O‘ZBEKISTON RESPUBLIKASI OLIY VA O‘RTA MAXSUS
TA’LIM VAZIRLIGI

A.RASULOV, U.DALABOYEV

IQTISODIYOTDA MIQDORIY USULLAR

O‘zbekiston Respublikasi Oliy va o‘rta maxsus ta‘lim vazirligi
tomonidan Jahon iqtisodiyoti va xalqaro iqtisodiy
munosabatlar ta’lim yo‘nalishi talabalari uchun
o‘quv qo‘llanma sifatida tavsiya etilgan

Toshkent
"IQTISOD-MOLIYA"
2010

65.290-2

Taqrizchilar:
H.Q. Sarimsaqova, dotsent,
Sh. Shorahmetov, professor

Rasulov Abdujabbor Sattorovich.
R25 **Iqtisodiyotda miqdoriy usullar:** Oliy o'quv yurtlari talabalari uchun o'quv qo'llanma / A.S. Rasulov, U. Dalaboyev. – T.: "IQTISOD-MOLIYA", 2010. – 304 b.

I. Dalaboyev Umriddin

«Iqtisodiyotda miqdoriy usullar» kursiga taalluqli bo'lgan ushbu o'quv qo'llanma xalqaro iqtisodiy munosabatlar ta'limi yo'nalishi uchun mo'ljallangan bo'lib, u Jahon iqtisodiyoti va diplomatiya universiteti o'quv-uslubiy kengashi tomonidan tasdiqlangan namunaviy va o'quv dasturlari asosida tuzilgan. Ushbu o'quv qo'llanmada kursga tegishli barcha ma'lumotlar bayon qilingan.

BBK 65.290-2я73

ISBN 978-9943-13-167-5

KIRISH

Maksimum va minimum haqidagi masalalar sof va amaliy matematikada tez-tez uchrab turadigan masalalar sirasiga kiradi. Iqtisodiyotda esa bu tabiiy hol. Korxonalar kirimni maksimallashtirishga harakat qiladi. Har qanday davlat esa jamiyatning iqtisodiy salohiyatini maksimallashtirishga intiladi. Iste'molchilar esa o'z mablag'larini kam sarflab, o'z ehtiyojlarini maksimum qondirishga harakat qiladilar.

Klassik matematik analizda ko'p o'zgaruvchanlik funksiyalarning shartli ekstremumini topish usullari o'rganiladi. Avvaldan berilgan chiziqli munosabatlar, ya'ni chiziqli tenglik va tengsizliklar yordamida aniqlangan sohada chiziqli funksiyaning maqsad funksiyasining shartli ekstremumini topish *chiziqli dasturlashtirish usuli* deyiladi. Amaliyotda uchraydigan ko'pdan ko'p masalalarda yuqoridagi klassik usullar qo'l kelmay qoldi.

Chiziqli munosabatlar yordamida aniqlangan sohada berilgan chiziqli funksiya uchun ekstremal masalalarni o'rganish XX asrning 30-yillarida boshlangan edi. Chiziqli dasturlashtirishni umumiy shaklda o'rgangan olim Jon fon Neyman edi. Bu olim uning nomi bilan atalgan iqtisodiy modelni va hozirda matritsali o'yinlar nazariyasida juda ko'p ishlatiladigan minimaks haqidagi teoremani isbot qilgan.

Matritsali o'yinlar va chiziqli dasturlashtirish masalalari o'zaro ekvivalentdir. Minimaks haqidagi teorema chiziqli dasturlashtirishning asosiy teoremasi bo'lgan "ikkiyoqlamalik"ning xususiy holi ekanini amerikalik olim D.Geyl tomonidan isbotlangan. Bu haqida keyinroq to'xtalamiz. Chiziqli dasturlashning asosiy usullaridan biri simpleks usulidir. Chiziqli dasturlashtirish esa maksimum va minimumning iqtisodiyotda uchraydigan maxsus masalalari bilan shug'ullanadi.

Masalaning yechimlari juda ko'p bo'lishi mumkin. Shulardan eng optimalini tanlash usullari ushbu o'quv qo'llanmada keltiriladi.

Murakkab iqtisodiy tizimda optimal boshqarish uning samaradorligi uchun muhim bosqich hisoblanadi. "Iqtisodiyotda miqdoriy usullar" fani iqtisodiy tizim boshqaruvchisiga tizimning optimal variantlarini topishga yordam beradi.

"Iqtisodiyotda miqdoriy usullar" fani iqtisodiy jarayonlar tizimini samarali boshqarishning nazariy va amaliy usullarini ishlab chiqish bilan shug'ullanadi. Har qanday tizimni boshqarish biror jarayonni aks ettirib, u muayyan qonuniyatlarga bo'ysunadi. Boshqarish tizimini aniqlash jarayonni amalga oshirilishidagi zaruriy va yetarli shartlarni amalga oshirishda yordam beradi. Buning uchun jarayonni xarakterlovchi parametrlar miqdoriy jihatdan aniqlangan va o'lchangan bo'lishi kerak. Shuning uchun iqtisodiyotda miqdoriy usullarning maqsadi iqtisodiy jarayonlarni boshqarishni tashkil qilish borasida uning yechimini miqdoriy asoslashdan iborat.

"Iqtisodiyotda miqdoriy usullar" fanining asosida iqtisodiy jarayonning matematik modelini qurish va matematik usullar bilan uni tahlil qilish yotadi. Ma'lumki, model qurish uchun masalaning qo'yilishidagi ma'lumotlar miqdoriy tavsifga ega bo'lishi kerak.

Muayyan iqtisodiy jarayonni yechish tizimi quyidagi bosqichlarni o'z ichiga oladi:

1. Masalaning qo'yilishi. Bu bosqichda iqtisodiy jarayon so'z vositasida bayon qilinib, asosiy elementlari aniqlanadi:

- jarayonni ifodalovchi o'zgaruvchilar va ularga qo'yiladigan chegaralar;
- optimallik mezonini aniqlash;

2. Model qurish. Model qurish bosqichida quyidagilarga e'tibor beriladi:

- masalaning kiruvchi va chiquvchi o'zgaruvchilarini aniqlash;
- masalaning dinamik va statistik elementlarini aniqlash va ular orasidagi bog'lanishning matematik ifodasini keltirish.

Iqtisodiy obyektlarning matematik modellari – uni tenglamalar, tengsizliklar, mantiqiy bog'lanishlar, grafik, graf va h.k. lar yordamida tasvirlashdir. Bu tasvir tarkibiga o'rganilayotgan narsani tashkil etuvchi elementlar orasidagi bog'lanishlar, modelda shu elementlarga mos keluvchi elementlarning o'zaro bog'lanishlari ham kirishi kerak bo'ladi. Bu model qaralayotgan iqtisodiy obyektning shartli tasviri ekanligini bildiradi. Modelni o'rganish obyekt to'g'risida yangi ma'lumotlar olish va turli holatlarda ularga mos keluvchi eng yaxshi (optimal) yechimlar topishga imkon beradi.

Iqtisodiy modellar qaralayotgan iqtisodiy obyekt faoliyatida muhim o'rin tutadigan tarkibiy qismlarni aniqlashga va shular asosida shu obyektning kelajakdagi faoliyatidagi o'zgarishlarning, ayrim parametrlarning o'zgarishiga bog'liq ravishda prognozlash imkonini beradi. Modelda parametrlar orasidagi bog'liqliklarni miqdoriy jihatdan baholash mumkin bo'lgani uchun prognoz yetarlicha aniqlik va ishonchlilik darajasida bajariladi.

Har bir iqtisodiy obyekt uchun kelgusidagi ahvolini prognozlash, avvalambor, eng yaxshi natijalarga erishish, har xil salbiy holatlarni chetlab o'tishga xizmat qilishi kerak, xususan, davlat miqyosidagi iqtisodiy siyosat ham ana shunday prognozlar asosida olib boriladi.

Shuni ta'kidlash lozimki, har qanday iqtisodiy model ma'lum ma'noda ideallashtirilgan, shuning uchun ham ular to'liq bo'la olmaydi. Bu modellarni qurishda modellashtirilayotgan iqtisodiy obyekt faoliyatida o'rin egallagan omillar ichidan, masalan, mohiyatiga monand eng muhimlari ajratib olinib, qolganlari esa e'tiborga olinmaydi.

3. Tahlil qilish. Masalaning matematik modeli qurilgandan so'ng, uning matematik yechimini topishga kirishiladi. Olingan natijalarga ko'ra optimal yechim tavsiya qilinadi. Yechimni tahlil qilish jarayonida masalaning birinchi yoki ikkinchi bosqichiga qaytadan o'tish zaruriyati tug'ilishi mumkin.

Yechimni tahlil qilish jarayonida olingan yechimning turg'unligiga katta e'tibor beriladi. Ya'ni kiruvchi o'zgaruvchilarning yechimga ta'siri aniqlanadi.

"Iqtisodiyotda miqdoriy usullar" kursi kirish qismi va o'n bir paragrafdan iborat. O'quv qo'llanma matritsa, determinant, chiziqli tenglamalar va ularni yechish usullari, Leontyev modeli, chiziqli dasturlash, butun sonli chiziqli dasturlash, transport masalasi, matritsali o'yinlar, bimatritsali o'yinlar, qavariq, chiziqsiz va dinamik dasturlashga oid ma'lumotlarni o'z ichiga oladi.

Hozirgi paytda fan va ishlab chiqarishning o'sishi shu darajaga yetdiki, unda jiddiy masalalarni yechish borasida murakkab matematik hisoblash ishlarini amalga oshirish taqozo qilinadi.

Bu holat bir tomondan, yetuk mutaxassislarni tayyorlashda amaliy matematikaga oid fanlarni o‘qitish mazmunini kengaytirishga olib keladi. Ikkinchi tomondan, matematik hisoblash ishlarining kengayishi va murakkablashuvi hamda zamonaviy hisoblash texnologiyalarining jadal sur’atlar bilan rivojlanishi matematik hisoblashlarning avtomatlashgan tizimlarini yaratishga olib keladi. Jadal sur’atlar bilan o‘sayotgan bu ikki jarayon yetuk mutaxassislarni tayyorlash tizimida kompyuter tizimlaridan oqilona foydalanishni taqozo qiladi.

Shu munosabat bilan kursda masalalarni kompyuterda yechishga oid mavzular ham o‘rin olgan.

Ushbu o‘quv qo‘llanma Oliy va o‘rta maxsus ta’lim vazirligi tomonidan tasdiqlangan hamda Jahon iqtisodiyoti va Diplomatiya universitetida 144 soat o‘qitiladigan “Iqtisodiyotda miqdoriy usullar” fani namunaviy dasturi asosida yozilgan bo‘lib, “5341100 – Jahon iqtisodiyoti va xalqaro iqtisodiy munosabatlar” ta’lim yo‘nalishida o‘qiyotgan talabalar uchun mo‘ljallangan.

Ushbu o‘quv qo‘llanmadan biznes va boshqaruv sohasidagi iqtisodiy oliy o‘quv yurtlari talabalari ham foydalanishlari mumkin.

O‘quv qo‘llanmada yo‘l qo‘yilgan kamchiliklarni to‘g‘rilash maqsadida o‘quvchi-kitobxonlar tomonidan bildirilgan ixtiyoriy taklif va tanqidiy fikrlarni mualliflar xursandchilik bilan kutib olishga tayyordirlar.

I bob. CHIZIQLI ALGEBRA

1.1. Matritsalar va determinantlar

Matritsa va determinantlar tushunchasi matematik ibora bo'lib, juda ko'p jarayonlarning matematik ifodasini keltirishda keng qulayliklar tug'diradi. Chiziqli tenglamalar yoki tengsizliklar sistemasini yechish jarayonlariga zamin tayyorlaydi.

1.1.1. Matritsalar va ular ustida amallar

m ta satr va *n* ta ustunli, *mxn* ta sonlardan tuzilgan to'g'ri to'rtburchakli jadval *mxn o'lchamli matritsa* deyiladi.

Masalan, sonlarning to'g'ri to'rtburchakli

$$\begin{pmatrix} 3 & 6 & 1 \\ 9 & 2 & 5 \end{pmatrix} \text{ yoki } \begin{bmatrix} 3 & 6 & 1 \\ 9 & 2 & 5 \end{bmatrix}$$

jadvali 2x3 o'lchamli matritsa bo'ladi. Matritsani ifodalashda kichik ( ) yoki o'rta [ ] qavslardan foydalaniladi. 1xn o'lchamli matritsa, ya'ni faqat 1 ta satrdan tuzilgan matritsa *satr-matritsa* deyiladi. Masalan, $\begin{pmatrix} 6 & 0 & -3 & 9 \end{pmatrix}$ satr-matritsa hisoblanadi.

*m*x1 o'lchamli matritsa. ya'ni faqat 1 ta ustundan tuzilgan matritsa *ustun-matritsa* deyiladi. Masalan, $\begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ -1 \end{pmatrix}$ ustun-matritsadir.

nxn o'lchamli matritsa *kvadrat-matritsa* deyiladi, *n* esa uning tartibi deb yuritiladi. Masalan, $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 6 & 7 & 4 \\ 1 & 0 & 8 \end{pmatrix}$ 3-tartibli kvadrat matritsaga misol bo'la oladi. 1-tartibli matritsa son bo'ladi. Matritsani hosil qiluvchi sonlar *matritsaning elementlari* deyiladi.

Matritsaning elementlari, asosan, ikki indeksli harflar bilan belgilanadi, masalan, a_{ij} bunda birinchi indeks shu element joylashgan satr raqamini, ikkinchi indeks esa ustun raqamini ko'rsatadi. Masalan, 3x4 o'lchamli A matritsa umuman

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix}$$

ko'rinishida yoziladi yoki qisqacha $A=(a_{ij})$, $(i=1,2,3;$ $j=1,2,3,4)$ ko'rinishida belgilanadi.

Indekslari o'zaro teng bo'lgan matritsa elementlariga matritsaning *bosh diagonal* elementlari deyiladi. Faqat bosh diagonal elementlari noldan farqli bo'lgan matritsa *diagonal matritsa* deyiladi va quyidagicha yoziladi:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & & 0 \\ 0 & a_{22} & & 0 \\ \cdots & \cdots & & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Kvadrat matritsaning bosh diagonaldan yuqorida (yoki pastda) joylashgan elementlari nolga teng bo'lsa bunday matritsa *uchburchakli* matritsa deyiladi. Agar matritsaning tartib raqamlarini saqlagan holda satrlari ustun, ustunlari satr ko'rinishida yozilsa, bunday matritsa *transponirlangan* matritsa deyiladi. A matritsaga transponirlangan matritsa A^T ko'rinishida belgilanadi.

Agar *mxn* o'lchamli *A* va *B* matritsalarda ularning mos elementlari teng bo'lsa, ya'ni, $a_{ij}=b_{ij}$ bo'lsa, bu matritsalar teng deyiladi. Bu holda $A=B$ deb yoziladi. Matritsalar uchun $\leq,<,\geq,>$ taqqoslash belgilarining ma'nosi yo'q. Turli o'lchamli matritsalarning tengligi to'g'risida ham so'z yuritilmaydi. *mxn* o'lchamli *A* va *B* matritsalarning *yig'indisi* deb $c_{ij}=a_{ij}+b_{ij}$ elementlardan tuzilgan *mxn* o'lchamli C matritsaga aytiladi.

Masalan,

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \\ 5 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & -1 \\ 3 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 4 & 2 \\ 8 & 8 \end{pmatrix}$$

mxn o'lchamli ixtiyoriy A,B,C matritsalar uchun

- $A+B=B+A$;
- $A+(B+C)=(A+B)+C$

tengliklar o'rinli. Har bir elementi 0 ga teng bo'lgan matritsa *nol* matritsa deyiladi.

$A+(-A)=(-A)+A=0$ tenglikni qanoatlantiruvchi $(-A)$ matritsa A matritsaga *qarama-qarshi matritsa* deyiladi.

$A+C=B$ tenglikni qanoatlantiruvchi C matritsa A va B matritsalarning *ayirmasi* deyiladi va $A-B$ kabi belgilanadi.

Misol.

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \\ 5 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 4 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$$

A matritsaning α *soniga ko'paytmasi* deb $c_{ij}=\alpha\cdot a_{ij}$ elementlardan tuzilgan $C=\alpha A$ matritsaga aytiladi. Bunda quyidagi tengliklar o'rinli bo'ladi.

- $(\alpha+\beta)A=\alpha A+\beta A$;
- $(\alpha\beta)A=\alpha(\beta A)$;
- $\alpha(A+B)=\alpha A+\alpha B$.

mxr o'lchamli A va $r\times n$ o'lchamli B matritsalarning ko'paytmasi deb $c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\ldots+a_{i,r-1}b_{r-1,j}+a_{ir}b_{rj}$ elementlardan tuzilgan $m\times n$ o'lchamli C matritsaga aytiladi va $C=AB$ deb belgilanadi.

Misol.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0\cdot 3+1\cdot(-3) & 0\cdot 1+1\cdot 2 \\ 1\cdot 3+0\cdot(-3) & 1\cdot 1+0\cdot 2 \\ 1\cdot 3+1\cdot(-3) & 1\cdot 1+1\cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Demak, ikkita matritsani ko'paytirish mumkin bo'lishi uchun birinchisining ustunlari soni ikkinchisining satrlari soniga teng bo'lishi kerak ekan.

Masala. A va B mahsulotlar plastik, po'lat va shishadan tayyorlanadi. Har bir mahsulotga qancha xomashyo sarflanishi 1.1-jadvalda ko'rsatilgan.

1.1-jadval

	plastik	po'lat	shisha
A mahsulot	3	1	0.5
B mahsulot	4	0.5	2

Firmaga xomashyo ikkita X, Y zavoddan keltirilgani uchun transport xarajatlari har bir xomashyo uchun turlicha bo‘lib, u 1.2-jadvalda keltirilgan.

1.2-jadval

	X zavod	Y zavod
Plastik	10	9
Po‘lat	22	26
Shisha	14	14

Berilgan ma’lumotlardan foydalanib, har bir mahsulotni har bir zavodda ishlab chiqarish uchun sarflangan xarajatni toping.

Yechish. Har bir mahsulotga zarur bo‘lgan xomashyo miqdorini ifodalovchi

$$P = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0{,}5 \\ 4 & 0{,}5 & 2 \end{pmatrix}$$

ishlab chiqarish matritsasini va birlik xarajatlarni ifodalovchi

$$C = \begin{pmatrix} 10 & 9 \\ 22 & 26 \\ 14 & 14 \end{pmatrix}$$

birlik xarajatlar matritsasini qaraymiz. A mahsulotning X zavoddagi umumiy xarajatlarini topish uchun A mahsulot uchun zarur bo‘lgan xomashyo birliklarini xomashyolarning X zavoddagi mos xarajat birliklariga ko‘paytirib, o‘zaro qo‘shish kerak. Matritsalar ko‘paytmasi PC ning a_{11} elementi bu xarajatni beradi.

$$PC = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0.5 \\ 4 & 0.5 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10 & 9 \\ 22 & 26 \\ 14 & 14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 59 & 60 \\ 79 & 77 \end{pmatrix}$$

Ko‘paytmaning a_{12} elementi A mahsulotning Y zavoddagi xarajatlarini beradi. Ikkinchi satrning elementlari B mahsulotning X va Y zavodlardagi xarajatlarini beradi.

Matritsalarni ko‘paytirishda har doim ham AB=BA tenglik bajarilavermaydi. Quyidagi xossalar o‘rinli.

- $(AB)C = A(BC)$;
- $(A+B)C = AC + BC$; $C(A+B) = CA + CB$.

Matritsaning darajalari $A^0=E$, $A^1=A$, $A^2=AA$, ..., $A^n=A^{n-1}A$ tengliklar bilan aniqlanadi. Bu yerda A kvadrat matritsa. Diagonal elementlari 1 ga, qolgan elementlari 0 ga teng bo‘lgan

$$E=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

matritsa *birlik matritsa* deyiladi. Ixtiyoriy A matritsa uchun $AE=EA=A$ tenglik o‘rinli.

1.1.2. Determinantlar

Ikkinchi tartibli

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

matritsaning determinanti deb $a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12}$ songa aytiladi. Bu determinant

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

yoki $|A|$ simvol, yoki biror Δ harfi bilan belgilanadi.

Misol.

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & -3 \end{vmatrix}=2\cdot(-3)-1\cdot 4=-10\,.$$

Uchinchi tartibli

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \tag{1.1}$$

matritsaning determinanti deb

$$\Delta=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33} \tag{1.2}$$

songa aytiladi. (1.2) ifoda juda sodda tarkibga ega. (1.1) matritsa elementlaridan o‘ngda uning 1 va 2-ustunini yozamiz.

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{matrix}$$

(1.2) ifodada to‘g‘ri chiziqlar bilan o‘chirilgan elementlarning ko‘paytmalari ishtirok etgan. Pastga yo‘nalgan to‘g‘ri chiziqlardagi elementlar ko‘paytmasi musbat ishora bilan, qolganlari manfiy ishora bilan olingan.

Misol.

$$\det A = \begin{vmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 3 & 2 & -2 \\ 2 & 4 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 3 & 2 & -2 \\ 2 & 4 & 5 \end{vmatrix}\begin{matrix} -1 & 0 \\ 3 & 2 \\ 2 & 4 \end{matrix} =$$

$$= (-1)\cdot 2\cdot 5 + 0\cdot(-2)\cdot 2 + (-2)\cdot 3\cdot 4 - 2\cdot 2\cdot(-2) - 4\cdot(-2)\cdot(-1) - 5\cdot 3\cdot 0$$

$$= -10 + 0 - 24 + 8 - 8 - 0 = -34.$$

n-tartibli

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & & a_{nn} \end{pmatrix} \tag{1.3}$$

kvadrat matritsani qaraymiz. Agar matritsaning i satrini va j-ustunini o‘chirsak, $n-1$ tartibli

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & a_{1n} \\ & & & \\ a_{i-1,1} & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & a_{i+1,n} \\ & & & \\ a_{n1} & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & a_{nn} \end{pmatrix}$$

matritsa hosil bo‘ladi. Bu matritsaning determinanti (1.3) matritsa a_{ij} elementining minori deyiladi va M_{ij} bilan belgilanadi. $(-1)^{i+j}M_{ij}$ son a_{ij} elementning algebraik to‘ldiruvchisi deyiladi va A_{ij} bilan belgilanadi.

n-tartibli (1.3) matritsaning Δ determinanti uning ixtiyoriy ustuni (satri) elementlarining ularga mos algebraik to‘ldiruvchilarga ko‘paytmalari yig‘indisiga teng, ya'ni

$$\Delta = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \dots + a_{nj}A_{nj}, \quad j = 1,2,\dots,n,$$

$$\Delta = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \dots + a_{in}A_{in}, \quad i = 1,2,\dots,n.$$

Misol. $D = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 3 & 5 & -1 \\ 4 & 1 & 2 \end{vmatrix}$, determinantni ikkinchi ustun bo'yicha yoyib hisoblang.

Yechish. Determinantni ikkinchi ustun bo'yicha yoyamiz:

$$D = a_{12}A_{12} + a_{22}A_{22} + a_{32}A_{32} =$$

$$= (-2)\cdot(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} + 5\cdot(-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} + 1\cdot(-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -20 .$$

Determinantlar uchun quyidagi xossalar o'rinli:

- Ikki ustuni (satri) ning o'rni almashtirilsa, determinantning ishorasi almashadi.
- Biror ustuni (satri) ning elementlari nolga teng bo'lsa, determinant nolga teng.
- Agar biror ustuni (satri) ning elementlari biror songa ko'paytirilsa, determinant shu songa ko'payadi, ya'ni biror ustun (satr) elementlarining umumiy ko'paytuvchisini determinant belgisidan tashqariga chiqarish mumkin.
- Ikki ustuni (satri) elementlari mos ravishda proporsional bo'lsa, determinant nolga teng.
- Biror ustuni (satri) ning elementlari bir songa ko'paytirilib, boshqa ustuni (satri) ning mos elementlariga qo'shilsa, determinantning qiymati o'zgarmaydi.

Misol. Determinantni hisoblang. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ -1 & 0 & 3 & \dots & n \\ -1 & -2 & 0 & \dots & n \\ \hdashline -1 & -2 & -3 & \dots & 0 \end{vmatrix}$.

Yechish. Determinantning ikkinchi satridan boshlab barcha satrlarning elementlarini mos ravishda birinchi satrga qo'shamiz. Natijada quyidagi matritsaga kelamiz:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ 0 & 2 & 6 & \dots & 2n \\ 0 & 0 & 3 & \dots & 2n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & n \end{vmatrix}$$

Bu matritsaning qiymati berilgan matritsa qiymatiga teng bo'ladi. Bu uchburchakli matritsa bo'lgani uchun uning qiymati $n!$ ga teng.

1.1.3. Matritsa rangi

Ixtiyoriy A matritsaning k ta satr va k ta ustunlarini ajratamiz. Ajratilgan ustun va satrlar kesishgan joyidagi elementlardan k tartibli matritsa tuzamiz. k tartibli matritsaning determinantiga *matritsaning k tartibli minori* deyiladi. Noldan farqli minorlarning eng katta tartibiga *matritsaning rangi* deyiladi va $r(A)$ kabi belgilanadi. Agar matritsaning rangi r bo'lsa. unda noldan farqli r tartibli minor mavjud bo'lib, tartibi r dan katta bo'lgan barcha minorlar nolga teng bo'ladi. Bunda quyidagi munosabat o'rinli

$$0 \le r(A) \le \min(m, n).$$

Matritsa rangi kengaytirish yoki elementar almashtirishlar yordamida aniqlanadi. Matritsa rangini kengaytirish usulida yechishda kichik tartibli minordan boshlab yuqori tartibli minorlarni hisoblashga o'tiladi. Agar noldan farqli k tartibli minor hisoblangan bo'lsa, $k+1$ tartibli minor k tartibli minorni kengaytirish hisobiga hosil qilinadi.

