi quyidagi ko'rinishda beriladi:

$$Z = \sum_{j=1}^{n} u_j, \text{ bunda}$$

$$u_j = c_j \prod_{i=1}^{m} x_i^{a_{ij}}, \quad j = \overline{1,n}, \quad c_j > 0, \quad n \text{ — chekli.}$$

a_{ij} daraja ko'rsatkichlari, ixtiyoriy haqiqiy sonlar. $c_j > 0$ bo'lgani uchun P.Daffin va K.Zener Z maqsad funksiyasini musbat hadli *pozinom* deb ataganlar. Masalani geometrik programmalashtirish usullari bilan yechish o'rta arifmetik va o'rta geometrik miqdorlarni bog'lovchi Koshi tengsizligini umumlashtirishga asoslangan [17]. Ba'zi iqtisodiy masalalarni *tengsizliklar usuli* bilan yechishni ko'rib chiqaylik. Unda klassik tengsizliklardan ya'ni, o'rta miqdorlar va ular orasidagi munosabatlardan foydalaniladi.

1. Tengsizliklar usuli

Bizga n ta musbat miqdor $x_1(t), x_2(t), ..., x_n(t), t \in (a;b)$ berilgan bo'lsin. Ulardan tuzilgan o'rta miqdorlar quyidagicha yoziladi:

$$H_n = \frac{1}{\frac{1}{n}\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + ... + \frac{1}{x_n}\right)} \text{ — o'rta garmonik miqdor,}$$

$$\varGamma_n = \sqrt[n]{x_1 x_2 ... x_n} \text{ — o‘rta geometrik miqdor,}$$

$$A_n = \frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n} \text{ — o‘rta arifmetik miqdor,}$$

$$D_n = \sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2}{n}} \text{ — o‘rta kvadratik miqdor.}$$

Mazkur miqdorlar orasida quyidagi tengsizliklar o‘rinli:

$$H_n \le \varGamma_n \le A_n \le D_n. \qquad (1.5.1)$$

Bu miqdorlar $x_1 = x_2 = ... = x_n$ bo‘lgandagina bir-biriga teng. Bu tengsizliklarni turli usullar bilan isbotlash mumkin [2].

Iqtisodiy masalalarni yechishda

$$\varGamma_n \le A_n \qquad (1.5.2)$$

tengsizlikdan foydalanish usuli ko‘rib chiqiladi. Bunda ikki hol yuz beradi.

1- hol. Agar

$$x_1 + x_2 + ... x_n = a; \; a = \text{const}$$

bo‘lsa, u holda (1.5.2) tengsizlik ushbu

$$\sqrt[n]{x_1 x_2 ... x_n} \le \frac{a}{n}$$

ko‘rinishga keladi. Undan $x_1 \cdot x_2 \cdot ... \cdot x_n \le \left(\frac{a}{n}\right)^n$ kelib chiqadi.

Bundan ko‘rinadiki,

$$\max(x_1 \cdot x_2 \cdot ... \cdot x_n) = \left(\frac{a}{n}\right)^n, \; x_1 = x_2 = ... = x_n = \frac{a}{n}. \qquad (1.5.3)$$

Shunday qilib, quyidagi masala hosil bo‘ladi:

$$\begin{gathered} f = x_1 \cdot x_2 \cdot ... \cdot x_n \to \max, \\ x_1 + x_2 + ... + x_n = a; a = \text{const}, \\ x_1 > 0, x_2 > 0, ..., x_n > 0. \end{gathered} \qquad (1.5.4)$$

Bu masala *shartlari tengliklar bilan berilgan shartli ekstremum masalasi* deyiladi va u Lagranjning aniqmas ko'paytuvchilar usuli bilan yechiladi. Ammo ko'rilayotgan maxsus holda (1.5.4) masalaning yechimi (1.5.3) orqali osongina yoziladi.

1- masala. Yarim perimetri $x_1 + x_2 = p$ bo'lgan to'g'ri to'rtburchak shaklidagi maydon yuzi tomonlari qanday bo'lganda eng katta bo'ladi?

Yechish. Bu masalaning matematik modeli quyidagi ko'rinishda bo'ladi:

$$\begin{cases} x_1 x_2 \to \max, \\ x_1 + x_2 = p. \end{cases}$$

(1.5.4) dan bu masala uchun $n = 2$, $a = p$ bo'lib, masalaning yechimi quyidagi ko'rinishida osongina yoziladi:

$$\max(x_1 x_2) = \left(\frac{p}{2}\right)^2, \quad x_1 = x_2 = \frac{p}{2}.$$

2- masala. Tomoni p ga teng bo'lgan kvadrat shaklidagi tunuka burchaklaridan qanday o'lchamdagi kvadratchalar qirqib olib, eng katta hajmli usti ochiq yashik yasash mumkin?

Yechish. Kvadratchaning tomonini x deyilsa, $0 < x < p/2$ bo'ladi. Unda yashik hajmi $V = (p-2x)^2 x$ formula bilan aniqlanadi. Agar hajm formulasini $V = \frac{1}{4} \cdot 4x \cdot (p-2x) \cdot (p-2x)$ ko'rinishda yozib olib, quyidagi belgilashlar kiritilsa,

$$x_1 = 4x, \; x_2 = x_3 = p - 2x$$

$x_1 + x_2 + x_3 = 2p$ bo'ladi. Shuning uchun (1.5.4) ga ko'ra

$\max V = \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{2p}{3}\right)^3$, bo'ladi. $4x = p - 2x$ dan $x_0 = p/6$ kelib chiqadi. Demak, tomoni p ga teng bo'lgan kvadrat shaklidagi tunukaning uchlaridan tomoni $p/6$ ga teng bo'lgan kvadratchalar qirqib, eng katta hajmli yashik yasash mumkin.

3- masala. Ushbu

$$f = 2x(3-x) \to \max, \quad 0 < x < 3$$

masalani yeching.

Yechish. Agar $x_1 = x,\ x_2 = 3 - x$ desak, $x_1 + x_2 = 3 = \text{const}$ bo'ladi. Shuning uchun bu masalaning yechimi quyidagicha bo'ladi:

$$\max[2x(3-x)] = 2(3/2)^2 = \frac{9}{2}.$$

Endi $x_1 = x_2$ tenglikka ko'ra, $x = 3 - x$, $2x = 3$; $x_0 = 3/2$; topiladi. Shunday qilib masalaning yechimini bunday yozish mumkin:

$$\max f = f(3/2) = \frac{9}{2}.$$

4- masala. $f = 3x\sqrt[3]{1-5x} \to \max,\ 0 < x < \frac{1}{5}$ masalaning yechimini toping.

Yechish. Funksiyaning ko'rinishi o'zgartirib yoziladi: $f = 3\sqrt[3]{x^3(1-5x)}$, so'ngra g funksiyani kiritish yo'li bilan quyidagi yordamchi masalaga kelamiz. $g = x^3(1-5x) \to \max$, $0 < x < \frac{1}{5}$. f quyidagi munosabatdan topiladi:

$f = 3\sqrt[3]{g}$, $x_1 = x_2 = x_3 = \frac{5x}{3}$ $x_4 = 1 - 5x$ belgilashlarga ko'ra masalaning

$$x_1 + x_2 + x_3 = \frac{5x}{3} + \frac{5x}{3} + \frac{5x}{3} + 1 - 5x = 1 = \text{const}$$

sharti bajariladi. Yordamchi masalaning yechimi $\max g = \left(\frac{1}{4}\right)^4$.

Shundan so'ng bu qiymatni olib borib f ifodasiga qo'yib

$\max f = 3\sqrt[3]{\left(\frac{1}{4}\right)^4}$ topiladi. Funksiyaga maksimum beruvchi nuqtani topish uchun $x_1 = x_2 = x_3 = x_4$ dan foydalanib, $\frac{5x}{3} = 1 - 5x \quad \frac{20x}{3} = 1 \Rightarrow x = \frac{3}{20}$ ligidan yoki (1.5.3)dan yechim topiladi: $\frac{5x}{3} = \frac{1}{4} \Rightarrow 20x = 3 \Rightarrow x_0 = \frac{3}{20}$.

2- hol. Agar $x_1 \cdot x_2 \cdot ... \cdot x_n = b, \quad b = \text{const}$ bo'lsa, u holda (1.5.2) tengsizlik

$$\sqrt[n]{b} \le \frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n}$$

ko'rinishda yoziladi. Undan $n\sqrt[n]{b} \le x_1 + x_2 + ... + x_n$ ligi kelib chiqadi.

$$\begin{aligned} &\min(x_1 + x_2 + ... + x_n) = n\sqrt[n]{b}, \\ &x_1 = x_2 = ... = x_n = \sqrt[n]{b}. \end{aligned} \tag{1.5.5}$$

Shunday qilib, quyidagi masala hosil bo'ladi:

$$\begin{aligned} &f = x_1 + x_2 + ... + x_n \to \min, \\ &x_1 \cdot x_2 \cdot ... \cdot x_n = b; \quad b = \text{const}, \\ &x_1 > 0, x_2 > 0, ..., x_n > 0. \end{aligned} \tag{1.5.6}$$

Bu masala shartlari tengliklar bilan berilgan shartli ekstremum masalasi deyiladi va u Lagranjning aniqmas ko'paytuvchilar usuli bilan yechiladi. Ammo ko'rilayotgan maxsus holda (1.5.6) masalaning yechimi (1.5.5) orqali osongina yoziladi.

5- masala. Yuzasi S bo'lgan to'g'ri to'rtburchak shaklidagi maydonning tomonlari qanday bo'lganda perimetri eng kichik bo'ladi?

Yechish. Ushbu $x_1 + x_2 \to \min$, $x_1 \cdot x_2 = S$ masala berilgan, bunda x_1, x_2 — maydonning tomonlari. Uning yechimi:

$$\min(x_1 + x_2) = 2\sqrt{S}, \quad x_1 = x_2 = \sqrt{S}.$$

Demak, maydon kvadrat shaklida bo'lsa, uning perimetri eng kichik bo'ladi.

6- masala. Hajmi V bo'lgan silindr shaklidagi konserva idishi asosining radiusi r va balandligi h qanday bo'lganda uni yasash eng arzon tushadi?

Yechish. Idishning hajmi $V = \pi r^2 h$. U eng arzon tushishi uchun to'la sirti eng kam bo'lishi kerak. Shundagina unga eng kam material ketadi. Demak, bu masala quyidagicha qo'yilgan:

$$S_T = 2\pi r^2 + 2\pi rh, \to \min, \quad r > 0$$

$$V = \pi r^2 h.$$

Agar $h = V/(\pi r^2)$ ni S_T ifodasiga qo'yilsa,

$$S(r) = 2\pi r^2 + (2V)/r \to \min, \quad r > 0$$

shartsiz ekstremum masalasi hosil bo'ladi. Agar bu funksiya ushbu $S(r) = 2\pi r^2 + V/r + V/r$ ko'rinishda yozilsa, $x_1 = 2\pi r^2$, $x_2 = x_3 = V/r$ bo'lganda $x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 =$ $= 2\pi r^2 (V/r)(V/r) = 2\pi V^2 = b$ bo'ladi. Demak, yechimni yozish mumkin: $\min S(r) = 3\sqrt[3]{2\pi V^2}$; $x_1 = x_2 = x_3$ ga ko'ra, $2\pi r^2 = V/r$ dan $r_0 = \sqrt[3]{\dfrac{V}{2\pi}}$, $h_0 = 2r_0$ kelib chiqadi. Demak, hajmi V bo'lgan silindr shaklidagi konserva idishi eng arzon tushishi uchun uning o'q kesimi kvadrat bo'lishi lozim.

7- masala. $f = 5\sqrt{x} + \dfrac{2}{\sqrt[3]{x}} \to \min$, $x > 0$ masalani yeching.

Yechish. Agar $x_1 = x_2 = 2,5\sqrt{x}$, $x_3 = x_4 = x_5 = \dfrac{2}{3\sqrt[3]{x}}$

desak, $x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4 \cdot x_5 = \dfrac{2,5\sqrt{x} \cdot 2,5\sqrt{x} \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2}{3\sqrt[3]{x} \cdot 3\sqrt[3]{x} \cdot 3\sqrt[3]{x}} = \dfrac{50}{27} = \text{const}$

bo'ladi. U holda $f(x)$ quyidagicha yoziiladi:

$$f = 2,5\sqrt{x} + 2,5\sqrt{x} + \frac{2}{3\sqrt[3]{x}} + \frac{2}{3\sqrt[3]{x}} + \frac{2}{3\sqrt[3]{x}} \to \min.$$

$x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = x_5$ ga ko'ra (1.5.6) dan $\min f = 5 \cdot \sqrt[5]{\dfrac{50}{27}}$

bo'ladi.

$$2,5\sqrt{x} = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}} \Rightarrow 7,5x^{5/6} = 2 \Rightarrow x^{5/6} = \frac{2}{7,5} \Rightarrow x_0 = \left(\frac{2}{7,5}\right)^{6/5}$$

$$2,5\sqrt{x} = \left(\frac{50}{27}\right)^{1/5}.$$

$$\sqrt{x} = \left(\frac{50}{27}\right)^{1/5} \cdot \frac{1}{2,5} \Rightarrow x = \left(\frac{50}{27 \cdot 2,5^5}\right)^{2/5} = \left(\frac{2^3 \cdot 6,25}{3^3 \cdot 2,5^3 \cdot 2,5^2}\right)^{2/5} =$$

$$= \left(\frac{2}{2,5 \cdot 3}\right)^{3 \cdot \frac{2}{5}} = \left(\frac{2}{7,5}\right)^{6/5} = x_0.$$

x topiladi va yuqorida topilgan x_0 bilan taqqoslanadi.

Demak, masalaning yechimi $\min f = 5\sqrt[5]{\dfrac{50}{27}}$.

8- masala. $f = 5x + \dfrac{3}{10x^2} \to \min$, $x > 0$ ni yeching.

Yechish. $x_1 = 2,5x$ $x_2 = 2,5x$ $x_3 = \dfrac{3}{10x^2}$ deb belgilansa, funksiyani ko'rinishi quyidagicha bo'ladi:

$$f=\frac{5x}{2}+\frac{5x}{2}+\frac{3}{10x^2}\to\min.$$

$x_1\cdot x_2\cdot x_3=\frac{5x}{2}\cdot\frac{5x}{2}\cdot\frac{3}{10x^2}=\frac{15}{8}=\text{const}$ shart bajarilgani uchun (1.5.5)dan funksiyaning minimumini topish mumkin

$\min f=3\sqrt[3]{\frac{15}{8}}$, $x_1=x_2=x_3=\sqrt[3]{\frac{15}{8}}$, bu tengliklardan yuqoridagi belgilashlar orqali x topiladi $2{,}5x=\sqrt[3]{\frac{15}{8}}$, $x_0=\sqrt[3]{\frac{3}{25}}$.

Bu yechimni tekshirish uchun $x_2=x_3$dan $\frac{5x}{2}=\sqrt[3]{\frac{15}{8}}$;

$x=\sqrt[3]{\frac{15\cdot 8}{8\cdot 125}}=\sqrt[3]{\frac{3}{25}}$ hosil bo'ladi yoki $x_1=x_3$ dan

$2{,}5x=\frac{3}{10x^2}$; $25x^3=3$; $x^3=\frac{3}{25}\Rightarrow x=\sqrt[3]{\frac{3}{25}}$ kelib chiqadi.

Demak, yechim haqiqatan to'g'ri topilgan:

$$\min f=3\sqrt[3]{\frac{15}{8}},\ x=\sqrt[3]{\frac{3}{25}}.$$

2. Pozinomlar usuli

Pozinom funksiyalarning ma'lum turidan iborat bo'lib, *pozinom* so'zi musbat aniqlangan ma'noni anglatadi. Pozinomlar muhim xossalarga ega va ulardan iqtisodiy masalalarni yechishda foydalanish mumkin [17].

1- ta'rif. Ushbu $f(x)=cx^a$, $c>0$, $a\in R$, $x>0$ ko'rinishidagi funksiya *bir o'zgaruvchili bir hadli pozinom* deyiladi.

2- ta'rif. Ushbu

$$f(x)=c_1x^{a_1}+c_2x^{a_2}+\ldots+c_nx^{a_n},$$

$$c_i>0,\ a_i\in R,\ i=1,2,\ldots,n;\ x>0 \qquad (1.5.7)$$

ko'rinishidagi funksiya *bir o'zgaruvchili* n *hadli pozinom* deyiladi.

3- ta'rif. Agar (1.5.7) pozinom uchun ushbu

$$c_1a_1 + c_2a_2 + ... + c_na_n = 0 \qquad (1.5.8)$$

sonli tenglik o'rinli bo'lsa, (1.5.7) pozinom *regular* deyiladi.

1- teorema. Agar (1.5.7) pozinom *noregular* bo'lib, biror a_i va $a_j, i \neq j$ juftlik uchun $a_ia_j < 0$ tengsizlik o'rinli bo'lsa. (1.5.7) pozinomni $x = x_0y$ almashtirish yordamida yangi o'zgaruvchi "y" bo'yicha regular pozinomga keltirish mumkin va unda x_0 ushbu

$$c_1a_1x^{a_1} + c_2a_2x^{a_2} + ... + c_na_nx^{a_n} = 0 \qquad (1.5.9)$$

tenglamaning musbat yechimidan iborat.

Agar (1.5.9) tenglama bir necha musbat yechimga ega bo'lsa, ulardan ixtiyoriysini olish mumkin.

Ko'pgina iqtisodiy masalalarni yechish pozinom ko'rinishidagi funksiyalarning eng kichik qiymatini topishga keltiriladi. Bunda quyidagi teoremalardan foydalaniladi:

2- teorema. Agar (1.5.7) pozinom regular bo'lsa u o'zining eng kichik qiymatiga $x = 1$ bo'lganda erishadi, ya'ni,

agar $\sum_{i=1}^{n} c_ia_i = 0$ bo'lsa,

$$\min f = \min\left(\sum_{i=1}^{n} c_ix^{a_i}\right) = \sum_{i=1}^{n} c_i = f(1) \qquad (1.5.10)$$

bo'ladi.

Misollar

1) $f(x) = x + 1/x, \quad x > 0$. (1.5.8)dan $1 \cdot 1 + 1 \cdot (-1) = 0$. Bu regular pozinom, demak, $\min f(x) = f(1) = 1 + 1 = 2$.

2) $f(x) = x + x^{-\sin^2\alpha} + x^{-\cos^2\alpha}, \quad \alpha \in R, \quad x > 0$. Bu ham regular pozinom, chunki $1 \cdot 1 + 1 \cdot (-\sin^2\alpha) + 1 \cdot (-\cos^2\alpha) = 0$ Shuning uchun $\min f = f(1) = 3$.

3) $f(x) = 7x + \frac{3}{x} + \frac{2}{x^2}$, $x > 0$. Bu regular pozinom, chunki $7 \cdot 1 + 3 \cdot (-1) + 2 \cdot (-2) = 0$.

Demak, $\min f = f(1) = 12$.

3- teorema. Agar (1.5.7) pozinom noregular bo'lib, $a_i \cdot a_j < 0$, $i \neq j$ larda x_0 son (1.5.9) tenglamaning musbat yechimi bo'lsa, shu pozinim o'zining eng kichik qiymatiga $x = x_0$ bo'lganda erishadi, ya'ni, $\min f = f(x_0)$, $f(x_0 y) = f^*(y)$; $\min f^*(y) = f^*(1)$.

10- masala. $xy = S$, $x + y \to \min$.

Yechish. Bir o'zgaruvchini ikkinchisi orqali ifodalansa, quyidagi ma'lum masala hosil bo'ladi: $f(x) = x + S/x \to \min$. Agar $S = 1$ bo'lsa, bu funksiya regular pozinom va $\min f = 1 + 1 = 2$ bo'ladi. Endi $S \neq 1$ bo'lsin. Unda bu funksiya regular pozinom emas va uni regular ko'rinishga keltiriladi, (1.5.9)dan x_0 topiladi:

$$1 \cdot 1 \cdot x + S \cdot (-1) \cdot 1/x = 0 \to x_0 = \sqrt{S} (y_0 = \sqrt{S}).$$

Shuning uchun, 3- teoremadan

$$\min f = f(\sqrt{S}) = \sqrt{S} + \frac{S}{\sqrt{S}} = \quad = \sqrt{S} + \frac{\sqrt{S} \cdot \sqrt{S}}{\sqrt{S}} = 2\sqrt{S}.$$

Haqiqatan, pozinom regular ko'rinishga keltiriladi:

$$f(x) = f(x_0 y) = f(\sqrt{S} y) = \sqrt{S} \cdot y + \frac{S}{\sqrt{S} \cdot y} = \sqrt{S} y + \frac{\sqrt{S}}{y}.$$

Shunday qilib, $f(x) = x + \frac{S}{x} = f^*(y) = \sqrt{S}\left(y + \frac{1}{y}\right)$, $\min f = f(\sqrt{S}) = 2\sqrt{S}$.

11- masala. Eng arzon konserva idishi haqidagi masalani pozinomlar usuluda yechib, ko'raylik (6- masalaga qarang). Unda, quyidagi $S(r) = 2\pi r^2 + \quad + (2V)/r \to \min$, $r > 0$ masalani yechish lozim edi.

Yechish. $S(r)$ funksiyaning regularligi tekshiriladi:

$$2\pi\cdot 2+2V(-1)+=2(2\pi-V).$$

Agar $V=2\pi$ bo'lsa, pozinom regular bo'ladi. Ammo iqtisodiy ma'nosi bo'yicha hech qachon hajm irratsional qilib tanlanmaydi. Shuning uchun $V\neq 2\pi$ deylik. Unda (1.5.9)dan r_0 topiladi:

$$2\pi\cdot 2r^2+2V(-1)\cdot 1/r=0 \;\to\; r_0=\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}.$$

Demak, $\min S=S(r_0)$. Endi $S(r)$ regular ko'rinishga keltiriladi:

$$S(r)=S(r_0\cdot y)=2\pi r_0^2y^2+\frac{2V}{r_0y}=\frac{1}{r_0}\left(2\pi r_0^3y^2+\frac{2V}{y}\right)=$$

$$=\frac{1}{r_0}\left(2\pi\frac{V}{2\pi}y^2+\frac{2V}{y}\right)=\frac{1}{r_0}\left(Vy^2+\frac{2V}{y}\right).$$

Shunday qilib, $f^*(y)=\frac{1}{r_0}\left(Vy^2+\frac{2V}{y}\right)$ pozinom regular, chunki

$V\cdot 2+2V\cdot(-1)=0.$

Demak,

$$\min f=f(r_0)=f^*(1)=\sqrt[3]{\frac{2\pi}{V}}(V+2V)=3V\sqrt[3]{\frac{2\pi}{V}}=3\sqrt[3]{2\pi V^2}.$$

Hajmi V bo'lgan silindr shaklidagi konserva idishi asosining radiusi r_0 va balandligi $h_0=2r_0$ bo'lganda uni yasash eng arzon tushar ekan.

12- masala. Tengsizliklar usuli bilan yechilgan 8-masalani pozinomlar usulida yechaylik. $f(x)=5x+\frac{3}{10x^2}$ funksiyaning eng kichik qiymatini pozinomlar usulida toping.

Yechish. Funksiyaning regularligi tekshiriladi:

$$c_1 = 5; \quad c_2 = \frac{3}{10};$$
$$\alpha_1 = 1; \quad \alpha_2 = -2;$$
$$5 \cdot 1 - \frac{3}{10} \cdot 2 \neq 0.$$

Quyidagi almashtirish bajariladi:

$x = x_0 \cdot y$ bunda x_0 quyidagi tenglamadan topiladi:

$$5 \cdot 1 \cdot x - \frac{3}{10} \cdot 2 \cdot \frac{1}{x^2} = 0;$$
$$5x = \frac{3}{5x^2}; \; 25x^3 = 3; \; x^3 = \frac{3}{25}; x_0 = \sqrt[3]{\frac{3}{25}}.$$

Berilgan pozinom $x = \sqrt[3]{\frac{3}{25}} \cdot y$ almashtirish orqali regular pozinomga keltirildi. Haqiqatan ham regularlik sharti bajariladi:

$$f^*(y) = 5 \cdot \sqrt[3]{\frac{3}{25}} \cdot y + \frac{3}{10 \cdot \sqrt[3]{\left(\frac{3}{25}\right)^2} \cdot y^2};$$

$$c_1 = 5 \cdot \sqrt[3]{\frac{3}{25}}; \qquad c_2 = \frac{3}{10} \cdot \left(\frac{3}{25}\right)^{-2/3};$$
$$\alpha_1 = 1; \qquad \alpha_2 = -2;$$

$$5 \cdot \left(\frac{3}{25}\right)^{\frac{1}{3}} - \frac{2 \cdot 3}{10} \cdot \left(\frac{3}{25}\right)^{-\frac{2}{3}} = \frac{5 \cdot 3^{1/3}}{5^{2/3}} - \frac{3^{1-\frac{2}{3}}}{5^{1-\frac{4}{3}}} = \frac{3^{1/3}}{5^{-1/3}} - \frac{3^{1/3}}{5^{-13}} = 0.$$

Bu pozinomning minimum qiymati topiladi. Natijada 8-masalaning yechimi bilan bir xil yechim olinadi:

$$\min f = \min f^* = f^*(1) = 5\cdot\sqrt[3]{\frac{3}{25}} + \frac{3}{10}\cdot\left(\frac{3}{25}\right)^{-\frac{2}{3}} = \frac{3\sqrt[3]{15}}{2}.$$

13- masala. $f(x) = 5\sqrt{x} + \frac{2}{\sqrt[3]{x}}$ ning eng kichik qiymatini toping.

Yechish. Avval bu funksiyani regular pozinom bo'lish yoki bo'lmasligi tekshiriladi:

$$c_1 = 5, \qquad c_2 = 2,$$
$$\alpha_1 = 1/2, \qquad \alpha_2 = -1/3,$$
$$5\cdot\frac{1}{2} - 2\cdot\frac{1}{3} \neq 0,$$

Demak, berilgan pozinom regular emas. $x = x_0 \cdot y$ almashtirish bajarilsa, bunda x_0 quyidagi tenglamadan topiladi:

$$5\cdot\frac{1}{2}\cdot\sqrt{x} - 2\cdot\frac{1}{3}\cdot(x)^{-\frac{1}{3}} = 0.$$

Bu tenglamani yechib

$$5\cdot 3\cdot x^{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}} = 2\cdot 2;$$
$$15\cdot x^{\frac{5}{6}} = 4; \quad x^{\frac{5}{6}} = \frac{4}{15}; \quad x_0 = \left(\frac{4}{15}\right)^{6/5}$$

topiladi.

Berilgan pozinom $x = \left(\frac{4}{15}\right)^{6/5}\cdot y$ almashtirish orqali regular pozinomga keltiriladi va yuqoridagi masalalardagidek, uning eng kichik qiymati topiladi: $\min f = f\left(\left(\frac{4}{15}\right)^{6/5}\right)$.