Matritsani *elementar almashtirishlarga* quyidagilar kiradi:

1) ixtiyoriy ikki satrlarni (ustunlarni) almashtirish;
2) satr (ustun) elementlarini noldan farqli songa ko'paytirish;
3) biror satrga (ustunga) boshqa satr (ustun) elementlarini biror songa ko'paytirib qo'shish.

Agar biror A matritsa chekli sondagi elementar almashtirishlar yordamida B matritsaga keltirilsa, bular ekvivalent matritsalar deyiladi. Ekvivalent matritsa ranglari teng bo'ladi. Matritsalar ekvivalent bo'lsa, **A~B** ko'rinishida belgilanadi.

Matritsaning boshlang'ich bosh diagonallari 1 bo'lib (bosh diagonaldagi 1 lar soni nol bo'lishi ham mumkin), qolgan elementlar nolga teng bo'lsa, bunday matritsa kanonik ko'rinishdagi matritsa deyiladi.

Misol. Quyidagi matritsa kanonik matritsadir.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Elementar almashtirishlar yordamida ixtiyoriy matritsani kanonik ko'rinishga keltirish mumkin.

Misol. Kengaytirish usuli bilan matritsa rangini toping.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -2 \\ 2 & 4 & 3 & 0 \\ -1 & -2 & 6 & 6 \end{pmatrix}.$$

Yechish. Birinchi tartibli minorlar matritsa elementlaridan iborat. Masalan, birinchi tartibli minor (element) sifatida a_{11} elementni olaylik, $M_1 = 1$. Ikkinchi satr va uchinchi ustun yordamida kengaytirib, $M_2 = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}$, noldan farqli minor hosil qilamiz. M_2 minorni kengaytirib uchinchi tartibli minor hosil qilamiz. Bunday minorlar ikkita (ikkinchi yoki to'rtinchi ustunlar yordamida). Bu minorlarni hisoblaymiz:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & 3 \\ -1 & -2 & 6 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 2 & 3 & 0 \\ -1 & 6 & 6 \end{vmatrix} = 0.$$

Shunday qilib, kengaytirilgan uchinchi tartibli minorlarning qiymatlari nolga teng bo'lgani uchun matritsa rangi 2 ga teng.

1.1.4. Teskari matritsa

Kvadrat matritsani olamiz.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Matritsa determinantini Δ =det A bilan belgilaymiz.

Agar $\Delta \neq 0$ bo'lsa, A ga *xosmas*, agar $\Delta = 0$ bo'lsa, A ga *xos* matritsa deyiladi.

Agar A va B matritsalar uchun $A\ B = B\ A = E$ bo'lsa, B A ga teskari matritsa deyiladi.

Teorema. *A matritsaning teskari matritsasi mavjud bo'lishi uchun uning determinanti noldan farqli bo'lishi zarur va yetarli.*

A ga teskari matritsa A^{-1} ko'rinishida belgilanadi. Teskari matritsa quyidagi formula yordamida hisoblanadi.

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots A_{n2} \\ \dots & & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots A_{nn} \end{pmatrix},$$

Bu yerda $A_{ij} - a_{ij}$ elementning algebraik to'ldiruvchisi.

Misol. Berilgan matritsaga teskari matritsani toping.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Yechish. Matritsa determinantini hisoblaymiz.

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 27 \neq 0$$

bo'lgani uchun teskari matritsa mavjud va uni

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}$$

formula yordamida topamiz. Algebraik to'ldiruvchilarni aniqlaymiz:

$$A_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 2 + 4 = 6, \qquad A_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -(4 + 2) = -6,$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 4 - 1 = 3, \qquad A_{21} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = -(-4 - 2) = 6,$$

$$A_{22}=(-1)^{2+2}\begin{vmatrix}2&1\\1&2\end{vmatrix}=4-1=3, \qquad A_{23}=(-1)^{2+3}\begin{vmatrix}2&-2\\1&2\end{vmatrix}=-(4+2)=-6,$$

$$A_{31}=(-1)^{3+1}\begin{vmatrix}-2&1\\1&-2\end{vmatrix}=4-1=3, \qquad A_{32}=(-1)^{3+2}\begin{vmatrix}2&1\\2&-2\end{vmatrix}=-(-4-2)=6,$$

$$A_{33}=(-1)^{3+3}\begin{vmatrix}2&-2\\2&1\end{vmatrix}=2+4=6,$$

Demak, $A^{-1}=\dfrac{1}{27}\begin{pmatrix}6&6&3\\-6&3&6\\3&-6&6\end{pmatrix}=\dfrac{1}{9}\begin{pmatrix}2&2&1\\-2&1&2\\1&-2&2\end{pmatrix}$.

Misol. Elementar almashtirishlar yordamida $A=\begin{pmatrix}2&1&-1\\5&2&4\\7&3&2\end{pmatrix}$ matritsaga teskari matritsani toping.

Yechish. Berilgan matritsaning o'ng tomoniga birlik matritsani joylashtiramiz: $\left(\begin{array}{ccc|ccc}2&1&-1&1&0&0\\5&2&4&0&1&0\\7&3&2&0&0&1\end{array}\right)$. Bu matritsaning chap qismini ustun bo'yicha elementar almashtirishlar yordamida birlik matritsaga keltiramiz. Matritsaning chap qismida qanday almashtirishlar bajarsak, o'ng qismida ham shunday almashtirishlar bajaramiz. Birinchi va ikkinchi ustunlar o'rinlarini almashtiramiz: $\left(\begin{array}{ccc|ccc}2&1&-1&1&0&0\\5&2&4&0&1&0\\7&3&2&0&0&1\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&2&-1&0&1&0\\2&5&4&1&0&0\\3&7&2&0&0&1\end{array}\right)$. Uchinchi ustunga birinchi ustunni qo'shamiz, ikkinchi ustunga birinchi ustunni -2 ga ko'paytirib qo'shamiz: $\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&0&1&0\\2&1&6&1&-2&1\\3&1&5&0&0&1\end{array}\right)$. Birinchi ustundan ikkinchi ustunni 2 ga ko'paytirib ayiramiz, uchinchidan ikkinchi ustunni 6 ga ko'paytirib ayiramiz:

$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&-2&1&-6\\0&1&0&5&-2&13\\1&1&-1&0&0&1\end{array}\right)$. Birinchi va ikkinchi ustunlarga uchinchi ustunni qo'shamiz: $\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&-8&-5&-6\\0&1&0&18&11&13\\0&0&-1&1&1&1\end{array}\right)$. Oxirgi ustunni -1 ga ko'paytiramiz: $\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -8 & -5 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 18 & 11 & -13 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right)$. Vertikal chiziqdan o'ng tomonda joylashgan kvadrat matritsa berilgan matritsaga teskari matritsa bo'ladi. Shunday qilib, $A^{-1} = \begin{pmatrix} -8 & -5 & 6 \\ 18 & 11 & -13 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

1.2. Chiziqli tenglamalar sistemasi

Bu yerda biz chiziqli tenglamalar sistemasi tushunchasi va bunday sistemalarni yechish usullarini bayon qilamiz. Ko'plab iqtisodiy jarayonlarni, jumladan ishlab chiqarish tarmoqlari orasidagi munosabatlarni aniqlash masalasi chiziqli tenglamalar sistemasini o'rganishni taqozo qiladi.

1.2.1. Sistemaning birgalikda bo'lishlik mezoni

Chiziqli tenglamalar sistemasi quyidagi ko'rinishda bo'ladi:

$$\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \quad +\ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \quad +\ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m1}x_2 +\ldots + a_{mn}x_n = b_m. \end{array} \tag{1.4}$$

Bu yerda a_{ij} va b_i (i = 1...m; j = 1...n) – berilgan sonlar, x_j lar noma'lum sonlar. Matritsalarni ko'paytirish qoidasiga ko'ra (1.4) sistemani matritsa ko'rinishida ifodalash mumkin:

$$AX = B, \tag{1.5}$$

bu yerda $A = (a_{ij})$ (1.4) sistemaning noma'lumlar oldidagi koeffitsiyentlaridan tuzilgan matritsa bo'lib, *sistemaning matritsasi* deyiladi. $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T$, $B = (b_1, b_2, \ldots, b_m)^T$ – ustun vektorlar bo'lib, ular x_j noma'lumlar va b_i ozod hadlardan hosil qilingan.

Agar tartiblangan *n* haqiqiy sonlar to'plami $(c_1, c_2, \ldots, c_n)$ ni sistemaning noma'lumlari $x_1, x_2, \ldots, x_n$ o'rniga qo'yilganda sistemaning har bir tenglamasi ayniyatga aylansa, $(c_1, c_2, \ldots, c_n)$

sonlar *sistemaning yechimi* deyiladi. Boshqacha qilib aytganda, shunday $C=(c_1, c_2,..., c_n)^T$ vektor mavjud bo'lsa, unda $AC \equiv B$ o'rinli bo'ladi.

Agar (1.4) sistema kamida bitta yechimga ega bo'lsa, u *birgalikda* deyiladi. Agar sistema yechimga ega bo'lmasa, sistema *birgalikda emas* deyiladi.

A matritsa elementlariga ozod had elementlaridan tashkil topgan ustunni qo'shish natijasida hosil bo'lgan quyidagi

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \dots a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} \dots a_{2n} & b_2 \\ \dots & & \\ a_{m1} & a_{m2} \dots a_{mn} & b_m \end{pmatrix},$$

matritsa *sistemaning kengaytirilgan matritsasi* deyiladi.

(1.6) sistemaning birgalikda bo'lishi quyidagi teorema orqali hal qilinadi.

Teorema (Kroneker-Kapelli). *Agar sistema matritsasi rangi kengaytirilgan matritsa rangiga teng, ya'ni* $r(A)=r(\bar{A})$ *bo'lsa, u holda sistema birgalikda bo'ladi, ya'ni yechimga ega bo'ladi.*

Demak, bundan quyidagi xulosalarni chiqarish o'rinli.

1) Agar $r(A)=r(\bar{A})$ bo'lsa, sistema birgalikda bo'ladi.
2) Agar $r(A)\neq r(\bar{A})$ bo'lsa, sistema birgalikda bo'lmaydi.
3) Agar $r(A)=r(\bar{A})=n$ bo'lsa, sistema yagona yechimga ega.
4) Agar $r(A)=r(\bar{A})<n$ bo'lsa, sistema cheksiz ko'p yechimga ega.

Misol. Quyidagi sistemani birgalikdaligini tekshiring:

$$\begin{aligned} 5x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 &= 7, \\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 - 2x_4 &= 1, \\ x_1 - 3x_2 - 6x_3 + 5x_4 &= 0. \end{aligned}$$

Yechish. Sistemaning kengaytirilgan matritsasini yozamiz:

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 2 & 1 & 7 \\ 2 & 1 & 4 & -2 & 1 \\ 1 & -3 & -6 & 5 & 0 \end{pmatrix}.$$

Sistemaning asosiy matritsasining rangini hisoblaymiz. Chap yuqori elementlardan tuzilgan ikkinchi tartibli minor noldan farqli $\begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 7 \neq 0$; bu minorni o'z ichiga oluvchi uchinchi tartibli minorlar nolga teng:

$$M'_3 = \begin{vmatrix} 5 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \\ 1 & -3 & -6 \end{vmatrix} = 0, \; M''_3 = \begin{vmatrix} 5 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & -3 & 5 \end{vmatrix} = 0.$$

Shuning uchun sistema asosiy matritsasining rangi 2 ga teng, ya'ni r(A)=2. Kengaytirilgan matritsa rangini hisoblash uchun quyidagi minorni hisoblaymiz:

$$\begin{vmatrix} 5 & -1 & 7 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 14 & 7 \\ 2 & 7 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -35 \neq 0.$$

Demak, kengaytirilgan matritsa rangi $r(\bar{A}) = 3$. $r(A) \neq r(\bar{A})$ bo'lgani uchun sistema birgalikda emas.

1.2.2. Tenglamalar sistemasini noma'lumlar soni tenglamalar soniga teng bo'lgan holda yechish

(1.4) tenglamalar sistemasida tenglamalar soni noma'lumlar soniga teng, ya'ni $m=n$ bo'lsin:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= b_2, \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad & \ldots \quad \ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n1}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n &= b_n. \end{aligned} \tag{1.6}$$

(1.6) sistema 1) Gauss usuli, 2) Kramer usuli va 3) matritsali usul va 4) Gauss-Jordan usulida yechiladi.

Gauss usuli. Gauss usuli ba'zan o'zgaruvchilarni yo'qotish usuli deb ham ataladi. Sistemada noma'lumlar shunday yo'qotilib boriladiki, sistema uchburchakli sistemaga keltiriladi. Amaliyotda sistema ustida elementar almashtirishlar bajarilmasdan, balki kengaytirilgan matritsaning satrlari ustida ish olib boriladi.

Misol. Sistemani Gauss usulida yeching:

$$\begin{aligned} x + y - 3z &= 2, \\ 3x - 2y + z &= -1, \\ 2x + y - 2z &= 0. \end{aligned}$$

Yechish. Sistemaning kengaytirilgan matritsasi

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & 2 \\ 3 & -2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

ko'rinishida bo'ladi. Elementar almashtirishlar bajaramiz:

a) birinchi satrni mos ravishda 3 va 2 ko'paytirib, ikkinchi va uchinchi satrlardan ayiramiz:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & 2 \\ 3 & -2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & 2 \\ 0 & -5 & 10 & -7 \\ 0 & -1 & 4 & -4 \end{pmatrix};$$

bu yerda ~ belgisi matritsalarning ekvivalentligini bildiradi.

b) uchinchi satrni -5 ga ko'paytirib, ikkinchi satrga qo'shamiz:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & 2 \\ 0 & -5 & 10 & -7 \\ 0 & 0 & -10 & 13 \end{pmatrix}.$$

Demak, sistemani quyidagicha yozish mumkin:

$$\begin{aligned} x + y - 3z &= 2, \\ -5y + 10z &= -7, \\ -10z &= 13. \end{aligned}$$

Oxirgi tenglamadan $z = -1,3$. Buni ikkinchi tenglamaga qo'ysak, $y = -1,2$. Birinchi tenglamadan $x = -0,7$ kelib chiqadi.

Kramer formulalari. Kramer usuliga ko'ra (1.6) *sistemaning asosiy determinantini* hisoblaymiz

$$\Delta = \det(a_{ij}).$$

Yana n ta *yordamchi determinantlarni* hisoblaymiz Δ_i $(i=\overline{1,n})$, bu determinantlar asosiy determinantning i-ustunidagi elementlarni ozod hadlar bilan almashtirish natijasida hosil bo'ladi.

Kramer formulasi quyidagicha bo'ladi:

$$\Delta \cdot x_i = \Delta_i \; (i = \overline{1,n}). \tag{1.7}$$

(1.7) dan Kramer qoidasi kelib chiqadi: agar asosiy determinant noldan farqli bo‘lsa, – sistema yagona yechimga ega bo‘lib, u quyidagicha topiladi:

$$x_i = \Delta_i / \Delta.$$

Agar asosiy Δ va yordamchi determinantlar Δ_i $(i=\overline{1,n})$, nolga teng bo‘lsa, sistema cheksiz yechimga ega bo‘ladi. Agar asosiy matritsa determinanti $\Delta = 0$ bo‘lib, yordamchi determinantlarning birortasi noldan farqli bo‘lsa, sistema birgalikda emas.

Misol. Quyidagi sistemani Kramer usulida yeching:

$$\begin{aligned}
x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 5,\\
x_1 + 2x_2 - x_3 + 4x_4 &= -2,\\
2x_1 - 3x_2 - x_3 - 5x_4 &= -2,\\
3x_1 + x_2 + 2x_3 + 11x_4 &= 0.
\end{aligned}$$

Yechish. Sistemaning asosiy determinantini hisoblaymiz:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 4 \\ 2 & -3 & -1 & -5 \\ 3 & 1 & 2 & 11 \end{vmatrix} = -142 \neq 0,$$

Demak, sistema yagona yechimga ega. Yordamchi determinantlarni hisoblaymiz.

Δ_i $(i=\overline{1,4})$:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 5 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & -1 & 4 \\ -2 & -3 & -1 & -5 \\ 0 & 1 & 2 & 11 \end{vmatrix} = -142, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -1 & 4 \\ 2 & -2 & -1 & -5 \\ 3 & 0 & 2 & 11 \end{vmatrix} = -284,$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 5 & 1 \\ 1 & 2 & -2 & 4 \\ 2 & -3 & -2 & -5 \\ 3 & 1 & 0 & 11 \end{vmatrix} = -426, \quad \Delta_4 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & -1 & -2 \\ 2 & -3 & -1 & -2 \\ 3 & 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 142.$$

Bu yerdan $x_1 = \Delta_1/\Delta = 1$, $x_2 = \Delta_2/\Delta = 2$, $x_3 = \Delta_3/\Delta = 3$, $x_4 = \Delta_4/\Delta = -1$, Demak, sistema yechimi – vektor $C = (1, 2, 3, -1)^T$.

Matritsali usul. Agar $\Delta \neq 0$ bo'lsa, ya'ni A xos bo'lmagan matritsa bo'lsa, u holda A^{-1} teskari matritsa mavjud va (1.5) tenglikdan quyidagilarni hosil qilamiz.

$$A^{-1}(AX) = A^{-1}B \Rightarrow (A^{-1}A)X = A^{-1}B \Rightarrow EX = A^{-1}B \Rightarrow X = A^{-1}B$$

bu yerda matritsalarning ko'paytirish qoidasidan quyidagilar kelib chiqadi:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{nn} \\ A_{12} & A_{22} & & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & & A_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

Yechimni $X = A^{-1}B$ formula yordamida topish sistemani yechishning *matritsali usuli* deyiladi.

Misol. Teskari matritsa usulida yeching:

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + x_3 &= 6, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 &= 3, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 &= 5. \end{aligned}$$

Yechish. Belgilashlar kiritamiz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \; X = (x_1, x_2, x_3)^T, \; B = (6, 3, 5)^T.$$

U holda sistemani matritsa ko'rinishida yozamiz: $AX=B$. $\Delta = \det \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = 5 \neq 0$ bo'lgani uchun A matritsa xosmas va teskari matritsa mavjud:

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}.$$

X yechimni topish uchun A^{-1} ni chapdan B matritsaga ko'paytiramiz: $X = A^{-1}B$. Teskari matritsa

$$A^{-1} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -3 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

shuning uchun

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -3 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Matritsalar ustida amallar bajarsak,

$$x_1 = 1/5(1{\cdot}6+3{\cdot}3-2{\cdot}5) = 1/5\,(6+9-10) = 1,$$
$$x_2 = 1/5\,(-3{\cdot}6 +1{\cdot}3 - 1{\cdot}5) = 1/5\,(-18 + 3 + 5) = -2,$$
$$x_3 = 1/5\,(1{\cdot}6 - 2{\cdot}3 + 3{\cdot}5) = 1/5\,(6 -6 + 15) = 3.$$

Demak, $C = (1, -2, 3)^T$.

Gauss-Jordan usuli. Chiziqli tenglamalar sistemasini Gauss usuli bilan yechish jarayonida sistemaning matritsasi uchburchakli matritsaga keltirilishini ko'rdik. Gauss-Jordan usulida matritsa diagonal matritsaga keltiriladi va bu noma'lumlarni tez topishga imkon beradi.

(1.6) sistemaning noldan farqli a_{qp} elementini olamiz. Bu elementga *hal qiluvchi element* deyiladi. Asosiy matritsaning q-satri *hal qiluvchi satr*, p-ustun *hal qiluchi ustun* deyiladi.

Sistemaning koeffitsiyentlari ustida quyidagi hisoblashlarni amalga oshiramiz:

$$a_{ij}'=a_{ij}-(a_{ip}a_{qj})/a_{qp},\quad b_i'=b_i-(a_{ip}b_q)/a_{qp},$$
$$(i=1,2,\ldots,q-1,q+1,\ldots,n;\ j=1,2,\ldots,n). \qquad (1.8)$$

Natijada quyidagi sistema hosil bo'ladi.

$$\begin{aligned} &a_{11}'x_1 + a_{12}'x_2 + \ldots + a_{1n}'x_n = b_1', \\ &a_{21}'x_1 + a_{22}'x_2 + \ldots + a_{2n}'x_n = b_2', \\ &\ldots\quad \ldots\quad \ldots\quad \ldots\quad \ldots\quad \ldots \\ &a_{n1}'x_1 + a_{n1}'x_2 + \ldots + a_{nn}'x_n = b_n'. \end{aligned} \qquad (1.9)$$

Bu formulalardan ko'rinadiki, p-ustun elementlarining q-satridagisidan boshqa barchasi nolga teng: $a_{ip}'=0,\ (i=1,2,\ldots,q-$

$1,q+1,...,n)$. q-satr elementlarini o'zgarishsiz qoldiramiz: $a_{qj}'=a_{qj}$, $b_q'=b_q$. Shunday qilib, (1.6) va (1.9) sistemaning q-tenglamasi bir xil, x_p o'zgaruvchi oldidagi q dan boshqa barcha elementi nolga teng.

(1.9) sistema matritsasi elementlarini topishda "to'rtburchak" qoidasidan foydalanish qulaylik tug'diradi. A matritsaning to'rtta elementini qaraymiz: a_{ij} (o'zgartirishimiz kerak bo'lgan element) a_{qp} (hal qiluvchi element), a_{ip} va a_{qj}. a_{ij}' elementni topish uchun a_{ij} dan a_{ip} va a_{qj} lar ko'paytmasini (bular to'rtburchakning diagonalida joylashgan) hal qiluvchi element a_{qp} ga bo'lishdan chiqqan qiymatning ayirmasiga teng:

$$\begin{array}{ccc} a_{ij} & \text{------} & a_{ip} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{ij} & \text{------} & a_{ip} \end{array}$$

Xuddi shu usulni qo'llab, (1.9) sistemaning elementlari ustida shakl almashtirish mumkin. Hal qiluvchi element sifatida A' matritsaning shunday noldan farqli $a_{sr}\neq 0$ elementini olamizki, unda $s\neq q,\ r\neq p$ shartlar qanoatlantirilishi kerak. Bir necha qadamdan so'ng sistema quyidagi ko'rinishga keladi:

$$\begin{aligned} k_1x_1 &= c_1, \\ k_2x_2 &= c_2, \\ \dots\ &\dots\ \dots \\ k_nx_n &= c_n. \end{aligned}$$

Bundan noma'lumlarni aniqlash qiyin emas.

Misol. Quyidagi sistemani Gauss-Jordan usulida yeching:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - 3x_3 + 2x_4 &= 6, \\ x_1 - 2x_2 - \quad\quad x_4 &= -6, \\ x_2 + x_3 + 3x_4 &= 16, \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 \quad\quad &= 6. \end{aligned}$$

Yechish. Sistemaning kengaytirilgan matritsasini olamiz. Hal qiluvchi element sifatida a_{11} elementni olamiz. Hal qiluvchi satrning elementlari o'zgarishsiz qoladi. Birinchi ustunning birinchi satridagi elementdan boshqa barcha elementlarni nol bilan almashtiramiz. Qolgan elementlar (1.10) formula asosida qayta hisoblanadi:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & 2 & 6 \\ 1 & -2 & 0 & -1 & -6 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 16 \\ 2 & -3 & 2 & 0 & 6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & 2 & 6 \\ 0 & -3 & 3 & -3 & -12 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 16 \\ 0 & -5 & 8 & -4 & -6 \end{pmatrix}$$

Ikkinchi satr elementlarini -3 bo'lib, a_{22} elementni hal qiluvchi element sifatida olamiz:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 16 \\ 0 & -5 & 8 & -4 & -6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 12 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 14 \end{pmatrix}$$

Uchinchi satr elementlarini 2 ga bo'lib, a_{33} elementni hal qiluvchi element deb olamiz.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 14 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 14 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -4 \end{pmatrix}$$

To'rtinchi satrni -2 ga bo'lib, a_{44} elementni hal qiluvchi element sifatida olamiz:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 8 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Oxirgi matritsadan $x_1=8,\ x_2=6,\ x_3=4,\ x_4=2$ kelib chiqadi.

1.2.3. Umumiy ko'rinishdagi tenglamalar sistemasi

Agar (1.4) sistema birgalikda bo'lsa, ya'ni A va $\bar{A}$ matritsalar ranglari teng bo'lsa, ikki holat bo'lishi mumkin: *a)* $r = n$; *b)* $r < n$:

a) agar $r = n$ bo'lsa, n ta bog'lanmagan n ta noma'lumli tenglamalar sistemasi hosil bo'lib, bu sistemaning determinanti noldan farqli bo'ladi. U holda bunday sistemani yuqorida keltirilgan usullardan foydalanib yechish imkoniyati tug'iladi.

b) agar $r < n$ bo'lsa, bog'lanmagan tenglamalar soni noma'lumlar sonidan kichik bo'ladi.