1- namunaviy hisob topshiriqlari

1.1.1—1.1.6. Quyidagi funksiyalarning ekstremumlarini toping:

1) $Z = x^3 + y^3 - 3xy;$

2) $Z = x^3y^2(12 - x - y), \quad x > 0 \quad y > 0;$

3) $Z = x^2 + xy + y^2 + x - y + 1;$

4) $f = x^3 + x;$

5) $f = x^4 + x^2;$

6) $f = 4x^4 - x^2 + 5.$

1.1.7—1.1.10. Quyidagi funksiyalarning shartli ekstremumlarini grafik usulda toping:

$f = 3x_1 + x_2.$

7) $\begin{cases} x_1^2 + x_2^2 \le 40, \\ x_1^2 + x_2^2 \ge 4, \\ x_i \ge 0. \end{cases}$

$f = x^2 + y^2 - 2x - 10y + 26.$

8) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 \ge -4, \\ 5x_1 + 2x_2 \le 20, \\ x_i \ge 0. \end{cases}$

$f = x_1^2 + 2x_2 - 3.$

9) $\begin{cases} x_1^2 + x_2^2 \le 10, \\ x_i \ge 0. \end{cases}$

10) $z = x_1x_2.$
$0 \le x_1 \le 3,$
$2x_1 + x_2 \le 8.$

1.1.11—1.1.13. Quyidagi funksiyalarning shartli ekstremumlarini yo‘qotish usuli bilan yeching:

11) $f = x_1^2 + x_2^2; \qquad x_1 + x_2 = 1;$

12) $f = x_1^2 - x_2^2; \qquad x_1^2 + x_2^2 \le 16;$
$x_1 - x_2 = 4;$

13) $f = 3x_1^2 + 2x_2^2 - 3x_1 + 1, \quad x_1^2 + x_2^2 = 4.$

1.1.14.—1.1.20. Quyidagi funksiyalarning shartli ekstremumlarini grafik usulda toping:

14) $f = x_1x_2, \qquad x_1^2 + x_2^2 = 2.$

15) $f = x_1 + x_2, \qquad \dfrac{1}{x_1} + \dfrac{1}{x_2} = 1.$

16) $f = \dfrac{1}{x_1} + \dfrac{1}{x_2}, \quad \dfrac{1}{x_1^2} + \dfrac{1}{x_2^2} = 1.$

17) $f = x_1^3 + x_2^3, \quad x_1 + x_2 = 2, \quad x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0.$

18) $Z = x_1 - 2x_2 + 2x_3 \to \max$

$$x_1^2 - x_2^2 + x_3^2 = 1.$$

19) $Z = x_1 \cdot x_2 + x_2 \cdot x_3 \to \max(\min)$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2, \\ x_2 + x_3 = 3. \end{cases}$$

20) $Z = x_1 + x_2 \to \max$

$$x_1^2 + x_2^2 = 1.$$

1.2.1.—1.2.25. Quyidagi masalalarni tengsizliklar usulidan foydalanib yeching:

1. $f(x) = \dfrac{x}{n} + \dfrac{4n}{3x^2} \to \min, \quad x > 0;$

2. $f(x) = \dfrac{n}{4}x^2 + \dfrac{5}{nx} \to \min, \quad x > 0;$

3. $f(x) = \dfrac{2}{n}x + \dfrac{4n}{3x^2} \to \min, \quad x > 0;$

4. $f(x) = \dfrac{n}{3}x^2 + \dfrac{4n}{3x^2} \to \min, \quad x > 0;$

5. $f(x) = nx + \dfrac{3}{2nx^2} \to \min, \quad x > 0;$

6. $f(x) = \frac{1}{3}nx^2 + \frac{3}{nx} \to \min, \quad x > 0;$

7. $f(x) = 2nx + \frac{3}{2nx^2} \to \min, \quad x > 0;$

8. $f(x) = nx^2 + \frac{5}{nx} \to \min, \quad x > 0;$

9. $f(x) = x + \frac{n}{x} \to \min, \quad x > 0;$

10. $f(x) = nx + \frac{2}{x} \to \min, \quad x > 0;$

11. $f(x) = nx + \frac{2}{\sqrt{x}} \to \min, \quad x > 0;$

12. $f(x) = 2x + \frac{n}{\sqrt[3]{x}} \to \min, \quad x > 0;$

13. $f(x) = n\sqrt[3]{x} + \frac{2}{x} \to \min, \quad x > 0;$

14. $f(x) = 2x + \frac{5}{3n\sqrt[4]{x}} \to \min, \quad x > 0;$

15. $f(x) = n\sqrt{x} + \frac{2}{\sqrt[3]{x}} \to \min, \quad x > 0;$

16. $f(x) = \sqrt[4]{x} + \frac{n}{x} \to \min, \quad x > 0;$

17. $f(x) = 2\sqrt[3]{x} + \frac{n}{\sqrt{x}} \to \min, \quad x > 0;$

18. $f(x) = nx + \frac{2}{\sqrt[3]{x}} \to \min, \quad x > 0;$

19. $f(x) = 2\sqrt{x} + \frac{n}{x} \to \min, \quad x > 0;$

20. $f(x) = 2x^2 + \frac{3}{nx} \to \min, \quad x > 0;$

21. $f(x) = \sqrt[3]{x} + \frac{n}{x} \to \min, \quad x > 0;$

22. $f(x) = \sqrt{x} + \frac{n}{\sqrt{x}} \to \min, \quad x > 0;$

23. $f(x) = n\sqrt{x} + \frac{2}{\sqrt[4]{x}} \to \min, \quad x > 0;$

24. $f(x) = \sqrt[3]{x} + \frac{n}{\sqrt[4]{x}} \to \min, \quad x > 0;$

25. $f(x) = \sqrt[4]{x} + \frac{1}{n\sqrt[3]{x}} \to \min, \quad x > 0;$

1.3.1.—1.3.25. Quyidagi masalalarni tengsizliklar usulidan foydalanib, $n = \overline{1,25}$ lar uchun yeching:

1. $f(x) = \frac{4}{n}x^2(5 - x) \to \max, 0 < x < 5.$

2. $f(x) = \frac{1}{3}x^3(3 - nx) \to \max, 0 < x < \frac{3}{n}.$

3. $f(x) = \frac{3}{n}x^2\left(\sqrt{2} - x\right) \to \max, 0 < x < \sqrt{2}.$

4. $f(x) = \frac{1}{5}x^3(4 - nx) \to \max, 0 < x < \frac{4}{n}.$

5. $f(x) = 2x^3(4 - nx) \to \max, 0 < x < \frac{4}{n}.$

6. $f(x) = \frac{n}{3}x^2(4 - x) \to \max, 0 < x < 4.$

7. $f(x) = \frac{n}{2}x^2(1 - x) \to \max, 0 < x < 1.$

8. $f(x)=4x^2(2-nx)\to\max, 0<x<\dfrac{2}{n}.$

9. $f(x)=3x^3\sqrt{1-nx}\to\max, 0<x<\dfrac{1}{n}.$

10. $f(x)=5x\sqrt{n-x^2}\to\max, 0<x<\sqrt{n}.$

11. $f(x)=x^3\sqrt{n-x^3}\to\max, 0<x<\sqrt[3]{n}.$

12. $f(x)=\sqrt{2x(n-3x)}\to\max, 0<x<\dfrac{n}{3}.$

13. $f(x)=\sqrt{x(2-nx^2)}\to\max, 0<x<\sqrt{\dfrac{2}{n}}.$

14. $f(x)=\sqrt[3]{x\left(n-x^3\right)}\to\max, 0<x<\sqrt[3]{n}.$

15. $f(x)=x\sqrt[3]{n-3x^2}\to\max, 0<x<\sqrt{\dfrac{n}{3}}.$

16. $f(x)=\sqrt[3]{4-nx^2}\to\max, 0<x<\dfrac{2}{\sqrt{n}}.$

17. $f(x)=x^2\left(n-x^4\right)\to\max, 0<x<\sqrt[4]{n}.$

18. $f(x)=\sqrt{x}(n-x)\to\max, 0<x<n.$

19. $f(x)=\sqrt[3]{x}(n-2x)\to\max, 0<x<\dfrac{n}{2}.$

20. $f(x)=3x\sqrt[3]{1-nx}\to\max, 0<x<\dfrac{1}{n}.$

1.4.1.—1.4.25. Quyidagi pozinomlarning regularligini tekshiring va uning eng kichik qiymatini toping $(n=\overline{1,25})$:

1. $f(x)=x+\dfrac{n}{x};$

2. $f(x)=nx+\dfrac{2}{x};$

3. $f(x) = n\sqrt[3]{x} + \frac{2}{x}$;

4. $f(x) = n\sqrt[3]{x} + \frac{2}{x}$;

5. $f(x) = 2x + \frac{5}{3n\sqrt[4]{x}}$;

6. $f(x) = n\sqrt{x} + \frac{2}{\sqrt[3]{x}}$;

7. $f(x) = \sqrt[4]{x} + \frac{n}{x}$;

8. $f(x) = 2\sqrt[3]{x} + \frac{n}{\sqrt{x}}$;

9. $f(x) = 2\sqrt{x} + \frac{n}{\sqrt{x}}$;

10. $f(x) = 2x^2 + \frac{3}{nx}$;

11. $f(x) = \sqrt[3]{x} + \frac{n}{x}$;

12. $f(x) = \sqrt[3]{x} + \frac{n}{x}$;

13. $f(x) = \sqrt{x} + \frac{n}{\sqrt{x}}$;

14. $f(x) = n\sqrt{x} + \frac{2}{\sqrt[4]{x}}$;

15. $f(x) = n\sqrt{x} + \frac{2}{\sqrt[4]{x}}$;

16. $f(x) = \sqrt[3]{x} + \frac{n}{\sqrt[4]{x}}$;

17. $f(x) = \sqrt[4]{x} + \frac{1}{n\sqrt[3]{x}}$;

18. $f(x) = \frac{x}{n} + \frac{3n}{2x^2}$;

19. $f(x) = \frac{n}{4}x^2 + \frac{5}{nx}$;

20. $f(x) = \frac{2}{n} + \frac{4n}{3x^2}$;

21. $f(x) = \frac{n}{3}x^2 + \frac{2}{n}$;

22. $f(x) = nx + \frac{3}{2nx^2}$;

23. $f(x) = \frac{1}{3}nx^2 + \frac{3}{nx}$;

24. $f(x) = 2nx + \frac{3}{nx^2}$;

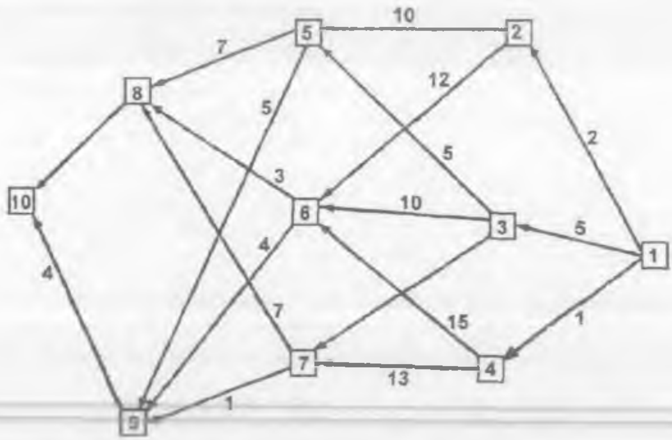
25. $f(x) = nx^2 + \frac{3}{nx}$.

II bob. Dinamik programmalashtirish

1- §. Dinamik programmalashtirish masalalarining umumiy qo'yilishi

Izvosh masalasi. Ilgari izvoshlar asosiy yo'l transporti bo'lib xizmat qilgan. Yo'lovchi quyidagi xarita bo'yicha ma'lum bir joydan ikkinchi joyga izvoshda yo'lga tushadi (2-rasm). Sayohat yo'lovchining sog'ligi va hayoti uchun xavf tug'diruvchi muammolar bilan bog'liq bo'lgani uchun yo'lovchi yo'l oldidan xavfsizlik choralarini ko'rdi [7].

c_{ij} bilan i — holatdan j — holatga borishda xavfsizlik uchun to'lanadigan narx belgilanadi.



2- rasm.

Rasmda c_{ij} ning shartli, sonli qiymatlari ko'rsatilgan. Yo'lovchining maqsadi 1- holatdan 10- holatga boradigan shunday yo'lni tanlashi kerakki, uning yo'l xavfsizligi uchun to'laydigan narxi minimal bo'lsin. Har bir kvadrat xaritada holatlardan birini ifodalaydi. 1- holatdan chiqadigan yo'l variantlaridan qaysi birini olmaylik, 10- holatga borguncha 4 qadamni tashkil etadi. Yo'lovchi quyidagi optimallik prinsipiga amal qiladi, ya'ni o'ziga ma'qul optimal strategiyani tanlaydi.

Optimal strategiya shunday xossaga egaki, biror holatni egallash yo'li qanday bo'lishidan qat'iy nazar, navbatdagi yechim bu holatdan boshlanuvchi yo'l qismi optimal strategiyasiga tegishlidir.

Shunday qilib, yo'lovchi tushunadiki, masalan 6-holatdan chiquvchi optimal yo'l uning qanday marshrut bilan kelishiga bog'liq emas.

Shunga ko'ra u shunday xulosaga keladi: Agar u 5-, 6- va 7- holatlardan chiquvchi optimal yo'lni bilganda edi, u 3-holatdan chiquvchi optimal yo'lni oson aniqlay olardi (agar u shu yo'l orqali o'tishga qaror qilsa). Haqiqatan ham 3-holatdan o'tish narxlarini (c_{35}, c_{36}, c_{37}) avvaldan hisoblangan optimal yo'l (5-, 6-, 7- holatlardan o'tish) narxlariga qo'shish va hosil bo'lgan yig'indilarni taqqoslab, yig'indi minimal bo'lgan holatni tanlash kerak. Shunga o'xshash 2-, 3- va 4- holatlardan chiquvchi optimal yo'llarni topib 1-holatdan o'tuvchi optimal yo'lni aniqlash mumkin. Quyidagi belgilashlar yordamida keltirilgan optimallik prinsipi va uni hisoblash ma'nosini ifodalash mumkin.

$f_n(s)$ — oxirgi holatgacha n qadam qolganda s holatdan chiqqan yo'llar uchun minimal xarajatlar strategiyasiga mos keluvchi narx, $j_n(s)$ — $f_n(s)$ ga erishtiruvchi yechim.

f — maqsad funksiyaning qiymati, s esa bu qiymat sistemaning s holatiga bog'liq ekanligini bildiradi, n indeks s holatdan yana necha qadam bosish kerakligi haqida ma'lumot berib turadi, j — biror muayyan yo'lga mos keladi va u n qadam va s holatga bog'liq bo'ladi.

Chiziqli programmalashtirish modellari bir qadamda yechilgani uchun bunday murakkab belgilashlarga muhtoj emas. Dinamik programmalashtirishda esa optimal yechimga bir necha qadamlarda kelinadi. Izvosh masalasiga kelsak,

$$f_0(10) = 0, \qquad (2.1.1)$$

chunki 10- holatda sayohat tugaydi. Keyin $f_1(8)$ va $f_1(9)$ oson hisoblanadi, $f_0(10)$ga mos ravishda $c_{8,10}$ yoki $c_{9,10}$ qo'shiladi.

$f_2(6)$ — oxirgi holatga 2 qadam qolgan 6- holatda minimal xarajatlar strategiyasi narxi hisoblanadi. 6- holatdan 2 yo'nalishda 8- yoki 9- holat orqali o'tish mumkin. Birinchi holga mos strategiyani hisoblash uchun $f_1(8)$ (avvaldan hisoblangan) ga c_{68} qo'shiladi, ikkinchi holga mos strategiyani hisoblash uchun esa $f_1(9)$ga c_{69} qo'shiladi va $f_2(6)$ uchun shu ikki yig'indidan kichigi tanlanadi. Bu usulni quyidagi dinamik rekurrent munosabatlar ko'rinishida ifodalash mumkin:

$$f_n(s) = \min_{s,j}\left[c_{sj} + f_{n-1}(j)\right], \quad n = \overline{1,4}. \qquad (2.1.2)$$

Bu ifoda turli strategiyalar narxining barcha mumkin bo'lgan qiymatlari yo'lning navbatdagi qadami uchun s holatdan j holatga o'tish mos narxlari yo'lning oxiriga $(n-1)$ta qadam qolgan j holatdan chiqish yo'llarining tanlangan optimal strategiyaga mos narxlarga qo'shib hisoblab topish kerakligini bildiradi. Hosil bo'lgan yig'indilarni o'zaro taqqoslab kichigiga to'g'ri kelgan j tanlanadi. Ya'ni, avval $f_1(s)$lar: $f_1(8)$ va $f_2(9)$ hisoblanadi. Keyin o'z navbatida $n=2$ uchun $f_2(5)$, $f_2(6)$, $f_2(7)$ va undan keyin $f_3(2)$, $f_3(3)$, $f_3(4)$ topiladi. Masala $f_4(1)$ topilgandan so'ng oxiriga yetadi.

Masala yechishning bu usuli *o'z o'zini ta'minlash usuli* deyiladi. Hisoblash jarayoni nolga teng hisoblardan boshlanadi va u keyingi hisoblashlar uchun zamin yaratadi, ya'ni $f_0(s)$ ni bilgan holda $f_1(s)$ hisoblanadi, $f_1(s)$ ni bilgan holda $f_2(s)$ hisoblanadi va hokazo. (2.1.2) ifoda rekurrent formula yoki rekurrent munosabat deyiladi. Shu hisoblash jarayonini ko'rib chiqaylik.

$n=1$ uchun (2.1.2) va (2.1.1) ifodalardan foydalanib, hisoblanadi.

$$f_1(8) = c_{8,10} + 0 = 1,\ j_1(8) = 10 \quad (s = 8)$$

$$f(9) = c_{9,10} + 0 = 4,\ j_1(8) = 10\ (s = 9). \qquad (2.1.3)$$

Hisoblar tartib bilan quyidagi jadvallarga joylashtiriladi.

1- jadval.

$n=1 \quad c_{sj} + f_0(j)$

$s \backslash j$	Holatga o'tish	$j_1(s)$	$f_1(s)$
	10		
Holat 8	1+0	10	1
9	4+0	10	4

2- jadval.

$n=2 \quad c_{sj} + f_1(j)$

$s \backslash j$	Holatga o'tish		$j_2(s)$	$f_2(s)$
	8	9		
Holat 5	7+1	5+4	8	8
6	3+0	4+4	8	4
7	7+1	1+4	9	5

1- jadvalda 8- va 9- holatlarga mos ikkita qator bor va ularning biridan o'tuvchi marshrut tanlanishi kerak. Bu jadvalda bitta ustun bor, chunki 8- va 9- holatdan faqat bitta — 10- holatga o'tish mumkin. $n=2$ uchun (2- jadval) yo'lovchi 5-, 6-, 7- holatlarni tanlashi mumkin va shuning uchun bu jadvalda uchta satr bor. Lekin bu holatlardan u faqat 8- va 9-holatlarga o'tishi mumkin va shuning uchun jadvalda ikkita ustun bor. Jadval asosiy ustunlaridagi sonlar (chapdagi) navbatdagi qadam narxlari $c_{si} - s$ holatdan j holatga o'tish narxlari bilan j holatdan boshlanuvchi yo'l qismlari $f_{n-1}(j)$ optimal strategiyasi narxlari yig'indisini ifodalaydi. Har bir qatorda bu yig'indilarning kichigi tanlanadi va u o'ngdan 1- ustunga joylashadi.

j — holatning optimal tanlanishi $j_n(s)$ bilan belgilanadi va o'ngdan 2- ustunda joylashgan. $n=2$ uchun hisoblashlar

2- jadvalda keltirilgan. Undan ko'rinadiki, optimal marshrut 5- va 6-holatlar uchun 8-holatdan o'tadi, 7- holat uchun esa 9- holatdan o'tadi. $n = 3$ uchun keltirilgan 3-jadvaldagi shtrixlangan kataklar 2- holatdan 7- holatga va 4- holatdan 5- holatga o'tish mumkin emasligini bildiradi.

3- jadval.

s \ j		Holatga o'tish			$j_3(s)$	$f_3(s)$
		5	6	7		
Holat	2	10+8	12+4		6	16
	3	5+8	10+4	7+5	7	12
	4		15+4	13+5	7	18

Yana shuni ta'kidlash kerakki, 2- jadvaldan faqat $f_2(j)$ ning qiymati olinadi. Bu esa dinamik programmalashtirish barcha usullarida eng muhim o'rin hisoblanadi: n qadam uchun optimal xarajatlar strategiyasi navbatdagi yechimning va qolgan $(n-1)$ qadam uchun optimal xarajatlar strategiyasining iqtisodiy natijalaridir.

4- jadval.

s \ j		Holatga o'tish				$j_4(s)$	$f_4(s)$
		2	3	4		3	17
Holat	1	2+16	5+12	1+18			

Oxirgi hisoblashlar $n = 4$ uchun 4- jadvalda keltirilgan. Undan ko'rinib turibdiki, minimal xarajatlar strategiyasi narxi quyidagiga teng:

$$f_4(1) = 17,\ j_4(1) = 3. \qquad (2.1.4)$$

Maqsad funksiyasining bu qiymatiga qaysi optimal strategiya mos keladi? Bu savolga javob berish uchun jadvallardan quyidagi tartibda foydalanish kerak:

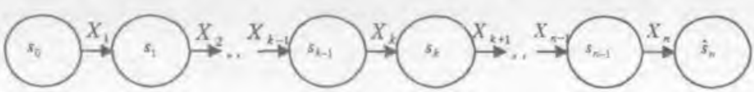
4- jadvaldan boshlaymiz: 1- holatdan chiqqan optimal yo'l 3- holatdan o'tishi aniqlanadi. Endi 3- jadvalga o'tiladi. Undan ko'rinib turibdiki, optimal yo'l 3- holatdan 7- holatga o'tadi. Endi esa 2- jadval qaraladi, unga ko'ra optimal yo'l 7- holatdan 9- siga o'tadi va nihoyat 9- holatdan 10- holatga o'tiladi. Demak, optimal yo'l 1-3-7-9-10 bo'lib, unga $f_4(1) = 5 + 7 + 1 + 4 = 17$ minimal xarajat sarflanadi.

Bu usul to‘g‘ri tanlash usulidan ko‘ra samaraliroqdir. Bu masalada 14ta joiz (mumkin bo‘lgan) yo‘l mavjud bo‘lib, ular har biriga sarflangan xarajatni hisoblash uchun 4 miqdor qo‘shiladi. Demak, bu o‘rinda 42ta qo‘shish amalini bajarish kerak (42 = 14×3). Yuqoridagi masalani yechish uchun hammasi bo‘lib 16 ta amal bajarildi. Masalada qo‘llangan bu usul dinamik programmalashtirish usuli deyiladi.

Dinamik programmalashtirish masalalarining umumiy qo‘yilishi quyidagicha izohlanadi. Boshqaruv jarayoni, ya’ni korxonalar o‘rtasida xomashyo taqsimlash, yillar davomida xomashyodan foydalanish, jihozlarni almashtirish, zahiralarni to‘ldirish va hokazo kabi iqtisodiy jarayonlar ko‘rilayotgan bo‘lsin. Bunday masalalarda boshqaruv obyekti — sistema boshqarish natijasida s_0 holatdan $\hat{s}$ holatga o‘tkaziladi. Faraz qilaylik, boshqaruvni n qadamga bo‘lish mumkin bo‘lsin, ya’ni yechim har bir qadamda qabul qilinadi, S sistemani boshlang‘ich s_0 holatdan oxirgi $\hat{s}$ holatga o‘tkazuvchi boshqaruv n qadam boshqaruvlar to‘plamidan iborat bo‘ladi.

X_k bilan k — qadamdagi ($k = 1,\overline{n}$) boshqaruv belgilanadi. X_k biror ma’noda cheklashlarga bo‘ysunadi va joiz deyiladi (X_k — son bo‘lishi mumkin, n — o‘lchovli fazoda nuqta bo‘lishi mumkin, biror sifat alomati bo‘lishi mumkin).

$X(X_1, X_2, ..., X_n)$ — S sistemani s_0 holatdan $\hat{s}$ holatga o‘tkazuvchi-boshqaruv bo‘lsin. s_k sistemaning k — qadamdan keyingi holati deb belgilansa, holatlar ketma-ketligi hosil bo‘ladi (3- rasm): $s_0, s_1, ..., s_{k-1}, ..., s_{n-1}, s_n = \hat{s}$



3- rasm.

Bu boshqaruv jarayoni samaradorligining ko‘rsatkichi bo‘lgan maqsad funksiyasi (mezon) boshlang‘ich holatga (s_0) va boshqaruvga (X) bog‘liq

$$Z = f(s_0, X). \qquad (2.1.5)$$

Dinamik programmalashtirish usuli bilan yechiladigan masalalarda butun jarayon uchun maqsad funksiyasi uning alohida qadamlardagi qiymatlari $f_i(s, X)$ yig‘ilib topiladi, ya’ni, har bir qadam samaradorlik ko‘rsatkichiga nisbatan additiv, k — qadamda samaradorlik ko‘rsatkichi

$$Z_k = f_k(s_{k-1}, X_k), k = \overline{1,n} \quad (2.1.6)$$

bo‘lsa, u holda

$$Z = \sum_{k=1}^{n} f_k(s_{k-1}, X_k) \qquad (2.1.7)$$

bo‘ladi. Bunday xossaga ega bo‘lgan funksiya *additiv funksiya* deyiladi.

Ko‘pchilik masalalarda Z additiv funksiya bo‘ladi. Agar masalaning dastlabki qo‘yilishida u additiv bo‘lmasa, masalaning ko‘rinishini shunday o‘zgartirish kerakki, natijada u additiv bo‘lib qolsin. Masalan, maqsad funksiyasi alohida bosqichlarda erishilgan yutuqlar ko‘paytmasi ko‘rinishida tasvirlangan bo‘lsa (bu multipleks mezon deyiladi), uni logarifmlab additiv ko‘rinishga keltirish mumkin, ya’ni, $V = \lg Z$, $V_k = \lg f_k(s_{k-1}, X_k)$ deb belgilansa, $V = \sum_{k=1}^{n} V_k$ additivlik xossasiga ega bo‘lgan Z bilan bir vaqtda maksimum (minimum)ga erishadigan yangi mezon, ya’ni, funksiya hosil bo‘ladi.

k — qadam oxirida sistemaning s_k holati faqat o‘zidan oldingi holatga s_{k-1} va k — qadamdagi boshqaruvga bog‘liq (undan oldingi holatlarga va boshqaruvlarga bog‘liq emas). Bu talab “Keyingi harakatni yo‘qligi” deyiladi.

Shunga ko‘ra holat tenglamalari quyidagicha ifodalanadi:

$$s_k = \varphi_k(s_{k-1}, X_k), \quad k = \overline{1,n} \qquad (2.1.8)$$

Har bir k — qadamda X_k boshqaruv sistemasini $(k-1)$ — qadam natijasida olingan s_{k-1} holatdan yangi, s_{k-1} holatga va tanlangan X_k boshqaruvga bog'liq bo'lgan s_k holatga o'tkazadi.

Bunda s_k yangi holat faqat s_{k-1} holat va X_k boshqaruvga bog'liqligi va sistema s_{k-1} holatga qanday kelganligiga bog'liq emasligi muhimdir. Hech bo'lmaganda bunga sistema holatlarining sonini ortishi orqali erishiladi, ya'ni sistemaning holatini kelajakdagi natijalarga bog'liq o'zgaruvchilar aniqlaydi. Dinamik programmalashtirishda faqat hozirgi holatga bog'liq strategiyalar qaralayotgan bo'lsa, optimal strategiyani topish juda qulay bo'ladi.

Qadamma-qadam optimallashtirish masalasi, ya'ni dinamik programmalashtirish masalasi shunday ifodalanadi:

(2.1.7) *maqsad funksiyasi eng katta (eng kichik) qiymat qabul qiladigan shunday joiz X boshqaruvni topish kerakki, u s sistemani s_0 holatdan $\bar{s}$ holatga o'tkazsin.*

Dinamik programmalashtirish modeli xususiyatlariga qo'shimcha qilib, har bir qadamda X_k boshqaruv va s_k holat parametrlar soniga bog'liqligini aytish lozim. Bu turdagi masalalarni yechishning maqsad funksiyasi cheklashlari ko'rinishiga bog'liq ravishda qo'llaniladigan turli usullari mavjud. Quyida funksiya va cheklashlarning qanday berilishiga bog'liq bo'lmagan holda dinamik programmalashtirish usulining qo'llanilishi ko'rib chiqiladi. Bu usul optimallik prinsipi va rekurrent munosabatlardan foydalanishga asoslangan.

2- §. Optimallik prinsipi. Bellman tenglamalari

Dinamik programmalashtirish usuli qaror qabul qilish jarayonini bosqichlarga bo'lish mumkin bo'lgan optimallashtirish usuli bo'lib, unga 50- yillarda amerikalik olim R.Bellman asos solgan. Birinchi marta bu usul bilan zaxiralarni optimal boshqarish masalalari yechilgan. Keyinchalik bu usulning tatbiq doirasi kengaya bordi. Dinamik programmalashtirish usuli R.Bellman ifodalagan optimallik prinsipiga asoslanadi. Bu prinsip maqsad funksiyasining optimal qiymatiga nisbatan rekurrent munosabatli-funksional tenglamalarda o‘z aksini topgan.

Optimallik prinsipi:

S sistemaning holati biror sondagi qadamdan so‘ng qanday bo‘lishidan qat’iy nazar, navbatdagi qadamda boshqaruvni shunday tanlash kerakki, u shundan keyingi hamma qadamda, optimal boshqaruv bilan birga, shu qadam va qolgan hamma qadamlarni optimal qarorga (yutuqqa) olib kelsin.

Optimal boshqaruv qadamma-qadam amalga oshiriladi. Har bir qadamda boshqaruv faqat shu qadam uchun optimallashtiriladi. Keyin har bir qadamdagi boshqaruv uning oqibatlarini hisobga olgan holda tanlanadi. Chunki faqat shu qadamda maqsad funksiyasini optimallashtiruvchi boshqaruv butun jarayon uchun optimal bo‘lmay qolishi mumkin. Shuning uchun har bir qadamdagi boshqaruv butun jarayon nuqtayi nazaridan optimal bo‘lishi kerak [15].

1- §da tahlil qilinayotgan boshlang‘ich holati s_0 bo‘lgan, $n$ta qadamga bo‘linadigan masala optimallik prinsipiga asoslanib, ketma-ket $n$ga 1, 2,... qiymatlar berib, har xil s holatlarda — bir qadamli, ikki qadamli va hokazo masalalar ketma-ketligi sifatida qaraladi. Qator yangi belgilashlar kiritiladi va masalaga oydinlik kiritishda ularning qanchalik muhimligi e’tirof etiladi.

Sistemaning ixtiyoriy s_{k-1} holati har bir qadamida X_k yechimni tanlashi kerak, chunki bu tanlash navbatdagi s_k holat va u bilan bog‘liq keyingi boshqaruv jarayoniga ta’sir qiladi. Lekin shunday qadam ham borki, bu oxirgi qadam bo‘lib, ixtiyoriy s_{n-1} holat uchun faqat shu qadamga tegishli optimal yechim topiladi.

Ana o‘sha n- qadam qarab chiqiladi, s_{n-1} — sistemaning n- qadam boshidagi holati, $s_n = \bar{s}$ — oxirgi holat,

X_n — n- qadamdagi boshqaruv, $f_n(s_{n-1}, X_n)$ — n- qadamning maqsad funksiyasi (yutug'i) bo'lsin.