Erkin o'zgaruvchilar deb ataluvchi ortiqcha o'zgaruvchilarni $x_{r+1}, x_{r+2}, \ldots, x_n$, o'ng tomonga o'tkazamiz:

$$
\begin{aligned}
&a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1r}x_r = b_1 - a_{1,r+1}x_{r+1} - \ldots - a_{1n}x_n,\\
&a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2r}x_r = b_2 - a_{2,r+1}x_{r+1} - \ldots - a_{2n}x_n,\\
&\ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots\\
&a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + \ldots + a_{rr}x_r = b_r - a_{r,r+1}x_{r+1} - \ldots - a_{rn}x_n
\end{aligned}
$$

Bu sistema determinanti noldan farqli bo'lgani uchun sistemadan $x_1, x_2, \ldots, x_r$ larni topish mumkin. Buning uchun erkin o'zgaruvchilarga ixtiyoriy qiymat berib yuqorida keltirilgan usullardan foydalanib yechish mumkin. Shunday qilib, r < n bo'lganda cheksiz ko'p yechimga ega bo'lamiz.

Misol. Sistemani tekshiring va birgalikda bo'lsa, yechimni aniqlang.

$$
\begin{aligned}
x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 + x_5 &= 1,\\
3x_1 - x_2 + x_3 + 4x_4 + 3x_5 &= 4,\\
x_1 + 5x_2 - 9x_3 - 8x_4 + x_5 &= 0.
\end{aligned}
$$

Yechish. Elementar almashtirishlar yordamida **A** va $\bar{\mathbf{A}}$ matritsalarning rangini aniqlaymiz:

$$
\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & -1 & 1 & 1\\ 3 & -1 & 1 & 4 & 3 & 4\\ 1 & 5 & -9 & -8 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & -1 & 1 & 1\\ 0 & -4 & 7 & 7 & 0 & 1\\ 0 & 4 & -7 & -7 & 0 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & -1 & 1 & 1\\ 0 & -4 & 7 & 7 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.
$$

Ma'lumki, $r(A) = r(\bar{A}) = 2$. Berilgan sistema quyidagi sistemaga ekvivalent:

$$
\begin{aligned}
x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 + x_5 &= 1,\\
-4x_2 + 7x_3 + 7x_4 &= 1.
\end{aligned}
$$

x_1 va x_2 o'zgaruvchilar oldidagi koeffitsiyentlardan tuzilgan matritsa determinanti noldan farqli bo'lgani uchun sistemani quyidagicha yozib olamiz

$$
\begin{aligned}
x_1 + x_2 &= 2x_3 + x_4 - x_5 + 1,\\
-4x_2 &= -7x_3 - 7x_4 + 1,
\end{aligned}
$$

bundan sistemaning cheksiz ko'p umumiy yechimini aniqlaymiz: $x_2 = 7/4\, x_3 + 7/4\, x_4 - 1/4$, $x_1 = 1/4\, x_3 - 3/4\, x_4 - x_5 + 5/4$. Bu yechimdagi erkin o'zgaruvchilar hisoblangan x_3, x_4, x_5 larga aniq qiymatlar berib, xususiy yechimlarni topamiz. Masalan, $x_3 = x_4 = x_5 = 0$ $x_1 = 5/4$, $x_2 = -1/4$. Demak, vektor C (5/4, - 1/4, 0, 0, 0) sistemaning xususiy yechimlaridan biri bo'ladi.

1.2.4. Bir jinsli tenglamalar sistemasi

Agar (1.4) *sistemaning* ozod hadlari nolga teng bo'lsa, bunday sistema *bir jinsli sistema* deyiladi. Uning ko'rinishi quyidagicha bo'ladi:

$$\begin{aligned} &a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0, \\ &a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0, \\ &\ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ &a_{m1}x_1 + a_{m1}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = 0. \end{aligned} \tag{1.10}$$

(1.10) sistema har doim yechimga ega. Masalan, $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$ sonlar (1.10) sistemani qanoatlantiradi. Ikkinchi tomondan Kroneker-Kopelli teoremasiga ko'ra (1.10) sistema doim birgalikda bo'ladi. Chunki kengaytirilgan matritsaning oxirgi ustuni nollardan iborat bo'ladi va matritsa rangini o'zgartirmaydi.

Agar $r = n$ bo'lsa, nol yechim (1.10) sistemaning yagona yechimi bo'ladi; $r < n$ bo'lganda esa sistemaning noldan farqli yechimi ham mavjud. Noldan farqli yechimni topish yuqorida bayon qilingan usullarda amalga oshiriladi.

Demak, (1.10) sistemaning noldan farqli yechimi bo'lishi uchun uning asosiy determinanti nolga teng bo'lishi kerak.

1.2.5 Matritsalarning xos son va xos vektorlari

A kvadrat matritsa bo'lsin. Quyidagi

$$AX = \lambda X,$$

sistemaning noldan farqli har qanday $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T$ yechimi A matritsaning *xos vektori*, λ esa matritsaning **xos** vektoriga mos kelgan *xos soni* deyiladi.

Matritsaning xos sonlarini topish uchun $AX = \lambda X$ tenglamani $(A - \lambda E)X = 0$, ko'rinishida yozamiz, bu yerda E — n-tartibli birlik matritsa. Sistemani kengaytirilgan ko'rinishga keltiramiz:

$$\begin{aligned} &(a_{11} - \lambda)x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0, \\ &a_{21}x_1 + (a_{22} - \lambda)x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0, \\ &\ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ &a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + (a_{nn} - \lambda)x_n = 0. \end{aligned} \tag{1.11}$$

Natijada bir jinsli tenglamalar sistemasi hosil bo'ladi. Sistema noldan farqli yechimga ega bo'lishi uchun sistemaning determinanti nolga teng bo'lishi kerak, ya'ni:

$$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & a_{2n} \\ \vdots & & \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix}=0.$$

Bu λ ga nisbatan n-tartibli tenglamadan iborat. Bu tenglama A matritsaning *xarakteristik tenglamasi* deyiladi. Xarakteristik tenglamaning yechimlari matritsaning *xos sonlari* deyiladi.

A matritsaning *xos vektorlarini* aniqlash uchun $(A-\lambda E)X = 0$ tenglamaga topilgan λ ni qo'yib, (1.11) sistemani yechish lozim.

Misol. Matritsaning xos son va xos vektorlarini toping.

$$A=\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & -5 & -3 \\ 4 & -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Yechish. A - λE matritsaning determinantini hisoblaymiz:

$$|A-\lambda E| = \det\begin{pmatrix} 3-\lambda & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1-\lambda & 0 & 0 \\ 3 & 0 & -5-\lambda & -3 \\ 4 & -1 & 3 & 1-\lambda \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ \lambda^2-4\lambda+4 & 1-\lambda & 0 & 0 \\ 3 & 0 & -5-\lambda & -3 \\ 1+\lambda & -1 & 3 & 1-\lambda \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} \lambda^2-4\lambda+4 & 0 & 0 \\ 3 & -5-\lambda & -3 \\ 1+\lambda & 3 & 1-\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda^2-4\lambda+4)\begin{vmatrix} 5+\lambda & 3 \\ 3 & 1-\lambda \end{vmatrix}.$$

Shunday qilib, $(A - \lambda E) = (\lambda - 2)^2 \cdot (\lambda+2)^2$. Xarakteristik tenglamaning $(A - \lambda E) = 0$ yechimlari $\lambda_1 = 2$ и $\lambda_2 = -2$ bo'ladi. Ya'ni biz A matritsaning xos sonlarini topdik. Matritsaning xos vektorlarini topish uchun topilgan λ ning qiymatlarini (1.11) sistemaga qo'yamiz. $\lambda = 2$ bo'lganda quyidagi tenglamalar sistemasi hosil bo'ladi.

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = 0, \\ x_1 - x_2 = 0, \\ 3x_1 - 7x_3 - 3x_4 = 0, \\ 4x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 = 0, \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x_1 - x_2 = 0, \\ 3x_2 - 7x_3 - 3x_4 = 0, \\ 5x_3 + x_4 = 0. \end{cases}$$

Demak, $\lambda = 2$ xos songa mos kelgan xos vektorning ko'rinishi α (8, 8, -3, 15), bo'ladi, bu yerda α ixtiyoriy noldan farqli haqiqiy son. $\lambda = -2$ bo'lganda esa,

$$A - \lambda E = A + 2E = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & -3 & -3 \\ 4 & -1 & 3 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

va xos vektorning koordinatalari quyidagi tenglamalar sistemasini qanoatlantiradi:

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 &= 0, \\ x_2 &= 0, \\ x_3 + x_4 &= 0. \end{aligned}$$

Shuning uchun $\lambda = -2$ xos songa β (0, 0,-1, 1), ko'rinishidagi xos vektor mos keladi. Bu yerda β noldan farqli ixtiyoriy haqiqiy son.

1.2.6. Vektorlarning chiziqli bog'langanligi

Har qanday bir tekislikda yotmagan $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ uchlikka $\mathbf{R}^3$ fazoning *bazis vektorlari* deyiladi. Har qanday $\boldsymbol{a}$ vektor bazis vektorlar orqali yagona yoyilishi mumkin, ya'ni quyidagi ko'rinishda bo'ladi:

$$\boldsymbol{a} = x_1 \boldsymbol{e}_1 + x_2 \boldsymbol{e}_2 + x_3 \boldsymbol{e}_3, \tag{1.12}$$

x_1, x_2, x_3 sonlar $\boldsymbol{a}$ vektorning $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ bazisdagi koordinatalari deyiladi va $\boldsymbol{a}(x_1, x_2, x_3)$ ko'rinishida ifodalanadi. Agar $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ vektorlarning o'zaro perpendikular uzunliklari birga teng bo'lsa, bunday bazis *ortanormallashgan* bazis deyiladi. *Ortanormallashgan bazis* $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ harflari orqali belgilanadi.

n-o'lchovli $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_m$ vektorlar berilgan bo'lsin. Agar kamida birortasi noldan farqli bo'lgan $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ sonlar mavjud va $\lambda_1 \mathbf{e}_1 + \lambda_2 \mathbf{e}_2 + \dots + \lambda_m \mathbf{e}_m = 0$ tenglik o'rinli bo'lsa, $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_m$ vektorlar *chiziqli bog'langan* deyiladi. Agar bunday sonlarni topish imkoniyati bo'lmasa, $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_m$ vektor *chiziqli bog'lanmagan* deyiladi, ya'ni keltirilgan tenglik faqat $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_m = 0$ bo'lgandagina o'rinli.

Misol. Quyidagi vektorlarning chiziqli bog'langanligini tekshiring:

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_1 &= (1, 1, 4, 2), \\ \mathbf{a}_2 &= (1, -1, -2, 4), \\ \mathbf{a}_3 &= (0, 2, 6, -2), \\ \mathbf{a}_4 &= (-3, -1, 3, 4), \\ \mathbf{a}_5 &= (-1, 0, -4, -7). \end{aligned}$$

Yechish. Agar x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 sonlar ichida birortasi noldan farqli bo'lib, quyidagi tenglik:

$$x_1 \mathbf{a}_1 + x_2 \mathbf{a}_2 + x_3 \mathbf{a}_3 + x_4 \mathbf{a}_4 + x_5 \mathbf{a}_5 = 0,$$

o'rinli bo'lsa, vektorlar chiziqli bog'langan bo'ladi. Bu tenglik quyidagi tenglama sistemasiga teng kuchli:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 \phantom{{}+2x_3} - 3x_4 - x_5 &= 0, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 \phantom{{}-x_5} &= 0, \\ 4x_1 - 2x_2 + 6x_3 + 3x_4 - 4x_5 &= 0, \\ 2x_1 + 4x_2 - 2x_3 + 4x_4 - 7x_5 &= 0. \end{aligned}$$

Demak, chiziqli bir jinsli tenglamalar sistemasi hosil bo'ladi. Sistemani Gauss usuli bilan yechamiz:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -3 & -1 \\ 1 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 4 & -2 & 6 & 3 & -4 \\ 2 & 4 & -2 & 4 & -7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -3 & -1 \\ 0 & -2 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & -10 & 10 & -5 & 10 \\ 0 & 2 & -2 & 10 & -5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -3 & -1 \\ 0 & -2 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -2 & 10 & -5 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -3 & -1 \\ 0 & -2 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 12 & -4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -3 & -1 \\ 0 & -2 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Sistemaning rangi 3 ga teng, noldan farqli yechimlari mavjud (r < n). x_1, x_2, x_4 o'zgaruvchilar oldidagi koeffitsiyentlardan tuzilgan matritsaning determinanti noldan farqli bo'lgani uchun ularni asosiy o'zgaruvchilar sifatida olish mumkin:

$$
\begin{aligned}
x_1 + x_2 - 3x_4 &= x_5,\\
-2x_2 + 2x_4 &= -2x_3 - x_5,\\
-3x_4 &= -x_5.
\end{aligned}
$$

Bundan: $x_4 = 1/3\, x_5$, $x_2 = 5/6x_5 + x_3$, $x_1 = 7/6\, x_5 - x_3$.

Sistema cheksiz ko'p yechimga ega: erkin o'zgaruvchilar x_3 va x_5 lar bir vaqtda noldan farqli bo'lganda asosiy o'zgaruvchilar ham noldan farqli bo'ladi. Shuning uchun

$$x_1 \boldsymbol{a}_1 + x_2 \boldsymbol{a}_2 + x_3 \boldsymbol{a}_3 + x_4 \boldsymbol{a}_4 + x_5 \boldsymbol{a}_5 = 0$$

vektor tenglikning bir vaqtda nolga teng bo'lmagan koeffitsiyentlari mavjud, masalan, $x_5 = 6$, $x_3 = 1$ bo'lganda $x_4 = 2$, $x_2 = 6$, $x_1 = 6$ bo'ladi va biz

$$6\boldsymbol{a}_1 + 6\boldsymbol{a}_2 + \boldsymbol{a}_3 + 2\boldsymbol{a}_4 + 6\boldsymbol{a}_5 = 0,$$

tenglikka ega bo'lamiz; ya'ni vektorlar sistema chiziqli bog'langan.

1.3. Chiziqli tenglamalar sistemasining iqtisodiy masalalarda qo'llanilishi

Bu mavzuda chiziqli tenglamalar sistemasiga keltiriladigan oddiy iqtisodiy masalalardan tortib, ishlab chiqarish tarmoqlari orasidagi muvozanat holati aniqlash (Leontyev modeli) va umumjahon savdo modeli haqida so'z boradi.

1.3.1. Chiziqli tenglamalar sistemasiga keltiriladigan oddiy iqtisodiy masalalar

Chiziqli tenglamalar sistemasiga keltiriladigan ba'zi sodda masalalarni ko'rib chiqamiz.

Masala. Bir xil o'lchovli yassi materiallardan *A*, *B* va *C* turdagi qirqimlar tayyorlash kerak. *A* turdagi qirqimdan 360, *B* turdan 300 va *C* turdan 675 dona tayyorlash kerak. Materialni qirqishning uch usuli mavjud. Har bir materialdan tayyorlanadigan qirqimlar soni jadvalda keltirilgan.

Qirqim turlari	Qirqish usullari		
	1	2	3
A	3	2	1
B	1	6	2
C	4	1	5

Masala shartini qondirishning matematik ifodasini aniqlang.

Yechish. x, y, z orqali materiallar sonini mos ravishda birinchi, ikkinchi va uchinchi qirqish usullarida bajarishni belgilaymiz. U holda x sondagi materialdan A turdagi qirqimni birinchi tur qirqish usulida $3x$ dona, y dona materialdan ikkinchi qirqish usulida $2y$ dona va uchinchi qirqish usulida esa z dona qirqim hosil bo'ladi.

Rejalashtirilgan A turdagi qirqimni tayyorlaganda $3x+2y+z$ yig'indi 360 ga teng bo'lishi kerak, ya'ni:

$$3x+2y+z=360.$$

Shuningdek, quyidagi tenglamalarni hosil qilamiz:

$$x+6y+2z=300$$
$$4x+y+5z=675.$$

Bu sistemaning yechimi A, B va C turdagi qirqimlarni hosil qilish uchun nechta materialni birinchi, nechtasini ikkinchi va nechtasini uchinchi usulda qirqish lozimligini aniqlaydi. Sistemani Gauss usuli bilan yechamiz.

$$\begin{pmatrix} 1 & 6 & 2 & 300 \\ 3 & 2 & 1 & 360 \\ 4 & 1 & 5 & 675 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 6 & 2 & 300 \\ 0 & -16 & -5 & -540 \\ 0 & -7 & 2 & 15 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 6 & 2 & 300 \\ 0 & 16 & 5 & 540 \\ 0 & -14 & 4 & 30 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 6 & 2 & 300 \\ 0 & 16 & 5 & 540 \\ 0 & 2 & 9 & 570 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 6 & 2 & 300 \\ 0 & 2 & 9 & 570 \\ 0 & 16 & 5 & 540 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 6 & 2 & 300 \\ 0 & 2 & 9 & 570 \\ 0 & 0 & -67 & -4020 \end{pmatrix}.$$

Demak, sistema quyidagiga teng kuchli:

$$x+6y+2z=300,$$
$$2y+9z=570,$$
$$-67z=-4020.$$

Bu sistemani yechib $z = 60; y = 15; x = 90$ qiymatlarga ega bo'lamiz. Shunday qilib, 90 ta materialni birinchi usulda, 15 ta materialni ikkinchi usulda va 60 materialni uchunchi usulda qirqish kerak ekan.

1.3.2. Leontyev modeli (Balans modeli)

Balans modelining asosiy masalasi makroiqtisodiyotni tashkil etadigan ko'p tarmoqli iqtisodiyot faoliyatini maqsadga muvofiq tarzda samarali olib borishdan iborat bo'lib, bu masala quyidagicha qo'yiladi: n ta tarmoqdan iborat xo'jalikning har bir ishlab chiqargan mahsulot miqdori qanday bo'lsa, ularga ehtiyoj to'la qondiriladi. Bu yerda shuni e'tiborga olish kerakki, n ta tarmoqning har biri ishlab chiqargan mahsulotning bir qismi shu tarmoq ehtiyoji uchun, bir qismi boshqa tarmoqlar ehtiyoji uchun va yana bir qismi ishlab chiqarish bilan bog'liq bo'lmagan ehtiyojlar uchun sarf bo'ladi.

Ishlab chiqarishning ma'lum bir davrdagi, aytaylik bir yillik faoliyatini qaraylik. x_i i-tarmoqlarning shu davr davomida ishlab chiqargan yalpi mahsulot hajmini pul birligida ifodalangan qiymati bo'lsin, bu yerda $i = 1, 2, \cdots, n$ bo'ladi. x_{ij} deb i-tarmoq mahsulotining j-tarmoq ehtiyoji uchun sarf bo'lgan hajmining pul miqdorini belgilaymiz. y_i deb i-tarmoq mahsulotining noishlab chiqarish ehtiyoji hajmining pul miqdorini belgilaymiz. y_i iste'mol mahsulotlari, investitsiya va saldoning pul miqdorini o'z ichiga oladi. Tabiiy i-tarmoq ishlab chiqargan yalpi mahsulot hajmi x_i, n tarmoq ehtiyojlari va noishlab chiqarish ehtiyojlariga sarf qilingan hajmlar yig'indisiga teng bo'lishi kerak, ya'ni

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} x_{ij} + y_i, \qquad i = 1, 2, \cdots, n \tag{1.13}$$

(1.13) tenglamalar *balans munosabatlari* deb nomlanadi.

Agar $a_{ij} = \dfrac{x_{ij}}{x_j}$, $(i, j = 1, 2, \cdots, n)$ belgilash kiritsak, a_{ij} – j-tarmoqning hajm birligi uchun sarf etilgan i-tarmoq mahsulot hajmi qiymatini bildiradi. a_{ij} – bevosita xarajatlar koeffitsiyenti deb nomlanadi. a_{ij} – koeffitsiyentlar qaralayotgan davrdagi ishlab chiqarish jarayonida qo‘llanilayotgan texnologiyani aniqlaydi. Qanchalik yangi samarali texnologiya qo‘llanilsa, a_{ij} – koeffitsiyentlar shunchalik kichik bo‘lib, sarf-xarajatlar shunchalik kam bo‘lib, samaradorlik yuqori bo‘ladi. Qaralayotgan davr ichida a_{ij} koeffitsiyentlarini o‘zgarmas, ya’ni sarf-xarajatlar yalpi xarajatlarga chiziqli bog‘liq deb olamiz.

$$x_{ij} = a_{ij} \cdot x_j, \quad (i, j = 1, 2, \dots, n)$$

Shuning uchun ko‘rilgan ko‘p tarmoqli iqtisodiyot modeli chiziqli balans modeli deb ham nomlanadi. (1.13) tenglama quyidagi ko‘rinishga ega bo‘ladi.

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + y_i, \qquad i = 1, 2, \cdots, n$$

Endi quyidagi belgilashlarni kiritamiz:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11}\ a_{12} \dots a_{1n} \\ a_{21}\ a_{22} \cdots a_{2n} \\ ------ \\ a_{n1}\ a_{n2} \dots a_{nn} \end{pmatrix}, \qquad \mathrm{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \qquad \mathrm{Y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

bu yerda A – *texnologik matritsa* yoki *Leontyev matritsasi*, X – yalpi mahsulot vektori, Y – yakuniy mahsulot vektori deb nomlanadi. Bu belgilashlarga asosan (1.13) tenglikdan quyidagi matritsa ko‘rinishini hosil qilamiz.

$$\mathrm{X} = \mathrm{AX} + \mathrm{Y} \tag{1.14}$$

Ko‘p tarmoqli balansning asosiy masalasi berilgan yakuniy mahsulot vektori va bevosita xarajatlar matritsasi A ga ko‘ra X - yalpi mahsulot vektorini topishdan iborat bo‘ladi, ya’ni (1.14) tenglamani noma’lum vektor X ga nisbatan yechish kerak. Buning uchun uni $(E - A)\mathrm{X} = \mathrm{Y}$ ko‘rinishga keltiramiz.

Agar $(E - A) \neq 0$ bo‘lsa, u holda teskari $(E - A)^{-1}$ matritsa mavjud bo‘lib, yechim quyidagi ko‘rinishda bo‘ladi:

$$\mathrm{X} = (E - A)^{-1}\mathrm{Y} \tag{1.15}$$

$S = (E - A)^{-1}$ matritsa bevosita xarajatlar matritsasi deb nomlanadi. Bu matritsaning iqtisodiy ma’nosini tushunish uchun

$Y_i=(0,0,\cdots,1,\cdots 0)$ $(i=1,2,\cdots,n)$ i o'rnida 1, qolgan joylarda 0 bo'lgan yakuniy mahsulot birlik vektorlarini ko'raylik, ularga mos keluvchi (1.15) tenglama yechimlarini qursak, ular quyidagiga teng bo'ladi.

$$X_1=\begin{pmatrix} s_{11} \\ s_{21} \\ \vdots \\ s_{n1} \end{pmatrix},\qquad X_2\begin{pmatrix} s_{12} \\ s_{22} \\ \vdots \\ s_{n2} \end{pmatrix},\ \cdots,\quad X_n=\begin{pmatrix} s_{1n} \\ s_{2n} \\ \vdots \\ s_{nn} \end{pmatrix}$$

Demak, $S=(s_{ij})$ matritsaning s_{ij}-elementi, i-tarmoqning j-tarmoqning birlik yakuniy mahsuloti Y_j' ni ishlab chiqarish uchun sarf qilinishi kerak bo'lgan mahsulot miqdori qiymatini berar ekan.

Qaralayotgan masalaning iqtisodiy ma'nosiga ko'ra (1.15) tenglamada $y_i\geq 0.$ $\left(i=\overline{1,n}\right)$, $a_{ij}\geq 0$ $\left(i,j=\overline{1,n}\right)$ bo'lib, tenglama yechimi uchun $x_i\geq 0$ $\left(i=\overline{1,n}\right)$ bo'lishi kerak. Shu holatni biz $Y\geq 0,$ $A\geq 0$ va $X\geq 0$ deb belgilaymiz.

Agar istalgan $Y\geq 0$vektor uchun $X\geq 0$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi (1.15) ning yechimi mavjud bo'lsa, $A\geq 0$ matritsa mahsuldor matritsa deyiladi, Shu holda Leontyev modeli ham mahsuldor model deyiladi.

A matritsaning mahsuldor ekanligining bir necha mezonlari bor.

Matritsa mahsuldorligining yetarli sharti. Ulardan biri shundan iboratki, agar A matritsaning ustunlar elementi yig'indisining maksimumi 1 dan kattabo'lmay, hech bo'lmaganda bironbir ustun elementlari yig'indisidan kichik bo'lsa, A mahsuldor matritsabo'ladi, ya'ni $\max\limits_{j}\sum\limits_{i-1}^{n}a_{ij}\leq 1$, bo'lib, shunday j_0 mavjudki, uning uchun $\sum\limits_{i=1}^{n}a_{ij_0}<1$ o'rinli bo'lsa, A mahsuldor matritsa bo'ladi.

Matritsa mahsuldorligining zarur va yetarli sharti.

1. Agar nomanfiy **A** matritsaning eng katta xos sonining moduli birdan kichik shartni qanoatlantirsa, u holda **A** matritsa mahsuldor bo'ladi.

2. Agar nomanfiy **A** matritsa mahsuldor bo'lsa, u holda uning eng katta xos sonining moduli birdan kichik shartni qanoatlantiradi.

Masala. Biz iqtisodiyotning qishloq xo'jalik mahsulotlari, sanoat mollari va yoqilg'iga asoslangan sodda modelini ko'rib chiqamiz (1.4-jadval).