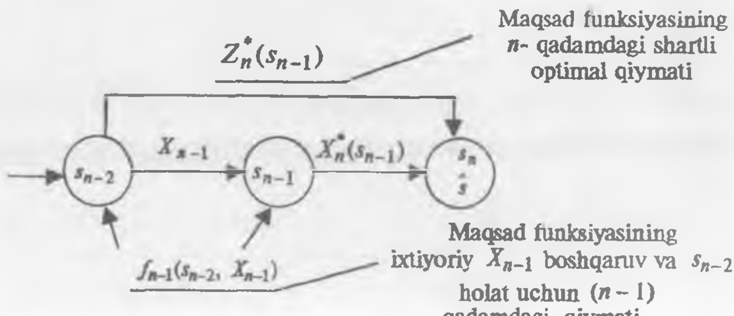
Optimallik prinsipiga ko'ra, X_n ni shunday tanlash kerakki, ixtiyoriy s_{n-1} holat uchun bu qadamda maqsad funksiyasi maksimumga erishsin (maksimum masalasi bilan kifoyalaniladi). $Z_n^*(s_{n-1})$ — maqsad funksiyasining maksimumi—oxirgi qadam boshlanishida S sistema ixtiyoriy s_{n-1} holatda, oxirgi qadamda esa boshqaruv optimal bo'lgan shartlar ostida n-qadam samaradorlik ko'rsatkichdir.

$Z_n^*(s_{n-1})$ — n — n - qadamda maqsad funksiyasining shartli maksimumi

$$Z_n^*(s_{n-1}) = \max_{\{X_n\}} f_n(s_{n-1}, X_n). \qquad (2.2.1)$$

$Z_n^*(s_{n-1})$ ni maksimumga erishtiradigan X_n yechim s_{n-1} ga bog'liq va u n- qadamdagi shartli optimal boshqaruv deyiladi, $X_n^*(s_{n-1})$ bilan belgilanadi (4- rasm).

$X_n^*(s_{n-1})$ — n- qadamdagi shartli optimal boshqaruv $Z_n^*(s_{n-1})$ maksimumga erishadigan X_n ning qiymatidir.



4- rasm.

(2.2.1) tenglama asosida optimallashtirish masalasini yechib, barcha mumkin bo'lgan holatlar uchun $Z_n^*(s_{n-1})$ va $X_n^*(s_{n-1})$ topiladi.

Endi n- qadamga $n-1$- qadamni qo'shib, ikki qadamli masala qaraladi.

Ixtiyoriy s_{n-2} holatlar, X_{n-1} ixtiyoriy boshqaruv va n- qadamdagi optimal boshqaruv uchun maqsad funksiyaning oxirgi ikki qadamdagi qiymati quyidagiga teng.

$$f_{n-1}(s_{n-2}, X_{n-1}) + Z_n^*(s_{n-1}). \qquad (2.2.2)$$

Optimallik prinsipiga ko'ra ixtiyoriy s_{n-2} uchun yechimni shunday tanlash kerakki, u n- qadamdagi optimal boshqaruv bilan birga oxirgi ikkita qadamda maqsad funksiyasi maksimumiga erishtirsin. (2.2.2) ifodaning barcha joiz X_{n-1} boshqaruvlar bo'yicha maksimumini topish kerak. U s_{n-2} ga bog'liq bo'lib $Z_n^*(s_{n-2})$ bilan belgilanadi va *oxirgi ikki qadamdagi optimal boshqaruvda maqsad funksiyasining shartli maksimumi* deyiladi.

$X_{n-1}(s_{n-2})-(n-1)$ *qadamdagi shartli optimal boshqaruv* deyiladi:

$$Z_{n-1}^*(s_{n-2}) = \max_{\{X_{n-1}\}}\left\{f_{n-2}(s_{n-2}, X_{n-1}) + Z_n^*(s_{n-1})\right\} \qquad (2.2.3)$$

(2.2.2) da figurali qavslar ichida turgan ifoda faqat s_{n-2} va X_{n-1} ga bog'liq, chunki s_{n-1} ni (2.1.8) holatlar tenglamasidan $k=n-1$ qo'yib topiladi.

$$s_{n-1} = \varphi_{n-1}(s_{n-2}, X_{n-1})$$

va $Z_n^*(s_{n-1})$ funksiyadagi s_{n-1} ni o'rniga qo'yiladi.

X_{n-1} — bitta o'zgaruvchiga bog'liq maksimallashtirish natijasida (2.2.3) ga ko'ra ikkita funksiya topiladi: $Z_{n-1}^*(s_{n-2})$ va $X_{n-1}^*(s_{n-2})$.

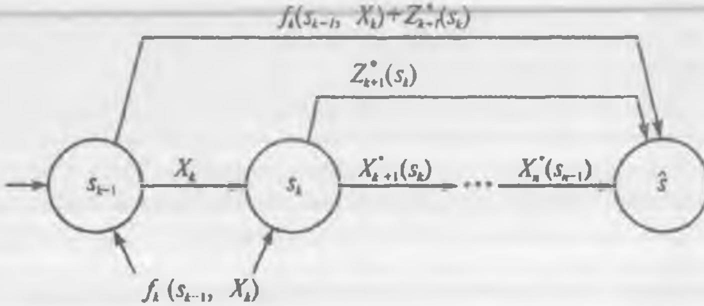
Shundan so‘ng uch qadamli masala qarab chiqiladi. Oxirgi ikkita qadamga ($n-2$)- qadam qo‘shib qaraladi.

$Z_k^*(s_{k-1})$ bilan maqsad funksiyasining k - qadam boshida sistema s_{k-1} holatda bo‘lganligidan $n-k+1$ - qadamlardagi optimal boshqaruv uchun k -qadamdan boshlab oxirigacha olingan shartli maksimumi belgilanadi (5- rasm).

$$Z_k^*(s_{k-1}) = \max_{\{(x_k,\ldots,x_n)\}} \sum_{i=k}^{n} f_i(s_{i-1}, X_i)$$

U holda

$$Z_k^*(s_k) = \max_{\{(x_{k+1},\ldots,x_n)\}} \sum_{i=k+1}^{n} f_i(s_{i-1}, X_i)$$



5- rasm.

Oxirgi $n-k$ qadamlarda k - qadamdagi ixtiyoriy X_k va keyingi $n-k$ qadamlarda optimal bo‘lgan boshqaruvlardagi maqsad funksiyasi quyidagiga teng:

$$f_k(s_{k-1}, X_k) + Z_{k+1}^*(s_k)\,.$$

Optimallik prinsipiga asosan X_k bu yig‘indining maksimallik shartidan tanlanadi, ya’ni

$$Z_k^*(s_{k-1}) = \max_{\{X_k\}}\left\{f_k(s_{k-1}, X_k) + Z_{k+1}^*(s_k)\right\}, \qquad (2.2.4)$$

$$k = n-1,\ n-2,\ldots,2,1.$$

k- qadamda X_k boshqaruvda (2.2.4) maksimumga erishadi va uni $X_k^*(s_{k-1})$ bilan belgilanadi, k - *qadamdagi shartli optimal boshqaruv* deb ataymiz. (2.2.4) tenglamaning o'ng tomonida s_k o'rniga holat tenglamasidan topilgan $s_k = \varphi_k(s_{k-1}, X_k)$ ifoda qo'yiladi.

(2.2.4) tenglamalar *Bellman tenglamalari* deb ataladi. Bu munosabatlar funksiyaning keyingi qiymatlarini bilgan holda avvalgi qiymatlarini topishga imkon beradi. Agar (2.2.1) $Z_{n-1}^*(s_{n-1})$ topiladi. U holda $k = n-1$ da (2.2.4)dan s_{n-2} barcha joiz qiymatlar uchun maksimallashtirish $Z_{n-1}^*(s_{n-2})$ unga mos $X_{n-1}^*(s_{n-2})$ ifodalarni aniqlash mumkin. $Z_{n-1}^*(s_{n-2})$ bilgan holda (2.2.4) va (2.1.8) dan foydalanib holat tenglamalarini topamiz.

(2.2.1) va (2.2.4) tenglamalarini yechish jarayoni *shartli optimallashtirish* deyiladi. Bunda oxirgi qadamdan boshlanuvchi dinamik programmalashtirish masalasining yechish usuli tasvirlangan (teskari sxema). n- va birinchi qadamlar o'rnini almashtirish mumkin (to'g'ri sxema). Shartli optimallashtirsh natijasida quyidagi ikkita ketma-ketlik hosil bo'ladi:

$$Z_n^*(s_{n-1}); Z_{n-1}^*(s_{n-2})...Z_2^*(s_1), Z_1^*(s_0)$$

oxirgi ikki qadamdagi, oxirgi n qadamdagi maqsad funksiyasining shartli maksimumlari ketma-ketligi va

$$X_n^*(s_{n-1}); X_{n-1}^*(s_{n-2})...X_2^*(s_1), X_1^*(s_0)$$

ularga mos shartli optimal boshqaruvlar ketma-ketligi.

Bu ketma-ketliklardan foydalanib, dinamik programmalashtirish masalasi n va s_0 berilgan holda topiladi. Ta'rif bo'yicha birinchi qadam boshida sistema s_0 holatda bo'lganligidan n qadam uchun maqsad funksiyasining shartli maksimumi $Z_1^*(s_0)$ ga teng, ya'ni,

$$Z_{\max} = Z_1^*(s_0). \qquad (2.2.5)$$

s_0 aniq qiymatida $X_1^* = X_1^*(s_0)$ topiladi, (2.1.8)dan $s_1^* = \varphi_1(s_0, X_1^*)$ topiladi va ketma-ket $X_2^* = X_2^*(s_1^*)$ topiladi, ya'ni quyidagi zanjir bo'yicha:

$$\begin{aligned} X_1^* = X_1^*(s_0) \to s_1^* = \varphi_1(s_0, X_1^*) \to X_2^* = X_2^*(s_1^*) \to s_2^* = \\ = \varphi_2(s_1^*, X_2^*) \Rightarrow X_3^* = X_3^*(s_2^*) \to \ldots \to s_{n-1}^* = \\ = \varphi_{n-1}(s_{n-2}^*, X_{n-1}^*) \Rightarrow X_n^* = X_n^*(s_{n-1}^*) \end{aligned} \qquad (2.2.6)$$

dinamik programmalashtirish masalasining optimal yechimi topiladi.

$$X^* = \left(X_1^*, X_2^*, \ldots, X_n^*\right)$$

(„$\to$" — belgi holat tenglamasini qo'llashni, „$\Rightarrow$" — belgi shartli optimal boshqaruvlar ketma-ketligini bildiradi).

3-§. Ish taqsimoti

Ikki turda ish bajaruvchi n ta qurilmaga egamiz. Agar x qurilma I turdagi ishni bajarsa, bundan olingan foyda $\varphi(x)$ bo'ladi. Qurilmalarni bir qismi amortizatsiya natijasida kelajakda ishlatishga yaroqsiz bo'lib, qolgan $\alpha(x)$ qurilmani ishlatish mumkin deylik. Agar, y qurilma II ishni bajarsa, bundan olingan foyda $\psi(y)$ bo'ladi, ishga yaroqli qurilmalar soni $\beta(y)$ ga teng bo'ladi. Birinchi bosqichda x_1 qurilma I turdagi ishni bajarsin va y_1 qurilma II turdagi ishni bajarsin $y_1 = n_1 - x_1$ $(n_1 = n)$. U holda birinchi bosqichda umumiy foyda $\varphi(x_1) + \varphi(y_1)$ ga teng, ishga yaroqli qurilmalar $n_2 = \alpha(x_1) + \beta(y_1)$ dona bo'lib qoladi. Aytaylik, endi qolgan n_2 qurilma o'rtasida I va II turdagi ish taqsimlanadi, ya'ni, x_2 qurilma I turdagi ishni, $y_2 = n_2 - x_2$ qurilma II turdagi ishni bajaradi. Bu bosqichda umumiy foyda $\varphi(x_2) + \psi(y_2)$ ga teng bo'ladi, kelajakda ishga yaroqli qurilmalar soni esa $n_3 = \alpha(x_2) + \beta(y_2)$ ga teng. Bu jarayonni davom ettirib, oxirgi N bosqichga keldik. Bu bosqichda x_N qurilma I turdagi ishni bajaradi. $y_N = n_N - x_N$ II turdagi ishni bajaradi. Bunda $n_N = \alpha(x_{N-1}) + \beta(y_{N-1})$, umumiy foyda esa $\varphi(x_N) + \psi(y_N)$. Barcha N bosqich uchun umumiy foyda

$$[\varphi(x_1) + \psi(y_1)] + [\varphi(x_2) + \psi(y_2)] + \ldots + [\varphi(x_N) + \psi(y_N)]. \quad (2.3.1)$$

Har bir bosqichda I ishni(albatta, II ishni ham) bajarish uchun ajratilgan qurilmalar sonining barcha N bosqichda ulardan olingan umumiy foyda maksimal bo'ladigan miqdorini topish kerak.

Balki, umumiy foyda maksimumini topish masalasini har bir qadamda maksimal foydani hisoblash va olingan natijani qo'shishga keltirish mumkin deb faraz qilish joizdir, lekin haqiqatda bunday mulohaza xato bo'ladi. Buni quyidagi misollarda ko'rib chiqiladi.

Ba'zi belgilashlar kiritiladi. $f_k(n)$, $k = 1,2,...,N$ — boshida qurilmalar soni n bo'lgan holda oxirgi k bosqichda ($N-k+1$ dan N — gacha) olingan optimal (maksimal) foyda ular birinchisining boshida qurilmalar soni n ga teng bo'lgan. Xususan, $f_N(n)$ — barcha N bosqich uchun olingan optimal foydani bildiradi. Ta'rif bo'yicha:

$$f_k(n) = \max\{[\varphi(x_{N-k+1}) + \psi(y_{N-k+1})] + \ldots + \\ + [\varphi(x_N) + \psi(y_N)]\} \quad (2.3.2)$$

bunda, $x_{N-k+1}, \ldots x_N, y_{N-k+1}, \ldots, y_N$ o'zgaruvchilar quyidagi munosabatlarga ega: maksimum bo'lganligi shartidan olinadi: $x_{N-k+1} + y_{N-k+1} = n_{N-k+1} (n_{N-k+1} = n)$, $\ldots, x_N + y_N = n_N = \alpha(x_{N-1}) + \beta(y_{N-1})$. Shunday qilib, berilgan φ, ψ, α va β funksiyalarga bog'liq $2k$ o'zgaruvchili funksiyaning ekstremumini topish masalasiga kelindi. Dinamik programmalashtirish usuli berilgan masalani juda oddiy bo‘lgan bir o‘zgaruvchili bir nechta funksiyaning ekstremumini topish masalasiga keltirish imkonini beradi. Shu maqsadda f_k va f_{k-1}, $k=2,3,...,N$ funksiyalarni bog‘lovchi muhim bir munosabat keltirilib chiqariladi. Oxirgi k ta bosqichning birinchisida x qurilma I tur ishni bajaradi, $n-x$ qurilma esa II tur ishni bajaradi $(0 \le x \le n)$. Bu bosqichda foyda $\varphi(x)+\psi(n-x)$ ga teng, keyingi bosqichlarning boshida esa $\alpha(x)+\beta(n-x)$ dona ishga yaroqli qurilma qoladi. Ularni oxirgi $(k-1)$ bosqichda «eng yaxshi» taqsimlab, $\varphi(x)+\psi(n-x)+f_{k-1}[\alpha(x)+\beta(n-x)]$ foyda olinadi va bu foyda birinchi bosqichda x qurilma I tur ish bilan band bo‘lgan holda oxirgi k ta bosqich uchun optimal foyda bo‘ladi. x ga bog‘liq bu foyda *shartli optimal foyda* deb ataladi. x ga barcha mumkin bo‘lgan qiymatlar $x=0,1,2,...,n$ berib va mos shartli optimal foydalar ichidan eng kattasi tanlanadi. Shunday qilib, oxirgi k bosqich uchun optimal foyda topiladi, bunda birinchi bosqichda n ta qurilma mavjud bo‘lganligini ta’kidlash lozim:

$$f_k(n)=\max_{0\le x\le n}\left\{\varphi(x)+\psi(n-x)+f_{k-1}[\alpha(x)+\beta(n-x)]\right\},$$

$$k=2,3,...,N. \qquad (2.3.3)$$

Bu rekurrent munosabat dinamik programmalashtirish usuli asosida yotadi va optimallik prinsipini ifodalaydi. U dinamik programmalashtirishning asosiy funksional tenglamasi deyiladi. Bu munosabat $(k>1)$ yana bir munosabat bilan to‘ldiriladi:

$$f_1(n)=\max_{0\le x\le n}\left\{\varphi(x)+\psi(n-x)\right\}. \qquad (2.3.4)$$

Bu boshida n ta qurilmaga ega bo‘lgan oxirgi N- bosqich uchun optimal foydani aniqlaydi.

(2.3.3) munosabat bilan barcha mumkin bo‘lgan n lar uchun ketma-ket $f_2(n), f_3(n),..., f_{N-1}(n)$ va nihoyat $f_N(n)$-larni topish mumkin. Bunda har bir qadamda bir o‘zgaruvchili funksiyaning maksimumi topiladi.

N bosqich davomida optimal foydani topish masalasini yechish jarayonida yo'l-yo'lakay $N-1, N-2, ..., 2, 1$ oxirgi bosqichlarda optimal foydani topishdan bir xil turdagi masalalarning butun bir oilasining yechimi topiladi. Bu dinamik programmalashtirish usulining xarakterli xususiyatidir.

Endi barcha bosqichlarda qurilmalarning I va II turdagi ishlar o'rtasida optimal taqsimoti topiladi.

Birinchi bosqichda ish n_1 ta qurilma o'rtasida taqsimlansin, deylik. (n_1 — berilgan aniq son) x_1^* orqali quyidagi ifodaga maksimum beradigan x belgilanadi:

$$f_N(n_1) = \max_{0 \le x \le n} \{\varphi(x) + \psi(n_1 - x) + f_{N-1}[\alpha(x) + \beta(n_1 - x)]\}_1$$

x_1^* — birinchi bosqichda I ish bilan band qurilmalar sonini bildiradi ($y_1^* = n_1 - x_1^*$ II ish bilan band qurilmalar soni).

x_1^* — ikkinchi bosqich boshida ishga yaroqli qurilmalar soni, $\alpha(x_1^*) + \beta(y_1^*) = n_2$ ga teng. Quyidagi ifodaga maksimum beradigan x ning qiymati x_2^* bilan belgilanadi:

$$f_{N-1}(n_2) = \max_{0 \le x \le n_2} \{\varphi(x) + \psi(n_2 - x) + f_{N-2}[\alpha(x) + \beta(n_2 - x)]\}.$$

x_2^* — ikkinchi bosqichda I ishni bajaradigan qurilmalar soni, $y_2^* = n_2 - x_2^*$ II ishni bajaradigan qurilmalar sonini bildiradi.

Xuddi shuningdek, $x_3^*, x_4^*, ..., x_N^*$ va albatta $y_3^*, y_4^*, ..., y_N^*$ -lar topiladi. $f_N(n_1)$ optimal foydani olish uchun barcha bosqichlarda ish taqsimotini ko'rsatuvchi *optimal strategiyani* $x_1^*, x_2^*, ..., x_N^*, y_1^*, y_2^*, ..., y_N^*$ sonlar ketma-ketligi aniqlaydi. Optimal strategiya tabiiy to'g'ri tartibda, ya'ni avval 1-bosqich uchun, keyin 2- bosqich uchun va hokazo. N-

bosqich uchun aniqlanganligini ta'kidlash joiz. Optimal foydani hisoblash jarayoni esa teskari tartibda, avval oxirgi bosqich uchun, keyin oxirgi ikkita bosqich uchun va nihoyat barcha n bosqich uchun amalga oshirildi.

Berilgan funksiyalar chiziqli bo'lgan holda ish taqsimlash masalasini yechishga doir quyidagi misolni ko'rib chiqaylik.

Misol.

$n_1 = 100$, $\varphi(x) = 0,9x$, $\psi(y) = 0,5y$, $\alpha(x) = 0,3x$, $\beta(y) = 0,8y$ va $N = 3$.

Avval boshida n ta qurilmaga ega degan faraz bilan oxirgi uchinchi bosqichda optimal foyda hisoblanadi. Agar bu bosqichda x qurilma I ish bilan band bo'lsa, ($n - x$ qurilma II ish bilan band bo'lsa), umumiy foyda $\varphi(x) + \psi(n - x)$ ga teng.

Demak, 3- bosqichda optimal foyda

$$f_1(n) = \max_{0 \le x \le n} \{\varphi(x) + \psi(n - x)\} = \max_{0 \le x \le n} \{0,9x + 0,5(n - x)\} =$$

$$= \max_{0 \le x \le n} \{0,4x + 0,5n\} = 0,9n.$$

$x = n$ da maksimumga erishiladi, ya'ni uchinchi bosqich boshida mavjud qurilmalarning hammasi I ish bilan band bo'lishi kerak. (2.3.5) rekurrent munosabatni qo'llab, ikkinchi bosqich boshida n ta qurilmaga ega bo'lgan, oxirgi ikkita bosqich uchun optimal foyda topiladi:

$$f_2(n) = \max_{0 \le x \le n} \{\varphi(x) + \psi(n - x) + f_1[\alpha(x) + \beta(n - x)]\} =$$

$$= \max_{0 \le x \le n} \{0,9x + 0,5(n - x) + f_1[0,3x + 0,8(n - x)]\} =$$

$$= \max_{0 \le x \le n} \{0,4x + 0,5n + 0,9(0,8n - 0,5x)\} =$$

$$= \max_{0 \le x \le n} \{1,22n - 0,05x\} = 1,22n.$$

Bunda x — ikkinchi bosqichda I ish bilan band qurilmalar soni. Bu holda $x = 0$, ya'ni ikkinchi bosqich boshida mavjud qurilmalarning hammasi II ish bilan band bo'ladi.

Nihoyat uchala bosqich uchun optimal foyda $f_3(n)$ quyidagiga teng:

$$f_3(n) = \max_{0\le x\le n}\left\{\varphi(x) + \psi(n-x) + f_2\left[\alpha(x) + \beta(n-x)\right]\right\} =$$

$$= \max_{0\le x\le n}\left\{0,9x + 0,5(n-x) + f_2\left[0,3x + 0,8(n-x)\right]\right\} =$$

$$= \max_{0\le x\le n}\left\{0,4x + 0,5n + 1,22(0,8n - 0,5x)\right\} =$$

$$= \max_{0\le x\le n}\left\{1,476n - 0,21x\right\} = 1,476n.$$

U $x = 0$ da maksimumga erishadi, ya'ni birinchi bosqichda barcha qurilmalar II ish bilan band bo'lishi kerak. Masala shartiga ko'ra, $n_1 = 100$, uchala bosqich uchun optimal foyda $f_3(100) = 1,476 \cdot 100 = 147,6$. Endi har bir bosqichda qurilmalar o'rtasida ish taqsimoti optimal strategiyasi aniqlaniladi. Yuqorida ko'rganimizdek, birinchi bosqichda 100 ta qurilmaning hammasi II ish bilan band. Ikkinchi bosqich boshida ishga yaroqli $\beta(100) = 0,8 \cdot 100 = 80$ ta qurilmaga egamiz va ularning hammasi ikkinchi bosqichda II ish bilan band. Uchinchi bosqichning boshida $\beta(80) = 0,8 \cdot 80 = 64$ ta qurilma saqlanib qoldi va ular bu bosqichda I ish bilan band. Demak, optimal strategiya bu masala uchun quyidagiga teng:

$$x_1^* = 0,\ x_2^* = 0,\ x_3^* = 64,\ y_1^* = 100,\ y_2^* = 80,\ y_3^* = 0 \cdot$$

4- §. Transport vositasiga bo'linmas buyumlarni optimal joylashtirish

Dinamik programmalashtirishning asosiy funksional tenglamasiga ko'ra dinamik programmalashtirishda yechimni topish algoritmini strategiyalar ketma-ketligi yoki maqsad funksiyalari ketma-ketligi kabi aniqlaniladi. Bu ketma-ketliklar bir birini aniqlaydi. Maksimal foydaga olib keladigan juda ko'p optimal strategiyalar mavjudligiga qaramay, faqat bitta optimal foyda beradigani tanlanadi. Dinamik programmalashtirishda ko'p bosqichli jarayon rejalashtirilib, har bir qadamdagi boshqaruv, keyingisi hisobga olingan holda topiladi. Faqat bitta qadam, ya'ni oxirgi qadamda bunga zarurat yo'q. Bu oxirgi qadamni eng katta foyda keltiradigan qilib rejalashtirish kerak.

Oxirgi qadam optimal qilib rejalashtirilib o'zidan oldingisi bilan birlashtiriladi va asosiy funksional tenglamaga ko'ra bu ikki qadamdagi eng katta yutuq topiladi va hokazo. Shuning uchun dinamik programmalashtirishda jarayon "oyog'i osmondan qilib", ya'ni, oxiridan boshiga aylantiriladi. Biroq oxirgi qadamni undan oldingisi qanday tugaganligini bilmay turib qanday rejalashtirish mumkin? Buning uchun oxiridan oldingi qadam qanday tugallanganligi to'g'risida turli farazlar qilinadi va har bir faraz uchun masala yechilishi (masala oxiri)gacha saqlanadigan oxirgi boshqaruv tanlanadi. Bu jarayon har bir qadamda takrorlanadi va u o'zidan oldingi qadam qanday tugallanishiga bog'liq bo'ladi. Shunday shartlarda tanlangan optimal boshqaruv *shartli optimal boshqaruv* deyiladi [8].

3- masala. Umumiy yuk ko'taruvchanligi W ga teng bo'lgan samolyotga 4 xil yukni shunday joylashtirish kerakki, bunda p_1, p_2, p_3, p_4 - 1-, 2-, 3-, 4- turdagi yuklar birligi massasi, har bir yukning narxi, V_1, V_2, V_3, V_4 — bo'lganda, yuklarning umumiy narxi maksimal bo'lsin. X_1, X_2, X_3, X_4 — samolyot bortiga ortilayotgan 1-, 2-, 3-, 4- turdagi yukning miqdori.

Yechish. Masalaning maqsad funksiyasi:

$$\sum_{i=1}^{4} X_i V_i = X_1 \cdot V_1 + X_2 \cdot V_2 + X_3 \cdot V_3 + X_4 \cdot V_4 \to \max$$

va cheklash sharti

$$\sum_{i=1}^{4} X_i p_i = X_1 \cdot p_1 + X_2 \cdot p_2 + X_3 \cdot p_3 + X_4 \cdot p_4 \le W \text{ dan iborat.}$$

Bu masala "rukzak" to'g'risidagi masalani eslatadi. Sayyoh safarga chiqar ekan, o'zi bilan nima olishini hal qilishi kerak. Har bir predmet o'z og'irligiga va qiymatiga ega. Tanlangan predmetlarning umumiy og'irligi mo'ljallangan og'irlikdan ortmasligi va ularning umumiy qiymati maksimal bo'lishligi talab etiladi.

Aniqlik uchun, $W = 83$, $p_1 = 24$, $p_2 = 22$, $p_3 = 16$, $p_4 = 10$, $V_1 = 96$, $V_2 = 85$, $V_3 = 50$, $V_4 = 20$ shartli birliklarda olinadi.

Ko'rinib turibdiki, bu masala butun sonli programmalashtirish masalasidir. Uni yechish uchun yechim topishning ko'p qadamli jarayonini, ya'ni dinamik programmalashtirish usuli qo'llaniladi. Umumiy sxemaga ko'ra, masalani ikki bosqichda yechamiz. Birinchi bosqichda bir o'zgaruvchi bo'yicha ketma-ket optimallashtirish yo'li bilan yechimlarning mumkin bo'lgan optimal variantlarini topamiz. Ikkinchi bosqichda esa ular ichidan berilgan masala uchun optimali tanlab olinadi.

Birinchi bosqich 4 ta qadamdan iborat.

1- qadam. Bunda samolyotga faqat birinchi tur yuk joylashtirishning mumkin bo'lgan optimal variantlari topiladi. X_1 qiymatni va unga mos yukning $f_1(W)$ maksimal narxini W ning mumkin bo'lgan turli qiymatlaridan topish kerak. Bu holda yukning maksimal narxi $X_1 \cdot p_1 \leq W, X_1 = 0,1,2...$ cheklash shartida $f_1(W) = \max\limits_{X_1}[X_1 \cdot V_1]$ga teng. Shartdan $X_1 \leq \frac{W}{p_1}$ ligi ma'lum, u holda $f_1(W)$ maksimumni topish uchun X_1 ni iloji boricha kattaroq olish kerak, ya'ni, $X_1 = \left[\frac{W}{p_1}\right]$ $\frac{W}{p_1}$ dan ortib ketmaydigan eng katta butun son.

Shunday qilib, $f_1(W) = \left[\frac{W}{p_1}\right] \cdot X_1$.

Biror qadam bilan W qiymatlar beriladi va ular uchun X_1 va $f_1(W)$lar topiladi. Agar samolyotning yuk ko'taruvchanligi 24 shartli birlikdan kam bo'lsa, birinchi turdagi yukdan bitta ham joylay olmaymiz. Yuk ko'taruvchanlik 24 dan 47 sh.b. gacha qiymatlarni qabul qilsa, birinchi turdagi yukdan bir dona joylash mumkin va hokazo. Natijalar 5-jadvalga keltiriladi. Ularda W kengroq doirada 87 shartli birlikkacha qiymatlarni qabul qiladi.

5- jadval

W	$f_1(W)$	x_1		W	$f_1(W)$	x_1
0...23	0	0		48...71	192	2
24...47	96	1		72...87	288	3

2- qadam. Bunda samolyotga birinchi va ikkinchi turdagi yukni joylashtirishdagi yuk ko'taruvchanlik qaraladi. Joylashtirish maksimal narxi $f_2(W)$ bilan belgilanadi. X_2 — ikkinchi turdagi yuk miqdori bo'lsa, birinchi turdagi yuk massasi $W - p_2 X_2$ dan ortmasligi kerak. Bunda birinchi turdagi yuklar maksimal narxi $f_1(W - X_2 p_2) = \max\limits_{X_1}((W - X_2 p_2) \cdot V_1)$ va yukning umumiy narxi $f_{12} \equiv X_2 V_2 + f_1(W - X_2 p_2)$ ga teng bo'ladi. U holda

$$f_2(W) = \max_{X_2}\{X_2 V_2 + f_1(W - X_2 p_2)\};$$

$$0 \le X_2 \le \left[\frac{W}{p_2}\right]. \qquad (2.4.1)$$

Bu ifodaning maksimumi faqat X_2 bo'yicha qidiriladi. Lekin bu ikkinchi turdagi predmetlar uchun yuk ko'taruvchanlik qanday bo'lishi kerakligini bilmaymiz. Shuning uchun W ning 0 dan 83 sh.b.gacha (2.4.1) ifodani har xil qiymatlarida ko'rib chiqish kerak. $f_1(W - X_2 p_2)$ ni hisoblashda 5-jadvaldagi natijalardan foydalaniladi.

Masalan, $W = 46$ shartli birlikni olaylik. X_2 ning mumkin bo'lgan qiymatlari 0, 1, 2. Ularga mos ikkinchi turdagi yuklar narxi 0; 85; 170 shartli birlikga teng va birinchi turdagi yuklar uchun yuk ko'taruvchanligi 46, 24, 2 shartli birlikka teng $(W - X_2 p_2 = 46 - 0 \cdot 22; 46 - 1 \cdot 22; 46 - 2 \cdot 22)$.

5- jadvaldan $W = 46; 24; 2$ uchun $f_1(W) = 96; 96; 0$ topiladi. Mos qiymatlarni qo'shilsa, $0 + 96 = 96;$

$85+96=181$; $170+0=170$. Ular ichidan eng kattasi 181 tanlanadi. Bu qiymat $X_2=1$, da topiladi. $W=46$ uchun $X_2=1$, $f_2(W)=181$ ni 6- jadvalga joylashtiriladi. X_2 va $f_2(W)$ ning hisoblash natijalari 6- jadvalda keltirilgan. Undan ko'rinadiki, yuk ko'taruvchanligi 21 shartli birlikkacha bo'lgan transport vositasiga, ya'ni, samolyotga hech qanday yuk joylab bo'lmaydi. Yuk ko'taruvchanlikning 22, 23 qiymatlari qabul qilinsa, ikkinchi turdagi 1 dona yukni joylash mumkin, 24—43 shartli birlikkacha qiymatlarni qabul qilganda yoki birinchi turdagi 1 dona yuk yoki ikkinchi turdagi 1 dona yukni joylash mumkin. Birinchi turdagi yukni joylashtirishda yukning umumiy narxi maksimal bo'ladi. Yuk ko'taruvchanlikning 44—45 qiymatlarida birinchi turdagi yukdan 1 dona, ikkinchi turdagi yukdan esa 2 dona joylashtirish mumkin. Keyingi holda yukning narxi maksimal bo'ladi va u $f_2(W)=170$ ga teng. W ning 46—47 shartli birlikkacha qiymatlarida birinchi turdan 1 dona; ikkinchi turdan 2 dona yuk joylash mumkin yoki har bir turdan bittadan yuk joylash mumkin. Bunda keyingi holdagi joylashtirilgan yukning umumiy narxi yuqori bo'ladi.

6- jadval.

W	$f_2(W)$	x_2	W	$f_2(W)$	x_2
0...21	0	0	48...65	192	0
22...23	85	1	66...67	255	3
24...43	96	0	68...69	266	2
44...45	170	2	70...71	277	1
46...47	181	1	72...87	288	0

3- qadam. Bunda 1-, 2-, 3- turdagi yuklar joylashtiriladi. Endi X_3 bo'yicha maksimallashtirish talab qilinadi:

$$f_{123}=X_3V_3+f_2(W-X_3p_3);\quad f_3(W)=\max_{X_3} f_{123}$$

$$0\le X_3\le\left[\frac{W}{p_3}\right]. \qquad (2.4.2)$$

W ga qiymatlar berib, uning har bir qiymati uchun f_{123} ning X_3 bo'yicha maksimumi topiladi. $f_2(W)$ ning qiymatlari 6- jadvaldan olinadi.

Masalan, $W = 38$ sh. b. bo'lsin. X_3 ning mumkin bo'lgan qiymatlari 0, 1, 2 sh.b. va unga mos uchinchi tur predmetlar narxi 0, 50, 100 sh. b. Birinchi va ikkinchi tur predmetlariga 38, 22, 6 sh.b. yuk ko'taruvchanlik to'g'ri keladi. 6- jadvalga ko'ra, $f_2(W) = 96,85,0$ sh.b. Umumiy narx 96, 135, 100 sh.b. Demak, $W = 38$ sh.b.da X_3 uchun maksimal narx 135 ga teng. Hisoblash natijalari 7- jadvalda keltirilgan.

4- qadam. Samolyotning optimal yuk ko'taruvchanligi W^* topiladi. W ga qiymat berib, 4- turdagi yuk uchun X_4 va $f_4(W)$ hisoblaniladi (7- jadval). Bunda $W = 83$ uchun 8- jadvalning 1- qatori hisoblansa, yetarli bo'ladi.

7- jadval.

W	$f_3(W)$	x_3		W	$f_3(W)$	x_3
0...15	0	0		44...45	170	0
16...21	50	1		46...47	181	0
22...23	85	0		48...63	192	0
24...31	96	0		64...69	242	1
32...37	100	2		70...71	277	0
38...39	135	1		72...87	288	0
40...43	146	1				

8- jadval.

W	$f_4(W)$	x_4		W	$f_4(W)$	x_4
0...9	0	0		46...47	181	0
10...15	20	1		48...57	192	0
16...21	50	0		58...63	212	1
22...23	85	0		64..69	242	0
24...33	96	0		70...71	277	0
34...37	116	1		72...81	288	0
38...39	135	0		82...87	308	1
40...45	146	0				

Ikkinchi bosqich. Bunda qo'yilgan masalaning optimal yechimi topiladi.

$f_4(W)$ ning maksimal qiymati to'rtinchi turdagi yuk miqdori X_4 ga mos ravishda W^* ga teng

$$W^* = \max f_4(W) = 308, \ X_4^* = 1. \qquad (2.4.3)$$

4- turdagi yuk massasi $X_4^* P_4 = 10$ sh. b. Qolgan uch turdagi yuk uchun $W - 10 = 73$ sh. b. qoladi. $W = 73$ sh. b uchun 7-jadvaldan $X_3^* = 0$ olinadi, shunga o'xshash $X_2^* = 0$, $X_1^* = 3$ larni 6- va 5- jadvallardan olinadi. 5—8 jadvallarga qaytsak, ular ko'rsatilgan yukni $W = 87$ shartli birlikkacha ixtiyoriy yuk ko'taruvchanlikka ega samolyotning optimal joylashtirishini beradi.

Shunday qilib, biz qo'yilgan masalani yechish bilan birga shunga o'xshash masalalar to'plami yechimini topishga muvaffaq bo'ldik. Bir tomondan bu yaxshi, 2- tomondan esa kompyuter xotirasida 5—8 jadval: $f_1(W) - f_4(W)$ ustunlar navbatdagi $(n+1)$ — qadam bajarilgunga, X_1, X_2, X_3, X_4 ustunlar va ularga mos W qiymatlari butun yechish jarayoni davomida saqlanishi kerak. Murakkab masalalar uchun bu muammo muhim ahamiyatga ega va qaralayotgan usulning imkoniyatlari cheklanganligini bildiradi.

5- §. Korxonalar o'rtasida xomashyo taqsimlash

Masala. To'rt sanoat korxonasining kelgusi yilga mo'ljallangan faoliyati rejalashtirilmoqda. Boshlang'ich ma'lumotga ko'ra, $s_0 = 5$ sh.b. Har bir korxona k - korxonaga ajratilgan x mablag' $(k = 1,2,3,4,5)$ yil oxirida $f_k(x)$ foyda oladi. $f_k(x)$ funksiya jadval ko'rinishida berilgan (9- jadval).

9- jadval.

x	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$	$f_4(x)$
1	8	6	3	4
2	10	9	4	6
3	11	11	7	8
4	12	13	11	13
5	18	15	18	16

a) $f_k(x)$ foyda mablag'ni boshqa korxonalarga sarflashga bog'liq emas;

b) har bir korxona foydasi bir xil shartli birliklarda ifodalanadi;

d) umumiy foyda korxonalar foydasi yig'indisiga teng.

Umumiy foyda eng katta bo'lishi uchun har bir korxonaga qancha mablag' sarflash kerak?

Yechish. k - korxonaga ajratilgan mablag' miqdori x_k bilan belgilanadi. Umumiy foyda

$$Z = \sum_{k=1}^{4} f_k(x_k) \tag{2.5.1}$$

ga teng. O'zgaruvchi x lar quyidagi shartlarni qanoatlantiradi:

$$\sum_{k=1}^{4} x_k = 5 \tag{2.5.2}$$

$$x_k \geq 0, \quad k = \overline{1,4}.$$

(2.5.2) shartlarni qanoatlantiruvchi va (2.5.1) maqsad funksiyasiga maksimumni beruvchi x_1, x_2, x_3, x_4 o'zgaruvchilarni topish talab qilinadi.

Modelning o'ziga xosligi shundaki, cheklashlar chiziqli, o'zgaruvchilar butun sonli, lekin $f_k(x_k)$ funksiyalar jadval ko'rinishida berilgan (9- jadvalga qarang). Shuning uchun bunda butun sonli chiziqli programmalashtirish usullarini qo'llab bo'lmaydi. Ana shunday masalalarda dinamik programmalashtirish usulidan foydalanish qo'l keladi.

Dinamik programmalashtirish usuli bilan yechish quyidagi tartibda olib boriladi: xomashyo taqsimlash jarayonini 4 qadamli deb olinadi, qadamning tartib raqami korxona raqami bilan ustma-ust tushadi. x_1, x_2, x_3, x_4 — mos ravishda 1-, 2-, 3-, 4- qadamlardagi boshqaruvni belgilaydi. $\overset{*}{s}$ — taqsimot jarayonining oxirgi holati bo'lib, u 0ga teng $\overset{*}{s} = 0$. Chunki xomashyoning hammasi ishlab chiqarishga sarf bo'ladi.

Holat tenglamalari bu masala uchun $s_k = s_{k-1} - x_k$, $k = \overline{1,4}$ ko'rinishida bo'ladi, bunda s_k — holat parametri k- qadamdan keyin qolgan, ya'ni, $4-k$ korxonalar o'rtasida taqsimlanadigan xomashyo miqdori. $Z_k^*(s_{k-1}) - k$-, $(k+1)$–,...,4 - korxonalarning, agar xomashyo ular o'rtasida optimal $s_{k-1} (0 \le s_{k-1} \le 5)$ taqsimlangan bo'lsa, shartli optimal foyda k - qadamda joiz boshqaruvlar $0 \le x_k \le s_{k-1}$ shartni qanoatlantiradi (k - korxonaga hech narsa ajratilmaydi $x_k = 0$, yoki k - qadamdagidan ortiqcha olmaydi, $x_k \le s_{k-1}$ bo'ladi). (2.2.1); (2.2.4) tenglamalar quyidagi ko'rinishga ega:

$$k = 4, s_4 = 0 \Rightarrow Z_4^*(s_3) = \max_{0 \le x_4 \le s_3} f_4(x_4). \qquad (2.5.3)$$

$$Z_3^*(s_2) = \max_{0 \le x_3 \le s_2} \left\{ f_3(x_3) + Z_4^*(s_3) \right\}. \qquad (2.5.4)$$

$$Z_2^*(s_1) = \max_{0 \le x_2 \le s_1} \left\{ f_2(x_2) + Z_3^*(s_2) \right\} \qquad (2.5.5)$$

$$Z_1^*(5) = \max_{0 \le x_1 \le 5} \left\{ f_1(x_1) + Z_2^*(s_1) \right\}. \qquad (2.5.6)$$

4- qadam. Yozilgan tenglamalarni ketma-ket yechib, har bir qadamda shartli optimallashtirish bajariladi. 1- jadvalda $f_4(x)$ foyda monoton o'sadi. Shuning uchun 4- qadamda qolgan barcha xomashyoni 4- korxonaga berish kerak. Bunda $s_3 = 0, 1, ..., 5$ joiz qiymatlar uchun:

$$Z_4^*(s_3) = f_4(s_3) \text{ va } x_4^*(s_3) = s_3.$$

3- qadam. Barcha farazlarni 3- qadamdagi qoldiq xomashyoga nisbatan olib boriladi (ya'ni, x_1 va x_2 tanlangandan so'ng). s_2 o'zgaruvchi 0, 1, 2, 3, 4, 5 qiymatlarni qabul qilishi mumkin (masalan, agar barcha xomashyo 1- va 2- korxonaga berilsa, $s_2 = 0$ bo'ladi, agar 1- va 2- korxona hech narsa olmasa, $s_2 = 5$ bo'ladi). Shunga nisbatan $0 \le x_3 \le s_2$ tanlanadi, $s_3 = s_2 - x_3$ topiladi va har xil x_3 lar uchun s_2 ning aniq qiymatida $f_3(x_3) + Z_4^*(s_3)$ yig'indining qiymatlari taqqoslanadi. Har bir s_2 uchun bu qiymatlarning eng kattasi $Z_3^*(s_2) - s_2$ xomashyoni 3- va 4- korxonalar o'rtasida optimal taqsimlashdan olingan shartli optimal foyda $k = 3$ bo'lganda optimallashtirish 10- jadvalda keltirilgan. s_2 ning har bir qiymati uchun $Z_3^*(s_2), X_3^*(s_2)$ qiymatlari jadvalning 5- va 6- ustunlarida keltirilgan.

2- qadam. (2.5.3) tenglamani shartli optimallashtirish $k = 2$, 10- jadvalda keltirilgan. s_1 ning barcha joiz qiymatlari uchun $Z_2^*(s_1)$ va $X_2^*(s_1)$ ning qiymati jadvalning 8- va 9- ustunlaridan topiladi, 7- ustundagi birinchi qo'shiluvchi $f_2(x_2)$ ning qiymati bo'ladi va u 1- jadvaldan olingan, ikkinchi qo'shiluvchi esa $s_2 = s_1 - x_2$ da 2- jadvalning 5- ustunidan olingan.

1- qadam. (2.5.4) tenglama 10- jadvalda $k = 1$ da $s_0 = 5$ uchun hisoblangan. Yechim batafsil keltiriladi: agar $x_1 = 0$ bo'lsa, u holda $s_1 = 5$ bo'ladi. $s_1 = 5$ xomashyo qolgan 3 korxona o'rtasida optimal taqsimlanganligi sharti bilan 4 korxonadan olingan foyda $f_1(0) + Z_2^*(5) = 0 + 19 = 19$ ga teng. ($Z_2^*(5)$ ning qiymatlari $s_1 = 5$ da 10- jadvalning 9- ustunidan olingan).

Agar $x_1 = 1$ bo‘lsa, $s_2 = 4$ bo‘ladi. $s_2 = 4$ xomashyo qolgan 3 korxona o‘rtasida optimal taqsimlanganligi sharti bilan umumiy foyda $f_1(1) + Z_2^*(4) = 8 + 16 = \underline{24}$ ($f_1(1)$ qiymati 9- jadvaldan olingan, $Z_2^*(4)$ qiymati 10- jadvalning 9- ustunidan olingan). Xuddi shuningdek,

$$x_1 = 2, \quad s_2 = 3, \quad f_1(2) + Z_2^*(3) = 10 + 13 = \underline{23}$$

$$x_1 = 3, \; s_2 = 2, \quad f_1(3) + Z_2^*(2) = 11 + 10 = \underline{21}$$

$$x_1 = 4, \; s_2 = 1, \quad f_1(4) + Z_2^*(1) = 12 + 16 = \underline{28}$$

$$x_1 = 5, \; s_2 = 0, \quad f_1(5) + Z_2^*(0) = 18 + 0 = \underline{18}$$

ostiga chizilgan qiymatlarni taqqoslanib, $x_1^* = x_1^*(5) = 1$ da $Z_1^*(5) = 24 sh.b. = Z\max$ topiladi.

(2.1.16) tenglamadan foydalanib, $s_1^* = 5 - 1 = 4$ olinadi, 10- jadvalning 9- ustuni bilan $x_2^* = x_2^*(4) = 2$ topiladi. So‘ng $s_2^* = 4 - 2 = 2$ topiladi va 10- jadvalning 6- ustuni bilan $x_3^* = x_3^*(2) = 1$ va nihoyat $s_3^* = 2 - 1 = 1$ $x_4^* = x_4^*(1) = 1$, ya’ni, $X^*(1;2;1;1)$ topiladi.

Xomashyo korxonalar o‘rtasida quyidagicha taqsimlangan: 1- korxonaga 1 sh.b.; 2- korxonaga 2 sh.b.; 3- korxonaga 1 sh.b.; 4- korxonaga 1 sh.b. va umumiy foyda 24 sh.b.ga teng.

1- eslatma. To‘rt o‘lchovli shartli ekstremum topish masalasi 4 ta bir o‘lchovli masala yechishga keltiriladi va har bir qadamda bitta x o‘zgaruvchi topib boriladi.

2- eslatma. Yuqoridagi masaladan ma’lum bo‘ladiki, dinamik programmalashtirish usuli funksiyaning ko‘rinishi va berilish turiga bog‘liq bo‘lmaydi, $f_k(x)$ jadval ko‘rinishida beriladi va shuning uchun $Z_k^*(s)$, $X_k^*(s)$ 10- jadvalda keltirilgan diskret qiymatlarni qabul qiladi.

10- jadval.

s_{k-1}	x_k	s_k	$k=3$			$k=2$			$k=1$		
			$f_3(x_3)+$ $+Z_4^*(s_3)$	Z_3^* (s_2)	x_3^* (s_2)	$f_2(x_2)+$ $+Z_3^*(s_2)$	Z_2^* (s_1)	x_2^* (s_1)	$f_1(x_1)+$ $+Z_2^*(s_1)$	Z_1^* (s_0)	x_1^* (s_0)
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0 1	1 0	0+1=1 3+0=3	4	0	0+4=4 6+0=6	6	1	0+6=6 8+0=8	8	1
2	0 1 2	2 1 0	0+6=6 3+4=7 4+0=4	7	1	0+7=7 6+4=10 9+0=9	10	1	0+10=10 8+6=14 10+0=10	14	1
3	0 1 2 3	3 2 1 0	0+8=8 3+6=9 4+4=8 7+0=7	9	1	0+9=9 6+7=13 9+4=13 11+0=11	13	1 2	0+13=13 8+10=18 10+6=16 11+0=11	18	1
4	0 1 2 3 4	4 3 2 1 0	0+13=13 3+8=11 4+6=10 7+4=11 11+0=11	13	0	0+13=13 6+9=15 9+7=16 11+4=15 13+0=13	16	2	0+16=16 8+13=21 10+10=20 11+6=17 12+0=12	21	1
5	0 1 2 3 4 5	5 4 3 2 1 0	0+16=16 3+13=16 4+8=12 7+6=13 11+4=15 18+0=18	18	5	0+18=18 6+13=19 9+9=18 11+7=18 13+4=17 15+0=15	19	1	0+19=19 8+16=24 10+13=23 11+10=21 12+6=18 18+0=18	24	1

3-eslatma. Dinamik programmalashtirish usulining boshqa usullardan ustunligi — bu usul yechimning s_0 va n o'zgarishlarga ta'sirchanligini tahlil qilish imkonini beradi. Yuqoridagi hisoblashni s_0 va n qadamlar soni o'zgargandagi holat uchun ham ishlatish mumkin. Masalan, s_0 — boshlang'ich xomashyo qiymati 1 sh.b.ga kamaytirilsin. $s_0 = 4$ uchun jadvalga $k = 1$ dagi hisoblashni qo'yish kifoya qiladi (bu esa o'sha 10- jadvalda bajarilgan).

Bu holda quyidagi taqsimlashdan

$$x_1^* = 1 \to s_1^* = 4 - 1 = 3 \Rightarrow x_2^* = 1 \text{ yoki } x_2^* = 2 \to s_2^* = 3 - 1 = 2$$

$$\text{yoki } s_2^* = 3 - 2 = 1 \Rightarrow x_3^* = 1 \text{ yoki } x_3^* = 0 \to s_3^* = 2 - 1 = 1$$

$$\text{yoki } s_3^* = 1 - 0 = 1 \Rightarrow x_4^* = 1 \; Z_{\max} = 21$$

hosil bo'ladi.

Natijada 2 optimal yechim topildi:

$$X^{(1)*}(1;1;1;1) \text{ va } X^{(2)*}(1;2;0;1).$$

Agar boshlang‘ich xomashyo qiymati, masalan 1 sh.b.ga orttirilsa va $s_0 = 6$, $f_k(x)$ foyda funksiyalari o‘z holicha qolsa, 10- jadvalga 1 bo‘lim qo‘shiladi. Bu holat 11- jadvalda ko‘rsatilgan.

11- jadval.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
6	0 1 2 3 4 5	6 5 4 3 2 1	0+16=16 3+16=19 4+13=17 7+8=15 11+6=17 18+4=22	22	5	0+22=22 6+18=24 9+13=22 11+9=20 13+7=20 15+4=19	24	1	0+24=24 8+19=27 10+16=26 11+13=24 12+10=22 18+6=24	27	1

$$Z_{\max} = 27\ x_1^* = 1 \to s_1^* = 6 - 1 = 5 \Rightarrow x_2^* = 1 \to$$
$$\to s_2^* = 5 - 1 = 4 \Rightarrow x_3^* = 0 \to$$
$$\to s_3^* = 4 - 0 = 4 \Rightarrow x_4^* = 4.$$

Optimal yechim: $X^*(1;1;0;4)$.

$s_0 = 5$ xomashyoni 2-, 3- va 4- korxonalar o‘rtasida taqsimlash talab qilinishi 10- jadvalda yechib qo‘yilgan. Jadvalning $k = 2$ bo‘limidan $Z_{\max} = Z_2^*(5) = 19$, $x_2^* = 1$, $x_3^* = 0$, $x_4^* = 4$ yechim hosil bo‘ladi.

Nihoyat, agar korxona (qadam)lar soni ortsa jadvalning $k = 0,\ -1, \ldots$ va hokazo raqamli qadamlarini qo‘shib to‘ldirish mumkin. Masalan, 6 miqdordagi xomashyo 5 korxona o‘rtasida taqsimlanayotgan bo‘lsin. Bunda 5- korxona foyda funksiyasi $x \neq 0$, $f(0) = 0$ da $f(x) = 3x + 1$ formula bilan berilgan. 5- korxonaga $k = 0$ nomer beriladi va bu holda x_0 — korxonaga ajratilgan xomashyo, 5ta korxonadan olingan optimal foyda $Z_0^*(6)$ quyidagiga teng:

$$Z_0^*(6) = \max_{0 \le x_0 \le 6} \left\{ f_0(x_0) + Z_1^*(s_1) \right\}$$

bunda $s_1 = 6 - x_0$. 0- qadamdagi shartli optimallashtirish 12- jalvalda keltirilgan.

12- jadval.

x_0	0	1	2	3	4	5	6
$s_1 = 6 - x_0$	6	5	4	3	2	1	0
$f(0) = 0$	0	4	7	10	13	16	19
$Z_1^*(s_1)$ ($k = 1$ uchun 10- va 11- jadvaldan olingan)	27	24	21	18	14	8	0
$f(x_0) + Z_1(s_1)$	27	28	28	28	27	24	19

Olingan natija $Z_{max} = 28$ ga teng bo'lib, 4 ta optimal yechim hosil bo'ladi:

$$X_1^*(1;1;2;1;1),\quad X_2^*(2;1;1;1;1),\quad X_3^*(2;1;2;0;1),\quad X_4^*(3;1;1;0;1).$$

4- eslatma. O'lchov kattalashgan holda hisoblashlardagi texnik muammolar dinamik programmalashtirish usulining kamchiligidir. Agar har bir X_k^* boshqaruv r o'zgaruvchiga bog'liq bo'lsa, s_k^* holat esa p o'zgaruvchiga bog'liq bo'lsa, har bir qadamda rp — o'lchovli optimallashtirish masalasi hosil bo'ladi. Yuqorida yechilgan masala bir o'lchovli bo'lib, ya'ni, $r = 1$, $p = 1$, har bir qadamda bir o'lchovli optimallashtirish masalasi hosil bo'ladi.

Dinamik programmalashtirish masalalarida boshqarish jarayoni, tabiiyki, qadamlarga bo'linadi. Masalan, korxona faoliyati uchun xomashyoni bir necha yilga taqsimlashda biror vaqt davri qadamni belgilaydi. n ta korxona o'rtasida vositalarni taqsimlashda qadam raqami navbatdagi korxonani raqami bo'ladi.

Masala shartidan kelib chiqib, qadam uzunligini shunday tanlash kerakki, har bir qadamda oddiy optimallashtirish masalasini hosil qilish va hisob-kitobning talab qilingan aniqligini ta'minlash mumkin bo'lsin. Har bir qadamda faqat shu qadamni boshqarish optimallashtiriladi.

6- §. Jihozlarni almashtirishning iqtisodiy muammolari

Amalda uchraydigan muhim iqtisodiy muammolardan biri — eski qurilma, ishlab chiqarish binolari, agregat, mashina va shu kabi boshqa eskirgan jihozlar, uskunalarni yangisiga almashtirishning optimal strategiyasini aniqlashdir. Shunday vaqt keladiki, xarajatlarni ko'paytirib eski jihozlarni ishlatgandan ko'ra, ularni sotish yoki yangisiga almashtirish afzalroq tuyuladi. Bunda uni xuddi shunday yangisi yoki texnik jihatdan mukammalroq bo'lgan boshqasiga almashtirish kerak bo'ladi. Jihozlarni almashtirishning optimal strategiyasi almashtirish optimal muddatlarini aniqlash demakdir. Bunda optimallik mezoni jihozni ishlatishdan keladigan foydani maksimallashtirish yoki biror vaqt davomida uni ishlatishga ketadigan umumiy xarajatni minimallashtirish bo'ladi.

m yil davomida jihozdan foydalanishning har bir i- yil, $i=\overline{1,m}$ uchun t yil jihozdan foydalanishda olinadigan foyda maksimal bo'ladigan optimal reja aniqlansin [22]. Buning uchun quyidagi belgilashlar kiritiladi:

$r(t)-t$ yillik jihozni 1 yil ishlatish natijasida olingan mahsulot ishlab chiqarish foydasi;

$l(t)-t$ jihozlash yoshi bilan bog'liq yillik sarflar;

$c(t)-t$ yillik jihozlarning qoldiq narxi, P — yangi jihoz narxi.

Jihozlash yoshi deb jihozni oxirgi almashtirishdan keyingi ishlatish vaqtiga aytiladi va u yillar bilan o'lchanadi.

Masalani matematik modelini quramiz. Buning uchun:

1. Qadamlar soni aniqlanadi. Qadamlar soni jihoz ishlatiladigan yillar soniga teng.

2. Sistema holati aniqlanadi. Sistema holati jihozlash yili t bilan xarakterlanadi $t=\overline{0,m}$.

3. Boshqaruvni aniqlash uchun i- qadam boshida $i=\overline{1,m}$ ikki boshqaruvdan biri tanlanadi: jihozlarni almashtirish yoki almashtirmaslik kerak. Boshqaruv variantlari quyidagi son bilan aniqlanadi.

$$x_i = \begin{cases} 0, & \text{jihoz almashtirilmaydi;} \\ 1, & \text{jihoz almashtiriladi.} \end{cases} \qquad (2.6.1)$$

4. i- qadamda maqsad funksiyasi aniqlanadi. i - qadamdagi maqsad funksiyasi — bu i- yil oxirida jihozdan foydalanilgandagi daromad $t = \overline{0,m}$, $i = \overline{1,m}$.

$$\varphi_i(t) = \begin{cases} r(t) - l(t), & \text{agar } i\text{- yil boshida jihoz almashtirilmasa;} \\ c(t) - p + r(0) - l(0) & \text{agar jihoz almashtirilsa.} \end{cases} \qquad (2.6.2)$$

5. Holat o‘zgartirish funksiyasi aniqlanadi:

$$f_i(t) = \begin{cases} t+1, & \text{agar } x_i = 0; \\ 1, & \text{agar } x_i = 1. \end{cases} \qquad (2.6.3)$$

6. $i = m$ uchun funksional tenglama quyidagicha ifodalanadi:

$$W_m(t) = \max_{x_m \in \{0;1\}} \begin{cases} r(t) - l(t) \\ c(t) - p + r(0) - l(0) \end{cases}. \qquad (2.6.4)$$

7. Asosiy funksional tenglama quyidagicha ifodalanadi:

$$W_i(t) = \max_{x_i \in \{0;1\}} \begin{cases} r(t) - l(t) + W_{i+1}(t+1) \\ c(t) - p(t) + r(0) - l(0) + W_{i+1}(1) \end{cases}. \qquad (2.6.5)$$

bunda, $W_i(t) - i$ - qadamdan (i - yil oxiridan) ekspluatatsiya davri oxirigacha t yillik jihozdan foydalanishdan olingan foyda.