1.4-jadval

	Qishloq xo'jalik mahsulotlari	Sanoat mollari	Yoqilg'i
Qishloq xo'jalik mahsulotlari	0,5	0,1	0,1
Sanoat mollari	0,2	0,5	0,3
Yoqilg'i	0,1	0,3	0,4

Birinchi ustun bir birlik qishloq xo'jalik mahsulotini ishlab chiqarish uchun zarur bo'lgan qishloq xo'jalik mahsulotlari, sanoat mollari va yoqilg'i birliklarini ifodalaydi. Masalan, bir birlik qishloq xo'jalik mahsuloti uchun 0,1 birlik yoqilg'i sarflanadi.

Ikkinchi ustun bir birlik sanoat mollarini ishlab chiqarish uchun zarur bo'lgan birliklarni, uchinchi ustun bir birlik yoqilg'i uchun zarur bo'lgan birliklarni ifodalaydi.

Bir birlik yoqilg'i uchun sarflanadigan qishloq xo'jalik mahsulotlari, sanoat mollari va yoqilg'i birliklari (3-ustun) yig'indisi 1 ga teng emas. Buning sababi modelda barcha sohalar ishtirok etmayapti.

Bu yerda Leontyev (yoki texnologiya, iste'mol) matritsasi quyidagicha bo'ladi:

$$A=\begin{pmatrix}0,5 & 0,1 & 0,1\\ 0,2 & 0,5 & 0,3\\ 0,1 & 0,3 & 0,4\end{pmatrix}$$

1) Berilgan jadval bo'yicha quyidagilarni aniqlaymiz.

a) 100 birlik sanoat mollarini ishlab chiqarish uchun necha birlik yoqilg'i sarflanadi?

b) Ishlab chiqarilayotgan qaysi mahsulot qolgan ikki mahsulotga eng kam bog'langan?

c) Agar yoqilg'ining narxi oshsa, qolgan ikki mahsulotning qaysi biriga ko'proq ta'sir etadi?

Yechish.

a) Ikkinchi ustundan ko'rinib turibdiki, 100 birlik sanoat mollarini ishlab chiqarish uchun 30 birlik yoqilg'i sarflanar ekan.

b) Ustunlarni ko'zdan kechirib, bir birlik qishloq xo'jalik mahsuloti uchun qolgan ikki mahsulotning $0{,}2+0{,}1=0{,}3$ birligi; bir birlik sanoat mollari uchun qolgan ikki mahsulotning 0,4 birligi; bir birlik yoqilg'i uchun qolgan ikki mahsulotning 0,4 birligi sarflanishini ko'rishimiz mumkin. Shuning uchun qishloq xo'jalik mahsulotlari qolgan ikkitasiga eng kam bog'liq bo'ladi.

c) yoqilg'i narxining oshishi yoqilg'ini kattaroq miqdorda ishlatuvchi sohalarga eng ko'p ta'sir etadi. Bir birlik qishloq xo'-jalik mahsulotlari 0,1 birlik yoqilg'i, bir birlik sanoat mollari 0,3 birlik yoqilg'i, va bir birlik yoqilg'i 0,4 birlik yoqilg'i sarflaydi. Demak, yoqilg'i narxining oshishi qishloq xo'jalik mahsulotlari va yoqilg'iga eng ko'p ta'sir etar ekan.

2) Biz 85 birlik yakuniy qishloq xo'jalik mahsuloti, 65 birlik yakuniy sanoat mollari va yakuniy 0 birlik yoqilg'i olishimiz uchun yalpi ishlab chiqarilgan mahsulot qancha bo'lishi kerak?

Yechish. Iqtisodiyot uchun yalpi ishlab chiqarish ushbu

$$X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

yalpi ishlab chiqarish vektori orqali ifodalanadi. Bu yerda x_1 – yalpi qishloq xo'jalik mahsulotlari, x_2 – yalpi sanoat mollari, x_3 – yalpi yoqilg'i.

Yakuniy mahsulot vektori

$$Y=\begin{pmatrix} 85 \\ 65 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ga teng.

$$E-A=\begin{bmatrix} 0.5 & -0.1 & -0.1 \\ -0.2 & 0.5 & -0.3 \\ -0.1 & -0.3 & 0.6 \end{bmatrix}$$

Shuning uchun biz quyidagi sistemani yechishimiz kerak.

$$\begin{bmatrix} 0.5 & -0.1 & -0.1 \\ -0.2 & 0.5 & -0.3 \\ -0.1 & -0.3 & 0.6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 85 \\ 65 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Bu yerdan:

qishloq xo'jalik mahsulotlari — $x_1 = 300$.
sanoat mahsulotlari — $x_2 = 400$,
yoqilg'i — $x_3 = 250$

ekanini topamiz.

Turli tarmoqlarning mahsulotlarini umumiy birlikda ifodalash uchun ishlab chiqarish va talabni dollarda ifodalaymiz.

Misol. Aytaylik, biz ish kuchi, transport va oziq-ovqat sanoati tarmoqlaridan tuzilgan iqtisodiyotni qarayapmiz. $1 li ish kuchiga 40 sentli transport va 20 sentli oziq-ovqat; $1 li transportga 50 sentli ish kuchi va 30 sentli transport; $1 li oziq-ovqatga 50 sentli ish kuchi, 5 sentli transport, 35 sentli oziq-ovqat sarflansin. Qaralayotgan ishlab chiqarish davri uchun ish kuchiga talab $10 000, transportga talab $20 000 va oziq-ovqatga talab $10 000. Iqtisodiyot uchun ishlab chiqarish vektorini toping.
Iste'mol matritsasi ushbu

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0,5 & 0.5 \\ 0,4 & 0.3 & 0.05 \\ 0.2 & 0 & 0,35 \end{bmatrix}$$

matritsa orqali ifodalanadi. Undan

$$E - A = \begin{bmatrix} 1 & -0,5 & -0,5 \\ -0,4 & 0.7 & -0,5 \\ -0,2 & 0 & 0.65 \end{bmatrix}$$

ekanini topamiz. Endi $E - A$ matritsaga teskari matritsani topamiz.

$$(E - A)^{-1} = \begin{bmatrix} 1,82 & 1.3 & 1.5 \\ 1,08 & 2.2 & 1 \\ 0.56 & 0,4 & 2 \end{bmatrix}$$

Bu matritsaning barcha elementlari musbat bo'lgani uchun iqtisodiyot mahsuldor bo'ladi. Berilgan talab vektori uchun ishlab chiqarish vektori

$$X = (E - A)^{-1}Y = \begin{bmatrix} 59.200 \\ 64.800 \\ 33.600 \end{bmatrix}$$

ga teng. Demak, \$59,200 ga teng ish kuchi, \$64,800 ga teng transport, \$33,600 ga teng oziq-ovqat ishlab chiqarilishi kerak ekan.

Masala. Iqtisodiyot qishloq xo'jalik, sanoat va ish kuchi tarmoqlaridan tarkib topgan bo'lsin. Qishloq xo'jaligining har \$1 i uchun qishloq xo'jaligida 50 sent, sanoatda 20 sent, ish kuchi tarmog'ida 100 sent sarflansin. Sanoatning har \$1 i uchun sanoatda 80 sent, ish kuchi tarmog'ida 40 sent sarflansin. Ish kuchi tarmog'ining har \$1 i uchun qishloq xo'jaligida 25 sent, sanoatda 10 sent sarflansin. Iqtisodiyot mahsuldor ekanini ko'rsating va talab qishloq xo'jaligida \$100 ga, sanoatda \$500 ga va ish kuchi tarmog'ida \$700 ga teng bo'lganda ishlab chiqarish vektorini toping.

Yechish. Iste'mol matritsasi

$$A=\begin{bmatrix}0{,}5 & 0 & 0{,}25\\ 0{,}2 & 0{,}8 & 0{,}1\\ 1 & 0{,}4 & 0\end{bmatrix}$$

matritsa orqali beriladi. $E-A$ matritsaga teskari matritsani topamiz.

$$(E-A)^{-1}=\begin{bmatrix}16 & 10 & 5\\ 30 & 25 & 10\\ 28 & 20 & 10\end{bmatrix}.$$

Shunday qilib, $(E-A)^{-1}\geq 0$ va shu sababli iqtisodiyot mahsuldor bo'ladi. Bunda ishlab chiqarish vektori

$$X=\begin{bmatrix}10{,}100\\ 22{,}500\\ 19{,}800\end{bmatrix}$$

ga teng bo'ladi.

Ko'pincha quyidagi mezondan foydalanish maqsadga muvofiq.

Misol. Ushbu

$$A=\begin{bmatrix}1/3 & 1/2\\ 1/12 & 1/4\end{bmatrix}$$

matritsani ko'rib chiqamiz. Uning xos sonini topamiz.

$$\left(\frac{1}{3}-\lambda\right)\left(\frac{1}{4}-\lambda\right)=\frac{1}{24},\quad \lambda_1=\frac{1}{12},\quad \lambda_2=\frac{1}{2}.$$

Demak, $\lambda_A=\lambda_{max}<1$ ekan. Yuqoridagi tasdiqqa ko'ra A mahsuldor bo'ladi.

1.3.3. Umumjahon savdo modeli

N ta davlat o'zaro savdo-sotiq ishlarini yo'lga qo'ygan deylik: $S_1, S_2, ..., S_n$. Davlatlarning milliy daromadlari mos ravishda $x_1, x_2, ..., x_n$ bo'lsin. a_{ij} orgali S_j davlatning S_i davlatdan tovar sotib olishdagi milliy daromad ulushini belgilaymiz. Milliy daromadning barchasi ichki yoki tashqi tovarlarni sotib olishga ketadi deb faraz qilamiz. U holda

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij} = 1 \quad (j = 1,2,...,n) \tag{1.16}$$

tenglik o'rinli bo'ladi.

A=(a_{ij}), $(i=1,2,...,n;\ j=1,2,...,n)$ matritsa *savdo matritsasi* deyiladi. (1.16) ko'ra A matritsa ixtiyoriy ustuni elementlarining yig'indisi 1 ga teng.

Ixtiyoriy S_i $(i=1,2,...,n)$ davlat uchun ichki va tashqi savdodagi tushum quyidagiga teng:

$$p_i = a_{i1}x_2 + a_{i2}x_2 + ... + a_{in}x_n.$$

Savdo barqaror bo'lishi uchun har bir S_i davlatning savdodagi tushumi milliy daromaddan kam bo'lmasligi lozim:

$$p_i \geq x_i \quad (i=1,2,...,n).$$

Agar $p_i > x_i$ $(i=1,2,...,n\ )$ bo'lsa, quyidagi tengsizliklar sistemaga ega bo'lamiz:

$$\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n > x_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n > x_2, \\ .... \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ... + a_{nn}x_n > x_n, \end{array} \tag{1.17}$$

(1.17) sistemaning barcha tengsizliklarini qo'shib chiqsak,

$$x_1(a_{11}+a_{21}+...+a_{n1})+x_2(a_{12}+a_{22}+...+a_{n2})+... +$$
$$+x_n(a_{1n}+a_{2n}+...+a_{nn})>x_1+x_2+...+x_n,$$

tengsizlikka kelamiz.

(1.16) tenglikni inobatga olsak, qavs ichidagi ifodalar birga teng bo'ladi va biz

$$x_1+x_2+...+x_n > x_1+x_2+...+x_n,$$

qarama-qarshi tengsizlikka kelamiz.

Shunday qilib, $p_i > x_i$ $(i=1,2,...,n)$ tengsizlikning bo'lishi mumkin emas, va $p_i \geq x_i$ $(i=1,2,...,n)$ shartdan $p_i = x_i$ $(i=1,2,...,n)$ kelib chiqadi. Agar $X=(x_1,x_2,...,x_n)^T$ vektorini kiritsak, quyidagi matritsa tenglamasiga kelamiz:

$$AX=X \tag{1.18}$$

Shunday qilib masala savdo matritsasining xos soni birga teng bo'lgan xos vektorlarini topishga kelar ekan.

Misol. Uchta davlatning (S1, S_2, S_3) savdo matritsasi quyidagicha bo'lsin:

$$A=\begin{pmatrix} 1/3 & 1/4 & 1/2 \\ 1/3 & 1/2 & 1/2 \\ 1/3 & 1/4 & 0 \end{pmatrix}.$$

Savdo barqaror bo'lishi uchun davlatlarning milliy daromadlari qanday bo'lishini aniqlang.

Yechish. A matritsaning xos soni $\lambda=1$ bo'lgandagi xos vektorlarini aniqlaymiz. Buning uchun (A-E)X=0 matritsali tenglamani yechamiz. Bu tenglamaning kengaytirilgan ifodasini yozamiz:

$$\begin{pmatrix} -2/3 & 1/4 & 1/2 \\ 1/3 & -1/2 & 1/2 \\ 1/3 & 1/4 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Bu sistemani Gauss usuli bilan yechamiz: $x_1 = (3/2)c$, $x_2 = 2c$, $x_3=c$, ya'ni X=(3/2, 2, 1)c; c-ixtiyoriy haqiqiy son. Demak, davlatlarning milliy daromadlari 3/2:2:1 munosabatda yoki 3:4:2 munosabatda bo'lganda savdoda barqarorlik kuzatiladi.

Tayanch iboralar

Matritsa, determinant, matritsalar ustida amallar, determinantni hisoblash usullari, minor, algebraik to'ldiruvchi, matritsa rangi, teskari matritsa, matritsaning xos son va xos vektorlari, vektorlar, vektorlarning chiziqli bog'liqligi, chiziqli tenglamalar sistemasi, birgalikda bo'lgan sistema, Kramer, Gauss, matritsali va Gauss-Jordan usullari, sistema yechimi, bir jinsli va bir jinssiz chiziqli tenglamalar sistemasi, Leontyev modeli, matritsa mahsuldorligi, umumjahon savdo modeli.

Savollar

1. Matritsa nima?
2. Matritsaning rangi deb nimaga aytamiz?
3. Har qanday matritsalarni qo'shish va songa ko'paytirish mumkinmi?
4. Ixtiyoriy o'lchamli matritsalarni bir-biriga har doim ko'paytirish mumkinmi?
5. Teskari matritsa qanday topiladi?
6. Determinant qanday xossalarga ega?
7. Matritsaning rangi qanday topiladi?
8. Yuqori tartibli determinantlarni hisoblash qoidasi qanday?
9. Vektorlarning chiziqli bog'liqligi nimadan iborat?
10. Matritsaning xos soni va xos vektorlari qanday topiladi?
11. Qanday tenglamalar sistemasi chiziqli tenglamalar sistemasi deyiladi?
12. Noma'lumlar soni tenglamalar soniga teng bo'lgan sistema yagona yechimga ega bo'lishi uchun qanday shart bajarilishi kerak?
13. Kramer formulalarini bilasizmi?
14. Sistemani Gauss usulida yechish qanday tashkil qilinadi?
15. Sistemani Gauss-Jordan usulida yechish jarayoni qanday tashkil qilinadi?
16. Sistema qachon birgalikda deyiladi?
17. Matritsaning mahsuldorligi qanday aniqlanadi?
18. Leontyev modeli nimani anglatadi?
19. Umumjahon savdo modelining yechimi qanday ma'noni anglatadi?

Mashqlar

1.1. $A=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \\ 5 & 0 & 7 \end{pmatrix}$ bo'lsa, $2A-BA$ matritsani toping.

1.2. Matritsa berilgan: $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$. A^2 matritsalarni hisoblang.

1.3. Determinantlarni hisoblang.

$$1)\ \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}, \qquad 2)\ \begin{vmatrix} 4 & 1 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{vmatrix}$$

1.4. Quyidagi matritsalar uchun teskari matritsalarni toping.

$$1)\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad 2)\ \begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 6 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & -3 \end{pmatrix}$$

1.5. Chiziqli tenglamalar sistemasini Kramer, Gauss, Gauss-Jordan va teskari matritsani topish usullaridan foydalanib yeching.

$$1)\begin{cases} x-3y+3z=7 \\ x+2y-z=-2 \\ 3x+2y+4z=5 \end{cases}, \quad 2)\begin{cases} 2x-4y+2z=0 \\ 3x-2y+z=10 \\ x-5y+3z=-3 \end{cases}$$

1.6. Quyidagi matritsalarning rangini toping.

$$1)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 11 \end{pmatrix} \qquad 2)\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

1.7. Quyidagi tenglamalar sistemasini tekshiring.

$$1)\begin{cases} x_1+3x_2+5x_3+7x_4+9x_5=1 \\ x_1-2x_2+3x_3-4x_4+5x_5=2 \\ 2x_1+11x_2+12x_3+25x_4+22x_5=4 \end{cases} \qquad 2)\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3=14 \\ 3x_1+2x_2+x_3=10 \\ x_1+x_2+x_3=6 \\ 2x_1+3x_2-x_3=5 \\ x_1+x_2 \qquad =3 \end{cases}$$

1.8. c ning qanday qiymatida

$$\begin{cases} x+y+z=2 \\ 2x+y+2z=5 \\ 4x+3y+4z=c \end{cases},$$

sistema birgalikda bo'ladi?

1.9. Kompaniyada uch turdagi samolyot bo'lib ular uch turdagi yuklarni tashiydi. Har bir turdagi samolyotning yuk tashish xarakteristikalari jadvalda berilgan.

	Samolyot turi		
Yuk birligi	A	B	C
I tur	100	100	100
II tur	150	20	350
III tur	20	65	35

Joiz kunda kompaniya I tur yukdan 1100 birlik, II tur yukdan 1200 birlik va III tur yukdan esa, 460 birlik jo'natishi lozim bo'lsa, har bir turdagi samolyotdan yuk tashish uchun qanchadan jalb qilish kerak?

1.10. $\bar{a}=(1;1;0)$, $\bar{b}=(1,-1,1)$; $\bar{c}=(-3;5;-6)$ vektorlar $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$ bazisda berilgan. $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$ bazisda berilgan $\bar{d}=(4;-4;5)$ vektorni $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ bazisda ifodalang.

1.11. Leontyev balans modelidagi texnologik matritsa va yakuniy mahsulot vektori berilgan. A matritsaning mahsuldorligini aniqlang. Yalpi mahsulotni toping.

$$A=\begin{pmatrix} 0,125 & 0,125 \\ 1,125 & 0,125 \end{pmatrix}; \quad Y=\begin{pmatrix} 300 \\ 400 \end{pmatrix}.$$

1.12. Iqsodiyot tarmoqlari orasidagi ko'rsatkichlar ma'lum davr mobaynida jadvalda keltirilgan. Agar tarmoq mahsulotlariga bo'lgan talab miqdori $Y^T=(600,1000,600)$ ga o'zgarsa, yalpi mahsulotning o'zgarishini aniqlang.

Ishlab chiqarish tarmoqlari	Iste'molchi tarmoqlari			Talab miqdori	Yalpi mahsulot
	Qishloq xo'jaligi	Sanoat	Mehnat resurslari		
Qishloq xo'jaligi	500	300	1300	700	2800
Sanoat	1500	800	700	1000	4000
Mehnat resurslari	900	4800	700	600	7000

II bob. CHIZIQLI DASTURLASH

Chiziqli dasturlash tushunchasini L.V. Kantorovich tomonidan 1939-yilda chop etilgan "Ishlab chiqarishni tashkil qilish va rejalashtirish" risolasi bilan bog'lasa bo'ladi.

L.V. Kantorovich tomonidan ilgari surilgan g'oya o'z vaqtida inobatga olinmadi. Urushdan so'ng chiziqli dasturlash masalasi amerikalik olim T.Kupmans tomonidan qayta ochildi. A.Dansing tomonidan 1947-yilda chiziqli dasturlash masalalarini yechishning effektiv usuli (simpleks usul) ishlab chiqildi.

1950-yillardan keyin elektron hisoblash mashinalarining dunyoga kelishi chiziqli dasturlashning tez sur'atlar bilan o'sishiga za'min yaratdi. 1975-yilda L.V. Kantorovich va T.Kupmans Nobel mukofoti laureatlari bo'ldi.

Ko'p argumentli chiziqli funksiya argumentlarining chiziqli chegaralar ostidagi ekstremumini (maksimum yoki minimumni) topishga *chiziqli dasturlash* deyiladi.

Misol. Quyidagi ikki argumentli chiziqli funksiyaning

$$f(x_1, x_2) = 2x_1 + 5x_2$$

chiziqli tengsizliklarni qanoatlantiruvchi

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \le 127 \\ 7x_1 - x_2 \le 83 \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$$

maksimal qiymatini toping.

Keltirilgan misol chiziqli dasturlash masalasidir.

$f(x_1, x_2) = 2x_1 + 5x_2$ funksiya *maqsad funksiyasi* deyiladi. $x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0$ tengsizliklar *nomanfiylik shartlari* deyiladi. Chiziqli tengsizliklar sistemasi esa *chiziqli dasturlash shartlari* deyiladi.

Chiziqli dasturlash masalasi ko'plab iqtisodiy masalalarning matematik modelidan iborat.

2.1. Iqtisodiy masalalarning matematik modelini tuzish

Iqtisodiy masalalarning chiziqli dasturlash ko'rinishida ifodalashning asosi masala parametrlarini to'g'ri tanlash va ular vositasida maqsadni chiziqli funksiya orqali, chegaralarni esa chiziqli tengsizlik va tengliklar orqali ifodalashdan iborat.

2.1.1. Korxonada mahsulot ishlab chiqarishni rejalashtirish

Korxonada ikki turdagi stul ishlab chiqariladi. Bu mahsulotlarni ishlab chiqarishda uch xil xomashyodan foydalaniladi. Birlik mahsulotni ishlab chiqarish uchun sarflanadigan xomashyo miqdori va har bir mahsulotni sotishdan keladigan foyda hamda zaxiradagi xomashyo miqdori 2.1-jadvalda keltirilgan.

2.1-jadval

	1-tur stul	2-tur stul	Zaxiradagi xomashyo miqdori
1-xomashyo	4	6	24
2-xomashyo	3	2	12
3-xomashyo	1	1	8
foyda	4	5	

Ishlab chiqarishni shunday rejalashtirish kerakki, korxonaning oladigan foydasi maksimal bo'lsin. Demak, asosiy maqsad maksimal foyda olish. Ishlab chiqarishni rejalashtirish jarayonining parametrlarini aniqlaymiz. x_1 o'zgaruvchi orqali 1-tur stullarni ishlab chiqarish sonini, x_2 orqali esa 2-tur stullarni ishlab chiqarish sonini belgilaymiz. Agar x_1 dona 1-turdagi stullar sotilsa, korxonaning 1-turdagi stullarni sotishdan keladigan foydasi $4x_1$ ga teng bo'ladi. x_2 dona 2-tur stullarni sotishdan keladigan foyda esa $5x_2$ ga teng bo'ladi. Korxonaning umumiy foydasi $4x_1+5x_2$ ga teng. Demak, masalaning maqsad funksiyasi $f(x_1,x_2)=4x_1+5x_2$. Korxonaning maqsadi foydani maksimallashdan iborat. Bu holat quyidagicha yoziladi.

$$4x_1+5x_2 \to \max$$

Endi fikrimizni chegaralarni qurishga qarataylik. Ko'rilayotgan masalada barcha chegaralarning strukturasi bir xil:

Ishlab chiqarishga sarf qilingan xomashyo	$\leq$	Zaxiradagi xomashyo

Endi ishlab chiqarishga sarf qilingan xomashyo miqdorlarini x_1 va x_2 orqali ifodalaymiz. Birinchi tur stulni ishlab chiqarish uchun 1-xomashyoning $4x_1$ qismi ketadi. Ikkinchi tur stulni ishlab chiqarishga esa 1-xomashyoning $6x_2$ qismi ketadi. Demak, ishlab chiqarishga ketadigan 1-xomashyoning umumiy miqdori $4x_1+6x_2$ ga teng bo'ladi (jadvalning birinchi satriga qarang). Zaxiradagi 1-xomashyo miqdori 24 ga teng bo'lgani uchun biz quyidagi tengsizlikka kelamiz:

$$4x_1+6x_2\leq 24$$

Xuddi shuningdek, qolgan xomashyolar uchun ham quyidagi tengsizliklarga erishamiz:

$$3x_1+2x_2\leq 12$$
$$x_1+x_2\leq 8$$

Olingan chegaralarni bir joyga jamlasak, tengsizliklar sistemasini hosil qilamiz.

$$\begin{cases}4x_1+6x_2\leq 24\\ 3x_1+2x_2\leq 12\\ x_1+x_2\leq 8\end{cases}$$

Ishlab chiqariladigan mahsulotlar manfiy bo'lmasligidan x_1 va x_2 o'zgaruvchilarga nomanfiylik shartlarini yozamiz.

$$x_1\geq 0,\ x_2\geq 0.$$

Shunday qilib, masalaning matematik modelini quyidagicha yozish mumkin:

$$4x_1+5x_2\to\max$$
$$\begin{cases}4x_1+6x_2\leq 24\\ 3x_1+2x_2\leq 12\\ x_1+x_2\leq 8\end{cases}$$
$$x_1\geq 0,\ x_2\geq 0$$

Ishlab chiqarish sharoiti yoki mahsulotlarning realizatsiya qilish jarayoni o'zgarganda modelga o'zgartirishlar kiritiladi. Masalan, mahsulotlarni realizatsiya qilish sharti o'zgarganda maqsad funksiyasining koeffitsiyentlari o'zgaradi. Zaxiradagi xomashyo miqdorlari o'zgarganda chegaraning o'ng qismlari o'zgaradi. Ishlab chiqarish sharoiti o'zgargan taqdirda esa yangi tengsizlik yoki tenglama kiritilishi mumkin.

2.1.2. Optimal aralashmani tanlash

Hayvonlarni oziqlantirishda ularning normal o'sishi uchun 2 xil modda kerak bo'ladi. Bu moddalar ikki xil ozuqa tarkibiga kiradi. 2.2-jadvalda ikki xil ozuqa tarkibidagi moddalar miqdori va birlik ozuqalarning narxlari hamda hayvonlarning rivojlanishi uchun kerak bo'ladigan moddalar miqdori keltirilgan.

2.2-jadval

	1-tur ozuqa	2-tur ozuqa	aralashmadagi modda miqdori
1-modda	2	1	12
2-modda	6	4	30
Ozuqa narxi	5	2	

Ozuqalardan qanday aralashma tayyorlanganda, hayvonlar uchun zarur bo'lgan modda miqdorlari kafolatlanib, minimal narxdagi aralashmaga erishish mumkin?

x_1 o'zgaruvchi orqali aralashmadagi 1-tur ozuqaning miqdorini, x_2 orqali esa 2-tur ozuqaning miqdorini belgilaymiz. Kunlik aralashma narxi $5x_1+2x_2$ ga teng. Bizning maqsad aralashma narxini minimallashdan iborat.

$$5x_1 + 2x_2 \to \min$$

Chegaralarning strukturasi quyidagicha bo'ladi:

$$\boxed{\text{Aralashmadagi modda miqdori}} \geq \boxed{\text{Minimal modda miqdori}}$$

Belgilashlarga ko'ra jadvaldan quyidagi tengsizliklarni keltirib chiqarish mumkin.

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \geq 12 \\ 6x_1 + 2x_2 \geq 30 \end{cases}$$

Keltirilgan tengsizliklarga x_1 va x_2 o'zgaruvchilarning nomanfiylik shartlari ham qo'shiladi. Shunday qilib, masalaning matematik modeli quyidagicha bo'ladi:

$$5x_1 + 2x_2 \to \min$$
$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \geq 12 \\ 6x_1 + 2x_2 \geq 30 \end{cases}$$
$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0$$

Keltirilgan masalalarda chegaralar tengsizlik ko'rinishiga ega. Chegaralarda tenglik ishlatiladigan hollar ham bo'lishi mumkin. Masalan, agar birinchi masalada 1-xomashyoni to'la sarf qilish talab qilinsa, birinchi tengsizlik o'rniga $4x_1 + 6x_2 = 24$ tenglik ishlatiladi.

2.2. Chiziqli dasturlash masalasining umumiy shakllari

Bu mavzuda chiziqli dasturlash masalalarining umumiy shakli bayon qilinib, unda chiziqli dasturlashning har qanday masalasining umumiy qolipga tushirilishi keltiriladi. Chiziqli dasturlash masalalarining standart va kanonik ko'rinishlarini bayon qilamiz.

2.2.1. Chiziqli dasturlash masalasining umumiy ko'rinishi

Chiziqli dasturlash masalasi umumiy ko'rinishda quyidagicha ifodalanadi. Chiziqli maqsad funksiyasiga

$$f(x_1, x_2, ..., x_n) = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n$$

maksimum (minimum) qiymat beradigan

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + ... + a_{in} \leq b_i, \qquad i = 1,2,...,k$$
$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + ... + a_{in} \geq b_i, \qquad i = k+1,...,l$$
$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + ... + a_{in} \geq= b_i \qquad i = l+1,...,m$$

shartlarni qanoatlantiruvchi $x_1, x_2, ..., x_n$ o'zgaruvchilarni topishdan iborat. Ko'pincha chegaralar ichida barcha o'zgaruvchilarning yoki ularning ma'lum bir qismlarining nomanfiylik shartlari keltiriladi.

$$x_i \geq 0,\ i = 1,2,...,s.\ (s \leq m)$$

Bu shartlar yuqorida keltirilgan tengsizliklarning xususiy holida kelib chiqadi, lekin amaliyotda ular alohida guruhga ajratiladi. Bu yerda a_{ij}, b_j, c_j berilgan sonlar.

2.2.2. Chiziqli dasturlash masalasining shakl ko'rinishlari

Chiziqli dasturlash masalasining *standart* ko'rinishi quyidagicha bo'ladi:
Maqsad funksiyasini

$$z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \min(\max)$$

Chegaralar:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i, \quad i = \overline{1,m},$$

Chiziqli dasturlash masalasining *kanonik* ko'rinishi:

$$z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \min(\max)$$

Chegaralar:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, \quad i = \overline{1.m}.$$

$$x_j \ge 0, \; j = \overline{1,n}.$$

Masalaning standart shaklda yozilishining qiziq tomoni shundaki, juda ko'p amaliy masalalar standart ko'rinishda yoziladi. Chiziqli dasturlash masalasining kanonik ko'rinishda yozilishining afzalligi shundaki, masalani yechishning asosiy usullari shu shakl uchun ishlab chiqilgan.

Keltirilgan chiziqli dasturlash shakllari shu ma'noda ekvivalentki, oddiy almashtirish yordamida biridan ikkinchisiga o'tish mumkin.

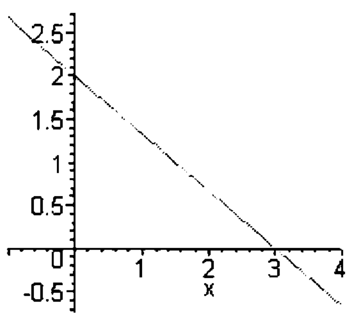
2.3. Chiziqli dasturlash masalasini grafik usulda yechish

Bu mavzuda chiziqli dasturlash masalalarining sodda hollarini grafik usulda yechish imkoni borligi keltiriladi. Masalaning matematik modelidagi o'zgaruvchilar ikkiga teng bo'lganda optimal *yechim topish imkoniyati bor. Bundan tashqari, bunday hollarda olingan yechimni tahlil qilish jarayonida qulayliklar paydo bo'ladi.*

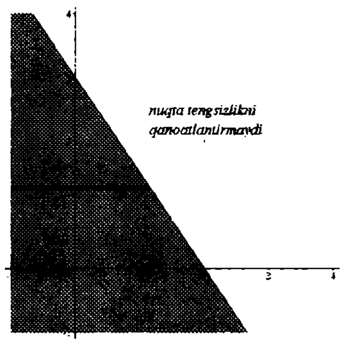
Chiziqli dasturlash masalasi ikki o'zgaruvchidan iborat bo'l-gan holda grafik usulda yechish qulay. Chiziqli dasturlash lasini grafik usulda yechish ikki bosqichdan iborat:

- tekislikda chiziqli tengsizliklarni qanoatlantiruvchi to'plamni aniqlash;
- to'plamda maqsad funksiyasiga ekstremal qiymat beradigan nuqtani topish.

Ikki o'zgaruvchili chiziqli tengsizlik koordinatalar tekisligi (x_1, x_2)da muayyan yarimtekislikni ifodalaydi. Tengsizliklar sistemasi esa shu yarimtekisliklarning umumiy kesishmasidan iborat bo'ladi. Bu kesishma **joiz soha** deyiladi. Joiz soha doimo **qavariq** sohadan iborat bo'ladi. Ya'ni sohaga tegishli ikki nuqta olinganda ularni tutashtirivchi kesmaning barcha nuqtalari ham shu sohaga te-gishli bo'ladi. Joiz soha qavariq ko'pburchak, chegaralanmagan qavariq ko'pburchak, kesma, nur yoki yagona nuqtalardan iborat bo'lishi mumkin. Tengsizliklar sistemasi birgalikda bo'lmagan taqdirda joiz soha bo'sh to'plamdan iborat bo'ladi.



2.1-rasm



2.2-rasm

$ax_1 + bx_2 = c$ tenglamani qanoatlantiruvchi to'plam tekislikda to'g'ri chiziqdan iborat (2.1-rasmga qarang). $ax_1 + bx_2 \leq c$ teng-sizlikni qanoatlantiruvchi to'plam esa shu to'g'ri chiziqning bir tomonida yotuvchi yarimtekislikdan iborat.

Tengsizlikka qarab yarimtekislikni tanlashni ko'ramiz. Te-kislikda to'g'ri chiziqda yotmagan ixtiyoriy nuqta olinadi. Olingan nuqta koordinatalari tengsizlikka qo'yiladi. Bunda ikki hol bo'lishi mumkin. Olingan nuqta tengsizlikni qanoatlantirsa, nuqta tomondagi yarimtekislik tanlanadi. Agar tengsizlik qanoatlantirilmasa, nuqta joylashmagan yarimtekislik tanlanadi (2.2-rasmga qarang). Chiziqli tengsizliklar sistemasini qanoatlantiruvchi soha barcha yarimtekisliklarning umumiy qismidan iborat bo'ladi.

$c_1x_1+c_2x_2=c$ to'g'ri chiziqning normal vektori $\boldsymbol{n}=(c_1,c_2)$ ga teng bo'lib, u to'g'ri chiziqqa perpendikular bo'ladi. $c_1x_1+c_2x_2=c$ to'g'ri chiziqni o'ziga parallel holda $\boldsymbol{n}$ bo'yicha siljitganimizda c ning qiymati o'sib bo'radi; $\boldsymbol{n}$ vektorga teskari yo'nalishda esa c ning qiymati kamayib boradi.

$\boldsymbol{n}$ vektor $f=c_1x_1-c_2x_2$ maqsad funksiyasining sath sirtiga perpendikulardir. $\boldsymbol{n}$ vektorning yo'nalishi maqsad funksiyasining o'sish yo'nalishi bilan mos keladi. Maqsad funksiyasining kamayishining yo'nalishi esa $\boldsymbol{n}$ vektor yo'nalishiga teskari boladi.

Masalaning grafik usulda yechishdagi asosiy g'oya quyidagichadir. $\boldsymbol{n}$ vektor yo'nalishida joiz sohadagi optimal nuqta $X^*=(x_1^*;x_2^*)$ izlanadi. Optimal nuqta shunday nuqtaki, bu nuqta orqali o'tgan maqsad funksiyasining qiymati maksimal (minimal) bo'ladi. Optimal yechim joiz sohaning chegarasida joylashgan bo'ladi.

Chiziqli dasturlash masalasining optimal yechimini topish jarayonida quyidagi holatlar ro'y berishi mumkin: Masalaning yagona yechimi mavjud; masala cheksiz ko'p yechimga ega; maqsad funksiyasi joiz sohada chegaralangan emas; joiz soha yagona nuqtadan iborat; masalaning yechimi mavjud emas.

Masalani grafik usulda yechish quyidagi bosqichlarda amalga oshiriladi.

1. Masala shartidagi tengsizliklarni tengliklar bilan almashtirib, unga mos kelgan to'g'ri chiziqlarni chizish.

2. Har bir tengsizlikka mos kelgan yarimtekisliklarni belgilab chiqish. $x_1\geq 0, x_2\geq 0$ shartlarga ko'ra, joiz soha 1-chorakda joylashadi.

3. Barcha tengsizliklarni qanoatlantiruvchi joiz sohani aniqlash. Agar bunday soha mavjud bo'lmasa, masalaning yechimi mavjud emas.

4. Agar joiz soha bo'sh bo'lmasa, maqsad funksiyasini qurish. Buning uchun maqsad funksiyasining biror sath chizig'ini $c_1x_1+c_2x_2=c$ olamiz. Bu yerda c ixtiyoriy son, masalan, c_1 va c_2 sonlarga karrali qilib olish qulay.

5. $\boldsymbol{n}=(c_1,c_2)$ vektorni qurish: buning uchun (0;0) nuqtadan boshlanib, (c_1,c_2) nuqtada tugallanadigan vektor chizish. Agar maqsad funksiyasi va $\boldsymbol{n}=(c_1,c_2)$ vektor to'g'ri tanlangan bo'lsa, ular o'zaro perpendikular bo'ladi.

6. Maqsad funksiyasining maksimal qiymatini topish uchun maqsad funksiyasini ifodalovchi to'g'ri chiziqni $\boldsymbol{n}=(c_1,c_2)$ vektor yo'nalishida siljitib borish kerak. Maqsad funksiyasining minimal qiymatini topish uchun esa chiziqni $\boldsymbol{n}=(c_1,c_2)$ vektor yo'nalishida teskari tomonga siljitib borish kerak. Siljitish jarayonida joiz sohaning oxirgi nuqtasini tark etuvchi nuqta maksimal yoki minimal nuqta bo'ladi. Agar bunday nuqta mavjud bo'lmasa, joiz sohaning chegaralanmaganligi to'g'risida xulosa qilamiz.

7. Maqsad funksiyasining maksimal (minimal) nuqtasini aniqlash bu nuqtadagi maqsad funksiyasining qiymatini topishdan iborat. Optimal nuqtaning koordinatalarini topish uchun nuqta qaysi to'g'ri chiziqlarga tegishliligini aniqlab, tenglamalar sistemasini birgalikda yechish yetarlidir.

Quyidagi masalani grafik usulda yechishga to'xtalib o'tamiz.

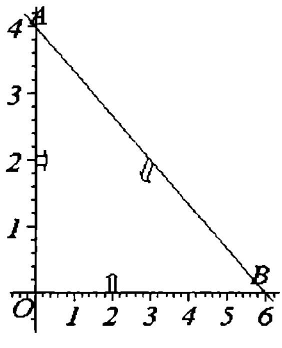
$$4x_1+5x_2\to\max$$

$$\begin{cases}4x_1+6x_2\le 24 & (2.1)\\ 3x_1+2x_2\le 12 & (2.2)\\ x_1+x_2\le 8 & (2.3)\end{cases}$$

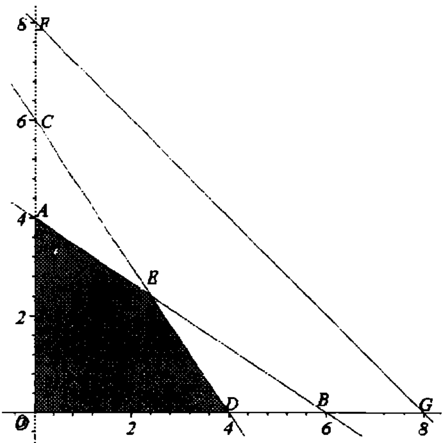
$$x_1\ge 0,\ x_2\ge 0$$

Avvalo joiz sohani topamiz. $4x_1+6x_2\le 24$ tengsizlikni tenglik bilan almashtiramiz. $4x_1+6x_2=24$ va uning grafigini chizamiz. To'g'ri chiziqning grafigini chizishda uning koordinata o'qlari bilan kesishadigan nuqtalarini topish qulaylik tug'diradi. $x_1=0$ bo'lganda $x_2=4$ kelib chiqadi. $x_2=0$ bo'lganda $x_1=6$ bo'ladi.

Dekart koordinatalar sistemasida (0;4) va (6;0) nuqtalar orqali to'g'ri chiziq o'tkazib, $4x_1+6x_2=24$ ning grafigini hosil qilamiz. Bu to'g'ri chiziq tekislikni ikki qismga ajratadi. Tengsizlikni qanoatlantiruvchi yarimtekislikni aniqlash uchun tekislikda joylashgan to'g'ri chiziqda yotmagan ixtiyoriy nuqta, masalan, koordinatalar boshi $(0;0)$ ni olamiz. Bu koordinatalarni tengsizlikka qo'yamiz: $4\cdot 0+6\cdot 0\leq 24$, ya'ni $0\leq 24$ kelib chiqadi. Demak, yarimtekislikning koordinatalar boshini o'z ichiga olgan yarimtekislikni tanlaymiz. Shunday qilib, birinchi chorakda joylashgan va (2.1) tengsizlikni qanoatlantiruvchi soha OAB uchburchakdan iborat (2.3-rasm).



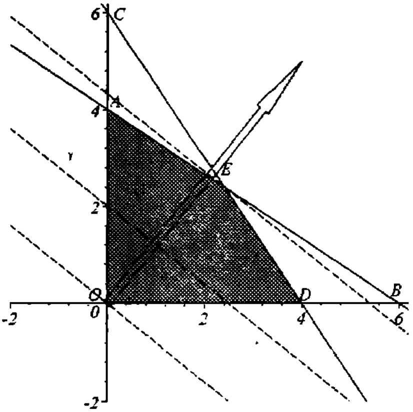
2.3-rasm



2.4-rasm

2-tengsizlik: $3x_1+2x_2\leq 12 \Rightarrow 3x_1+2x_2=12$. Bu to'g'ri chiziq koordinata o'qlarini $(0;6)$ va $(4;0)$ nuqtalarda kesib o'tadi. $(0;0)$ nuqtani tengsizlikka qo'ysak, $0\leq 12$ tengsizlikni qanoatlantirishini ko'ramiz. Demak, yarimtekislikning koordinata boshini o'z ichiga olgan qismini tanlaymiz. Yuqorida keltirilgan soha bilan umumiy qismini olsak, *OAED* to'rtburchakdan iborat bo'lgan joiz sohaga ega bo'lamiz (2.4-rasm).

3-tengsizlik: $x_1+x_2\leq 8 \Rightarrow x_1+x_2=8$ Bu to'g'ri chiziq koordinata o'qlarini $(0;8)$ va $(8;0)$ nuqtalarda kesib o'tadi. $(0;0)$ nuqtani tengsizlikka qo'ysak, $0\leq 8$ tengsizlikni qanoatlantirishini ko'ramiz. Oldingi joiz soha butunlay bu yarimtekislikda joylashganligi uchun (2.3) tengsizlikni olib tashlash joiz sohaga ta'sir qilmaydi.



2.5-rasm

Shunday qilib, joiz soha *OAED* to'rtburchakdan iborat bo'ladi.

Endi joiz sohada maqsad funksiyasi

$$f(x_1, x_2) = 4x_1 + 5x_2$$

ga maksimal qiymatga erishadigan nuqtani topishga o'tamiz. Buning uchun avval normal vektor $\boldsymbol{n}=(4,5)$ ni quramiz. Agar maqsad funksiyasiga aniq qiymat bersak, $4x_1 + 5x_2 = c$ bu to'g'ri chiziq $\boldsymbol{n}$ vektorga perpendikular bo'ladi (c ga qanday qiymat berilishidan qat'iy nazar). To'g'ri chiziqni $\boldsymbol{n}$ vektor yo'nalishida (maksimallashtirish masalasi) o'ziga parallel ravishda siljitib boramiz. To'g'ri chizig'imiz joiz sohaning oxirgi tark etadigan nuqtasi maqsad funksiyasiga maksimal qiymat beradigan nuqta bo'ladi (2.5-rasm) (E nuqta). E nuqtaning koordinatasini topish uchun AB va CD to'g'ri chiziqlar tenglamalarini birgalikda yechamiz:

$$\begin{cases} 4x_1 + 6x_2 = 24 \\ 3x_1 + 2x_2 = 12 \end{cases} \Rightarrow x^* = \left(\tfrac{12}{5}; \tfrac{12}{5}\right) f(x^*) = \tfrac{108}{5}$$

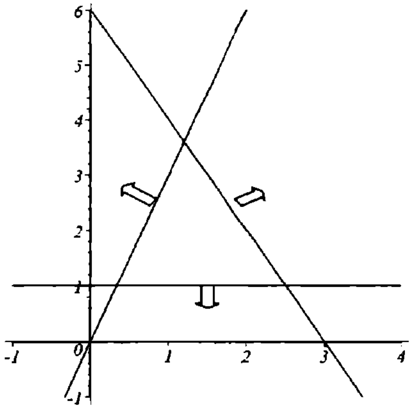
Endi masalaning maxsus hollariga to'xtalib o'tamiz.

Chiziqli dasturlash masalasining yechimi mavjud bo'lmagan hol.

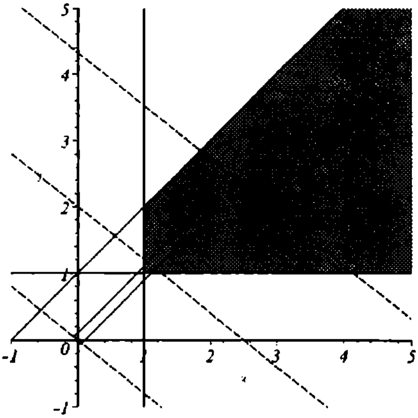
1. Joiz soha bo'sh to'plamdan iborat. Bu holda barcha tengsizliklarni qanoatlantiruvchi soha mavjud bo'lmaydi (2.6-rasm).
2. Joiz soha chegaralanmagan (2.7-rasm).

Chiziqli dasturlash masalasining yechimi mavjud bo'lgan hollar.

1. Joiz soha yagona nuqtadan iborat. Bu nuqta optimal yechim bo'ladi.
2. Optimal yechim yagona. Maqsad funksiyasini sath chizig'i joiz sohani yagona nuqtada tark etadi (2.8-rasm).



2.6-rasm



2.7-rasm

3. Optimal yechim cheksiz ko‘p (2.9-rasmda KL chizig‘ining barcha nuqtalari yechim bo‘ladi).

Ba’zi hollarda o‘zgaruvchilar soni ikkidan yuqori bo‘lganda ham grafik usulda yechish imkoniyati paydo bo‘ladi. Fikrimizni quyidagi misolda bayon qilamiz.

$$f = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \to \max$$

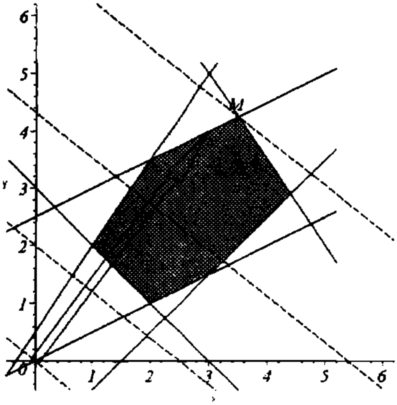
$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 + 5x_3 = 12 \\ 5x_1 - x_2 - 2x_4 = 8 \\ 7x_1 + 10x_2 + 7x_5 = 70 \end{cases} \qquad (*)$$

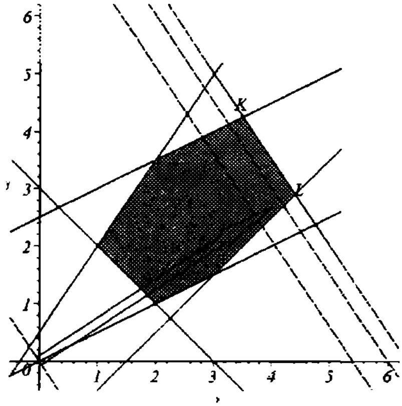
$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0,\ x_4 \geq 0,\ x_5 \geq 0$$

Tengliklardagi x_3, x_4, x_5 tashlab yuborish hisobiga tengsizliklar hosil qilamiz. Tengliklardan x_3, x_4, x_5 o‘zgaruvchilarni x_1, x_2 o‘zgaruvchilar orqali ifodalab, maqsad funksiyasini ham ikki o‘zgaruvchili funksiyaga keltiramiz. Natijada masala quyidagicha ko‘rinish oladi.

$$f = x_1 + x_2 + \tfrac{1}{5}(12 - 2x_1 - 4x_2) - \tfrac{1}{2}(8 - 5x_1 + x_2) + \tfrac{1}{7}(70 - 7x_1 - 10x_2) \to \max$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 \leq 12 \\ 5x_1 - x_2 \geq 8 \\ 7x_1 + 10x_2 \leq 70 \end{cases}$$





2.8-rasm. Yechim yagona (M nuqta)

2.9-rasm. Yechim cheksiz ko'p. KL kesmaning barcha nuqtalari

Bu masalani grafik usulda yechib, x_1, x_2 o'zgaruvchilar aniqlangandan so'ng, (*) tengliklardan x_3, x_4, x_5 o'zgaruvchilar topiladi.

2.4. Turg'unlik tahlili

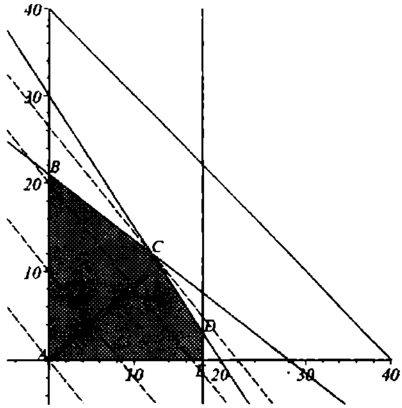
Grafik usulda olingan natijani turg'unlik tahlilida olingan optimal yechimga maqsad funksiyasining koeffitsiyentlarining o'zgarishi (narx-navoning optimal yechimga ta'siri) chegaralarning o'ng tomon tahlili (masalan, ishlab chiqarish jarayonida zaxiradagi xomashyo miqdorlarining ozgarishining optimal yechimga ta'siri) o'rganiladi. Bu tahlil bizga optimal ishlab chiqarish rejasini qachongacha saqlash mumkinligini va resurslarning kamyob yoki kamyob bo'lmaganini aniqlashga yordam beradi. Bundan tashqari, kamyob resurslarning qaysilari samaraliroq ekanligini aniqlashga ham ko'maklashadi.

Turg'unlik tahliliga oid fikrlarni masala orqali ko'rib chiqamiz.