$W_{i+1}(t+1) - (i+1)$ — qadamda ekspluatatsiya davri oxirigacha $(t+1)$ yillik jihozdan foydalanishdan olingan foyda. Bu masalaga oid hisoblashlarni quyidagi misolda keltiriladi.

Misol. $m = 12$, $p = 10$, $c(t) = 0$, $r(t) - l(t) = \varphi(t)$. $\varphi(t)$ ning qiymatlari 13- jadvalda berilgan.

13- jadval.

t	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$\varphi(t)$	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0	0	0

Bu misol uchun funksional tenglamalar quyidagi ko‘rinishga ega.

$$W_m(t) = \max_{x_m \in (0,1)} \begin{cases} \varphi(t), \\ -p + \varphi(0); \end{cases}$$

$$W_i(t) = \max_{x_i \in (0,1)} \begin{cases} \varphi(t) + W_{i+1}(i+1), \\ -p + \varphi(0) + W_{i+1}(1). \end{cases}$$

Masalani yechish uchun 14- jadval to‘ldiriladi.

14- jadval.

t	$i=12$		$i=11$		$i=10$		$i=9$		$i=8$		$i=7$		$i=6$		$i=5$		$i=4$		$i=3$		$i=2$		$i=1$	
	x_{12}	W_{12}	x_{11}	W_{11}	x_{10}	W_{10}	x_9	W_9	x_8	W_8	x_7	W_7	x_6	W_6	x_5	W_5	x_4	W_4	x_3	W_3	x_2	W_2	x_1	W_1
0	0	10	0	19	0	27	0	34	0	40	0	45	0	51	0	58	0	64	0	70	0	75	0	82
1	0	9	0	17	0	24	0	30	0	35	0	41	0	48	0	54	0	60	0	65	0	72	0	78
2	0	8	0	15	0	21	0	26	0	32	0	39	0	45	0	51	0	56	0	63	0	69	0	74
3	0	7	0	13	0	18	0	24	0	31	0	37	0/1	43	0/1	48	0	55	0	61	0	67	0	73
4	0	6	0	11	1	17	1	24	0/1	30	0	36	1	41	1	48	0/1	54	0	60	0	66	1	72
5	0	5	0/1	9	1	17	1	24	1	30	0/1	35	1	41	1	48	1	54	1	60	0/1	65	1	72
6	0	4	1	9	1	17	1	24	1	30	1	36	1	41	1	48	1	54	1	60	1	65	1	72
7	0	3	1	9	1	17	1	24	1	30	1	35	1	41	1	48	1	54	1	60	1	65	1	72
8	0	2	1	9	1	17	1	24	1	30	1	35	1	41	1	48	1	54	1	60	1	65	1	72
9	0	1	1	9	1	17	1	24	1	30	1	35	1	41	1	48	1	54	1	60	1	65	1	72
10	0/1	0	1	9	1	17	1	24	1	30	1	35	1	41	1	48	1	54	1	60	1	65	1	72
11	0/1	0	1	9	1	17	1	24	1	30	1	35	1	41	1	48	1	54	1	60	1	65	1	72
12	0/1	0	1	9	1	17	1	24	1	30	1	35	1	41	1	48	1	54	1	60	1	65	1	72

Jadvalni chap tomonidagi ustunda sistemaning mumkin bo‘lgan holatlari $t = \overline{0,12}$. Yuqoridagi satrda $i = \overline{1,12}$ qadamlarga raqam qo‘yib chiqilgan. Har bir qadam uchun shartli optimal boshqaruv $x_i(t)$ va i- qadamdan oxirigacha, t yillik jihozlar uchun shartli optimal foyda $W_i(t)$ topiladi.

Bir necha qadam uchun jadval qanday to‘ldirilishi ko‘rsatib o‘tiladi:

1. Shartli optimallashtirish oxirgi 12- qadamdan boshlanadi. $i = 12$ uchun sistemaning joiz holatlari qaraladi $t = 0, 1, 2, ..., 12$. Funksional tenglamalar 12- qadamda quyidagi ko‘rinishga ega.

$$W_{12}(t) = \max_{x \in (0,1)} \begin{cases} \varphi(t) \\ -p + \varphi(0) \end{cases}$$

1) $t = 0$

$$W_{12}(0) = \max_{0,1} \begin{cases} 10 \\ -10 + 10 \end{cases} = 10; \quad x_{12}(0) = 0$$

2) $t = 1$

$$W_{12}(1) = \max_{0,1} \begin{cases} 9 \\ -10 + 10 \end{cases} = 9; \quad x_{12}(1) = 0$$

....

10) $t = 9$

$$W_{12}(9) = \max_{0,1} \begin{cases} 1 \\ -10 + 10 \end{cases} = 1; \quad x_{12}(9) = 0$$

11) $t = 10$

$$W_{12}(10) = \max_{0,1} \begin{cases} 0 \\ -10 + 10 \end{cases} = 0; \quad x_{12}(10) = 0; \quad x_{12}(10) = 1$$

....

13)) $t = 12$

$$W_{12}(12) = \max_{0,1} \begin{cases} 0 \\ -10 + 10 \end{cases} = 0; \quad x_{12}(12) = 0; \quad x_{12}(12) = 1.$$

12- qadamda 0—9 yillik jihozlar almashtirilmaydi. 10—12 yillik jihozlarni almashtirish yoki ishlatish mumkin, chunki $t = 10,11,12$ uchun 2 xil shartli optimal boshqaruv mavjud (1 va 0).

Hisob natijalari $i = 12$ ga mos ikki ustunda qayd etiladi.

2. 11- qadamdagi shartli optimallashtirish.

$i = 11$ uchun barcha joiz holatlar ko'riladi, $t = 0,1,2,...,12$.

11- qadamda funksional tenglamalar quyidagi ko'rinishda bo'ladi:

$$W_{11}(t) = \max_{1,0} \begin{cases} \varphi(t) + W_{12}(t+1), \\ -p + \varphi(0) + W_{12}(1). \end{cases}$$

$i = 11$.

1) $t = 0$,

$$W_{11}(0) = \max_{1,0} \begin{cases} \varphi(0) + W_{12}(1) \\ -p + \varphi(0) + W_{12}(1) \end{cases} = \max_{1,0} \begin{cases} 10 + 9 \\ -10 + 10 + 9 \end{cases} =$$

$= 19; x_{11}(0) = 0.$

2) $t=1$,

$$W_{11}(1)=\max_{1,0}\begin{cases}\varphi(1)+W_{12}(2)\\ -p+\varphi(0)+W_{12}(1)\end{cases}=\max_{1,0}\begin{cases}9+8\\ -10+10+9\end{cases}=$$

$$=17;x_{11}(1)=0.$$

.....

6) $t=5$,

$$W_{11}(5)=\max_{1,0}\begin{cases}\varphi(5)+W_{12}(6)\\ -p+\varphi(0)+W_{12}(1)\end{cases}=\max_{1,0}\begin{cases}5+4\\ -10+10+9\end{cases}=$$

$$=9;x_{11}(5)=0;x_{11}(5)=1.$$

7) $t=6$,

$$W_{11}(6)=\max_{1,0}\begin{cases}\varphi(6)+W_{12}(7)\\ -p+\varphi(0)+W_{12}(1)\end{cases}=\max_{1,0}\begin{cases}4+3\\ -10+10+9\end{cases}=$$

$$=9;x_{11}(6)=1.$$

.....

13) $t=12$,

$$W_{11}(12)=\max_{1,0}\begin{cases}\varphi(12)\\ -p+\varphi(0)+W_{12}(1)\end{cases}=\max_{1,0}\begin{cases}0\\ -10+10+9\end{cases}=$$

$$=9;x_{11}(12)=1.$$

11- qadamda 0—4 yillik jihozlar almashtirilmaydi. 5 yillik jihozlar almashtirilishi yoki almashtirilmasligi mumkin. 6- yildan boshlab jihozlarni almashtirish kerak.

Hisoblash natijalariga ko‘ra 14- jadvalda $i=11$ uchun 2 ta ustun to‘ldiriladi.

1) $t=0$,

$$W_{10}(0)=\max_{1,0}\begin{cases}\varphi(0)+W_{11}(1)\\ -p+\varphi(0)+W_{11}(1)\end{cases}=\max_{1,0}\begin{cases}10+17\\ -10+10+17\end{cases}=$$

$$=27;x_{10}(0)=0.$$

2) $t = 1$,

$$W_{10}(1) = \max_{1,0}\begin{cases}\varphi(1) + W_{11}(2) \\ -p + \varphi(0) + W_{11}(1)\end{cases} = \max_{1,0}\begin{cases}9 + 15 \\ -10 + 10 + 17\end{cases} =$$

$= 24; x_{10}(1) = 0.$

3) $t = 2$,

$$W_{10}(2) = \max_{1,0}\begin{cases}\varphi(2) + W_{11}(3) \\ -p + \varphi(0) + W_{11}(1)\end{cases} = \max_{1,0}\begin{cases}8 + 13 \\ -10 + 10 + 17\end{cases} =$$

$= 21; x_{10}(2) = 0.$

4) $t = 3$,

$$W_{10}(3) = \max_{1,0}\begin{cases}\varphi(3) + W_{11}(4) \\ -p + \varphi(0) + W_{11}(1)\end{cases} = \max_{1,0}\begin{cases}7 + 11 \\ -10 + 10 + 17\end{cases} =$$

$= 18; x_{10}(3) = 0.$

5) $t = 4$,

$$W_{10}(4) = \max_{1,0}\begin{cases}\varphi(4) + W_{11}(5) \\ -p + \varphi(0) + W_{11}(1)\end{cases} = \max_{1,0}\begin{cases}6 + 9 \\ -10 + 10 + 17\end{cases} =$$

$= 17; x_{10}(4) = 1.$

.
.
.

13) $t = 12$,

$$W_{10}(12) = \max_{1,0}\begin{cases}\varphi(12) \\ -p + \varphi(0) + W_{12}(1)\end{cases} = \max_{1,0}\begin{cases}0 \\ -10 + 10 + 17\end{cases} =$$

$= 17; x_{10}(12) = 1.$

10- qadamda 0—3 yillik jihozlar almashtirilmaydi. 4- yildan boshlab almashtirish kerak, chunki yangi jihozlar ko'proq foyda keltiradi. $i = 10$ uchun 2 ustun to'ldiriladi.

Qolgan 9 ustun ham shu tarzda to'ldiriladi. $W_{i+1}(t)$ har bir qadamda hisoblanganda $\varphi(t)$ berilgan jadvaldan, $W_i(t)$ esa oxirgi, bundan oldin to'ldirilgan ustundan olinadi.

Shartli optimallashtirish jadval to'ldirilgach tugaydi. Shartsiz optimallashtirish 1- qadamdan boshlanadi.

Faraz qilaylik, birinchi qadamda $i=1$ yangi jihoz bor.

$t=0$ uchun $W_1(0)=82$ optimal yechim. Bu qiymat yangi jihoz (12 yilda) keltirgan maksimal foydaga teng. $W^*=W_1(0)=82$ unga shartsiz optimal boshqaruv $x_1(0)=0$ mos keladi. Demak, $i=1$ uchun $t=t_1=0$ va shartsiz optimal boshqaruv $x_1(0)=0$.

$i=2$ uchun (2.6.3) bo'yicha $t_2=t_1+1=1$ va shartsiz optimal boshqaruv $x_2(1)=0$.

$i=3$ uchun $t_3=t_2+1=1$ va shartsiz optimal boshqaruv $x_3(2)=0$.

Bundan keyin mos ravishda.

$i=4,\quad t_4=t_3+1=3,\quad x_4(3)=0,$

$i=5,\quad t_5=t_4+1=4,\quad x_5(4)=1,$

$i=6,\quad t_6=1,\quad x_6(1)=0,$

$i=7,\quad t_7=t_6+1=2,\quad x_7(2)=0,$

$i=8,\quad t_8=t_7+1=3,\quad x_8(3)=0,$

$i=9,\quad t_9=t_8+1=4,\quad x_9(4)=1,$

$i=10,\quad t_{10}=1,\quad x_{10}(1)=0,$

$i=11,\quad t_{11}=t_{10}+1=2,\quad x_{11}(2)=0,$

$i=12,\quad t_{12}=t_{11}+1=3,\quad x_{12}(3)=0.$

Optimal strategiyaga mos boshqaruvlar 14- jadvalda to'q qora rangda belgilangan. Bu masalada optimal strategiya jihozlarni har 4 yilda almashtirishni taqozo etadi.

Shu tarzda ixtiyoriy yillik jihozlarning optimal strategiyasini aniqlash mumkin.

7- §. Investitsiyalarning korxonalar o'rtasida optimal taqsimlanishi

Investor D sh.b. miqdoridagi xomashyoni m ta korxona o'rtasida taqsimlashi kerak. Har bir i- korxona unga x xomashyo sarflanganda $\varphi_i(x)$ foyda oladi. Investitsiyalarning korxonalar o'rtasida maksimal foyda beradigan optimal taqsimlanishini toping [22].

Bu masalada W- korxonalar keltiradigan foyda (yutuq) maqsad funksiyasi bo'ladi.

Matematik model qurishga kirishiladi. Qadamlar soni korxonalar soniga, ya'ni, m ga teng. Sistemaning holatini har bir qadam boshida mavjud bo'lgan xomashyo miqdori s miqdor belgilaydi $s \le D$.

i- qadamda x_i- boshqaruv i- korxonaga ajratilgan xomashyo miqdori bilan belgilanadi.

$\varphi_i(x_i) - i$ - korxonaning unga x_i xomashyo sarflangandan keyingi foydasi bo'lib,

$$W = \sum_{i=1}^{m} \varphi_i \cdot x_i \qquad (2.7.1)$$

masalaning maqsad funksiyasi bo'ladi. Berilgan masala dinamik programmalashtirish usulida yechiladi. Yangi holatga o'tish funksiyasini quyidagicha belgilanadi va uni topishga harakat qilamiz:

$$f_i(s;x) = s - x\,. \qquad (2.7.2)$$

Mabodo sistema i- qadamda s holatda bo'lsa va x boshqaruv tanlansa, $i+1$ - qadamda u $s-x$ holatda bo'ladi. Ya'ni, agar s shartli birlik xomashyo mavjud bo'lib, i- korxonaga x xomashyo sarflansa, kelajakda investitsiya uchun $s-x$ xomashyo qoladi. Oxirgi qadam $i=m$ uchun funksional tenglamalar tuzamiz.

$$W_m(x) = \varphi_m(x)\,. \qquad (2.7.3)$$

$$x_m(s) = s\,. \qquad (2.7.4)$$

Oxirgi korxonaga, oxirgi qadamda qancha xomashyo qolgan bo'lsa, shunchasi beriladi. Shartli optimal yutuq bu oxirgi korxona keltiradigan foydaga teng. Holat tenglamasiga (2.7.1) va (2.7.2) qo'yilsa, quyidagi tenglama hosil bo'ladi.

$$W_i(s) = \max_{x \le s}\{\varphi_i(x) + W_{i+1}(s-x)\}. \qquad (2.7.5)$$

Bu masala uchun asosiy funksional tenglama bo'ladi. i - qadamdan oldin s sh.b. xomashyo bor edi deylik. U holda x xomashyo i — korxonaga sarflandi va u $\varphi_i(x)$ foyda berdi. Qolgan $s-x$ xomashyo qolgan $i+1$ dan m gacha korxonalarga sarflanadi. Bunday sarflashdan olingan shartli optimal foyda $W_{i+1}(s-x)$. Shartli x boshqaruvlar ichidan $\varphi_i(x)$ bilan $W_{i+1}(s-x)$ yig'indisi maksimal bo'ladigani optimal bo'ladi.

Masala. $D = 5000$, $m = 3$, $\varphi_i(x)$ qiymatlari 15- jadvalda berilgan.

15- jadval.

x ming sh.b.	$\varphi_1(x)$ ming sh.b.	$\varphi_2(x)$ ming sh.b.	$\varphi_3(x)$ ming sh.b.
1	1,5	2	1,7
2	2	2,1	2,4
3	2,5	2,3	2,7
4	3	3,5	3,2
5	3,6	4	3,5

Bunda $x_1 > x_2$ uchun $\varphi_i(x_1) \ge \varphi_i(x_2)$, $\quad i = \overline{1,5}$.

Shartli optimallashtirish natijalari 16- jadvalda berilgan.

16- jadval.

s	$i=3$		$i=2$		$i=1$	
	$x_3(s)$	$W_3(s)$	$x_2(s)$	$W_2(s)$	$x_1(s)$	$W_1(s)$
1	1	1,7	0	2		
2	2	2,4	1	3,7		
3	3	2,7	1	4,4		
4	4	3,2	1	4,7		
5	5	3,5	1/4	5,2	2	6,4

16- jadvalning 1- ustunida $s = \overline{1,5}$ mumkin bo'lgan holatlar yozilgan, yuqori satrda qadam nomerlari yozilgan.

Har bir qadamda $x_i(s)$ shartli optimal boshqaruv va shartli optimal foyda topiladi. $W_i(s)$ $i=\overline{1,3}$ $s=\overline{1,5}$.

1) Oxirgi $i=3$ qadam uchun shartli optimallashtirish o'tkazamiz. $i=3$ qadam uchun funksional tenglama $W_3(s)=\varphi_3(s)$, $x_3(s)=s$ ko'rinishga ega, shuning uchun 16- jadvaldagi $i=3$ ga mos ikkita ustun 15- jadvaldan bevosita to'ldiriladi.

2) Endi $i=2$ uchun shartli optimallashtirish o'tkazamiz. $i=2$ uchun funksional tenglama yoziladi:

$$W_2(s)=\max_{x\le s}\{\varphi_2(x)+W_3(s-x)\}.$$

s ning har xil qiymatlari uchun, ya'ni, oldingi qadamning har xil tugallanishiga qarab yordamchi 17—22- jadvallar to'ldiriladi. Ular shartli optimallashtirish natijasida to'ldiriladi.

1) $s=1$.

17- jadval.

x	$1-x$	$\varphi_2(x)$	$W_3(1-x)$	$\varphi_2(x)+W_3(1-x)$
0	1	0	1,7	1,7
1	0	2	0	2

$$\max_{x\le 1}\{1,7;2\}=2$$

$$W_2(1)=2;$$

$$x_2(1)=1.$$

2) $s=2$.

18- jadval.

x	$2-x$	$\varphi_2(x)$	$W_3(2-x)$	$\varphi_2(x)+W_3(2-x)$
0	2	0	2,4	2,4
1	1	2	1,7	3,7
2	0	2,1	0	2,1

$$\max_{x\le 2}\{2,4;3,7;2,1\}=3,7$$

$$W_2(2)=3,7;$$

$$x_2(2)=1.$$

3) $s = 3$.

19- jadval.

x	$3-x$	$\varphi_2(x)$	$W_3(3-x)$	$\varphi_2(x)+W_3(3-x)$
0	3	0	2,7	2.7
1	2	2	2.4	4,4
2	1	2,1	1,7	3.8
3	0	2,3	0	2.3

$$\max_{x\le 3}\{2,7;4,4;3,8;2,3\} = 4,4$$

$$W_2(3) = 4,4;$$

$$x_2(3) = 1.$$

4) $s = 4$.

20- jadval.

x	$4-x$	$\varphi_2(x)$	$W_3(4-x)$	$\varphi_2(x)+W_3(4-x)$
0	4	0	3.2	3.2
1	3	2	2,7	4,7
2	2	2.1	2,4	4,5
3	1	2,3	1,7	4
4	0	3,5	0	3,5

$$\max_{x\le 4}\{3,2;4,7;4,5;4;3,5\} = 4,7$$

$$W_2(4) = 4,7;$$

$$x_2(4) = 1.$$

5) $s = 5$.

21- jadval.

x	$5-x$	$\varphi_2(x)$	$W_3(5-x)$	$\varphi_2(x)+W_3(5-x)$
0	5	0	3,5	3,5
1	4	2	3,2	5,2
2	3	2.1	2.7	4.8
3	2	2,3	2,4	4,7
4	1	3,5	1,7	5.2
5	0	4	0	4

$$\max_{x\le 5}\{3,5;5,2;4,8;5,2;4\} = 5,2$$

$$W_2(5) = 5,2;$$

$$x_2(5) = 1$$

$$x_2(5) = 4.$$

$s = 5,\ W_2(5) = 5{,}2$ uchun ikkita shartli optimal boshqaruv mavjud:

$$x_2(5) = 1 \text{ va } x_2(5) = 4\,.$$

3. $i = 1$ uchun shartli optimallashtirish o'tkaziladi.

1- qadamdan oldingi sistemaning holati ma'lum va shartli optimallashtirishni faqat $s = D = 5$ ming. sh.b. qiymat uchun keltiriladi.

$s = 5$

22- jadval.

x	$5-x$	$\varphi_1(x)$	$W_2(5-x)$	$\varphi_1(x) + W_2(5-x)$
0	5	0	5,2	5.2
1	4	1,5	4,7	6,2
2	3	2	4,4	6,4
3	2	2,5	3,7	6,2
4	1	3	2	5
5	0	3,6	0	3.6

$$\max_{x \le 5}\{5{,}2; 6{,}2; 6{,}4; 6{,}2; 5; 3{,}6\} = 6{,}4$$

$$W_1(5) = 6{,}4;$$

$$x_1(5) = 2.$$

5 ming sh.b. mablag'ni 3 korxonaga sarflab 6,4 ming sh.b. optimal foyda olindi:

$$W^* = W_1(5) = 6{,}4\,.$$

Shartsiz optimallashtirish natijalari jadvallarda berilgandek quyidagicha olinadi:

$$i = 1 \quad s_1 = 5 \quad W_1(5) = 6{,}4; \quad x_1^* = x_1(5) = 2\,.$$

$i = 2$ uchun holat tenglamasidan $s_2 = s_1 - x_1 = 5 - 2 = 3$.

$$W_2(3) = 4{,}4; \ x_2^* = x_2(3) = 1\,.$$

$i = 3$ uchun holat tenglamasidan $s_3 = s_2 - x_2 = 3 - 1 = 2$.

$$W_3(2) = 2{,}4; x_3^* = x_3(2) = 2\,.$$

$$x^* = (2;1;2)\,.$$

6400 sh.b. maksimal foyda olish uchun 2000 sh.b. dan birinchi va uchinchi korxonaga va 1000 sh.b. ikkinchi korxonaga sarflash kerak. Olingan yechim optimal yechimga yaqin bo'lib, uni yanada yaxshilash uchun optimallashtirish qadamini maydaroq qilish kerak.

2- namunaviy hisob topshiriqlari

2.1—2.2 masalalarda korxonalarning daromadi $f(x)$ ularga ajratilgan x xomashyoning funksiyasi bo'lgan holda n ta korxona o'rtasida xomashyolar optimal taqsimotini toping (23—24-jadvallar).

23- jadval.

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$f_1(x)$	5	9	12	14	15	18	20	24	27
$f_2(x)$	7	9	11	13	16	19	21	22	25
$f_3(x)$	6	10	13	15	16	18	21	22	25

$s_0 = 9$
$n = 3$
$\Delta x = 1$

24- jadval

x	1	2	3	4	5
$f_1(x)$	0,2	0,9	1,0	1,2	2,0
$f_2(x)$	1,0	1,1	1,3	1,4	1,8
$f_3(x)$	2,1	2,5	2,9	3,9	4,9
$f_4(x)$	0	2,0	2,5	3,0	4,0

$s_0 = 5$
$n = 4$
$\Delta x = 1$

2.3. 2.1- masala shartlarida $s_0 = 8$ xomashyo optimal taqsimotini toping.

2.4. Agar 4- korxona uchun foyda funksiyasi quyidagi jadvalda berilgan bo'lsa, 2.1- masala shartlarida $s_0 = 9$ bo'lgan holda 4 korxona o'rtasida xomashyo optimal taqsimotini toping (25- jadval).

25- jadval

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$f_4(x)$	3	5	7	11	13	15	20	22	24

2.5. 2.2- masala shartlarida $s_0 = 6$ uchun xomashyoning 4 korxona o'rtasidagi optimal taqsimotini toping.

2.6. 2.2- masala shartlarida xomashyoning 2-, 3-, 4- korxonalar o'rtasidagi optimal taqsimotini toping.

2.7. 2.2- masala shartlarida xomashyoning 1-, 2-, 3- korxonalar o'rtasidagi optimal taqsimotini toping.

2.8. 2.2- masala shartlarida xomashyoning 1-, 3-, 4- korxonalar o'rtasidagi optimal taqsimotini toping.

2.9. 2.2- masala shartlarida xomashyoning 1-, 2-, 4- korxonalar o'rtasidagi optimal taqsimotini toping.

2.10.—2.14 masalalar. Ishlab chiqarish ikki sohasining faoliyati n yilga rejalashtirilmoqda. Dastlab, xomashyo miqdori s_0 bo'lib, yil boshida I sohaga ajratilgan x xomashyo yil oxirida $f_1(x)$ foyda beradi va $g_1(x) < x$ miqdorda qaytib keladi. Xuddi shunday II soha uchun foyda funksiyasi $f_2(x)$ va qaytish funksiyasi $g_2(x) < x$ ham berilgan bo'lsa, n yil davomida I va II ishlab chiqarish sohasi o'rtasida s_0 xomashyo optimal taqsimotini toping. Yil oxirida barcha qaytarilgan xomashyo qayta taqsimlanadi, lekin foyda ishlab chiqarish daromadiga qo'shilmaydi.

2.10. $s_0 = 40000 sh.b.$; $n = 4$; $f_1(x) = 0,4x$; $f_2(x) = 0,3x$; $\varphi_1(x) = 0,5x$; $\varphi_2(x) = 0,8x$.

2.11. $s_0 = 10000 sh.b.$; $n = 4$; $f_1(x) = 0,1x$; $f_2(x) = 0,5x$; $\varphi_1(x) = 0,75x$; $\varphi_2(x) = 0,3x$.

2.12. $s_0 = 10000 sh.b.$; $n = 4$; $f_1(x) = 0,6x$; $f_2(x) = 0,5x$; $\varphi_1(x) = 0,7x$; $\varphi_2(x) = 0,8x$.

2.13. $s_0 = 300 sh.b.$; $n = 4$; $f_1(x) = 0,6x$; $f_2(x) = 0,3x$; $\varphi_1(x) = 0,4x$; $\varphi_2(x) = 0,7x$.

2.14. $s_0 = 300 sh.b.$; $n = 3$; $f_1(x) = 0,001x$; $f_2(x) = 0,2x$; $\varphi_1(x) = 0,7x$; $\varphi_2(x) = 0,3x$.

2.15. 2.10- masalani har bir yil boshida $\Delta x = 10000$ miqdorda qo'shimcha xomashyo keltirilgan hol uchun yeching.

2.16—2.18 jihozlarni almashtirishning optimal muddatlarini aniqlash masalalarining matematik modelini quring, Bellman tenglamalarini yozing.

2.16. $p_0 = 8000, \quad \varphi(t) = p_0 2^{-t}, \quad r(t) = 0{,}1 p_0(t+1); \quad n = 5.$
bunda p_0 — jihozning dastlabki narxi, $\varphi(t)$ — uning t yil ishlatilgandan keyingi narxi, $r(t)$ — t yillik jihozning bir yil davomidagi xarajatlari, n — jihozdan uni sotish davrigacha foydalanish muddati. Dastlabki sotib olish va oxirgi sotish umumiy xarajatlari minimal bo'lgan holda jihozni ishlatish optimal strategiyasini toping.

2.17. $n = 5$ yangi jihozning narxi sotib olish yiliga bog'liq,

$$p_k = 5000 + 500(k-1), \quad k = \overline{1,5}, \quad \varphi(t) = p_k 2^{-t}$$

$$\text{va } r_k(t) = 0{,}1 p_k(t+1).$$

2.18. $p_0 = 8000, \quad n = 5, \quad \varphi(t)$ va $r(t)$ 26- jadvalda berilgan:

26- jadval.

t	0	1	2	3	4	5
$\varphi(t)$	–	6000	5000	3000	1000	500
$r(t)$	600	800	1100	1500	2000	–

2.19. Samolyotga 4 xil yuk, yuklar umumiy narxi maksimal bo'ladigan qilib joylashtirilishi kerak. Samolyotning yuk ko'taruvchanligi $W = 100$ ga, P_1, P_2, P_3, P_4 — 1, 2, 3, 4- turdagi yuklar birligi massasi $P_1 = 5$, $P_2 = 20$, $P_3 = 10$, $P_4 = 15$ ga va V_1, V_2, V_3, V_4 — 1, 2, 3, 4- turdagi yukning narxi $V_1 = 20$, $V_2 = 40$, $V_3 = 40$, $V_4 = 55$ ga teng.