Kichik bir sexning kunlik ichlab chiqarish rejasini ko'raylik. Sex bichuvchilari yangi ayollarning shim va ko'ylaklarini ishlab chiqarishni taklif qilishdi. Sex imkoniyatlari va mahsulotlardan keladigan foyda jadvalda berilgan.

Ishlab chiqarish resurslari	Birlik mahsulotni ishlab chiqarishdagi resurslar miqdori		Maksimal resurs
	shim	ko'ylak	
Material, m	1,5	2	42
Mehnat hajmi, ishchi soat	3	2	60
Qo'shimcha xarajatlar	5	5	200
Mahsulotlarning sotilish narxi, $	60	50	

Kunda qancha shim va qancha ko'ylak ishlab chiqarilganda tushum eng yuqori bo'ladigan holatni aniqlash zarur. Bu mahsulotlarga bo'ladigan talab shuni ko'rsatdiki, shimlarga bo'lgan kunlik talab 18 dan oshmaydi.



2.10-rasm

Masalaning matematik modelini quramiz. x_1 orqali shimlarni ishlab chiqarish kunlik hajmini, x_2 orqali esa ko'ylaklar sonini belgilaylik. Bizning maqsad daromadni maksimallashtirishdan iborat. Buning matematik ifodasi esa $60x_1 + 50x_2 \to \max$ bo'ladi. Har bir resursning chegaralarini va mahsulotlarga bo'lgan talabdan kelib chiqqan holda masalaning matematik ifodasini quyidagicha yozish mumkin:

$$z = 60x_1 + 50x_2 \to max$$

$$1{,}5x_1 + 2x_2 \leq 42 \qquad (2.4)$$

$$3x_1 + 2x_2 \leq 60, \qquad (2.5)$$

$$5x_1 + 5x_2 \leq 200, \qquad (2.6)$$

$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0 \qquad (2.7)$$

Masalani grafik usulda yechamiz (2.10-rasm). Joiz soha ABCDE ko'pburchakdan iborat. Rasmdan ko'rinib turibdiki, maksimal daromad C nuqtada, ya'ni (2.4) va (2.5) lardan hosil bo'lgan chiziqlarning kesishish nuqtasidan iborat bo'ladi. C nuqtaning koordinatalarini quyidagi sistemani yechib topamiz:

$$\begin{cases} 1{,}5x_1 + 2x_2 = 42. \\ 3x_1 + 2x_2 = 60. \end{cases}$$

Bu sistema yechimlari: $x_1 = 12,\ x_2 = 12$ bo'ladi. Demak, kuniga sexda 12 ta shim va 12 ta ko'ylak ishlab chiqarilganda daromad maksimal bo'ladi. Bu qiymatlarni maqsad funksiyasiga qo'yib, maksimal daromadni topamiz.

$$z(12{,}12) = 60 \cdot 12 + 50 \cdot 12 = 1320\$$$

Endi, turg'unlik tahlili bilan shug'ullanamiz. Turg'unlik tahlilida masala parametrlarining o'zgarishi optimal yechimga qanday ta'sir qilishi o'rganiladi. Masalan, sexning ishlab chiqarish mahsulotlarini rejalashtirish masalasida talabning o'zgarishi yoki resurslarning o'zgarishi optimal yechimga qanday ta'sir qilishi o'rganiladi. Bundan tashqari, mahsulotlarga bo'lgan bozor narxlarining o'zgarishi optimal yechimga qanday ta'sir qilishini aniqlash ham maqsadga muvofiq.

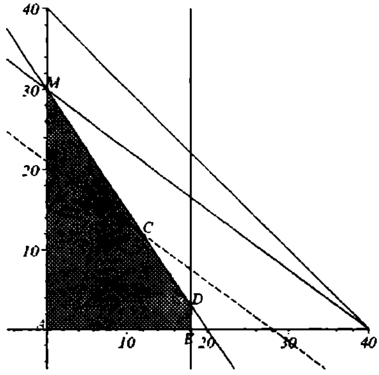
Turg'unlik tahlili masalaga ma'lum bir ma'noda dinamik tus beradi. Olingan optimal yechimga masala parametrlari o'zgarishining ta'siri aniqlanadi.

2.4.1. Shartlarning o'ng tomonining turg'unligi

Optimal yechim topilgandan so'ng, ishlab chiqarish omillarining o'zgarishi optimal yechimga qanday ta'sir qilishni o'rganish zaruriyati tug'iladi. Bu yerda quyidagi savollarni tahlil qilish ahamiyatlidir:

1. Maqsad funksiyasining optimal qiymatini yaxshilash uchun biror resursning miqdorini qanchagacha oshirish mumkin?
2. Topilgan maqsad funksiyasining optimal qiymatini saqlab qolgan holda biror resurs miqdorini qanchagacha kamaytirish mumkin?

Bu savollarga javob berishdan avval ba'zi tushunchalarni kiritamiz. Optimal nuqtani hosil qilishda qatnashgan shartlarni ifodalovchi resurslar *kamyob resurslar* deyiladi. Bunday resurslar ishlab chiqarishda to'liq sarf bo'ladi. Optimal yechimni hosil qilishda qatnashmagan, lekin joiz sohada joylashgan shartlarni ifodalovchi resurslar esa, kamyob bo'lmagan resurslar turkumiga kiradi. Joiz sohani tashkil qilishda qatnashmagan shartlarga mos keluvchi resurslar esa ortiqcha resurslarni tashkil qiladi. Bu tushunchalarni kiritgandan so'ng yuqorida bayon qilingan savollarni quyidagi tarzda qayta keltirish mumkin.

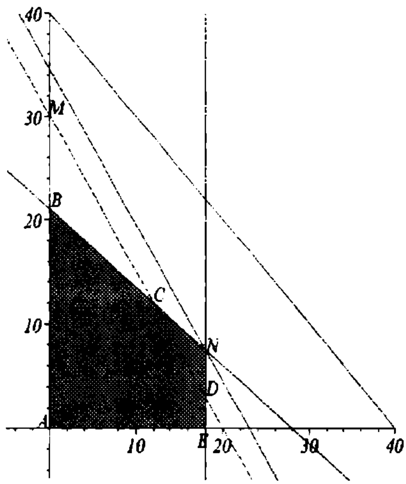


2.11-rasm

1. Optimal yechimni yaxshilash uchun kamyob resurslar miqdorini qanchagacha oshirish mumkin?
2. Optimal yechimni o'zgarishsiz qoldirish uchun kamyob bo'lmagan resurs miqdorini qanchagacha kamaytirish mumkin?

O'ng tomon turg'unlik tahlilini yuqorida keltirilgan masala uchun ko'rib chiqamiz. (2.4) va (2.5) shartlarni ifodalovchi shartlar, ya'ni material hajmi va mehnat resurslari kamyob resurs hisoblanadi.

Kamyob bo'lgan material miqdorini o'sishi grafikda (2.4) shartga mos keluvchi BC chiziqni o'ziga parallel holda M nuqtagacha oshirishdan iborat. BC to'g'ri chiziqni o'ziga parallel holda M dan yuqoriga siljitish maqsadga muvofiq emas. Aks holda, resurs ortiqcha bo'lib qoladi (shartni ifodalovchi



2.12-rasm

to‘g‘ri chiziq joiz sohadan chiqib ketadi va optimal yechimga ta’sir qilmaydi). Natijada joiz sohaga BMC uchburchak qo‘shiladi va optimal yechim M nuqtadan iborat bo‘ladi (2.11-rasm). Material miqdorining o‘sishini quyidagicha aniqlaymiz. M nuqtaning koordinatasini aniqlaymiz M(0.30). Bu qiymatni (2.4) shartning chap tomoniga qo‘yib, material miqdorini maksimal qanchaga ko‘paytirish mumkinligini topamiz: $1{,}5\cdot 0+2\cdot 30=60m$. Shunday qilib, material miqdorini $60-42=18m$ ga oshirish mumkin ekan. Bu holda foydaning o‘zgarishi $1500-1320=180$ dollardan iborat bo‘ladi.

Endi ikkinchi kamyob resurs – ishchi soat miqdorini qanchagacha oshirishni ko‘ramiz. Bu (2.5) shartga mos keluvchi CD to‘g‘ri chiziqni o‘ziga parallel holda N nuqtagacha siljitishdan iborat bo‘ladi. CD to‘g‘ri chiziqni bundan ham yuqoriga siljitish maqsadga muvofiq emas, aks holda shart ortiqcha bo‘lib qoladi. Endi joiz soha ABNE ko‘pburchakdan iborat (2.12-rasm). Yangi optimal nuqta esa N nuqta. Quyidagi sistemani yechib,

$$\begin{cases} 1{,}5x_1+2x_2=42 \\ x_1=18 \end{cases}$$

N nuqta koordinatalarini topamiz N(18;7.5). Bu koordinatalarni (2.5) shartning chap tomoniga qo‘yib, ishchi vaqtining maksimal qiymatga oshirish mumkinligini topamiz: $3\cdot 0+2\cdot 7{,}5=69$ ishchi soat. Ishchi vaqtining o‘zgarishi 69-60=9 ishchi soatdan iborat. Bu holatda foyda $60\cdot 18+50\cdot 7{,}5=1455$ dollarni tashkil etib, 1455-1320=135 dollarga o‘sadi.

Endi fikrimizni ortiqcha kamyob resurslarga qaratamiz. (2.6) shart ortiqchaligi uchun uni kamaytirish mumkin. Bu fikrni grafik tarzda ifodalaydigan bo‘lsak, (2.6) chiziqni C nuqtagacha siljitishdan iborat (chunki qo‘shimcha xarajatlarni kamaytirish optimal yechimga ta’sir qilmasligi lozim) (2.10-rasm). C nuqta koordinatalarini (2.6) shartning chap tomoniga qo‘yib, zarur bo‘lgan qo‘shimcha xarajatlarni aniqlaymiz: $5\cdot 12+5\cdot 12=120$. Demak, qo‘shimcha xarajatlarni 120-200=-80 dollargacha kamaytirish mumkin. Shu bilan birga, foyda miqdori o‘zgarishsiz qoladi. (2.7) shart ko‘ylaklarga bo‘lgan talabdan kelib chiqqan edi. Optimal yechimga ta'sir qilmagan holda, (2.7) chiziqni o'ziga parallel holda C nuqtagacha siljitish mumkin. Talabning kamayishi bu holda 6 birlikka teng bo'ladi. Keltirgan tahlillarimizni 2.4-jadvalga jamlaymiz.

2.4-jadval

Resurs	Resurs turi	Resursning maksimal o'zgarishi	Foydaning maksimal o'zgarishi
1	Kamyob	60-42=18 m	1500-1320=180
2	Kamyob	69-60=9 ishchi soat	1455-1320=135
3	Ortiqcha	120-200=-80 dollar	1320-1320=0
4	Kamyob bo'lmagan	12-18=-6 dona	1320-1320=0

Biz yuqorida kamyob resurslarni qanchagacha oshirish mumkinligini va bu holatda foydaning o'zgarishini aniqladik. Endi qaysi kamyob resurslarni birinchi navbatda oshirish sadga muvofiq bo'lishini aniqlaymiz. Qo'shimcha kamyob resurslarni bir birlikka oshirishdan keladigan foyda miqdorini topamiz. ning uchun qo'shimcha resurslar bahosini aniqlaymiz. y_i qo'shimcha birik i-resursning bahosi bo'lsin:

$$y_i = \frac{Foydaning\ maksimal\ o‘zgarishi}{i\text{-}\ resurs\ hajmining\ maksimal\ o‘zgarishi}$$

Jadval ma'lumotlari asosida har bir resursning bahosini aniqlaymiz.

$$y_1 = \frac{180\ dollar}{18\,m.} = 10\ dollar/m; \qquad y_2 = \frac{135\ dollar}{9\ ishchi\ soat.} = 15\ dollar/ishchi\ soat;$$

$$y_3 = \frac{0}{-80\ dollar} = 0 \qquad y_4 = \frac{0}{-6\ dona} = 0$$

Natijalar shuni ko'rsatadiki, qo'shimcha lag'ni ishchi soat vaqtini kengaytirishga qaratish, so'ngra qo'shimcha material olishga sarflash talab etiladi. Kamyob bo'lmagan resurslarni ko'paytirishning hojati yo'q.

2.4.2. Maqsad funksiyasi koeffitsiyentlarining turg'unlik tahlili

Masalani grafik usulda yechish jarayonida maqsad funksiyasining koordinatalar sistemasidagi holati optimal yechimni aniqlashda asosiy omil bo'ladi. Shuning uchun maqsad funksiyasi koeffitsiyentlarining o'zgarishi resurs holatlarini o'zgartirib yuboradi. Ya'ni kamyob resurs kamyob bo'lmaganga va aksincha aylanishi mumkin. Biz maqsad funksiyasi koeffitsiyentlarining turg'unlik tahlilida quyidagi savollarni yoritishga harakat qilamiz:

1. Maqsad funksiyasining qandaydir koeffitsiyentining o'zgarishi optimal yechimga qanday ta'sir qilishi;
2. Resurs mavqeyini o'zgartirish uchun maqsad funksiyasi koeffitsiyentini qanchagacha o'zgartirish lozim bo'ladi?

Keltirilgan savollarni tikuv sexi uchun ko'rib chiqamiz. Shim va ko'ylakdan keladigan foydani mos ravishda c_1 va c_2 bilan belgilaymiz. U holda maqsad funksiyasi $z = c_1x_1 + c_2x_2$ ko'rinishida bo'ladi.

c_1 ni oshirganimizda (yoki c_2 ni kamaytirganimizda) maqsad funksiyasini ifodalovchi $z = c_1x_1 + c_2x_2$ to'g'ri chiziq C nuqta atrofida soat mili bo'ylab aylanadi. Agar c_1 ni kamaytirganimizda (yoki c_2 ni oshirganimizda) to'g'ri chiziq qarama-qarshi yo'nalishda aylanadi. Demak, maqsad funksiyasini ifodalovchi to'g'ri chiziqning holati (2.4) va (2.5) to'g'ri chiziqlar orasida bo'lganda C nuqta optimal nuqta bo'lib qolaveradi (2.10-rasm). Agar $z = c_1x_1 + c_2x_2$ to'g'ri chiziq og'maligi (2.4) shartni ifodalovchi to'g'ri chiziq og'maligiga teng bo'lca optimal yechim BC kesmani tashkil qiladi. Xuddi shuningdek, $z = c_1x_1 + c_2x_2$ to'g'ri chiziq og'maligi (2.5) shartni ifodalovchi to'g'ri chiziq og'maligiga teng bo'lgan taqdirda, optimal yechim CD kesmani iborat bo'ladi. $z = c_1x_1 + c_2x_2$ to'g'ri chiziq og'maligi ko'rsatilgan oraliqdan chiqib ketganda, optimal yechim o'zgaradi.

c_1 va c_2 o'zgarishi qanday bo'lganda C nuqtaning optimalligi saqlanishini ko'ramiz. $c_2 = 50$ ni o'zgarishsiz qoldiramiz. Bunda c_1 ning o'zgarishi (2.4) va (2.5) chiziqlarning og'maligidan aniqlanadi. $z=c_1x_1+c_2x_2$ chiziqning burchak koeffitsiyenti $c_1/50$ ga teng. (2.4) va (2.5) chiziqlarning burchak koeffitsiyentlari esa mos ravishda 3/4 va 3/2 ga teng. c_1 ning minimal qiymatini $c_1/50=3/4$ tenglikdan aniqlaymiz: $\min c_1=37{,}5$ dollar. c_1 ning maksimal qiymatini $c_1/50=3/2$ tenglikdan aniqlaymiz: $\max c_1=75$ dollar. Demak, c_1 ning ozgarishi $37{,}5\le c_1\le 75$ oraliqda bo'lganda C nuqtaning optimalligi saqlanib qoladi.

Xuddi shunday tahlilni c_2 koeffitsiyent uchun ham amalga oshiramiz. $c_1=60$ ni o'zgarishsiz qoldiramiz. Maqsad funksiyasining burchak koeffitsiyenti $60/c_2$ ga teng bo'ladi. (2.4) va (2.5) chiziqlarning burchak koeffitsiyentlaridan:

$$60/c_2=3/4,\ \text{bundan}\ \max c_2=80;$$
$$60/c_2=3/2,\ \text{bundan}\ \min c_2=40,$$

Demak, c_2 ning ozgarishi $40\le c_2\le 80$ oraliqda bo'lganda C nuqtaning optimalligi saqlanib qoladi.

Shuni ta'kidlash lozimki, $c_1=37{,}5$ bo'lib, c_2 o'zgarishsiz qolganda, (2.5) resurs kamyob bo'lmay qoladi. Bu shuni ko'rsatadiki, agar bitta shimdan keladigan foyda 37,5 dollardan kam bo'lsa, kunlik ishlab chiqarish rejasini qayta ko'rib chiqish lozim. Chunki endi B (21;0) nuqta optimal nuqta bo'ladi. c_1 75 dollardan oshib ketib, c_2 o'zgarishsiz qolganda esa kunlik rejada 18 ta shim va 3 ta ko'ylak ishlab chiqarish maqsadga muvofiq (D nuqta optimal nuqta). Xuddi shunga o'xshash xulosani ko'ylak narxi $40\le c_2\le 80$ chegaradan chiqqanda ham keltirish mumkin.

2.5. Simpleks usul

Agar chiziqli dasturlash masalasining matematik modelidagi o'zgaruvchilar soni ikkidan ortiq bo'lgan taqdirda (ba'zi hollar bundan mustasno) masalani grafik usulda yechish imkoni bo'lmaydi. Bunday masalalarni yechishda simpleks usul universal hisoblanadi.

Simpleks usulni bayon qilishdan avval chiziqli tenglamalar sistemasining ba'zi tushunchalarini esga olaymiz.

Bizga n o'zgaruvchili m ta tenglamalar sistemasi berilgan bo'lsin:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i \quad (i = 1,2,\ldots m) \tag{2.8}$$

Chiziqli dasturlash masalalarida $A = (a_{ij}), (i = 1,2,\ldots,m;\ j = 1,2,\ldots,n)$ matritsaning rangi $r = m$ bo'lib, $m < n$ bo'lgan holat qiziqish uyg'otadi.

Agar (2.8) sistemaning m o'zgaruvchilari oldidagi koeffitsiyentlardan tuzilgan matritsaning determinanti noldan farqli bo'lsa, bunday o'zgaruvchilar ***bazis o'zgaruvchilar*** deyiladi. Qolgan $n - m$ o'zgaruvchilar esa ozod (nobazis) o'zgaruvchilar deyiladi.

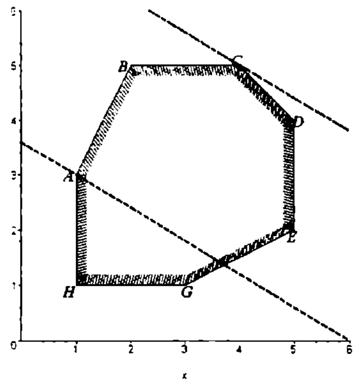
Agar (2.8) ning yechimlari $(x_1, x_2, \ldots x_n)$ $x_j \geq 0, (j = 1,2,\ldots,n)$ shartni qanoatlantirsa, bunday yechimlar ***mumkin bo'lgan yechimlar*** deyiladi. Aks holda mumkin bo'lmagan yechimlar deyiladi.

Nobazis o'zgaruvchilar nolga teng bo'lgan sistemaning yechimi ***bazis yechim*** deyiladi.

2.5.1. Simpleks usulning geometrik talqini

Chiziqli dasturlash masalasini yechish jarayonida masalaning optimal yechimi mavjud bo'lsa, bu yechimni joiz sohaning tugun nuqtalaridan izlash kerakligi kelib chiqadi. Shuningdek, chiziqli dasturlash masalasi yechimga ega bo'lganda, bu yechim mumkin bo'lgan bazis yechimlarning biri bilan mos keladi. Demak, optimal yechimni topish uchun chiziqli dasturlash masalasining shartlaridan kelib chiqadigan tenglamalar sistemasini barcha mumkin bo'lgan bazis yechimlarining ichidan maqsad funksiyasiga optimallikni taqdim qiladigan yechimni topish lozim. Bu geometrik nuqtayi nazardan joiz sohani tashkil qiluvchi ko'pburchak barcha *tugun* nuqtalarini tekshirib chiqishdan iborat bo'ladi. Albatta, yechimni bunday aniqlash, agar yechim mavjud bo'lsa, maqsadga olib keladi. Ammo bu usulda real masalalarning yechimini topishda katta qiyinchiliklarga duch kelinadi.

Tugun nuqtalarini qarab chiqish jarayoni maqsad funksiyasining qiymatini inobatga olgan holda amalga oshirilganda maqsadga tezroq yetiladi. Bunda har bir keyingi qadamga o'tish jarayonida maqsad funksiyasining yaxshilanib borishiga qarab tugun nuqtalari tanlanadi. Bu fikrni grafik usulda oydinlashtirishga harakat qilamiz.



2.11-rasm

Joiz soha ABCDEGH ko'pburchakdan iborat bo'lsin (2.11-rasm). Faraz qilaylik, A nuqta mumkin bo'lgan boshlang'ich bazis yechim bo'lsin. Umuman olganda, optimal nuqtani topish uchun 7 ta tugun nuqtalardagi maqsad funksiyasini hisoblash lozim. Rasmdan ko'rinib turibdiki, A tugun nuqtadan so'ng qo'shni B nuqtaga, so'ngra esa optimal nuqta C ga o'tish maqsadga muvofiq. 7 nuqta o'rniga uch nuqtani tekshirish yetarli bo'ldi. **Simpleks usul** yechimni qadam-baqadam yaxshilanishini ta'minlovchi usul hisoblanadi.

Simpleks usulning geometrik talqini shundan iboratki, boshlang'ich tugun nuqtadan keyingi qo'shni nuqtaga o'tishda maqsad funksiyasining qiymati optimal nuqtaga erishgunga qadar yaxshilanadi.

Masalani simpleks usulda yechish jarayonida quyidagi uch bosqichni amalga oshirish lozim:

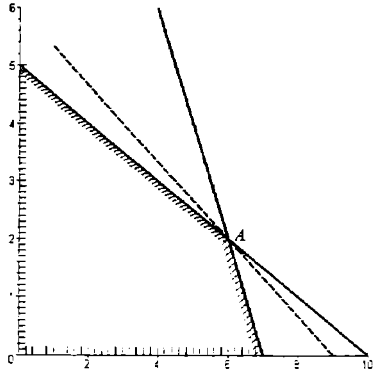
1. Mumkin bo'lgan boshlang'ich bazisni aniqlash.
2. Yaxshilangan yechimga o'tish qoidasi topish.
3. Yechimning optimalligini tekshirish.

Simpleks usulni qo'llash uchun masala kanonik ko'rinishda ifodalanishi kerak.

2.5.2. Simpleks algoritm

Simpleks usulning mohiyatini muayyan misolda bayon qilish ma'qulroq.

Bizga standart ko'rinishdagi chiziqli dasturlash masalasi berilgan bo'lsin.



2.12-rasm

$$z = 2x_1 + 3x_2 \to \max \qquad (2.9)$$

$$x_1 + 2x_2 \le 10,$$
$$2x_1 + x_2 \le 14, \qquad (2.10)$$
$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$$

Masalaning optimal yechimini grafik usulda topish oson (2.12-rasm). Optimal nuqta A nuqta bo'lib, uning koordinatalari $(6;2)$, maqsad funksiyasining optimal qiymati z=18 ga teng.

Berilgan masalani kanonik ko'rinishga keltiramiz. Buning uchun (2.10) tengsizliklar sistemasidan tengliklarga qo'shimcha s_1, s_2 nomanfiy o'zgaruvchilar kiritamiz.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + s_1 = 10, \\ 2x_1 + x_2 + s_2 = 14 \end{cases} \qquad (2.11)$$

(2.11) sistema 4 noma'lumli tenglamalar sistemasiga aylandi. Ma'lumki, bazis yechimda nobazis o'zgaruvchilar nolga teng va joiz sohaning biror tugun nuqtasidan iborat. (2.11) tenglamalar sistemasida bazis o'zgaruvchilar sifatida s_1, s_2 o'zgaruvchilarni olamiz. x_1, x_2 nobazis (erkin) o'zgaruvchilar bo'ladi. (2.11) sistemani bazis o'zgaruvchilar orqali yechamiz.

$$\begin{cases} s_1 = 10 - x_1 - 2x_2, \\ s_2 = 14 - 2x_1 - x_2. \end{cases} \qquad (2.12)$$

Nobazis o'zgaruvchilarni nolga teng deb olib, bazis o'zgaruvchilarni (2.12) dan topamiz. $s_1 = 10, s_2 = 14$. s_1, s_2 larning qiymatlari musbat bo'lganligi uchun mumkin bo'lgan bazis o'zgaruvchilardir.

Boshlang'ich bazisni bunday aniqlash chiziqli dasturlash masalalarining shartlaridagi munosabatlar "kichik yoki teng" ko'rinishida bo'lganda qulay. Demak, standart ko'rinishdagi masalani kanonik ko'rinishga keltirish jarayonida kiritilgan qo'shimcha o'zgaruvchilar bazis bo'ladi. Qolgan barcha o'zgaruvchilar erkin o'zgaruvchilar bo'ladi va ular nolga tenglab olinadi.

Demak, bu holatda koordinata boshi boshlang'ich mumkin bo'lgan yechimdan iborat bo'ladi.

Agar bazis o'zgaruvchilar barcha shartlarda ishtirok etmasa, u holda $x_1=0, x_2=0$ mumkin bo'lmagan yechimdan iborat bo'lib qoladi. Bunda koordinata boshi mumkin bo'lgan yechimni tashkil qilmaydi. Bunday hollarda maxsus usullar ishlatiladi.

Shunday qilib, masalaning boshlang'ich yechimi: $x_1=0$, $x_2=0$, $s_1=10, s_2=14$ dan va bu nuqta tugun nuqtalardan biri bo'lgan koordinatalar boshidan iborat. Tabiiyki, bu yechim optimal emas, chunki maqsad funksiyasi $z=2x_1+3x_2$ ning qiymati nolga teng, ya'ni hech qanday mahsulot ishlab chiqarilmaydi.

Ma'lumki, maqsad funksiyasining qiymatini erkin o'zgaruvchilar oldidagi koeffitsiyentlarining musbatlaridan topish mumkin. Buning uchun yangi bazisga o'tiladi va bu o'zgaruvchi noldan farqli qiymat qabul qiladi, erkin o'zgaruvchilar ichida ishtirok etmaydi. Bunda bazis o'zgaruvchilardan biri erkin o'zgaruvchilarga, erkin o'zgaruvchilardan biri esa bazis o'zgaruvchiga o'tadi. Geometrik nuqtayi nazardan bu almashish bir tugun nuqtadan shunday qo'shni bo'lgan tugun nuqtaga o'tiladiki, unda maqsad funksiyasining qiymati yaxshilanadi. Qaralayotgan masalada z ning qiymatini oshirish uchun bazisga x_1 ni yoki x_2 ni kiritish mumkin, chunki bu o'zgaruvchilar oldidagi koeffitsiyentlarning ikkisi ham musbatdir. Aniqlik uchun bunday holatda eng katta koeffitsiyentga ega bo'lgan o'zgaruvchi bazisga kiritiladi, chunki shunda maqsad funksiyasi tezroq oshadi.

Demak, x_2 ni bazisga kiritamiz. Endi x_2 ning qiymatini qanchagacha oshirish mumkinligini aniqlaymiz.

(2.12) sistema x_2 ning o'sishiga chegara qo'yadi. Barcha o'zgaruvchilarning nomanfiy bo'lmasligidan quyidagi tengsizliklar bajarilishi kerak (x_1 erkin o'zgaruvchi bo'lgani uchun nolga teng deb olamiz):

$$\begin{cases} s_1 = 10 - 2x_2 \geq 0, \\ s_2 = 14 - x_2 \geq 0. \end{cases} \quad \text{bundan} \quad \begin{cases} x_2 \leq 5, \\ x_2 \leq 14. \end{cases} \qquad (2.13)$$

(2.12) sistemaning har bir tenglamasi x_2 ning qanchagacha o'zgarishi mumkinligini aniqlaydi. Shuni e'tiborga olish kerakki, tenglamadan kelib chiqadigan x_2 ning o'zgarishiga chegara ozod hadni x_2 koeffitsiyentga bo'lishdan hosil bo'ladi. Shuni ta'kidlash lozimki, x_2 ga chegara ozod had bilan x_2 oldidagi koeffitsiyentlar bir xil bo'lganda unga yuqoridan chegara qo'yiladi, x_2 oldidagi koeffitsiyent manfiy bo'lganda yoki 0 ga teng bo'lsa, x_2 ning o'sishiga chegara qo'yilmaydi.

Ozod had nolga teng bo'lganda ham bazisga kiruvchi o'zgaruvchiga chegara hosil qilmasligini aniqlash qiyin emas.

(2.13) tengsizliklardan x_2 ning mumkin bo'lgan eng yuqori chegarasi $x_2 = \min\{5;14\} = 5$ ga teng bo'ladi. $x_2 = 5$ bo'lganda x_1 o'zgaruvchi nolga teng bo'ladi va erkin o'zgaruvchiga aylanadi.

Bazisga kiruvchi mumkin bo'lgan eng katta qiymatni taqdim qiluvchi tenglama *hal qiluvchi tenglama* deyiladi (bizning misolimizda 1-tenglama). Shunday qilib, x_2 ni bazisga kiritib, s_1 o'zgaruvchini erkin o'zgaruvchilar qatoriga kiritamiz. Bazis o'zgaruvchilar: s_1, x_2; erkin o'zgaruvchilar. x_1, s_2.

Navbatdagi qadamda yangi basiz o'zgaruvchilarni erkin o'zgaruvchilar orqali ifodalaymiz.

$$\begin{cases} x_2 = 5 - x_1/2 - s_1/2, \\ s_2 = 9 - 3x_1/2 + s_1/2. \end{cases} \tag{2.14}$$

Yangi yechim $x_1 = 0, x_2 = 5$ $s_1 = 0, s_2 = 9$ mumkin bo'lgan bazis yechim bo'lib, u navbatdagi qo'shni tugun nuqtadan iborat.

Maqsad funksiyasini erkin o'zgaruvchilar orqali ifodalaymiz.

$$z = 2x_1 + 3x_2 = 2x_1 + 3(5 - x_1/2 - s_1/2) = x_1/2 - 3s_1/2 + 15. \tag{2.15}$$

Maqsad funksiyasining yaxshilangan qiymati z=15.

Maqsad funksiyasining bu qiymati ham optimal emas, chunki (2.15) da x_1 oldidagi koeffitsiyent musbat bo'lgani uchun z ning qiymatini yana oshirish mumkin. Yuqorida keltirilgan mulohazalar kabi (2.14) x_1 qanchagacha oshirish mumkinligini aniqlash mumkin: $x_1 = \min\{10;6\} = 6$. Demak, ikkinchi tenglama hal qiluvchi tenglama hisoblanadi va x_1 ni bazisga kiritib, s_2 ni bazisdan chiqaramiz. Demak, yangi bazis o'zgaruvchilar: x_1, x_2, erkin o'zgaruvchilar esa s_1, s_2 bo'ladi.

Yuqoridagidek. bazis o‘zgaruvchilarni erkin o‘zgaruvchilar bilan ifodalaymiz.

$$\begin{cases} x_2 = 2 - 2s_1/3 + s_2/3, \\ x_1 = 6 + s_1/3 - 2s_2/3. \end{cases} \tag{2.16}$$

Navbatdagi bazis yechim $x_1 = 6, x_2 = 2$ $s_1 = 0, s_2 = 0$. Maqsad funksiyasining qiymati z=18 bo‘ladi, Endi optimallikka erishganimizni bilish uchun maqsad funksiyasini erkin o‘zgaruvchilar orqali ifodalaymiz.

$$z = 2x_1 + 3x_2 = 18 - 4s_1/3 - s_2/3.$$

Maqsad funksiyasining erkin o‘zgaruvchilari oldida musbat koeffitsiyentlar qolmagani uchun z ni yaxshilab bo‘lmaydi. Biz optimal nuqtani topdik. Demak, $x_1 = 6$, $x_2 = 2$ optimal nuqta A nuqtaning koordinatasidan iborat.

Endi optimallik mezonini keltiramiz.

Agar maqsad funksiyasi erkin o‘zgaruvchilar orqali ifodalanganda musbat koeffitsiyentlar mavjud bo‘lmasa, topilgan yechim optimal bo‘ladi.

Hisoblashlarda qulaylik yaratish maqsadida simpleks usulning jadval ko‘rinishidagi ifodasi maqsadga muvofiq. Endi simpleks usulning jadval ko‘rinishidagi ifodasini keltiramiz.

2.5.3. Simpleks jadval

Chiziqli dasturlash masalasini simpleks jadval usulida yechishda quyidagi algoritmga amal qilinadi.

1-qadam. Boshlang‘ich simpleks jadvalni qurish.

2-qadam. Yechimni optimallikka tekshirish. Optimal yechim topilganda jarayonni tugallash.

3-qadam. Optimallikka yo‘naltiruvchi holatni topish.

4-qadam. Yangi yechimga o‘tish va 2-qadamga qaytish.

Simleks jadvalning umumiy ko‘rinishi 2.5-jadvalda keltirilgan (m – shartlar soni, n – o‘zgaruvchilar soni)

2.5-jadval

		x_1	x_2	$\cdots$	x_n	s_1	$\cdots$	s_m	b
B	c_b	Maqsad funksiyasi koeffitsiyentlari							
Bazis o'zgaruvchilar	Maqsad funksiyasining bazisga kirgan koeffitsiyentlari	Masala shartlarining koeffitsiyentlari							Bazis yechim qiymatlari
z_j		$c_j - z_j$ satrini hisoblash uchun							
$c_j - z_j$		Optimallik mezonini aniqlovchi satr							

- Jadvalning birinchi satrida barcha o'zgaruvchilar (asosiy va qoldiq) qayd qilinadi.
- Jadvalning B harfi bilan ajratilgan birinchi ustunida bazis o'zgaruvchilar keltiriladi.
- Jadvalning ikkinchi $c_b$satrida 3-katakdan boshlab maqsad funksiyasining koeffitsiyentlari keltiriladi.
- c_b ustunda bazisga kirgan o'zgaruvchilarning koeffitsiyentlari joylashtiriladi (oxirgi ikki satrdan tashqari).
- Bazis o'zgaruvchilar uchun ajratilgan satrlarda shartlarning koeffitsiyentlari keltiriladi.
- Oxirgi b ustunda bazis o'zgaruvchilarning qiymatlari joylashadi.
- Oxirgi $c_j - z_j$ satr optimallik mezonini aniqlashga qaratilgan.
- z_j satridagi ma'lumot yordamida oxirgi $c_j - z_j$ satr hisoblanadi, bu satrning oxirgi katagida maqsad funksiyasining joriy qiymati joylashadi.

Birinchi qadam. Boshlang'ich simpleks jadvalni tuzish

Yuqorida keltirilgan misolning simpleks jadvalini tuzamiz.

Maqsad funksiyasini $z = 2x_1 + 3x_2 + 0 \cdot s_1 + 0 \cdot s_2$ ko'rinishda yozib, (2.11) sistemani inobatga olgan holda boshlang'ich jadvalni (2.6-jadval) quyidagicha yozamiz.

2.6-jadval

		x_1	x_2	s_1	s_2	b
B	c_b	2	3	0	0	
s_1	0	1	2	1	0	10
s_2	0	2	1	0	1	14
z_j		0	0	0	0	0
$c_j - z_j$		2	3	0	0	

Boshlang'ich simpleks jadvalning 2, 3, 4-satrlari bevosita maqsad funksiyasining va (2.11) sistema koeffitsiyentlaridan iborat. z_j satr elementlari quyidagicha topiladi. Maqsad funksiyasining bazisdagi koeffitsiyentlaridan iborat bo'lgan vektor shartlar ustunidagi vektorlarga skalar ko'paytiriladi.

Ya'ni $c_b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ vektor $A_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ vektorga skalar ko'paytiriladi va h.k. Shu yo'l bilan z_j satrning barcha elementlari topiladi. $c_j - z_j$ satr elementlari maqsad funksiyasining koeffitsiyentlaridan mos ravishda z_j satr elementlarini ayirishdan hosil bo'ladi. Bazisda qatnashmagan o'zgaruvchilar nolga teng bo'lgani uchun $x_1 = 0, x_2 = 0$. Bazis o'zgaruvchilarning qiymati oxirgi ustundan olinadi: $s_1 = 10, s_2 = 14$. z_j satrning oxirgi katagida joylashgan son maqsad funksiyasining boshlang'ich qadamdagi qiymatidan iborat $z = 0$.

Birinchi qadamda oxirgi satrning qiymatlari maqsad funksiyasining koeffitsiyentlariga mos keladi. Shu bilan birinchi qadam tugaydi.

Ikkinchi qadam. Olingan natijani optimallikka tekshirish

Olingan natijaning optimalligi $c_j - z_j$ satrdagi barcha sonlarning nomusbatligidan aniqlanadi. Agar $c_j - z_j$ satrida *joylashgan barcha elementlar nol yoki manfiy bo'lsa, olingan natija optimal bo'ladi* va jarayon tugallanadi. Agar bu elementlar ichida kamida bitta manfiy element mavjud bo'lsa, optimallikka erishilmagan bo'ladi va yechimni yaxshilash mumkin bo'ladi.

Mazkur misolda oxirgi satr elementlari ichida ikkita musbat son mavjudligi uchun natija optimal emas. Shu bilan optimallik shartini tekshirish tugallanadi.

Uchinchi qadam. Optimallikka yo'naltiruvchi holatni topish

Boshlang'ich jadvalning oxirgi satridan maksimal elementni aniqlaymiz, bu element 3 ga teng. Simleks jadvalning oxirgi satrida joylashgan musbat elementlarning eng kattasi joylashgan ustun *hal qiluvchi ustun* deyiladi (2.7-jadval).

2.7-jadval

		x_1	x_2	s_1	s_2	b	b_i/a_{ij}
B	c_b	2	3	0	0		
s_1	0	1	2	1	0	10	10/2=5 ⇐
s_2	0	2	1	0	1	14	14/1=14
	z_j	0	0	0	0	0	0
	$c_j - z_j$	2	3 ⇑	0	0		

2.7-jadvalda hal qiluvchi ustun strelka bilan ko'rsatilgan. Hal qiluvchi satrni topish maqsadida qo'shimcha ustun kiritib, b ustun elementlarini mos ravishda hal qiluvchi ustun elementlariga bo'lib chiqamiz. Hosil bo'lgan sonlarning kichigini olamiz: $\min\{5,14\}$ (natijani (6) bilan solishtiring). Demak, jadvalning uchinchi satri hal qiluvchi satrdir (satr strelka bilan ajratilgan). Hal qiluvchi satr bilan hal qiluvchi ustunlarning kesishishida joylashgan element hal qiluvchi element deyiladi. Bizning misolimizda hal qiluvchi element 2 ga teng. Shu bilan 3-qadamni tugallaymiz.

To'rtinchi qadam. Yangi yechimga o'tish

Yangi yechimga o'tish bazis o'zgaruvchilarni almashtirishdan boshlanadi. Hal qiluvchi satr boshidagi bazis o'zgaruvchi hal qiluvchi ustundagi o'zgaruvchi bilan almashadi, shunga mos koeffitsiyentlar ham almashadi.

Simpleks jadvalning 3 va 4 satrlaridagi elementlar Gauss-Jordan usuli bilan hal qiluvchi element yordamida qayta hisoblanadi. Gauss-Jordan usulida quyidagicha yo‘l tutiladi.

1) Hal qiluvchi satr hal qiluvchi elementga bo‘linadi. Hal qiluvchi ustunning qolgan elementlari nollar bilan to‘ldiriladi.

2) Qolgan satrlar “to‘rtburchak” usulida qayta hisoblanadi (I bobga qarang).

Qayta hisoblash natijasida quyidagi 2.8-jadvalga kelamiz.

2.8-jadval

		x_1	x_2	s_1	s_2	b
B	c_b	2	3	0	0	
x_2	3	1/2	1	1/2	0	5
s_2	0	3/2	0	-1/2	1	9
z_j		3/2	3	3/2	0	15
$c_j - z_j$		1/2	0	-3/2	0	

Shunday qilib, ikkinchi jadval tuzilib, yangi simpleks jadval olindi.

Hisoblashlarni tezlashtirish maqsadida quyidagi qoidalardan foydalanish maqsadga muvofiq.

- Agar hal qiluvchi satrda 0 ga teng elementlar bo‘lsa, unga mos ustun elementlarining qiymati yangi jadvalda o‘zgarishsiz qoladi;
- Agar hal qiluvchi ustunda 0 ga teng elementlar bo‘lsa, unga mos satr yangi jadvalda o‘zgarishsiz qoladi.

Ikkinchi qadamga o‘tib, yana optimallik mezonini tekshiramiz.

Yangi simpleks jadvalning oxirgi satrida musbat element bo‘lgani uchun optimal yechim olingani yo‘q. Demak, yana yangi jadval tuzamiz. Endi hal qiluvchi ustun x_1 ustunidir (2.9-jadval).

2.9-jadval

		x_1	x_2	s_1	s_2	b	b/a_{ij}
B	c_b	2	3	0	0		
x_2	3	1/2	1	1/2	0	5	10
s_2	0	**3/2**	0	-1/2	1	9	6

z_j	3/2	3	3/2	0	15	
$c_j - z_j$	1/2	0	-3/2	0		

⇧

$\min = (10,6) = 6$ bo‘lgani uchun hal qiluvchi satr to‘rtinchi satr bo‘ladi. Demak, x_1 bazisga kirib, s_2 esa bazisdan chiqadi. Yuqoridagi qoida bo‘yicha yangi jadvalni tuzamiz (2.10-jadval).

2.10-jadval

		x_1	x_2	s_1	s_2	b
B	c_b	2	3	0	0	
x_2	3	0	1	2/3	-1/3	2
x_1	2	1	0	-1/3	2/3	6
z_j		2	3	4/3	1/3	18
$c_j - z_j$		0	0	-4/3	-1/3	

Hosil bo‘lgan jadvalning oxirgi satriga nazar solsak. biz optimal yechimga yetib kelganligimizga ishonch hosil qilamiz. Jadvaldan $x_1 = 6, x_2 = 2$, $s_1 = 0, s_2 = 0$ ekanligini va maqsad funksiyasining optimal qiymati $z = 18$ ekanligini aniqlash mumkin.

Chiziqli dasturlash masalasi simpleks usulda yechish universal usuldir. Bu usulda o‘zgaruvchilar soniga chegara qo‘yilmaydi. Quyidagi masalani simpleks jadval usuli bilan yechishni ko‘ramiz.

Masala. Korxona velosipedning uch xil modelini ishlab chiqaradi. Har bir velosiped modellarini yig‘ish, bo‘yash va qadoqlash uchun talab qilinadigan vaqt (soatlarda) 2.11-jadvalda keltirilgan.

2.11-jadval

	A model	B model	C model
Yig‘ish	2	2,5	3
Bo‘yash	1,5	2	1
Qadoqlash	1	0,75	1,25

Yig'ish, bo'yash va qadoqlash bo'limlarining imkoniyatlari mos ravishda 4006 soat, 2495 soat va 1500 soatga teng. Har bir A model velosipeddan tushadigan foyda \$45, B modeldan \$50 va C modeldan \$55 ga teng. Maksimal foyda olish uchun velosipedning har bir modelidan qanchadan ishlab chiqarish maqsadga muvofiq?

Yechish. A turdagi modeldan x_1 ta, B dan x_2 ta va C modeldan x_3 dona ishlab chiqaradi deb belgilasak, masalaning matematik modeli quyidagicha bo'ladi.

$$\max \quad 45x_1 + 50x_2 + 55x_3$$
$$2x_1 + 5/2x_2 + 3x_3 \le 4006$$
$$x_1 + 2x_2 + x_3 \le 2495$$
$$x_1 + 0{,}75x_2 + 1{,}25x_3 \le 1500$$
$$x_1, x_2, x_3 \ge 0$$

Matematik modelni kanonik ko'rinishga keltiramiz:

$$\max \quad 45x_1 + 50x_2 + 55x_3 + 0\cdot s_1 + 0\cdot s_2 + 0\cdot s_3$$
$$2x_1 + 5/2x_2 + 3x_3 + s_1 = 4006$$
$$x_1 + 2x_2 + x_3 + s_2 = 2495$$
$$x_1 + 0{,}75x_2 + 1{,}25x_3 + s_3 = 1500$$
$$x_1, x_2, x_3, s_1, s_2, s_3 \ge 0$$

Masalaning kanonik ko'rinishidan boshlang'ich jadvalni tuzamiz (2.12-jadval).

2.12-jadval

		x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	b
B	c_b	45	50	55	0	0	0	
s_1	0	2	5/2	3	1	0	0	4006
s_2	0	3/2	2	1	0	1	0	2495
s_3	0	1	...	**5/4**	0	0	1	1500
z_j		0	0	0	0	0	0	0
$c_j - z_j$		45	50	55	0	0	0	

2.12-jadvalda hal qiluvchi element ajratilgan. Simpleks usul qoidasidan foydalanib, 2.13-jadvalni tuzamiz.

2.13-jadval

		x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	b
B	c_b	45	50	55	0	0	0	
s_1	0	-2/5	**7/10**	0	1	0	-12/5	406
s_2	0	7/10	7/5	0	0	1	-4/5	1295
x_3	55	4/5	3/5	1	0	0	4/5	1200
z_j		44	33	55	0	0	44	66000
$c_j - z_j$		1	17	0	0	0	-44	

Uchinchi jadval quyidagicha bo‘ladi (2.14-jadval).

2.14-jadval

		x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	b
B	c_b	45	50	55	0	0	0	
x_2	50	-4/7	1	0	10/7	0	-24/7	580
s_2	0	3/2	0	0	-2	1	**4**	483
x_3	55	8/7	0	1	-6/7	0	20/7	582
z_j		270/7	50	55	170/7	0	44	75860
$c_j - z_j$		75/7	0	0	-170/7	0	100/7	

Jadvalning oxirgi satrida musbat element mavjud bo‘lgani tufayli hali optimal yechim topilmadi. Bazisga s_3 kiritilib, bazisdan s_2 chiqariladi. Natijada 2.15-jadvalni hosil qilamiz.

2.15-jadval

		x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	b
B	c_b	45	50	55	0	0	0	
x_2	50	5/7	1	0	-2/7	6/7	0	994
s_3	0	**3/8**	0	0	-1/2	1/4	1	483/4
x_3	55	1/14	0	1	4/7	-5/7	0	507
z_j		555/14	50	55	120/7	25/7	0	77585
$c_j - z_j$		75/14	0	0	-120/7	-25/7	0	

Navbatdagi jadval ham optimal yechimga kelmadi. x_1 o'zgaruvchini bazisga kiritib, 2.16-jadvalni hosil qilamiz.

2.16-jadval

		x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	b
B	c_b	45	50	55	0	0	0	
x_2	50	0	1	0	2/3	8/21	-40/21	764
x_1	45	1	0	0	-4/3	2/3	8/3	322
x_3	55	0	0	1	2/3	-16/21	-4/21	484
z_j		45	50	55	120/7	50/7	100/7	79310
c_j-z_j		0	0	0	10	-50/7	-100/7	

Demak, oxirgi jadvaldan quyidagicha xulosa qilish mumkin. Velosipedning A modelidan 322 dona, B modelidan 764 dona va C modelidan 484 dona ishlab chiqarilganda olinadigan foyda eng ko'p bo'ladi. s_1, s_2 va s_3 qoldiq o'zgaruvchilarning bazis o'zgaruvchilar ichida qatnashmaganligi ularning qiymatlari nolga tengligini, shuningdek, bo'limlarning imkoniyatlari to'la ishlatilganligini ko'rsatadi.

2.6. Sun'iy o'zgaruvchilar kiritish usuli

Agar masala standart ko'rinishda bo'lmaganda boshlang'ich bazisni topish onson hal qilinmaydi. Boshlang'ich bazisni oson hal qilish usuli sun'iy o'zgaruvchilar kiritish usulidir (M-usul). Bu usul yordamida boshlang'ich bazisni aniqlash jarayoni osonlashadi.

Yuqorida keltirilgan misolimizda qoldiq o'zgaruvchilar s_1, s_2, s_3 oldidagi koeffitsiyentlar birlik matritsani tashkil qiladi:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Bunda qoldiq o'zgaruvchilarni bazis o'zgaruvchilar deb olib, boshlang'ich jadvalni oson topish mumkinligini ko'rdik. Umumiy holda boshlang'ich bazisni (boshlang'ich jadvalni tuzish) aniqlash oddiy hal qilinmaydi.

Fikrimizni quyidagi misolda bayon qilamiz.

$$z = x_1 - 2x_2 + 4x_3 + 6x_4 \to \max$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 4, \\ 2x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 = 2 \end{cases} \qquad (2.17)$$

$$x_i \geq 0,\ i = 1,2,3,4$$

Avvalambor, bazis o'zgaruvchilarni aniqlash lozim. x_1, x_2 o'zgaruvchilar oldidagi koeffitsiyentlardan tuzilgan matritsa

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

determinanti noldan farqli bo'lgani uchun bazis o'zgaruvchi sifatida olishimiz mumkin. Lekin x_2, x_3 o'zgaruvchilar oldidagi koeffitsiyentlardan tuzilgan matritsa

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

determinanti nolga teng bo'lgani uchun ularni bazis o'zgaruvchilar sifatida olib bo'lmaydi. Xuddi shuningdek, x_1, x_4 o'zgaruvchilar ham bazis uchun yaramaydi.

x_1, x_2 o'zgaruvchilarni bazis sifatida olishga harakat qilamiz. Buning uchun (2.17) sistemani Gauss-Jordan usuli bilan yechamiz:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & -1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & 3 & 0 & 6 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Yana shuni ta'kidlash lozimki, x_1, x_2 mumkin bo'lgan bazis yechim bo'la oladi. Erkin o'zgaruvchilarni nolga teng $(x_3 = 0, x_4 = 0)$ bo'lganda bazis yechim qiymatlari $x_1 = 2, x_2 = 2$ bo'ladi, ya'ni mumkin bo'lgan bazis yechimni tashkil qiladi. Bunday amaldan so'ng boshlang'ich 2.17-jadvalni tuzish mumkin.

2.17-jadval

		x_1	x_2	x_3	x_4	b
B	c_b	1	-2	4	6	
x_1	1	1	0	0	1	2
x_2	-2	0	1	1	0	2
z_j		1	-2	-2	1	-2
$c_j - z_j$		0	0	6	5	

Boshlang'ich simpleks jadval tuzilgandan so'ng keyingi jadvallarga o'tiladi.