2.20. W hajmli omborga 3 jihoz joylashtirilishi kerak. Narxi c_i bo'lgan i — jihoz V_i joyni egallaydi. Har bir jihozdan nechtadan joylashtirilsa, joylangan jihozlarning umumiy narxi maksimal bo'ladi:

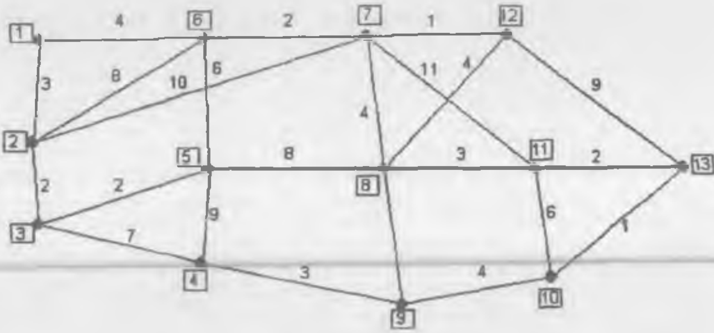
$$W = 90 \quad V_1 = 24 \quad V_2 = 19 \quad V_3 = 16 \quad c_1 = 960$$

$$c_2 = 500 \quad c_3 = 250 .$$

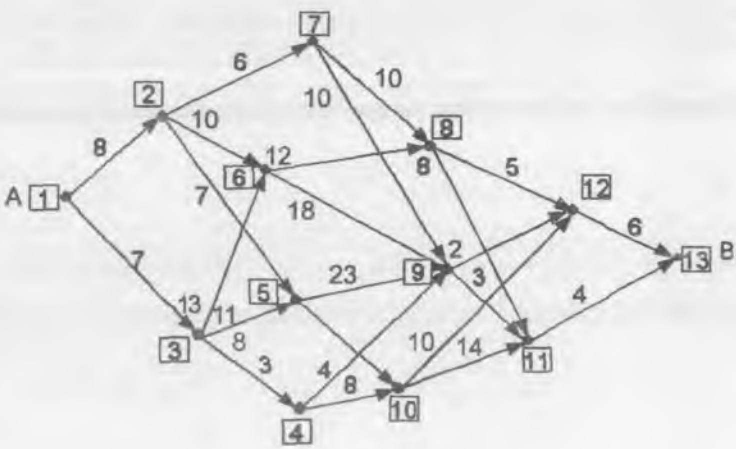
2.21. Uzunligi 167 sh.b. bo'lgan metall sim narxlari mos ravishda $c_1 = 96$, $c_2 = 85$, $c_3 = 64$, $c_4 = 35$ bo'lgan $l_1 = 48$,

$l_2 = 44$, $l_3 = 32$, $l_4 = 20$ uzunlikdagi bo‘laklarga shunday kesib tayyorlanishi kerakki, buyurtmaning umumiy narxi eng mak-simal narx bo‘lsin.

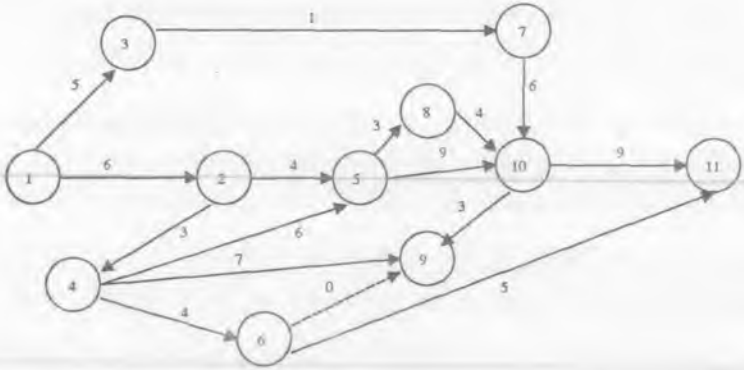
2.22.—2.25 masalalarda birinchi holatdan oxirgi holatga boradigan harajati eng kam optimal yo‘lini toping (6—9 rasm, 9- rasmda holatlarni nomerlang).



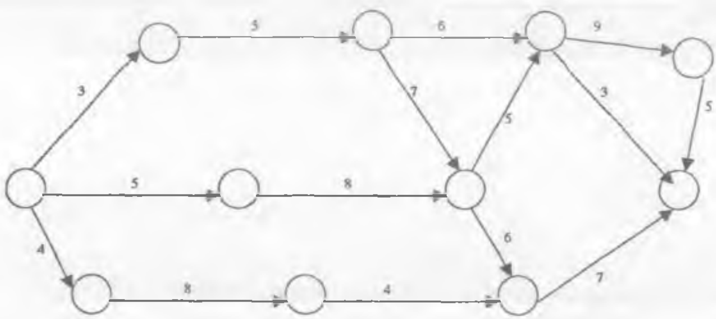
6- rasm.



7- rasm.



8- rasm.



9- rasm.

III bob. Matritsali o'yinlar nazariyasi

O'yinlar nazariyasi hozirgi zamon matematikasining eng qiziqarli va tez rivojlanayotgan sohalaridan hisoblanadi.

Quyida "Nol yig'indili ikki shaxs matritsali o'yini" ko'rinishidagi ziddiyatli holat sodda hollarining tahlili bilan tanishamiz. Matematik o'yinlar nazariyasi asoschilaridan biri J.Fon Neyman bo'lib, uning 1928 yilda yozilgan "К теории стратегическых игр" asarida o'yinlar nazariyasi asosiy teoremasi – "minimaks teoremasi"ning isboti keltirilgan. 1951-yili esa J.Dansig matritsali o'yinlar nazariyasi va chiziqli programmalashtirish nazariyalarining bir xil ekanligini topdi. Hozir o'yinlar nazariyasi usuli ko'proq matematik programmalashtirish masalalarini yechish va tahlil qilishda qo'llanilmoqda.

1- §. Nol yig'indili ikki shaxs matritsali o'yini

Avvalo matritsali o'yin tushunchasini, misol bilan tushunishga harakat qilib ko'ramiz. Quyidagi matritsa berilgan bo'lsin:

$$\begin{pmatrix} 5 & 0 & -3 \\ -4 & 4 & 2 \end{pmatrix}. \qquad (3.1.1)$$

Bir-biriga bog'liq bo'lmagan ikki o'yinchi ishtirok etayapti va ulardan birinchisi matritsaning satr raqami, ikkinchisi esa ustundagi raqamini aytadi. Agar birinchi o'yinchi ikkinchi satrni, ikkinchi o'yinchi uchinchi ustunni aytgan, ikkinchi satr va uchinchi ustunlar kesishgan joyda turgan son 2 bo'lsa, birinchi o'yinchining yutug'i 2 shartli pul birligiga teng bo'ladi. Bunda ikkinchi o'yinchining yutug'i — 2 , ya'ni u birinchi o'yinchiga 2 sh.b. yutqazgan bo'ladi. Ikkala o'yinchining yutuqlar miqdori $2+(-2)=0$ teng. Biz (3.1.1) matritsa bilan bir partiyadagi o'yinni ko'rsatdik. Boshqa partiyada birinchi o'yinchi birinchi satrni, ikkinchisi esa uchinchi ustunni aytadi.

Bunda birinchi o'yinchining yutug'i — 3 ga teng, ya'ni birinchi o'yinchi ikkinchisiga 3 sh.b. yutqazadi. Qarama-qarshi tomonlar yutug'ining yig'indisi yana 0 ga teng bo'layapti. Agar uchinchi partiyada birinchi o'yinchi birinchi satr, ikkinchi o'yinchi ikkinchi ustunni aytsa, ikkala o'yinchi, yutmaydi ham, yutqazmaydi ham va partiya durang bilan tugaydi.

Faraz qilaylik, endi bitta partiya emas, partiyalarning butun bir qatori o'ynalayotgan bo'lsin. Birinchi o'yinchi, masalan, quyidagi satr raqamlarini aytdi deylik: 1;1;2;1;1;2.

U birinchi qatorni $\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$ oraliq , ikkinchi qatorni esa $\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$ oraliqda aytdi. U holda ikkinchi o'yinchi birinchi o'yinchining satr raqamlarini tanlashdagi qonuniyatni ilg'ab olib, o'zi uchun eng qulay bo'lgan ustun raqamlari ketma-ketligini tanlaydi: ya'ni 3;3;1;3;3;1 va natijada birinchi o'yinchining yutug'i tegishli partiyalarda $-3;-3;-4;-3;-3;-4;...$ ni tashkil etadi. Birinchi o'yinchi uchun o'yinning muvaffaqiyatsiz tugashiga sabab u satr raqamlarini tasodifan emas, qonuniyat bilan tanlagan bo'lgan. U raqibiga har keyingi partiyadagi yurishi qanday bo'lishini oson yo'l bilan topish imkonini bergan. Faraz qilaylik , birinchi o'yinchi satr raqamini, ikkinchi o'yinchi esa ustun raqamini tasodifan, lekin aniq ehtimollik bilan aytadi. Masalan, birinchi o'yinchi birinchi satrni $\frac{3}{4}$ ehtimollik, ikkinchi satrni $\frac{1}{4}$ ehtimollik bilan aytsin, ikkinchi o'yinchi esa 1- ustunni $\frac{1}{5}$ ehtimollik, 2- ustunni $\frac{3}{5}$ ehtimollik, 3- ustunni $\frac{1}{5}$ ehtimollik bilan aytadi. Birinchi o'yinchining strategiyasi $P\left(\frac{3}{4};\frac{1}{4}\right)$, ikkinchisiniki $Q\left(\frac{1}{5};\frac{3}{5};\frac{1}{5}\right)$. Birinchi o'yinchining yutug'i tasodifiy miqdor bo'lib, uning mumkin bo'lgan (joiz) qiymatlari $5;0;-3;-4;4;2$, ya'ni, (3.1.1) matritsaning elementlaridir. Bu qiymatlar qanday ehtimolliklar bilan qabul qilinadi? Agar tavakkaliga birinchi o'yinchi 1- qatorni, 2- o'yinchi 1- ustunni aytsa, ikkita erkin hodisa ro'y beradi va birinchi o'yinchining yutug'i 5 ga teng bo'ladi. Erkin hodisalar ehtimolligini ko'paytirish teoremasiga ko'ra, 5 yutuq $\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{5}$ ehtimollik bilan topiladi. 0 yutuq esa $\frac{3}{4}\cdot\frac{3}{5}$ ehtimollik bilan topiladi va hokazo. 1- jadvalda birinchi o'yinchi yutug'ining barcha joiz qiymatlari va ularning ehtimolligi keltirilgan.

1- jadval.

5	0	−3	−4	4	2
$\frac{3}{4}, \frac{1}{5}$	$\frac{3}{4}, \frac{3}{5}$	$\frac{3}{4}, \frac{1}{5}$	$\frac{1}{4}, \frac{1}{5}$	$\frac{1}{4}, \frac{3}{5}$	$\frac{1}{4}, \frac{1}{5}$

Birinchi o'yinchi $P\left(\frac{3}{4};\frac{1}{4}\right)$ strategiya va uning raqibi $Q\left(\frac{1}{5};\frac{3}{5};\frac{1}{5}\right)$ strategiyaga ega bo'lgandagi tasodifiy miqdorning matematik kutilishi topiladi.

$$E(P,Q)=5\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{5}+0\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{3}{5}+(-3)\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{5}+(-4)\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{5}+4\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{5}+$$
$$+2\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{5}=\frac{16}{20}=0,8$$

Demak, birinchi o'yinchining yetarlicha katta sonli partiyalar o'ynalganda o'rtacha yutug'i 0,8 dan kam farq qiladi.

Endi bu vaziyatni umumiy holda qaraylik. Faraz qilaylik, A o'yinchi m ta $A_1, A_2, ..., A_m$ strategiyaga, B o'yinchi esa n ta $B_1, B_2, ..., B_n$ strategiyaga ega. U holda o'yin $m\times n$ o'lchovga ega bo'ladi va quyidagi

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \qquad (3.1.2)$$

elementlari ixtiyoriy haqiqiy sonlardan iborat bo'lgan matritsa bilan beriladi. Uni *o'yin matritsasi* yoki *to'lov matritsasi* deyiladi. O'yinchilarning ixtiyoriy strategiyalar juftini (A_i, B_j), $i = \overline{1,m}$, $j = \overline{1,n}$ tanlashlari natijasida o'yin bir qiymatli aniqlanadi, ya'ni, A o'yinchining yutug'i a_{ij} bilan va B o'yinchining yutqazuvi $(-a_{ij})$ bilan aniqlanadi. a_{ij} qiymatlar har bir juft (A_i, B_j), $i = \overline{1,m}$, $j = \overline{1,n}$ uchun ma'lum va to'lov matritsasining mos satr va ustunlari kesishgan joyda turgan elementga teng. Ikki o'yinchi bir-biriga bog'liq bo'lmagan holda birinchi o'yinchi $x_1, x_2 ... x_m$ ehtimolliklar bilan mos satr nomerlarini tanlaydi, ikkinchi o'yinchi esa $y_1, y_2 ... y_n$ ehtimolliklar bilan mos ustun nomerlarini tanlaydi. Ma'lumki, $x_i \ge 0$, $y_j \ge 0$ ($i = \overline{1,m}$; $j = \overline{1,n}$) va to'la guruh tashkil etuvchi birgalikda bo'lmagan hodisalar ehtimolliklari yig'indisi birga tengligi haqidagi teoremaga asosan $x_1 + x_2 + ... + x_m = 1$, $y_1 + y_2 + ... + y_n = 1$. $P(x_1, x_2, ..., x_m)$ — birinchi o'yinchining strategiyasi, $Q(y_1, y_2, ..., y_n)$ — ikkinchi o'yinchining strategiyasi. Demak, yig'indisi 1 ga teng bo'lgan manfiy bo'lmagan komponentlarga ega mos o'lchovli ixtiyoriy vektor o'yinchilarning joiz strategiyalari bo'lishi mumkin ekan.

Agar birinchi o'yinchi A matritsaning i- satrini, ikkinchi o'yinchi j- ustunini tanlasa, o'yin qoidasiga ko'ra, birinchi o'yinchining yutug'i (shu bilan birga raqibining yutqazishi) a_{ij} ga teng bo'ladi, raqibiniki $-a_{ij}$ ga teng bo'ladi. Yutuqlar yig'indisi 0 ga teng bo'lgani uchun bu o'yin *nol yig'indili* *ikki shaxs o'yinlari* deb ataladi. O'yinchilar satr va ustun nomerlarini tasodifan tanlaganliklari uchun birinchi o'yinchining yutug'i tasodifiy miqdor bo'ladi. Bu yutuqning mumkin bo'lgan (joiz) qiymatlari to'lov matritsasining elementlaridir. Birinchi o'yinchining a_{ij} yutuqqa ega bo'lish ehtimolligi $x_i \cdot y_j$ ga teng. Uning P strategiyaga, raqibining Q strategiyaga ega bo'lishini bilgan holda birinchi o'yinchi yutug'ining matematik kutilishi quyidagiga teng:

$$E(P,Q) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i y_j = a_{11} x_1 y_1 + a_{12} x_1 y_2 + \ldots + $$

$$+ a_{mn} x_m y_n. \qquad (3.1.3)$$

Yutuqning matematik kutilishi faqatgina A matritsaga emas, o'yinchilarning qabul qilgan strategiyalariga ham bog'liq va to'lov matritsasi berilgan holda P va Q ning funksiyasi bo'ladi. U yutuqlar funksiyasi deyiladi.

2- §. Matritsali o'yinlar yechimini topish

Partiyalarning butun bir ketma-ketligi o'ynalayotgan holatni olib qaraylik: bunda birinchi o'yinchining bir partiyaga to'g'ri keladigan o'rtacha yutug'i ma'lum ma'noda uning yutug'i matematik kutilishiga yaqinlashadi. O'yinchilar strategiyalari muhim xususiy hollaridan biri *sof strategiya*dir. Agar birinchi o'yinchi faqat i- satrni, 1 ga teng ehtimollik bilan, qolgan satrlarni 0 ga teng ehtimollik bilan tanlasa, u holda uning strategiyasi $P_i = (0,\ldots,0,1,0,\ldots,0)$ (bunda $x_i = 1$, $x_k = 0$, $k \neq i$) *sof strategiya*, ya'ni, *i- sof strategiya* deyiladi. P_i — m o'lchovli birlik vektor, xuddi shuningdek, ikkinchi o'yinchining j- sof strategiyasi — bu n o'lchovli birlik vektor $Q_j = (0,\ldots,0,1,0,\ldots,0)$ ($y_j = 1$, $y_k = 0$, $k \neq j$) bo'lib aniqlanadi. Birinchi o'yinchi m ta sof strategiya, ikkinchi o'yinchi n ta sof strategiyaga ega bo'lsin. Birinchi o'yinchi yutug'ining matematik kutilishi, u P_i strategiyaga ega bo'lganda, a_{ij} ga teng bo'ladi. Haqiqatan, bu holda birinchi o'yinchining yutug'i 1 ga teng ehtimollikka ega a_{ij} ga teng va yutuqning matematik kutilishi $a_{ij}\cdot 1$, ya'ni $E(P_i,Q_j)=a_{ij}$ ga teng. Bu natijani (3.1.3) formula bilan bevosita hisoblab topish mumkin. Sof bo'lmagan strategiyalarni *aralash strategiyalar* deb ataladi. Har qanday aralash strategiyaning kamida ikkita komponenti 0 dan farqli bo'ladi. Sof strategiyalar soni cheklangani uchun bu o'yin nol yig'indili va chekli sondagi sof strategiyalarga ega ikki shaxsning matritsali o'yini deb ataladi.

$P^*=(x_1^*,x_2^*,...,x_m^*)$, $Q^*(y_1^*,y_2^*,...,y_n^*)$ — mos ravishda birinchi va ikkinchi o'yinchining aniq strategiyalari bo'lsin.

Ta'rif. Agar ixtiyoriy P va Q strategiyalar uchun quyidagi tengsizlik o'rinli bo'lsa:

$$E(P,Q^*)\le v\le E(P^*,Q) \qquad (3.2.1)$$

u holda P^* va Q^* strategiyalar *optimal strategiyalar* deyiladi, v soni esa *o'yin bahosi (o'yin qiymati)* deyiladi. (3.2.1) ifodadagi chap tengsizlik shuni bildiradiki, agar ikkinchi o'yinchi Q^* strategiyani qo'llasa, u holda birinchi o'yinchi qanday o'ynamasin, uning yutug'i v sonidan ortmaydi. O'ng tengsizlikning ma'nosi shuki, agar birinchi o'yinchi P^* strategiyada turib olsa, u holda ikkinchi o'yinchi qanday o'ynamasin, birinchi o'yinchining yutug'i v sonidan kam bo'lmaydi. Shunday qilib, o'yin qiymati birinchi o'yinchining eng katta kafolatli yutug'i (ikkinchi o'yinchining eng kichik kafolatli yutqazishi)ni ifodalaydi. Agar (3.2.1) ifodada ixtiyoriy P va Q lar P^* va Q^* lar bilan almashtirilsa,

$$E(P^*,Q^*)\le v\le E(P^*,Q^*) \qquad (3.2.2)$$

hosil bo'ladi, bundan $v=E(P^*,Q^*)$, ya'ni, o'yinning qiymatiga teng bo'ladi. Ikkala o'yinchi ham o'z optimal strategiyasini qo'llaganligi uchun birinchi o'yinchi yutug'ining matematik kutilishi o'yin qiymati bilan bir xil bo'ladi.

O'yinning yechimi deganda, optimal strategiyalar jufti va o'yin bahosi(qiymati) v tushuniladi.

Misol. 2×2 o'lchovli to'lov matritsasi berilgan bo'lsin.

$\begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ matritsa bilan berilgan o'yinni qaraylik $P=(x, 1-x)$ — birinchi o'yinchining ixtiyoriy strategiyasi, $Q=(y;\ 1-y)$ — ikkinchi o'yinchiniki bo'lsin.

Birinchi o'yinchi P strategiyani, uning raqibi esa Q strategiyani qabul qilgandagi birinchi o'yinchi yutug'ining matematik kutilishi quyidagiga teng bo'ladi:

$$E(P,Q)=5xy-3x(1-y)+2(1-x)y+4(1-x)(1-y)=$$
$$=10xy-7x-2y+4=10\left(xy-\frac{7}{10}x-\frac{1}{5}y+\frac{2}{5}\right).$$

$$E\left((P,Q)=10\left(x-\frac{1}{5}\right)\left(y-\frac{7}{10}\right)+\frac{13}{5}\right).$$

Agar birinchi o'yinchi $x=\frac{1}{5}$ ni tanlab, $P^*=\left(\frac{1}{5},\frac{4}{5}\right)$ strategiyani qo'llasa, ixtiyoriy y uchun, ya'ni, ikkinchi o'yinchining qanday strategiya qo'llashidan qat'iy nazar $E(P^*,Q)=\frac{13}{5}$ bo'ladi.

Agar birinchi o'yinchi boshqa strategiyani, masalan, $P'=(x',1-x')$ ni qo'llasa, bunda $x'<\frac{1}{5}$, u holda ikkinchi o'yinchi $y'>\frac{7}{10}$ bo'lgan $Q'=(y',1-y')$ boshqa strategiyani qo'llaydi va $E(P',Q')<\frac{13}{5}$ bo'ladi.

Boshqa tomondan qaralganda $x'>\frac{1}{5}$ bo'lsa, u holda $y'<\frac{7}{10}$ da yana $E(P',Q')<\frac{13}{5}$ bo'ladi. Shunday qilib, $\frac{13}{5}$

birinchi o'yinchining kafolatlangan eng katta yutug'i bo'ladi. Chunki agar birinchi o'yinchi P^* strategiyani tanlamasa, raqib o'yinida bu yutuq, ko'rib turganimizdek, faqat kamayadi.

Xuddi shuningdek, agar ikkinchi o'yinchi $Q^* = \left(\frac{7}{10}; \frac{3}{10}\right)$ strategiya $y = \frac{7}{10}$ ni qo'llasa, u holda birinchi o'yinchining ixtiyoriy P strategiyasida $E(P, Q^*) = \frac{13}{5}$ bo'ladi. Ikkinchi o'yinchi $y' < \frac{7}{10}$ bo'lgan boshqa strategiyani tanlagandagi holat $Q' = (y', 1 - y')$ bo'ladi. Birinchi o'yinchi $x' < \frac{1}{5}$ bo'lgan $P' = (x', 1 - x')$ strategiyani tanlashi kerak bo'lganda $E(P', Q') > \frac{13}{5}$ bo'ladi. Xuddi shunday $y' > \frac{7}{10}$ va $x' > \frac{1}{5}$ da yana $E(P', Q') > \frac{13}{5}$ bo'ladi. Ikkinchi o'yinchining eng kichik kafolatlangan yutqazishi $\frac{13}{5}$ ga teng. Bundan kelib chiqadiki, $P^* = (\frac{1}{5}, \frac{4}{5})$ va $Q^* = \left(\frac{7}{10}, \frac{3}{10}\right)$ o'yinchilarning optimal strategiyasi, $\frac{13}{5}$ soni esa o'yin bahosidir. Bu holda (3.2.2) tengsizlik tenglama ko'rinishini oladi:

$$E(P, Q^*) = \frac{13}{5} = E(P^*, Q).$$

Strategiyalar optimalligi mezoni quyidagi teoremalarda o'z aksini topgan.

1- teorema. P^* va Q^* strategiyalar o'yinchilarga mos optimal strategiya va v soni o'yin bahosiga teng bo'lishi uchun quyidagi tengsizlik barcha $i=\overline{1,m}$, $j=\overline{1,n}$ da o'rinli bo'lishi zarur va yetarli bo'ladi:

$$E(P_i,Q^*)\le v\le E(P^*,Q_j). \qquad (3.2.3)$$

Haqiqatan ham (3.2.1) tengsizlik barcha strategiyalar uchun o'rinli bo'lib, bu qoida xususan P_i,Q_j ($i=\overline{1,m}$, $j=\overline{1,n}$) kabi sof strategiyalarga ham tegishli bo'ladi.

Endi o'yin nazariyasining asosiy teoremasini keltiramiz. Amerikalik olim Jon fon Neymanga tegishli ushbu teorema o'yin nazariyasi bilan chiziqli programmalashtirish masalasi bir biri bilan bog'liq ekanligini ko'rsatadi.

2- teorema. Har qanday cheklangan matritsali o'yin kamida bitta optimal yechimga ega bo'ladi.

Bu teoremaga ko'ra shuningdek, matritsali o'yin nazariyasi bilan chiziqli programmalashtirish masalasi o'rtasidagi bog'liqlikdan foydalanib, matritsali o'yinning yechimini topish mumkin (shu bobning 7- § ga qarang).

3- §. "Egar" nuqtali o'yinlar

Ikki shaxs matritsali o'yinidagi o'yinchilarning optimal strategiyasi aralash strategiya bo'ladi. Ba'zi xususiy hollar, masalan "Egar" nuqtalio'yinlar da optimal strategiyalar ichidan sof strategiyalar topiladi. Misol sifatida quyidagi to'lov matritsali o'yinni olib ko'ramiz:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j_0} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij_0} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{i_01} & a_{i_02} & \cdots & a_{i_0j_0} & \cdots & a_{i_0j} & \cdots & a_{i_0n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mj_0} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}. \qquad (3.3.1)$$

Ta'rif. i_0 - satr va j_0 - ustun kesishgan $a_{i_0 j_0}$ element o'z satrida eng kichik va o'z ustunida eng katta element bo'lsa, (i_0, j_0) nuqta A matritsaning "egar" nuqtasi deyiladi, ya'ni

$$a_{ij_0} \le a_{i_0 j_0} \le a_{i_0 j}, \quad i = \overline{1,m}, \quad j = \overline{1,n}. \qquad (3.3.2)$$

Masalan, quyidagi matritsada

$$\begin{pmatrix} -3 & -1 & 2 & 4 \\ 4 & 5 & 3 & 6 \\ -2 & 6 & 0 & 7 \end{pmatrix}. \qquad (3.3.3)$$

(2;3) o'rindagi nuqta matritsaning "egar" nuqtasi bo'ladi, chunki 3 raqami ikkinchi satrdagi eng kichik va uchinchi ustundagi eng katta son.

Quyidagi matritsada esa ikkita "egar" nuqta bor:

$$\begin{pmatrix} -5 & 2 & -4 & 4 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ -2 & -6 & -5 & 0 \end{pmatrix} \qquad (3.3.4)$$

(2;1) va (2;3) o'rindagi "egar" nuqtalarda $a_{21} = a_{23} = -1$.

Hamma matritsada ham "egar" nuqta bo'lavermaydi. Quyidagi teorema "egar" nuqtani topish shartini beradi.

3- teorema. A to'lov matritsasi (i_0, j_0) "egar" nuqtali bo'lishi uchun birinchi o'yinchining P_{i_0} va ikkinchi o'yinchining Q_{j_0} sof strategiyalari optimal bo'lishi zarur va yetarli, bunda o'yin bahosi $\nu = a_{i_0 j_0}$ ga teng bo'ladi.

Teoremadan kelib chiqadiki, agar o'yin matritsasi "egar" nuqtali bo'lmasa, unda joiz optimal aralash strategiyalar mavjud bo'ladi. "Egar" nuqtali bo'lmagan o'yinlarda optimal strategiyalar faqat aralash bo'ladi. "Egar" nuqtali o'yin yechimini topish oson. Yuqorida ko'rilgan (3.3.3) matritsali o'yinda $P_2(0;1;0)$ va $Q_3(0;0;1;0)$ sof strategiyalar optimal hamda o'yin bahosi $\nu = 3$ ga teng.

Ikkita “egar” nuqtali (3.3.4) matritsali o‘yinda ikki juft sof optimal strategiyalar mavjud: $P_2(0;1;0)$, $Q_1(0;0;1;0)$ va $P_2(0;1;0)$, $Q_3(0;0;1;0)$ bunda o‘yin bahosi $v=-1$ ga teng. Bu o‘yinning ko‘rsatilgan ikkita yechimidan boshqa yechimi ham bo‘ladi, ya’ni, $P_2(0;1;0)$, $\overline{Q}=\left(\frac{2}{5};0;\frac{3}{5};0\right)$. Bunda $\overline{Q}$ — aralash strategiya bo‘lyapti. Agar o‘yin bittadan ortiq yechimga ega bo‘lsa, uning yechimi cheksiz ko‘p bo‘ladi.

Ba’zi hollarda o‘yin yechimini topish matritsada boshqalaridan afzal satr yoki ustun mavjudligi hisobiga yengillashadi. Masalan, quyidagi matritsali o‘yinni qarab chiqaylik.

$$\begin{pmatrix} 4 & -2 & 3 & 0 & 4 \\ -1 & 2 & -1 & 3 & -4 \\ -1 & 3 & 2 & 4 & -3 \end{pmatrix}. \tag{3.3.5}$$

Matritsaning ikkinchi va uchinchi satrlarini taqqoslab, ikkinchi satr barcha elementlari uchinchi satr mos elementlaridan ortib ketmasligi seziladi. Shunga ko‘ra, uchinchi satrni ikkinchi satrga nisbatan afzal ko‘rib ikkinchi satr tashlab yuboriladi. Haqiqatda birinchi o‘yinchi ikkinchi va uchinchi satrni taqqoslab, barcha hollarda uchinchi satrni tanlaydi va birinchi o‘yinchi optimal strategiyasida ikkinchi satrni tanlash ehtimoli 0 ga teng bo‘ladi. Shuning uchun (3.3.5) matritsadan ikkinchi satrni tushirib quyidagi yangi matritsali o‘yinni qarab chiqiladi:

$$\begin{pmatrix} 4 & -2 & 3 & 0 & 4 \\ -1 & 3 & 2 & 4 & -3 \end{pmatrix}. \tag{3.3.6}$$

U endi 2×5 o‘lchovga ega, ya’ni, ikkita satr va beshta ustuni bor. Matritsadagi ustunlar taqqoslanadi. Birinchi va beshinchi ustunlarni taqqoslab, beshinchi ustun barcha elementlari birinchi ustun mos elementlaridan ortib ketmasligi seziladi. Ikkinchi o‘yinchi eng kichik yutqazishni istagani uchun beshinchi ustunni tanlaydi va uning optimal strategiyasi birinchi komponenti 0 ga teng bo‘ladi. Birinchi ustunni o'chirilsa, 2×4 o'lchovli yangi matritsa hosil bo'ladi.

$$\begin{pmatrix} -2 & 3 & 0 & 4 \\ 3 & 2 & 4 & -3 \end{pmatrix}. \qquad (3.3.7)$$

Shunga o'xshash (3.3.7) matritsada uchinchi ustun birinchi ustunga nisbatan qarab tashlab yuboriladi va yana yangi 2×3 o'lchovli matritsaga ega bo'lamiz:

$$\begin{pmatrix} -2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & -3 \end{pmatrix}. \qquad (3.3.8)$$

(3.3.8) matritsali o'yin yechimini topish uchun uni ikki yoqlama simmetrik masalalar juftiga (chiziqli programmalashtirish masalasiga) keltiramiz. Uni yechib, optimal strategiyalar $\overline{P} = \left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$, $\overline{Q} = \left(\frac{7}{12}; 0; \frac{5}{12}\right)$ va o'yin bahosi

$\nu = \frac{1}{2}$ topiladi.

Xulosa qilib aytish mumkinki, to'lov matritsasidagi satr va ustunlarni olib tashlash masala yechishni ancha osonlashtiradi.

Masala. Quyidagi matritsali o'yin berilgan bo'lsin. Shu o'yinning yechimini toping:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}. \qquad (3.3.9)$$

Yechish. Bu matritsa "egar" nuqtali bo'lolmaydi, shuning uchun unda "egar" nuqta yo'q va o'yinchilarning optimal strategiyasi aralash bo'ladi (bu sharoitda ular boshqa strategiya tanlab o'z holatlarini yaxshilashlari mumkin) Matritsa satrlarini taqqoslab uchinchi satrni birinchi satrdan afzalligi bilib olinadi va shuning uchun birinchi satr tushirib qoldiriladi:

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}. \qquad (3.3.10)$$

Bu matritsada uchinchi ustun ikkinchi ustunga nisbatan qarab tushirib qoldiriladi. Natijada

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}. \qquad (3.3.11)$$

Hosil bo'lgan matritsaning o'lchovi 2×2 va uni tekshirish uchun yuqorida ko'rilgan usul qo'llaniladi. $P = (x; 1-x)$ — birinchi o'yinchining ixtiyoriy strategiyasi, $Q = (y; 1-y)$ esa ikkinchi o'yinchining ixtiyoriy strategiyasi. Birinchi o'yinchi P strategiyani qabul qilgandagi yutug'ining matematik kutilishi (bunda uning raqibi Q strategiyani qabul qilishi kerak) quyidagiga teng:

$$E(P;Q) = -xy + x(1-y) + 2(1-x)y - (1-x)(1-y) =$$
$$= -5xy + 2x + 3y - 1 = -5\left(x - \frac{3}{5}\right)\left(y - \frac{2}{5}\right) + \frac{1}{5}. \qquad (3.3.12)$$

(3.3.11) matritsali o'yinning yechimi $\overline{P} = \left(\frac{3}{5}; \frac{2}{5}\right)$, $\overline{Q} = \left(\frac{2}{5}; \frac{3}{5}\right)$ va $\nu = \frac{1}{5}$. Berilgan masalaning (3.3.9) yechimi esa $P^* = \left(0; \frac{3}{5}; \frac{2}{5}\right)$, $Q^* = \left(\frac{2}{5}; \frac{3}{5}; 0\right)$, $\nu = \frac{1}{5}$. Bu o'yin birinchi o'yinchining foydasiga hal bo'ldi ($\nu > 0$).

4- §. Nol yig'indili ikki shaxs o'yinida optimal yechimlar

Qaror qabul qilish masalalarida mezon tanlash, odatda, mavjud ma'lumotlarga asoslangan bo'ladi. O'yinlar esa raqiblar bir-biri bilan ziddiyat holatida va ma'lumotlar, umuman olganda, mavjud bo'lmagan holga misol bo'ladi. Shuning uchun nol yig'indili ikki shaxs o'yinini yechish uchun minimaks (maksimin) mezoni qo'llaniladi. O'yinchilarning har biri raqibiga qarshi harakat qilishini hisobga olgan holda, minimaks mezoni barcha strategiyalar (sof yoki aralash) ichidan eng yaxshi yoki eng yomon joiz natijalarni beradiganlarini ajratadi.

O'yinchilardan birortasi strategiyasini o'zgartirishni foydali deb bilmagan holdagina optimal yechimga erishiladi. Bu holda o'yin stabil yoki muvozanat holatida deyiladi. Ko'pincha o'yin matritsasi strategiyasini satrlar bilan aniqlaydigan birinchi o'yinchi (A) yutug'ini ifodalagani uchun mezon birinchi o'yinchiga shunday strategiyani (sof yoki aralash) tanlashini ko'rsatadiki, uning minimal yutug'i maksimallashadi va bunda minimum ikkinchi o'yinchining (B) barcha strategiyalari bo'yicha olinadi. Xuddi shunday tartibda ikkinchi o'yinchi ham (B) maksimal yutug'ini minimallashtiruvchi strategiyani tanlaydi, bunda maksimum birinchi o'yinchining (A) strategiyalari bo'yicha olinadi. Bular o'yinning minimaks va maksimin qiymatlari deyiladi. Quyidagi misolda o'yinning minimaks va maksimin qiymatlari hisoblanishi ko'rsatilgan.

1- masala. A o'yinchi yutug'ini aniqlovchi to'lov matritsasi berilgan (2- jadval). Berilgan o'yinning minimaks va maksimin qiymatini toping.

2- jadval.

	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	8	2	9	5
A_2	6	5	7	18
A_3	7	3	−4	10

Yechish. Agar A o'yinchi A_1 strategiyani qabul qilsa, u B o'yinchi tanlagan strategiyalarga mos ravishda 8,2,9 yoki 5 qiymatlarni oladi. Uning yutug'i B o'yinchining holatidan qat'iy nazar $\alpha_1 = \min\{8,2,5,9\} = 2$ dan kam bo'lmaydi.

Agar A o'yinchi A_2 strategiyani qabul qilsa, uning kafolatlangan yutug'i $\alpha_2 = \min\{6,5,7,18\} = 5$ ga teng va nihoyat u A_3 strategiyani qabul qilsa, uning yutug'i

$\alpha_3 = \min\{7, 3, -14, 10\} = -4$ ga teng bo'ladi. Har bir satrdagi minimal qiymat uning shu strategiyani qabul qilgandagi kafolatlangan yutug'i bo'ladi. Olingan natija 3- jadvalda aks ettiriladi:

3- jadval.

	B_1	B_2	B_3	B_4	α_i
A_1	8	2	9	5	2
A_2	6	5	7	18	5
A_3	7	3	−4	10	−4
β_j	8	5	9	18	5

Endi A o'yinchi minimal yutuqlari maksimumini beruvchi A_2 strategiyani tanlaydi. Uning qiymati $\alpha = \max\{2, 5 - 4\} = 5$.

A o'yinchi tanlagan strategiya maksimin strategiya deyiladi, unga mos yutuq qiymati esa maksimin (quyi) qiymati deyiladi:

$$\alpha = \max_i \min_j a_{ij} . \qquad (3.4.1)$$

B o'yinchi yutqazishi minimal bo'lishini xohlaydi va u B_1 strategiyani tanlab $\beta_1 = \max\{8, 6, 7\} = 8$ dan ortib ketmagan yutqazishga, raqibi strategiyasiga bog'liq bo'lmagan ravishda erishadi. Shu fikrni qolgan uchala B_2, B_3, B_4 strategiyaga nisbatan ham aytish mumkin. Mos natijalar yuqoridagi jadvalning 4- satrida ko'rsatilgan. B o'yinchi maksimal yutqazishi minimalini beruvchi B_2 strategiyani tanlaydi. Uning uchun $\beta = \min\{8, 5, 9, 18\} = 5$.

Bu strategiya minimaks strategiya deyiladi, unga mos B o'yinchi yutqazishining qiymati o'yinning minimaks (yuqori) qiymati deyiladi:

$$\beta = \min_j \max_i a_{ij} . \qquad (3.4.2)$$

O'yinning minimaks qiymati maksimin qiymatidan katta yoki unga teng bo'ladi:

$$\alpha \le \beta. \qquad (3.4.3)$$

Tenglik o'rinli bo'lgan holda ularga mos sof strategiyalar optimal bo'ladi, o'yin esa "egar" nuqtaga ega deyiladi: o'yin $\alpha = \beta$ da optimal yechimga ega bo'ladi. 1- masala ana shunday "egar" nuqtaga ega bo'lgan o'yinga misol bo'la oladi. Unda o'yin qiymati $\alpha = \beta = 5$ ga teng, optimal yechimlar $P^* = P_2(0;1;0)$ va $Q^* = Q_2(0;1;0;0)$ bo'ladi.

Sof strategiyalar jufti bilan aniqlangan o'yin qiymati minimaks va maksimin qiymatga teng bo'ladi. "Optimallik " bunda shuni bildiradiki, hech bir o'yinchi o'zining strategiyasini o'zgartirishni xohlamaydi, chunki uning raqibi bunga javoban uning uchun yomon natija beradigan strategiyani tanlashi mumkin.

To'lov matritsasi $P = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ bo'lgan o'yin berilgan.

A o'yinchining o'rtacha yutug'i, agar u aralash optimal strategiyadan foydalansa, B o'yinchi esa B_1 sof strategiyadan foydalansa (bu holat to'lov matritsasining 1- ustuniga mos keladi), o'yin bahosi ν ga teng $a_{11}x_1^* + a_{21}x_2^* = \nu$. Agar ikkinchi o'yinchi B_2 strategiyani qo'llasa, uning o'rtacha yutug'i yana o'sha o'yin bahosiga teng bo'ladi, ya'ni, $a_{12}x_1^* + a_{22}x_2^* = \nu$. $x_1^* + x_2^* = 1$ ekanligini hisobga olinsa, quyidagi sistema hosil bo'ladi:

$$\begin{cases} a_{11}x_1^* + a_{21}x_2^* = \nu, \\ a_{12}x_1^* + a_{22}x_2^* = \nu, \\ x_1^* + x_2^* = 1. \end{cases} \qquad (3.4.4)$$

Bu sistemani yechib, quyidagi optimal strategiya

$$x_1^* = \frac{a_{22} - a_{21}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}}, \quad x_2^* = \frac{a_{11} - a_{12}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}}, \qquad (3.4.5)$$

va o‘yin bahosi topiladi:

$$v = \frac{a_{22}a_{11} - a_{12}a_{21}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}}. \qquad (3.5.6)$$

B o‘yinchi optimal strategiyasini topish uchun faol strategiyalar teoremasini qo‘llaniladi. A o‘yinchining ixtiyoriy sof strategiyasida B o‘yinchining o‘rtacha yutqazishi o‘yin bahosi v ga teng bo‘ladi, ya’ni:

$$\begin{cases} a_{11}y_1^* + a_{21}y_2^* = v, \\ a_{12}y_1^* + a_{22}y_2^* = v, \\ y_1^* + y_2^* = 1. \end{cases} \qquad (3.4.7)$$

U holda optimal strategiya quyidagi formula yordamida topiladi:

$$y_1^* = \frac{a_{22} - a_{12}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}},$$
$$y_2^* = \frac{a_{11} - a_{21}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}}. \qquad (3.4.8)$$

Masala. To‘lov matritsasi $P = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$ ga teng va “egar” nuqtasi bo‘lmagan o‘yinning optimal strategiyasini toping.

Bunda $\alpha = 3$, $\beta = 4$, o‘yinning “egar” nuqtasi yo‘q $\alpha \neq \beta$.

Yechimni aralash strategiyadan qidiriladi. A o‘yinchi uchun o‘rtacha yutuq (B_1 va B_2 larda) v o‘yin bahosiga teng. B o‘yinchi uchun o‘rtacha yutqazish (A_1 va A_2 larda) v o‘yin bahosiga teng. (3.4.4) va (3.4.7) tenglamalar sistemasi quyidagi ko‘rinishga ega bo‘ladi:

$$\begin{cases} 3x_1^* + 4x_2^* = v, \\ 6x_1^* + 2x_2^* = v, \\ x_1^* + x_2^* = 1. \end{cases} \qquad \begin{cases} 3y_1^* + 6y_2^* = v, \\ 4y_1^* + 2y_2^* = v, \\ y_1^* + y_2^* = 1. \end{cases}$$

Bu sistemalar yechilsa, quyidagi yechim hosil bo'ladi:

$$x_1^* = \frac{2}{5},\quad y_1^* = \frac{4}{5},$$
$$x_2^* = \frac{3}{5},\quad y_2^* = \frac{1}{5},\quad \nu = 3\frac{3}{5}.$$

Demak, $P^* = (\frac{2}{5}, \frac{3}{5})$ va $Q^* = (\frac{4}{5}, \frac{1}{5})$ optimal strategiyalar

va $= 3\frac{3}{5}$ topiladi.

5- §. Aralash strategiyalar

Yuqoridagi mulohazalardan ko'rinib turibdiki, "egar" nuqtaning mavjudligidan o'yinda optimal sof strategiyalar mavjudligi kelib chiqadi.

Endi quyidagi nol yig'indili o'yinni ko'rab chiqaylik (4-jadval:

4- jadval.

	B_1	B_2	B_3	B_4	α_i
A_1	5	−10	9	0	−10
A_2	6	7	8	1	1
A_3	8	7	15	2	2
A_4	3	4	−1	4	−1
β_j	8	7	15	4	2 4

Minimaks qiymat $(\beta = 4)$ maksimin qiymatdan $(\alpha = 2)$ katta va demak o'yin "egar" nuqtaga ega emas, maksimin-minimaks strategiyalar optimal emas. Bu har bir o'yinchi boshqa strategiyani tanlashi va o'z holatini o'zgartirishi mumkinligini bildiradi. Bu holda o'yin barqaror emas (nobarqaror), ya'ni, muvozanatsiz bo'ladi. Sof maksimin-minimaks strategiyalardan foydalanib, umumiy holda o'yinning optimal yechimini topish mumkin emas. Shuning uchun aralash strategiyalardan foydalanish fikri tug'ildi. Har bir o'yinchi sof strategiyalardan birini tanlash o'rniga ulardan ixtiyoriy bittasini avvaldan berilgan ehtimollik asosida tanlashi mumkin.

$P=(x_1,x_2,...,x_m)$ va $Q=(y_1,y_2,...,y_n)$ A va B o'yinchilar o'z sof strategiyalarini mos ravishda tanlash ehtimolligi bo'lsin. U holda $\sum_{i=1}^{m} x_i = \sum_{j=1}^{n} y_j = 1$, bunda $x_i, y_j \geq 0$, barcha $i=1,\overline{m}$, $j=1,\overline{n}$. Agar a_{ij} - o'yin matritsasining $(i;j)$ elementi bo'lsa, u holda to'lov matritsasi 5- jadval ko'rinishda bo'ladi:

5- jadval.

A \ B	y_1	y_2	...	y_n
x_1	a_{11}	a_{12}	...	a_{1n}
x_2	a_{21}	a_{22}	...	a_{2n}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$
x_m	a_{m1}	a_{m2}	...	a_{mn}

Aralash strategiyalarda o'yin yechimini topish yuqorida kiritilgan minimaks mezoniga asoslanadi. Yagona farq shundaki, A o'yinchi x_i ni kutilayotgan eng kichik yutuqni (bo'yicha) maksimallashtirish uchun B o'yinchi kutilayotgan eng katta yutqazishni minimallashtirish maqsadida y_j ni qatorlar bo'yicha tanlaydi. Aralash strategiyalarda minimaks mezoni quyidagicha ifodalanadi:

A o'yinchi $\max\limits_{x_i}\left\{\min\left(\sum_{i=1}^{m} a_{i1}x_i, \sum_{i=1}^{m} a_{i2}x_i, ... \sum_{i=1}^{m} a_{in}x_i\right)\right\}$ bo'ladigan $x_i\left(x_i \geq 0,\ \sum_{i=1}^{m} x_i = 1\right)$ strategiyani tanlaydi, uning uchun B o'yinchi esa

$$\min_{y_j}\left\{\max\left(\sum_{j=1}^{n} a_{1j}y_j, \sum_{j=1}^{n} a_{2j}y_j, ... \sum_{j=1}^{n} a_{sj}y_j\right)\right\}$$ bo'ladigan

$y_j\left(y_j \geq 0,\ \sum_{j=1}^{n} y_j = 1\right)$ strategiyani tanlaydi.

Bu kattaliklar mos ravishda kutilayotgan maksimin va minimaks to'lovlar sifatida aniqlanadi.

Sof strategiyalar kabi aralash strategiyalarda ham quyidagi munosabat o'rinli.

Kutilayotgan minimaks yutqazuv $\geq$ kutilayotgan maksimin yutuq.

Agar x_i va y_j optimal yechimga mos kelsa, u holda tenglik bajariladi va natija o'yinning kutilayotgan optimal qiymatiga teng bo'ladi.

Bu mulohazalar minimaks teoremasidan kelib chiqadi. Agar x_i^* va y_j^* — ikkala o'yinchi uchun optimal yechim bo'lsa, to'lov matritsasining har bir elementiga $x_i^* \cdot y_j^*$ ehtimollik mos keladi.

O'yinning kutilayotgan optimal qiymati quyidagiga teng:

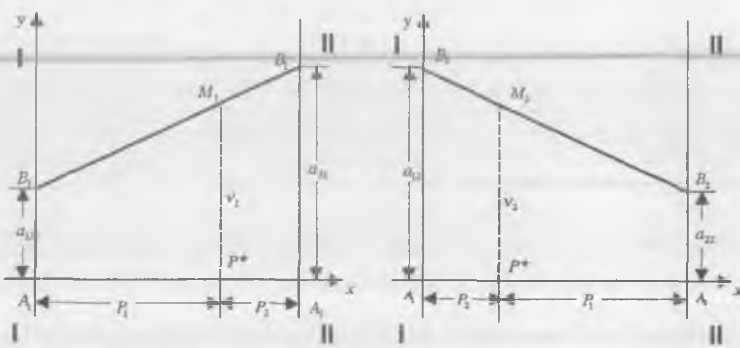
$$v^* = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i^* \cdot y_j^* .$$

6- §. Nol yig'indili ikki shaxs o'yinlarini yechishda grafik usuldan foydalanish

Nol yig'indili ikki shaxs o'yinlarida optimal strategiyalarni topishning bir necha usullari ma'lum. Biz ulardan ikkitasini: grafik usul va chiziqli programmalashtirish usullarini keltiramiz. Avval $(2 \times n)$ va $(m \times 2)$ ko'rinishdagi o'yinlarning grafik usulda yechilishi ko'rib chiqiladi.

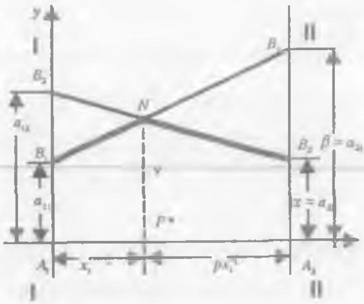
Grafik usul o'yinchilardan kamida bittasi ikkita strategiyaga ega bo'lgan o'yinlardagina ishlatiladi.

(2×2) to'lov matritsasi bilan berilgan o'yinni grafik usulda echishni ko'raylik. Absissa o'qida $A_1 A_2$ birlik kesmani ajratamiz. A_1 nuqta $(x = 0)$ A_1 strategiyani bildiradi va bu kesmadagi ichki nuqtalar birinchi o'yinchi P aralash strategiyasini bildiradi. P nuqtadan kesmaning chap uchigacha bo'lgan masofa A_1 strategiyaning ehtimolligi — p_1, o'ng uchigacha bo‘lgan masofa esa A_2 strategiyaning ehtimolligi — p_2. Perpendikular I—I va II—II o‘qlarda A_1, A_2 strategiya yutuqlari joylashtiriladi. Agar ikkinchi o‘yinchi B strategiyani qabul qilsa, u holda bu strategiya shu o‘qlarga mos a_{11} va a_{21} yutuqlarni beradi. Bu nuqtalar o‘qlarda B_1 nuqta bilan belgilanadi (10- rasm). Aralash strategiyalarga mos o‘rtacha yutuq v_1, matematik kutilma formulasidan topiladi: $v_1 = a_{11}x_1 + a_{21}x_2$ va P absissali M_1 nuqtaning ordinatasiga teng. Shunga o‘xshash B_2 strategiyani qo‘llanishiga mos nuqtalarni quramiz (11- rasm). Bunda o‘rtacha yutuq $v_2 = a_{12}x_1 + a_{22}x_2 - M_2$ nuqtaning ordinatasidir.

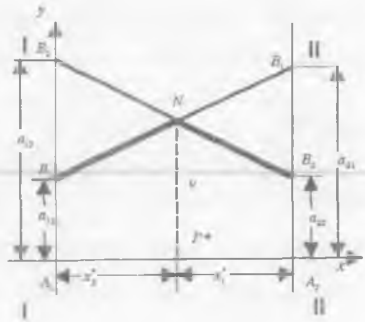


10-rasm. *11- rasm.*

Minimaks prinsipiga ko‘ra P^* optimal strategiyada A o‘yinchining minimal yutug‘i (B o‘yinchi eng yomon strategiya bilan o‘ynaganda) maksimumga erishadi. 12- rasmdagi quyi siniq chiziq A o‘yinchi ixtiyoriy aralash strategiyani qo‘llagandagi minimal yutuqni ko‘rsatadi. (B_1N qismi — B_1 strategiyaga qarshi, $NB_2 - B_2$ strategiyaga qarshi). Siniq chiziqning eng yuqori nuqtasi N optimal $P^*(x_1^*, x_2^*)$ strategiyani aniqlaydi va uning ordinatasi o‘yin bahosi v ga teng bo‘ladi. 13- rasmda yana yuqori hamda quyi o‘rinlar α va β bilan belgilangan.



12- rasm.



13- rasm.

1- masala. $P=\begin{pmatrix}3 & 6\\ 4 & 2\end{pmatrix}$ matritsali o'yinni grafik usulida yeching.

Yechish. I—I vertikal o'qlarda $a_{11}=3$, $a_{12}=6$ ni, II—II vertikal o'qlarda $a_{21}=4$, $a_{22}=2$ belgilanadi. Quyi o'yin qiymati $\alpha=3$, yuqori o'yin qiymati esa $\beta=4$ va "egar" nuqta yo'q (13- rasm). N nuqtaning absissasi P^* optimal strategiyani, ordinatasi o'yin qiymatini bildiradi. N nuqta B_1B_1 va B_2B_2 to'g'ri chiziqlarning kesishgan nuqtasi bo'ladi.

B_1B_1 to'g'ri chiziq (0; 3) va (1; 4) nuqtalardan o'tadi, uning tenglamasi:

$$\frac{x-0}{1-0}=\frac{y-3}{4-3} \text{ yoki } y=x+3.$$

B_2B_2 to'g'ri chiziq (0; 6) va (1; 2) nuqtalardan o'tadi, uning tenglamasi:

$$\frac{x-0}{1-0}=\frac{y-6}{2-6} \text{ yoki } y=-4x+6.$$

Bu to'g'ri chiziqlar kesishish nuqta

$$\begin{cases} y=x+3 \\ y=-4x+6 \end{cases}$$

sistemaning yechimi bo'ladi: $x = 0,6$ $y = 1,8$, ya'ni, $N(0,6;1,8)$. Shunday qilib, optimal strategiya $P^*(0,6;0,4)$ va o'yin qiymati $v = 1,8$ bo'ladi.

Xuddi shu tartibda B o'yin optimal strategiyasini ham topish mumkin.

$$Q^* = (0,8;0,2).$$

$2 \times n$ ko'rinishdagi matritsali o'yinlar qarab chiqiladi (6- jadval):

6- jadval.

$P \backslash Q$	y_1	y_2	...	y_n
x_1	a_{11}	a_{12}	...	a_{1n}
$x_2 = 1 - x_1$	a_{21}	a_{22}	...	a_{2n}

Faraz qilaylik, bu o'yin "egar" nuqtaga ega emas.

A o'yinchi faqat ikkita strategiyaga ega bo'lgani uchun, $x_2 = 1 - x$, $x_1 \ge 0$, $x_2 \ge 0$.

A o'yinchining B o'yinchi sof strategiyalariga mos kutilayotgan yutuqlari 7- jadvalda keltirilgan:

7- jadval.

B o'yinchi sof strategiyalari	A o'yinchi kutayotgan yutuq
1	$(a_{11} - a_{21})x_1 + a_{21}$
2	$(a_{12} - a_{22})x_1 + a_{22}$
$\vdots$	....
n	$(a_{1n} - a_{2n})x_1 + a_{2n}$

Bundan ko'rinib turibdiki, A o'yinchining kutilgan yutug'i x_1 ga chiziqli bog'liq. Aralash strategiyali o'yinlar uchun minimaks mezoniga mos ravishda A o'yinchi x_1 ni kutilgan minimal yutug'ini maksimallashtirish uchun tanlaydi. Bu masala x_1 ga nisbatan chiziqli funksiyalarga mos to'g'ri chiziqlar grafigini qurish bilan yechiladi.

Bu usul quyidagi misolda izohlanadi.

2- masala. 2×4 ko'rinishdagi matritsali o'yinni grafik usulida yeching (8- jadval) .

8- jadval.

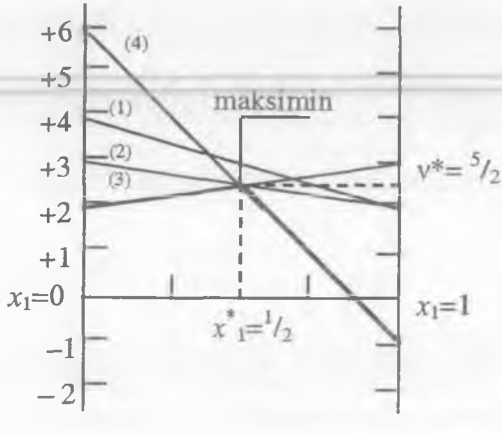
	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	2	2	3	−1
A_2	4	3	2	6

Yechish. Bu o'yin "egar" nuqtaga ega emas. A o'yinchining B o'yinchi sof strategiyasiga mos kutilayotgan yutug'i 9- jadvaldada keltirilgan.

9- jadval.

B o'yinchi sof strategiyalari	A o'yinchi kutayotgan yutuq
1	$-2x_1+4$
2	$-x_1+3$
3	x_1+2
4	$-7x_1+6$

14- rasmda x_1 ga bog'liq funksiyalarning grafiklari — 4ta chiziq tasvirlangan.



14- rasm.

Maksiminga $x_1^* = \frac{1}{2}$ da erishiladi. Bu nuqtada 2, 3, 4 chiziqlarning ixtiyoriy ikkitasi kesishadi. Shunga ko'ra, A o'yinchining optimal strategiyasi $\left(x_1^* = \frac{1}{2},\ x_2^* = \frac{1}{2}\right)$ga teng va o'yinning qiymati maksimin nuqtadan o'tuvchi ixtiyoriy to'g'ri chiziq tenglamasiga x_1 qiymatini qo'yish bilan topiladi.

$$v^* = \begin{cases} -\frac{1}{2} + 3 = \frac{5}{2}, \\ \frac{1}{2} + 2 = \frac{5}{2}, \\ -7 \cdot \frac{1}{2} + 6 = \frac{5}{2}. \end{cases}$$

Shuni ta'kidlash kerakki, B o'yinchi optimal strategiyasini topishda uchta to'g'ri chiziq maksimin nuqtasidan o'tadi. Bu esa B ning optimal strategiyasi uchta strategiya to'plamidan iboratligini ko'rsatayapti. Qarama-qarshi og'ishga ega ixtiyoriy ikki to'g'ri chiziq bitta joiz optimal yechimni aniqlaydi. Uchta kombinatsiyadan (2,3), (2,4), (3,4) bittasi (2,4) optimal emas. (2,3) moslik $y_1^* = y_4^* = 0$ natijani beradi. $y_3 = 1 - y_2$ B o'yinchining A o'yinchi sof strategiyalariga mos kutilgan yutqazishi 10- jadvalda keltirilgan.

10- jadval.

A o'yinchining sof strategiyasi	B o'yinchining kutilgan yutqazishi
1	$y_2 + 3$
2	$y_2 + 2$

Minimaks nuqtaga mos $y_2^* = \frac{1}{2}$ qiymat $-y_2^* + 3 = y_2^* + 2$ tenglikdan topiladi. $y_2^* = \frac{1}{2}$ qiymatni B o'yinchining kutilgan yutqazishi ifodasiga qo'yib $\frac{5}{2}$ ga teng bo'lgan minimaks qiymatni olamiz va u o'yin qiymati v^* bilan ustma-ust tushadi. (Shunday bo'lishi ham kerak). Optimal strategiyalar $P^* = \left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$, $Q^* = \left(0; \frac{1}{2}; \frac{1}{2}; 0\right)$ bo'ladi.

Xuddi shu usulda boshqa mosliklarni ham ko'rish mumkin.

3- masala. 4×2 ko'rinishdagi matritsali o'yinni grafik usulida yeching (11- jadval).

11- jadval.

	B_1	B_2
A_1	2	4
A_2	2	3
A_3	3	2
A_4	-1	6

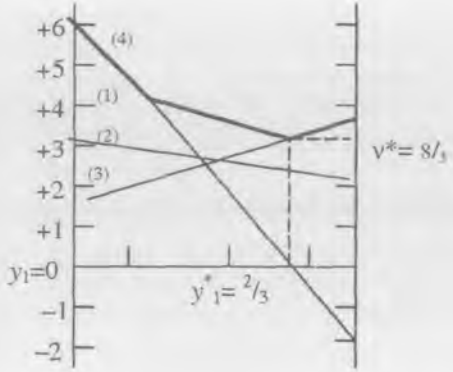
Yechish. Bu o'yin "egar" nuqtaga ega emas. y_1 va $y_2 (= 1 - y_1)$ B o'yinchining aralash strategiyasi bo'lsin (12- jadval).

12- jadval.

A o'yinchining sof strategiyasi	B o'yinchining kutilgan yutqazishi
1	$-2y_1 + 4$
2	$-y_1 + 3$
3	$y_1 + 2$
4	$-7y_1 + 6$

15- rasmda y_1 ga bog'liq funksiyalarning grafiklari 4ta chiziqda tasvirlangan.

Bu holda minimaks nuqta yuqoridagi eguvchining quyi nuqtasi bo'ladi. y_1^* qiymat 1 va 3 to'g'ri chiziqlar kesishish nuqtasi sifatida topiladi: $y_1^* = \frac{2}{3}$ va $v^* = \frac{8}{3}$.



15- rasm.

Minimaks nuqtada kesishgan to'g'ri chiziqlar A o'yinchining 1- va 3- sof strategiyasiga mos keladi. Bu esa $x_2^* = x_4^* = 0$ ekanligini ko'rsatadi. $x_1 = 1 - x_3$ A o'yinchining B o'yinchi sof strategiyalariga mos kutilayotgan yutuqlari quyidagi jadvalda keltirilgan.

13- jadval.

B o'yinchining sof strategiyasi	A o'yinchining kutilgan yutug'i
1	$-x_1 + 3$
2	$2x_1 + 2$

$x_i^* = \frac{1}{3}$ qiymat $-x_1^* + 3 = 2x_1 + 2$ tenglamadan topiladi. A o'yinchining optimal strategiyasi $x_1^* = \frac{1}{3}$, $x_2^* = 0$, $x_3^* = \frac{2}{3}$, $x_4^* = 0$, ya'ni, $P^* = \left(\frac{1}{3},\ 0,\ \frac{2}{3},\ 0\right)$, $Q^* = \left(\frac{2}{3};\ \frac{1}{3}\right)$ bo'ladi.

Bu esa avvalgidek $v^* = \frac{8}{3}$ o'yin qiymatini beradi.

7- §. Matritsali o'yinlarni chiziqli programmalashtirish masalasiga keltirish

Umumiy holda $m\times n$ o'lchovli o'yinlarni grafik usulda ifodalab yechib bo'lmaydi. Biroq ularni chiziqli programmalashtirish masalasiga keltirib yechish mumkin. O'yin chiziqli programmalashtirish ikki yoqlama simmetrik masalasi juftiga keltirilishi matritsali o'yinlarni yechishning eng qulay usullaridan biridir. Bundan tashqari taqribiy usullar ham mavjud. O'z o'rnida chiziqli programmalashtirish masalasini biror matritsali o'yinga keltirib ham yechish mumkin.

$m\times n$ o'lchovli o'yin $p=(a_{ij})$, $i=1,2,...,m$; $j=1,2,...n$ to'lov matritsasi bilan berilgan. A o'yinchi $A_1,A_2,...,A_m$ strategiyalarga, B o'yinchi $B_1,B_2,...,B_n$ strategiyalarga ega. $P^*(x_1^*,x_2^*,...,x_m^*)$ va $Q^*=(y_1^*,y_2^*,...,y_n^*)$ optimal strategiyalarni topish kerak, bunda x_i^*,y_j^* — A_i,B_j, sof strategiyalarning ehtimolligi va ular uchun

$$x_1^*+x_2^*+...+x_m^*=1,\quad y_1^*+y_2^*+...+y_n^*=1.$$

P^* optimal strategiya quyidagi shartni qanoatlantiradi. U A o'yinchiga v dan kam bo'lmagan o'rtacha yutuq (B o'yinchining strategiyasi qanday bo'lishidan qat'iy nazar) va B o'yinchi optimal strategiyasida v ga teng yutuqni ta'minlaydi. $v>0$ shart barcha $a_{ij}\geq 0$ lar uchun o'rinli. Agar A o'yinchi $P^*=(x_1^*,x_2^*,...,x_m^*)$ aralash strategiyani B o'yinchining ixtiyoriy sof strategiyasi B_j uchun qo'llasa, u holda u $a_j=a_{1j}x_1+a_{2j}x_2+...+a_{mj}x_m$, $j=1,2,...,n$ o'rtacha yutuqqa yoki boshqacha qilib aytganda yutuqning matematik kutilishiga ega bo'ladi (bu matematik kutilma matritsa j- ustunini ularga mos $A_1,A_2,...,A_m$ strategiyalar ehtimolligiga hadma-had ko'paytirilib va natijalari qo'shilib topiladi).

Optimal strategiya P^* uchun barcha o'rtacha yutuqlar o'yin bahosi ν dan kichik emas va shuning uchun quyidagi tengsizliklar sistemasi olinadi:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + \ldots + a_{m1}x_m \geq \nu, \\ a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{m2}x_m \geq \nu, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{1n}x_1 + a_{2n}x_2 + \ldots + a_{mn}x_m \geq \nu. \end{cases} \qquad (3.7.1)$$

Har bir o'zgaruvchini $\nu > 0$ ga bo'lib va yangi o'zgaruvchilar kiritiladi:

$$t_1 = x_1 / \nu, \quad t_2 = x_2 / \nu, \ldots, t_m = x_m / \nu. \qquad (3.7.2)$$

Shunda (3.7.1) sistema quyidagi ko'rinishni oladi:

$$\begin{cases} a_{11}t_1 + a_{21}t_2 + \ldots + a_{m1}t_m \geq 1, \\ a_{12}t_1 + a_{22}t_2 + \ldots + a_{m2}t_m \geq 1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{1n}t_1 + a_{2n}t_2 + \ldots + a_{mn}t_m \geq 1. \end{cases} \qquad (3.7.3)$$

A o'yinchining maqsadi o'z yutug'i, ya'ni o'yin bahosi ν ni maksimallashtirishdir. $x_1 + x_2 + \ldots + x_m = 1$ tenglikni $\nu \neq 0$ ga bo'lib, t_i $(i = 1, 2, \ldots, m)$ o'zgaruvchilarni qanoatlantiradigan $t_1 + t_2 + \ldots + t_m = 1/\nu$ shartga ega bo'lamiz. ν kattalikni maksimallashtirish $1/\nu$ kattalikni minimallashtirishga ekvivalent, shuning uchun masala shunday ifodalanadi:

(3.7.3) chiziqli cheklashlarni qanoatlantiradigan va chiziqli funksiyaga

$$Z = t_1 + t_2 + \ldots + t_m \qquad (3.8.4)$$

minimum beradigan $x_i \geq 0,\ i = 1, 2, \ldots, m$ o'zgaruvchilarni toping. Bu chiziqli programmalashtirish masalasini yechib, $t_1^*, t_2^*, \ldots, t_m^*$ optimal yechim va P^* optimal strategiya topiladi.

$Q^* = (y_1^*, y_2^*, \ldots, y_n^*)$ optimal strategiyani topish uchun B o'yinchi kafolatlangan yutug'ini minimallashtirishga, ya'ni

$\max \frac{1}{\nu}$ ni topishga harakat qiladi. A o'yinchi qanday sof strategiyani qo'llamasin, B o'yinchining o'rtacha yutqazishi o'yin bahosidan ortib ketmasligi sabab quyida ko'rsatilgan tengsizlik kelib chiqadi va $y_1, y_2, ... y_n$ o'zgaruvchilar shu tengsizlikni qanoatlantiradi:

$$\begin{cases} a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + ... + a_{1n}y_n \le \nu, \\ a_{12}y_1 + a_{22}y_2 + ... + a_{2n}y_n \le \nu, \\ .... \\ a_{m1}y_1 + a_{m2}y_2 + ... + a_{mn}y_n \ge \nu. \end{cases} \quad (3.7.5)$$

Agar

$$u_j = y_j / \nu, \quad j = 1,2,...,n, \quad (3.7.6)$$

almashtirish bajarilsa, sistema quyidagi ko'rinishni oladi:

$$\begin{cases} a_{11}u_1 + a_{12}u_2 + ... + a_{1n}u_n \le 1, \\ a_{21}u_1 + a_{22}u_2 + ... + a_{2n}u_n \le 1, \\ .... \\ a_{m1}u_1 + a_{m2}u_2 + ... + a_{mn}u_n \le 1. \end{cases} \quad (3.7.7)$$

$u_i (j = 1,2,...,n)$ o'zgaruvchilar $u_1 + u_2 + ... u_n = 1/\nu$ shartni qanoatlantiradi.O'yin quyidagi masalani yechishga keltiriladi.

(3.7.7) sistemani qanoatlantiradigan va

$$W = u_1 + u_2 + ... u_n \quad (3.7.8)$$

chiziqli funksiyaga maksimum qiymat beradigan $u_j \ge 0$, $j = 1,2,...,n$ o'zgaruvchilar qiymatlarini toping.

Bu masalaning yechimi $Q^* = (y_1^*, y_2^*, ..., y_n^*)$ optimal strategiyani aniqlaydi. Bunda o'yin bahosi

$$\nu = \frac{1}{\max W} = \frac{1}{\min Z}, \quad (3.7.9).$$

Kengaytirilgan (3.7.3), (3.7.4) va (3.7.7), (3.7.8) masalalardagi matritsalar bir-biridan transponirlash yo'li bilan olinadi.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} & & & & \geq \\ a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} & 1 \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} & 1 \\ \hline 1 & 1 & \dots & 1 & \min Z \end{array}\right) \quad \left(\begin{array}{cccc|c} & & & & \leq \\ a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & 1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & 1 \\ \hline 1 & 1 & \dots & 1 & \max W \end{array}\right)$$

(3.7.3), (3.7.4) va (3.7.7), (3.7.8) masalalar chiziqli programmalashtirishning o'zaro ikki yoqlama masalalari bo'lib, ularning optimal strategiyasini topishda yechish osonroq bo'lgan masala yechimi simpleks usulida topiladi va so'ng bu yechimga ko'ra unga ikki yoqlama bo'lgan masala yechimi ham topiladi.

O'yin modellari bilan ifodalangan iqtisodiy masalalarni chiziqli programmalashtirish usullari bilan yechishga doir misollar keltiramiz.

Misol. Korxona uch turda (A_1, A_2, A_3) mahsulot ishlab chiqaradi. To'rtta (B_1, B_2, B_3, B_4) holatdan biriga tegishli talabga bog'liq foyda oladi. Korxona i – mahsulotni j – talabga ko'ra ishlab chiqarganda oladigan foydani xarakterlovchi elementlardan tuzilgan matritsa berilgan (14- jadval).

Talabni noaniq deb olib, ixtiyoriy holatda foyda (ishlab chiqarilgan mahsulotdagi) o'rtacha qiymatini kafolatlovchi optimal nisbatini aniqlang.

14- jadval.

	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	8	9	9	4
A_2	6	5	8	7
A_3	3	4	5	6

Masalani yechishdan oldin to'lov matritsasi soddalashtirib olinadi. Buning uchun afzal satr va ustunlar qoldiriladi (4- paragrafga qarang). Natijada 3×3 o'lchovli to'lov matritsasi hosil bo'ladi (15- jadval).

15- jadval.

	B_1	B_2	B_3	α_i
A_1	8	9	4	4
A_2	6	5	7	5
A_3	3	4	6	3
β_j	8	9	7	5 7

Bunda, $\alpha\neq\beta$ "egar" nuqta yo'q va optimal yechimni $P=(x_1,x_2,x_3)$ va $Q=(y_1,y_2,y_3)$ aralash strategiyalarda qidiramiz. $x_i=\dfrac{p_i}{v}$, $i=\overline{1,3}$ va $y_j=\dfrac{q_j}{v}$, $j=\overline{1,3}$ belgilashlar orqali quyidagi o'zaro ikki yoqlama masalalarni hosil qildik.

1- masala.

$$\begin{cases}8t_1+6t_2+3t_3\geq1,\\9t_1+5t_2+4t_3\geq1,\\4t_1+7t_2+6t_3\geq1,\end{cases}$$
$$t_i\geq0,\quad i=1,2,3. \qquad (3.7.10)$$
$$Z=t_1+t_2+t_3\to\min.$$

2- masala.

$$\begin{cases}8u_1+9u_2+4u_3\leq1\\6u_1+5u_2+7u_3\leq1\\3u_1+4u_2+6u_3\leq1\end{cases}$$
$$u_j\geq0, j=1,2,3 \qquad (3.7.11)$$
$$W=u_1+u_2+u_3\to\max$$

2- masala simpleks usulda yechiladi. Buning uchun uni avvalo kanonik ko'rinishga keltirish kerak bo'ladi:

$$\begin{cases} 8u_1 + 9u_2 + 4u_3 + u_4 = 1, \\ 6u_1 + 5u_2 + 7u_3 + u_5 = 1, \\ 3u_1 + 4u_2 + 6u_3 + u_6 = 1. \end{cases}$$

Endi bazis va erkin o‘zgaruvchilar ajratib olinadi. u_4, u_5, u_6 — bazis o‘zgaruvchilar va u_1, u_2, u_3 — erkin o‘zgaruvchilar.

$$\begin{cases} u_4 = 1 - 8u_1 - 9u_2 - 4u_3, \\ u_5 = 1 - 6u_1 - 5u_2 - 7u_3, \\ u_6 = 1 - 3u_1 - 4u_2 - 6u_3. \end{cases} \qquad (3.7.12)$$

$$W = u_1 + u_2 + u_3.$$

Bazis yechim $U_1 = (0;0;0;1;1;1)$. Maqsad funksiyasida hamma o‘zgaruvchilar oldidagi koeffitsiyent bir xil bo‘lgani uchun ulardan birortasi orttiriladi, ya’ni, noldan katta qiymat beriladi (16- jadval). Masalan, u_3 ni orttiraylik, ya’ni, u_3 bazis o‘zga-ruvchilar qatoriga yoziladi, (3.7.12) sistemadan $u_3 = \min\left\{\frac{1}{4};\frac{1}{7};\frac{1}{6}\right\} = \frac{1}{7}$, demak, u_5 bazisdan chiqariladi.

Endi bazis o‘zgaruvchilar u_2, u_5, u_6, erkin o‘zgaruvchilar u_1, u_3, u_4.

$$\begin{cases} u_3 = \frac{1}{7} - \frac{6}{7}u_1 - \frac{5}{7}u_4 - \frac{1}{7}u_3, \\ u_4 = \frac{3}{7} - \frac{32}{7}u_1 - \frac{43}{7}u_4 + \frac{4}{7}u_5, \\ u_6 = \frac{1}{7} + \frac{5}{7}u_1 + \frac{2}{7}u_4 + \frac{6}{7}u_3. \end{cases} \qquad (3.7.13)$$

$$W = \frac{1}{7} + \frac{1}{7}u_1 + \frac{2}{7}u_2 - \frac{1}{7}u_5.$$

16- jadval

Bazis	C_b	A_0	1	1	1	0	0	0
			A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6
A_4	0	1	8	9	4	1	0	0
A_5	0	1	6	5	7	0	1	0
A_6	0	1	3	4	6	0	0	1
W		0	−1	−1	−1	0	0	0
A_4	0	3/7	32/7	43/7	0	1	−4/7	0
A_3	1	1/7	6/7	5/7	1	0	1/7	0
A_6	0	1/7	−15/7	−2/7	0	0	−6/7	1
W		1/7	−1/7	−2/7	0	0	1/7	0
A_2	1	3/43	32/43	1	0	7/43	−4/43	0
A_3	1	4/43	14/43	0	1	−5/43	9/43	0
A_6	0	7/43	−83/43	0	0	2/43	38/43	1
W		7/43	3/43	0	0	2/43	5/43	0

Bazis yechim $U_2 = \left(0; 0; \frac{1}{7}; \frac{3}{7}; 0; \frac{1}{7}\right)$.

Endi u_2 bazisga kiritiladi, u_4 bazisdan chiqadi.

$$\begin{cases} u_2 = \frac{1}{43} - \frac{32}{43}u_1 - \frac{7}{43}u_4 + \frac{4}{43}u_5, \\ u_3 = \frac{4}{43} - \frac{14}{43}u_1 + \frac{5}{43}u_4 - \frac{9}{43}u_5, \\ u_6 = \frac{7}{43} + \frac{83}{43}u_1 - \frac{2}{43}u_4 - \frac{38}{43}u_5. \end{cases}$$

$$W = \frac{7}{43} - \frac{3}{43}u_1 - \frac{2}{43}u_4 - \frac{5}{43}u_5.$$

Bazis yechim $U_3 = \left(0; \frac{3}{43}; \frac{4}{43}; 0; 0; \frac{7}{43}\right)$, $W = \frac{7}{43}$.

W ifodasida musbat koeffitsiyentlarning yo'qligi optimallik mezoni bajarilganligini ko'rsatadi. Demak, optimal yechim $U^* = \left(0; \frac{3}{43}; \frac{4}{43}; 0; 0; \frac{7}{43}\right)$ $\max W = \frac{7}{43}$.

1- masalaning optimal yechimini topish uchun quyidagi moslikdan foydalaniladi (1- qism 3- bob):

$$\begin{array}{cccccc} t_1 & t_2 & t_3 & t_4 & t_5 & t_6 \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow \\ u_4 & u_5 & u_6 & u_1 & u_2 & u_3 \\ \frac{2}{43} & \frac{5}{43} & 0 & 0 & \frac{3}{43} & \frac{4}{43} \end{array}$$

Demak, 1- masalaning optimal yechimi:

$$T^* = \left(\frac{2}{43}; \frac{5}{43}; 0\right).$$

$$Z = t_1 + t_2 + t_3 = \frac{7}{43},$$

$$\min Z = \max W = \frac{7}{43}.$$

(3.7.9) ifodadan o'yin bahosi topiladi:

$$\nu = \frac{1}{\max W} = \frac{1}{\min Z} = \frac{43}{7} = 6\frac{1}{7}.$$

Endi optimal strategiyalar topiladigan bo'linsa (3.7.2) dan:

$$x_1^* = t_1 \cdot \nu = \frac{2}{43} \cdot \frac{43}{7} = \frac{2}{7},$$

$$x_2^* = \frac{5}{43} \cdot \frac{43}{7} = \frac{5}{7},$$

$$x_3^* = 0 \cdot \frac{43}{7} = 0,$$

$$P^* = \left(\frac{2}{7}; \frac{5}{7}; 0\right) \approx (0{,}29; 0{,}71; 0).$$

Demak, korxona A_1 mahsulotdan 29%, A_2 mahsulotdan 71 % ishlab chiqarishi, A_3 mahsulotni esa ishlab chiqarmasligi kerak.

Optimal strategiya Q^* ham shunday usul bilan topiladi:

$$y_1^* = u_1 \cdot v = 0 \cdot \frac{43}{7} = 0,$$

$$y_2^* = u_2 \cdot v = \frac{3}{43} \cdot \frac{43}{7} = \frac{3}{7},$$

$$y_3^* = u_3 \cdot v = \frac{4}{43} \cdot \frac{43}{7} = \frac{4}{7},$$

$$Q^* = \left(0; \frac{3}{7}; \frac{4}{7}\right).$$

Demak, korxona 2- holatdan talabga muvofiq 43 %, 3-holatdan esa 57 % foyda olar ekan.

$m \times n$ o'lchovli ixtiyoriy chekli o'yin yechimini topishda quyidagi izchillikka amal qilinadi:

1. To'lov matritsasini soddalashtirish maqsadida satr va ustunlar o'chiriladi.

2. O'yinning yuqori va quyi bahosi aniqlanadi va o'yin "egar" nuqtaga ega yoki ega emasligi tekshiriladi. Agar "egar" nuqta bor bo'lsa, u holda o'yinchilarning unga mos strategiyalari optimal bo'ladi va o'yin bahosi yuqori (quyi) baho bilan ustma-ust tushadi.

3. Agar "egar" nuqta yo'q bo'lsa, u holda yechim aralash strategiyalardan izlanadi. Bunda $m \times n$ o'lchovli o'yin simpleks usulida, 2×2, $n \times 2$, $2 \times n$ o'lchovli o'yinlar grafik usulda yechiladi.

3- namunaviy hisob topshiriqlari

3.1.—3.6. Quyidagi masalalarda berilgan to'lov matritsalari uchun o'yinning maksimin va minimaks qiymatlarini toping.

1.

	B_1	B_2	B_3
A_1	0,3	0,6	0,8
A_2	0,9	0,4	0,2
A_3	0,7	0,5	0,4

2.

	B_1	B_2	B_3
A_1	4	5	3
A_2	6	7	4
A_3	5	2	3

3.

	B_1	B_2	B_4	B_3
A_1	8	9	10	4
A_2	6	5	8	7
A_3	3	4	5	6

4.

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
A_1	4	5	6	7	9
A_2	3	4	6	5	6
A_3	7	6	10	8	11
A_4	8	5	4	7	3

5.

	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	4	9	5	3
A_2	7	8	6	9
A_3	7	4	2	6
A_4	8	3	4	7

6.

	B_1	B_2	B_3
A_1	2	5	3
A_2	6	4	5
A_3	3	7	6
A_4	2	3	4

3.7—3.8. Quyidagi o‘yinlaring har biri uchun “egar” nuqta va o‘yin qiymatini toping. Yutuqlar A o‘yinchi uchun berilgan.

7.

	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	8	6	2	8
A_2	8	9	4	5
A_3	7	5	3	5

8.

	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	4	−4	−5	6
A_2	−3	−4	−9	−2
A_3	6	7	−8	−9
A_4	7	3	−9	5

3.9.- 3.10. Quyidagi o'yinlarda (2;2) partiya "egar" nuqta bo'ladigan p va q qiymatlar to'plamini toping.

9.

	B_1	B_2	B_3
A_1	1	q	6
A_2	p	5	10
A_3	6	2	3

10.

	B_1	B_2	B_3
A_1	2	4	5
A_2	10	7	q
A_3	4	p	6

3.11.—3.14. Quyidagi o'yinlar qiymatini hisoblang.

11.

	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	1	9	6	0
A_2	2	3	8	4
A_3	−5	−2	10	−3
A_4	7	4	−2	−5

12.

	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	3	7	−1	3
A_2	4	8	0	−6
A_3	6	−9	−2	4

13.

	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	−1	9	6	8
A_2	−2	10	4	6
A_3	5	3	0	7
A_4	7	−2	8	4

14.

	B_1	B_2	B_3
A_1	3	6	1
A_2	5	2	3
A_3	4	2	−5

3.15. Quyidagi o'yinda A o'yinchi uchun (1/6; 0; 5/6) va B o'yinchi uchun (49/54; 5/54; 0) strategiyalar optimal bo'lishini tekshiring va o'yin qiymatini toping.

15.

	B_1	B_2	B_3
A_1	5	50	50
A_2	1	1	91
A_3	10	1	10

3.16– 3.21. Quyidagi masalalarda berilgan o'yinlarni grafik usulda yeching:

16.

	B_1	B_2
A_1	−2	2
A_2	1	−1

17.

	B_1	B_2
A_1	2	3
A_2	1	2

18.

	B_1	B_2
A_1	4	−2
A_2	1	3

19.

	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	1	3	−3	7
A_2	2	5	4	−6

20.

	B_1	B_2
A_1	1	2
A_2	5	6
A_3	−7	9
A_4	−4	−3
A_5	2	1

21.

	B_1	B_2	B_3
A_1	1	2	5
A_2	8	4	7
A_3	−1	5	−6

3.22.—3.25. Yuqorida keltirilgan 3.2., 3.4., 3.5., 3.6. masalalardagi to'lov matritsalari bilan berilgan o'yinlarni chiziqli programmalashtirish masalalariga keltirib yeching.

Foydalanilgan adabiyotlar

1. *А.Б.Аронович, М.Ю.Афанасьев, Б.П.Суворов.* Сборник задач по исследовании операций. М. 1997.

2. *С.А.Ашманов, А.В.Тимохов.* Теория оптимизации в задачах и упражнениях. М., “Наука”, 1991.

3. *Alpha C. Chiang.* Fundamental methods of mathematical economics. 1974.

4. *M.T.Bakoev.* Quantitative methods for Business. Linear programming and its applications. UWED PRESS, 1998.

5. *F.B.Badalov, G.Shodmonov.* Matematik modellar va muhandislik masalalarini sonli yechish usullari. T., “Fan”, 2000.

6. *F.B.Badalov.* Optimizatsiya nazariyasi va matematik programmalashtirish. T., “O‘qituvchi”, 1989.

7. *Г.Вагнер.* Основы исследования операций. Т. 1—3. М., “Мир”., 1972—1973.

8. *А.А.Грешилов* Как принять наилучшее решение в реальных условиях М., Радио и связь, 1991.

9. *А.Б.Горстко.* Познакомтесь с математическим моделированием. М.,“Знамя”, 1991.

10. *R.David Anderson.* Quantitative methods for Business. 1992.

11. *М.И.Джемилев, Эйдельнант.* Сборник задач по математическому программированию. Т., “Ўқитувчи”., 1990.

12. *Ed.Muschick, P.Muller.* Entscheidungc praxis ricle verfahren Konsequenzen. Veb Verlag Technik, Berlin. 1987.

13. *X.N.Jumayev va boshqalar.* Matematik programmalashtirish. T, 2005.

14. *О.О.Замков и др.* Математические методы в экономике. М., Дис. 1999.

15. Исследование операций. Под редакцией Н.Ш.Кремера. М., Банки и биржи ЮНИТИ 2003.

16. *И.Л.Калихман, М.А.Войтенко.* Динамическое программирование в примерах и задачах. М., “Высшая школа”., 1979.

17. *G‘.Nasriddinov.* Ekonometrika. O’zMU. T., 1999.

18. *Ronald J.Harshbarger, James J. Reynolds.* Mathematical applications for manajement, life, and social sciences. 1985.

19. *K.Safayeva.* Matematik programmalash. T., 2004.

20. *X.Таха.* Введение в исследование операций. Т. 1,2. М. Мир, 1985.

21. *В.А.Фролькис.* Введение в теорию и методы оптимизации для экономистов. Санкт- Петербург, 2002.

22. *Л.Э.Хазанова.* Математическое моделирование в экономике. М., Изд. БЕК., 1998.

23. Экономико-математические методы и прик-ладные модели. Под ред. В. В.Федосеева, ЮНИТИ М., 2002.

Mundarija

III bob. Matritsali o'yinlar nazariyasi

ABDUNABI ABDURAHIMOV
NURINISA ANVAROVNA NIYAZOVA

MIQDORIY TAHLIL
VA OPERATSIYALARNI TEKSHIRISH

2-qism

O'quv qo'llanma

Muharrir *Xudoyberdi Po'latxo'jayev*
Rassom *Uyg'un Solihov*
Texnik muharrir *Yelena Tolochko*
Dizayner *Azizxo'ja Tillaxo'jayev*
Musahhih *Gulchehra Azizova*

IB№ 09—202

Bosishga 19.12.2005 ruxsat berildi. Bichimi $84\times108^1/_{32}$. Times garniturasi. Ofset bosma usulida bosildi. Shartli b. t. 8,82. Nashr b. t. 11,2. Adadi 500 nusxa. Shartnoma № 77—2005. Buyurtma № 181.

Cho'lpon nomidagi nashriyot-matbaa ijodiy uyi. 700129, Toshkent, Navoiy ko'chasi, 30- uy.

"Arnaprint" MChJ bosmaxonasida chop etildi. 700182, Toshkent, H. Boyqaro ko'chasi, 41- uy.

65.050
A15

Abdurahimov A.

A15 **Miqdoriy tahlil va operatsiyalarni tekshirish**: (Oliy texnika o'quv yurtlarining talabalari uchun o'quv qo'llanma). Q.2/ A.Abdurahimov, N.Niyazova; (Ma'sul muharrir: S.T.Mirzayev; O'zbekiston Respublikasi oliy va o'rta maxsus ta'lim vazirligi, Toshkent arxitektura-qurilish in-ti. —T.; Cho'lpon nomidagi nashriyot-matbaa ijodiy uyi, 2005. — 168 b.

1. Muallifdosh.

BBK 65.050ya73