Demak, xulosa qilish mumkinki, ko'p hollarda boshlang'ich jadvalni tuzishdan avval ancha mehnat qilishga to'g'ri keladi. Masala kanonik ko'rinishga keltirilgandan so'ng, bazis o'zgaruvchilarni aniqlash lozim. Buning uchun bazisga kiritiladigan o'zgaruvchilardan hosil bo'lgan matritsa determinanti noldan farqli ekanligini tanlash lozim. Sistemani Gauss-Jordan usuli bilan yechgandan so'ng bazis yechimning mumkin bo'lgan bazisligini aniqlash talab etiladi. Ana shundan so'ng boshlang'ich jadval tuziladi. Simpleks usulning sun'iy bazis kiritish usuli bunday qiyinchiliklarga barham beradi.

Sun'iy bazis kiritish usuli *M usul* deb ham yuritiladi. Sun'iy bazis kiritish usuli chiziqli dasturlash masalasi shartlarida ixtiyoriy cheklashlar: teng (=), kichik yoki teng (≤), katta yoki teng (≥) bo'lganda ishlatiladi. Cheklashlar ≥ ko'rinishida qatnashgan shartlarda masalani kanonik ko'rinishga keltirish uchun ortiq o'zgaruvchilar kiritiladi. Masala kanonik ko'rinishga keltirilgandan so'ng cheklashlari ≥ yoki = shartlar bilan berilganlarga sun'iy o'zgaruvchi kiritamiz. Sun'iy bazis kiritish usuli boshlang'ich bazisni qurish uchun kerak bo'ladi.

Barcha o'zgaruvchilar qatori sun'iy o'zgaruvchilarga ham nomanfiylik sharti kiritiladi. Sun'iy o'zgaruvchilarning hech qanday iqtisodiy ma'nosi yo'q, u faqat boshlang'ich bazisni shakllantirish uchungina kerak, xolos.

Optimal yechimga erishilgandan so'ng, oxirgi jadvalda sun'iy o'zgaruvchilarning qiymati nolga teng bo'lishi lozim. Agar sun'iy o'zgaruvchilarning qiymati nolga teng bo'lmasa, masalaning yechimi mavjud emasligini ko'rsatadi.

Quyidagi masalani sun'iy o'zgaruvchi kiritish usuli bilan yechishni ko'rib chiqamiz.

$$z = 2x_1 + 2x_2 \to \max$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 4, \\ x_1 + x_2 = 3 \end{cases} \tag{2.18}$$

$$x_1, x_2 \ge 0.$$

Bu masalani quyidagi masala bilan almashtiramiz:

$$z = 2x_1 + 2x_2 + 0 \cdot s_1 - Ma_2 \to \max$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + s_1 = 4, \\ x_1 + x_2 + a_2 = 3 \end{cases} \qquad (2.19)$$

$$x_1, x_2, s_1, a_2 \geq 0.$$

Bu yerda s_1 – birinchi chegaraning qoldiq o'zgaruvchisi, a_2 – ikkinchi chegara uchun kiritilgan sun'iy o'zgaruvchi. Sun'iy o'zgaruvchining indeksi sun'iy o'zgaruvchi qaysi shartlarga kiritilganligini ko'rsatadi. Maqsad funksiyasidagi **M** yetarli katta musbat son. Shuni ta'kidlash kerakki, (2.19) masalani simpleks usulda yechgandan so'ng oxirgi jadvalda $a_2 = 0$ bo'lsa, (2.19) ning yechimi (2.18) uchun yechim bo'ladi. (2.19) masala uchun boshlang'ich jadval 2.18-jadval ko'rinishida bo'ladi.

2.18-jadval

		x_1	x_2	s_1	a_2	b
B	c_b	2	3	0	-M	
s_1	0	1	**2**	1	0	4
a_2	-M	1	1	0	1	3
z_j		-M	-M	0	-M	-3M
$c_j - z_j$		2+M	3+M	0	0	

Keyingi jadvalda x_2 bazisga kirib, s_1 bazisdan chiqadi (2.19-jadval).

2.19-jadval

		x_1	x_2	s_1	a_2	b
B	c_b	2	3	0	-M	
x_2	0	1/2	1	1/2	0	2
a_2	-M	**1/2**	0	-1/2	1	1
z_j		3/2-M/2	3	3/2+M/2	-M	6-M
$c_j - z_j$		1/2+M/2	0	-3/2-M/2	0	

2.19-jadvalga ko'ra, x_1 bazisga kiradi va sun'iy o'zgaruvchi a_2 bazisdan chiqadi. Sun'iy o'zgaruvchi bazisdan chiqqandan so'ng, keyingi jadvallarda a_2 ustunining qatnashishiga hojat qolmaydi. Shuning uchun bu ustunni jadvaldan chiqarib yuborish maqsadga muvofiq. Natijada 2.20-jadvalni hosil qilamiz.

2.20-jadval

		x_1	x_2	s_1	b
B	c_b	2	3	0	
x_2	3	0	1	1	1
x_1	2	1	0	-1	2
z_j		2	3	1	7
$c_j - z_j$		0	0	-1	

Demak, biz oxirgi jadvalga yetib keldik. Optimal yechim: $x_1 = 2, x_2 = 1$. Qoldiq o'zgaruvchi va sun'iy o'zgaruvchilar bazisda bo'lmaganligi uchun $s_1 = 0$, $a_2 = 0$. Demak, $x_1 = 2, x_2 = 1$ $z = 7$ lar ham (2.18) ning optimal yechimidir.

Misol. Endi shartlarda "katta va teng" ishorasi mavjud masalani ko'ramiz.

$$z = 2x_1 + 5x_2 + 3x_3 \to \max$$

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 \geq 20, \\ 2x_1 + 4x_2 + x_3 = 50 \end{cases} \qquad (2.20)$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0.$$

(2.20) misolning birinchi shartiga avval ortiq o'zgaruvchi kiritamiz: $x_1 - 2x_2 + x_3 - s_1 = 0$. Endi birinchi va ikkinchi satrlarga sun'iy o'zgaruvchi kiritib, misolni kanonik ko'rinishda yozamiz.

$$z = 2x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 0 \cdot s_1 - Ma_1 - Ma_2 \to \max$$

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 - s_1 + a_1 = 20, \\ 2x_1 + 4x_2 + x_3 + a_2 = 50 \end{cases} \qquad (2.21)$$

$$x_1, x_2, x_3, s_1, a_2, a_3 \geq 0.$$

(2.21) misolda sun'iy o'zgaruvchilar bazisga kiritiladi. Boshlang'ich jadval ko'rinishi 2.21-jadvalda keltirilgan.

2.21-jadval

		x_1	x_2	x_3	s_1	a_1	a_2	b
B	c_b	2	5	3	0	-M	-M	
a_1	-M	1	-2	1	-1	1	0	20
a_2	-M	2	4	1	0	0	1	50
	z_j	-3M	-2M	-2M	M	-M	-M	-70M
	$c_j - z_j$	2+3M	5+2M	3+2M	-M	0	0	

Birinchi ustun hal qiluvchi ustun va birinchi satr hal qiluvchi satr bo'lgani uchun x_1 bazisga kiritilib, a_1 ni bazisdan chiqaramiz. Gauss-Jordan usuli bilan yangi 2.22-jadvalni tuzamiz. Shu bilan birga, a_1 ustunni ham hisoblashdan chiqaramiz.

2.22-jadval

		x_1	x_2	x_3	s_1	a_2	b
B	c_b	2	5	3	0	-M	
x_1	2	1	-2	1	-1	0	20
a_2	-M	0	8	-1	2	1	10
	z_j	2M	-8M-4	M+2	-2-2M	-M	-10M+40
	$c_j - z_j$	0	9+8M	1-M	2M+2	0	

2.22- jadvalga ko'ra a_2 bazisdan chiqib, x_2 bazisga kiradi. Natijada biz 2.23-jadvalga kelamiz.

2.23-jadval

		x_1	x_2	x_3	s_1	b
B	c_b	2	5	3	0	
x_1	2	1	0	3/4	-1/2	45/2
x_2	5	0	1	-1/8	1/4	5/4
	z_j	2	5	7/8	1/4	205/4
	$c_j - z_j$	0	0	17/8	-1/4	

Oxirgi satrda musbat element mavjudligi optimal yechimga hali kelmaganligimizni ko'rsatadi. 2.23-jadvalga ko'ra x_1 bazisdan chiqib, x_3 bazisga kiradi. Natijada 2.24-jadvalga kelamiz.

2.24-jadval

		x_1	x_2	x_3	s_1	b
B	c_b	2	5	3	0	
x_3	3	4/3	0	1	-2/3	30
x_2	5	1/6	1	0	1/6	5
	z_j	29/6	5	3	-7/6	115
	$c_j - z_j$	-17/6	0	0	7/6	

2.24-jadvaldan hisoblashni yana davom ettirish lozimligi ma'lum bo'ladi. s_1 ni x_2 bazis o'rniga kiritgandan so'ng 2.25-jadval hosil qilamiz.

2.25-jadval

		x_1	x_2	x_3	s_1	b
B	c_b	2	5	3	0	
x_3	3	2	4	1	0	50
s_1	0	1	6	0	1	30
	z_j	6	12	3	0	150
	$c_j - z_j$	-4	-7	0	0	

Nihoyat oxirgi jadvalga yetib keldik. Demak, optimal yechim $x_1 = 0,\ \ x_2 = 0,\ \ x_3 = 50$ ga teng bo'lib, maqsad funksiyasining maksimal qiymati 150 teng.

Shunday qilib, chiziqli dasturlash masalalarining shartlari "teng" yoki "katta yoki teng" ko'rinishidagi cheklashlarda biz sun'iy o'zgaruvchi kiritish bilan boshlang'ich bazis yechimga zamin yaratar ekanmiz. Hisoblash jarayonida sun'iy ozgaruvchilar sekin asta bazisdan chiqa boshlaydi. Har bir bazisdan chiqib ketgan sun'iy o'zgaruvchi ustunini ham jadvaldan olib tashlaymiz. Oxirgi jadvalda sun'iy o'zgaruvchi bazis o'zgaruvchilar ichida qatnashmaydi. Agar oxirgi jadvalda sun'iy o'zgaruvchi qatnashsa, joiz soha bo'sh to'plam ekanligidan dalolat beradi.

2.7. Simpleks usulning maxsus hollari

Chiziqli dasturlash masalasini grafik usulda yechish jarayonida maxsus hollarni kuzatgan edik (optimal yechim cheksiz ko'p, joiz yechimlar sohasi — bo'sh to'plam va maqsad funksiyasi *joiz yechimlar sohasida cheksiz o'sadi). Bu holatlarni simpleks usul bilan yechishda qanday aniqlash mumkinligini ko'ramiz.*

2.7.1. Optimal yechimlar cheksiz ko'p

Optimal yechimlar cheksiz ko'p bo'lgan holni grafik usul yordamida ko'rgan edik. Masalani simpleks usul bilan yechayotganda so'nggi jadvalga kelmaguncha optimal yechimlar cheksiz ko'p bo'lish yoki bo'lmasligini bila olmaymiz. Agar so'nggi jadvalda bazisga kirmagan o'zgaruvchilarga mos keluvchi ustunlardagi biror $c_j - z_j$ son nolga teng bo'lsa, optimal yechim cheksiz ko'p bo'ladi. Quyidagi masalani simpleks jadval usulida yechamiz.

$$z = 3x_1 + 3x_2 \to \max$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \le 8, \\ 2x_1 - x_2 \ge 1, \\ x_1 - 2x_2 \le 2, \end{cases} \tag{2.22}$$

$$x_1, x_2 \ge 0.$$

Bu misolga mos keluvchi so'nggi simpleks jadval 2.26-jadvaldan iborat.

2.26-jadval

		x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	b
B	c_b	3	3	0	0	0	
x_1	3	1	0	2/3	1/3	0	5
x_2	3	0	1	1/3	-1/3	0	3
s_3	0	0	0	1	1	1	9
z_j		3	3	3	0	0	24
$c_j - z_j$		0	0	-3	0	0	

2.26-jadvalda $c_j - z_j$ satrning barcha elementlari nol yoki manfiy. Bu esa optimal yechimga kelganimizni bildiradi. Optimal yechim $x_1 = 5$, $x_2 = 3$, $s_1 = 0$, $s_2 = 0$, va $s_3 = 9$ bo'ladi. Maqsad funksiyasining optimal qiymati $z_{\max} = 24$ ga teng.

Lekin s_2 ustunning $c_j - z_j$ satrida 0 turibdi. Bu esa masalaning yana boshqa optimal yechimi mavjudligini bildiradi. Biz s_2 ni bazisga kiritsak, maqsad funksiyasining qiymati o'zgarmaydi (2.27-jadval).

2.27-jadval

		x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	b
B	c_b	3	3	0	0	0	
x_1	3	1	0	1/3	0	-1/3	2
x_2	3	0	1	2/3	0	1/3	6
s_3	0	0	0	1	1	1	9
z_j		3	3	3	0	0	24
$c_j - z_j$		0	0	-3	0	0	

2.27-jadvaldan boshqa $x_1 = 2$, $x_2 = 6$, $s_1 = 0$, $s_2 = 9$ va $s_3 = 0$ yechimni hosil qilamiz. Bu yechim ham optimal, chunki barcha $c_j - z_j \le 0$ va maqsad funksiyasining bu yechimga mos kelgan qiymati ham 24 ga teng. Hosil bo'lgan yechimlarning chiziqli kombinatsiyasini olib, yechimning cheksiz ko'pligini aniqlaymiz: $x_1 = 5\alpha + 2(1-\alpha)$, $x_2 = 3\alpha + 6(1-\alpha)$, $s_1 = 0$, $s_2 = 9(1-\alpha)$ va $s_3 = 9\alpha$.

2.7.2. Joiz yechimlar sohasi – bo'sh to'plam

Bu hol chiziqli dasturlash masalasining barcha chegaralarini, xususan, nomanfiylik shartlarini ham qanoatlantiruvchi nuqta yo'q bo'lganda ro'y beradi.

Simpleks usul yordamida bu hol ro'y berganini qanday aniqlanishini ko'rib o'tamiz. Aytaylik, bir necha yaqinlashishdan keyin $c_j - z_j$ satrida musbat son bo'lmagan so'nggi jadvalga keldik. Agar jadvalda biror sun'iy o'zgaruvchining qiymati musbat bo'lsa, u holda berilgan masalaning joiz yechimlari sohasi bo'sh to'plam bo'ladi.

2.27-jadvalda quyidagi misolning boshlang'ich jadvali keltirilgan.

$$x_1 + x_2 \to \max$$
$$x_1 + x_2 = 5$$
$$4x_1 + x_2 \le 6$$
$$x_1 + 2x_2 \ge 14$$
$$x_1, x_2 \ge 0$$

2.28-jadval

		x_1	x_2	s_2	s_3	a_1	a_3	b
B	c_B	1	1	0	0	-M	-M	
a_1	-M	1	1	0	0	1	0	5
s_2	0	4	1	1	0	0	0	6
a_3	-M	1	2	0	-1	0	1	14
	z_j	-2M	-3M	0	M	-M	-M	-19M
	$c_j - z_j$	1+2M	1+3M	0	-M	0	0	

2.28-jadvaldan keyingi qadamda 2.29-jadvalga kelamiz:

2.29-jadval

		x_1	x_2	s_2	s_3	a_1	a_3	b
Bazis	c_B	1	1	0	0	-M	-M	
x_2	1	1	1	0	0	1	0	5
s_2	0	3	0	1	0	0	0	1
a_3	-M	-1	0	0	-1	-2	1	4
	z_j	1+M	1	0	M	1+M	-M	5-4M
	$c_j - z_j$	-M	0	0	-M	-1-3M	0	

So'nggi jadval $c_j - z_j$ satrining barcha elementlari 0 yoki manfiy sonlardan iborat. Go'yoki biz optimal yechimga kelgandaymiz. Lekin yechimda a_3 sun'iy o'zgaruvchining qiymati $a_3 = 4$ – musbat. Bu esa berilgan masalaning joiz yechimlari sohasi bo'sh to'plam ekanligini bildiradi.

2.7.3. Maqsad funksiyasi joiz yechimlar sohasida cheksiz o'sadi

Maqsad funksiyasi joiz yechimlar sohasida cheksiz o'sadigan holni grafik nuqtayi nazardan ko'rib chiqqan edik. Endi bu hol simpleks usul yordamida qanday aniqlanishini ko'rib chiqamiz.
Ushbu

$$\max\ 2x_1 + x_2$$
$$x_1 \geq 2$$
$$x_2 \leq 5$$
$$x_1,\ x_2 \geq 0$$

masalaga murojaat qilamiz. Birinchi chegaraga s_1 *ortiq*, ikkinchi chegaraga esa s_2 *qoldiq* o'zgaruvchilarni kiritib, masalaning kanonik shaklini hosil qilamiz. Masalaning jadval shaklini hosil qilish uchun birinchi chegaraga a_1 sun'iy o'zgaruvchi kiritamiz. Boshlang'ich jadvaldan keyingisini hosil qilish jarayonida x_1 ni bazisga kiritib va a_1 ustunni tashlab yuborib, simpleks 2.30-jad-

2.30-jadval

		x_1	x_2	s_1	s_2	b
Basis	c_B	2	1	0	0	
x_1	2	1	0	-1	0	2
s_2	0	0	1	0	1	5
	z_j	2	0	-2	0	4
	$c_j - z_j$	0	1	2	0	

valni hosil qilamiz. $c_j - z_j$ satrdagi musbat sonlarning eng kattasi s_1 ustunda va u 2 ga teng. Agar s_1 o'zgaruvchi bazisga kiritilsa, maqsad funksiyasining qiymati ortishini bilamiz. Lekin hal qiluvchi elementni topish uchun bu ustunda musbat son yo'q. Bu esa maqsad funksiyasining joiz yechimlar sohasi yuqoridan *chegaralanmaganligini* bildiradi.

Umuman, agar jadvalning $c_j - z_j$ satridagi sonlarning ichida birortasi musbat bo'lib, bu ustundagi a_{ij} sonlarning ichida musbat son topilmasa, u holda maqsad funksiyasi joiz yechimlar sohasida cheksiz o'sadi.

2.8. Minimallashtirish masalasini simpleks usulda yechish

Minimallashtirish masalasini simpleks usulda qanday hal qilish mumkinligini ko'raylik. Minimallashtirish masalasining simpleks usul yordamida yechishning ikkita usulini keltirish mumkin.

1-usul. Maksimallashtirish masalasida eng katta musbat $c_j - z_j$ ga mos keluvchi o'zgaruvchi bazisga kiritilar edi. Minimallashtirish masalasida biz qoidani o'zgartiramiz. Eng kichik manfiy $c_j - z_j$ ga mos keluvchi o'zgaruvchini bazisga kiritamiz. Masalani yechish qachongacha davom ettiriladi? Minimallashtirish masalasida $c_j - z_j$ satrning barcha elementlari 0 yoki musbat bo'lguniga qadar davom ettiriladi. Qolgan barcha qoidalar maksimallashtirish masalasini yechish kabi bo'ladi. Yana shuni nazarda tutish lozimki, sun'iy o'zgaruvchi kiritish zarur bo'lganda masalalarda maqsad funksiyasiga yetarli katta musbat koeffitsiyentli sun'iy o'zgaruvchi kiritiladi. Fikrimizni quyidagi misolda bayon qilamiz.

$$
\begin{gathered}
w = x_1 + x_2 \to \min \\
\begin{cases} 2x_1 + x_2 \geq 2, \\ x_1 + 2x_2 \geq 2, \end{cases} \\
x_1, x_2 \geq 0.
\end{gathered}
\tag{2.23}
$$

Maksimallashtirish masalasidagi kabi ikkala shartlarga ham ortiq va sun'iy o'zgaruvchilar kiritamiz. Maqsad funksiyasida esa yetarli katta musbat koeffitsiyentli sun'iy o'zgaruvchi kiritiladi.

$$
\begin{gathered}
w = x_1 + x_2 + 0 \cdot s_1 + 0 \cdot s_2 + Ma_1 + Ma_2 \to \min \\
\begin{cases} 2x_1 + x_2 - s_1 + a_1 = 2, \\ x_1 + 2x_2 - s_2 + a_2 = 2, \end{cases} \\
x_1, x_2, s_1, s_2, a_1, a_2 \geq .
\end{gathered}
\tag{2.24}
$$

(2.23) masalaga ko'ra boshlang'ich 2.31-jadvalni tuzish mumkin.

2.31-jadval

		x_1	x_2	s_1	s_2	a_1	a_2	b
B	c_b	1	1	0	0	M	M	
a_1	M	2	1	-1	0	1	0	2
a_2	M	1	2	0	-1	0	1	2
z_j		3M	3M	-M	-M	M	M	4M
$c_j - z_j$		1-3M	1-3M	M	M	0	0	

Jadvalning oxirgi satridagi birinchi va ikkinchi ustunlarda teng manfiy sonlar joylashgan. Aniqlik uchun chapdagisini olamiz. Demak, hal qiluvchi ustun birinchi ustun bo'ladi. Hal qiluvchi satrni aniqlash maksimallashtirish masalasi kabi bo'ladi. Bizning misolimizda birinchi satr hal qiluvchi bo'ladi. Demak, bazisga x_1 o'zgaruvchi kiradi a_1 esa bazisdan chiqadi. Kerakli hisoblashlarni amalga oshirib, 2.32-jadvalni hosil qilamiz.

2.32-jadval

		x_1	x_2	s_1	s_2	a_2	b
B	c_b	1	1	0	0	M	
x_1	1	1	1/2	-1/2	0	0	1
a_2	M	0	**3/2**	1/2	-1	-1/2	1
	z_j	1	1/2+3M/2	-1/2+M/2	-M	M	1+M
	$c_j - z_j$	0	1/2-3M/2	1/2-M/2	M	0	

2.32-jadvalga ko'ra hal qiluvchi ustun ikkinchi ustundir. Hal qiluvchi satr esa ikkinchi satr hisoblanadi. a_2 sun'iy o'zgaruvchini bazisdan chiqarib (keyingi jadvalda sun'iy o'zgaruvchi ustunini ham chiqarib yuboramiz), x_2 ni bazisga kiritib, hisoblashlar natijasida 2.33-jadvalni hosil qilamiz.

2.33-jadval

		x_1	x_2	s_1	s_2	b
B	c_b	1	1	0	0	
x_1	1	1	10	-2/3	1/3	2/3
x_2	1	0	1	1/3	-2/3	2/3
z_j		1	1	-1/3	0	4/3
$c_j - z_j$		0	0	1/3	0	

2.33-jadvalning oxirgi satrida manfiy elementlar yo‘qligi uchun optimal yechimga yetib keldik. Shunday qilib, masalaning yechimi $x_1 = 2/3$, $x_2 = 2/3$, $w = 4/3$ bo‘ladi.

2-usul. Bu usul minimallashtirish masalasining maqsad funksiyasini -1 ga ko‘paytirib, maksimallashtirish masalasiga o‘tishdan iborat. Bu maksimallashtirish masalasini yechib, dastlabki minimallashtirish masalasining optimal yechimini hosil qilamiz.

(2.22) masalani shu usulda yechib ko‘ramiz.
Masalaning maqsad funksiyasini -1 ga ko‘paytirib, maksimallashtirish masalasiga o‘tamiz.

$$z = -x_1 - x_2 \to \max$$
$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \ge 2, \\ x_1 + 2x_2 \ge 2, \end{cases} \tag{2.25}$$
$$x_1, x_2 \ge 0.$$

Uning jadval shakli quyidagicha bo‘ladi.

$$z = -x_1 - x_2 + 0 \cdot s_1 + 0 \cdot s_2 - Ma_1 - Ma_2 \to \max$$
$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - s_1 + a_1 = 2, \\ x_1 + 2x_2 - s_2 + a_2 = 2, \end{cases} \tag{2.26}$$
$$x_1, x_2, s_1, s_2, a_1, a_2 \ge 0.$$

(2.25) ga ko'ra boshlang'ich simpleks 2.34-jadvalni tuzamiz.

2.34-jadval

		x_1	x_2	s_1	s_2	a_1	a_2	b
B	c_b	-1	-1	0	0	-M	-M	
a_1	-M	2	1	-1	0	1	0	2
a_2	-M	1	2	0	-1	0	1	2
z_j		-3M	-3M	M	M	-M	-M	-4M
$c_j - z_j$		-1+3M	-1+3M	-M	-M	0	0	

Qolgan jadvalni tuzish jarayoni odatdagidek kechadi. Xulosa qilish uchun yakuniy 2.35-jadvalni keltiramiz.

2.35-jadval

		x_1	x_2	s_1	s_2	b
B	c_b	1	1	0	0	
x_1	-1	1	0	-2/3	1/3	2/3
x_2	-1	0	1	1/3	-2/3	2/3
z_j		-1	-1	1/3	1/3	-4/3
$c_j - z_j$		0	0	-1/3	-1/3	

Bu jadvalning oxirgi satrida musbat elementlar mavjud emas. Demak, optimal yechim $x_1 = 2/3$, $x_2 = 2/3$. $z = -4/3$ bo'ladi. Lekin bu yechimga maksimallashtirish masalasidagi maqsad funksiyasining $-4/3$ qiymati mos keladi. Dastlabki minimallashtirish masalasidagi maqsad funksiyasining minimum qiymatini topish uchun uni -1 ga ko'paytiramiz. Demak, maqsad funksiyasining minimum qiymati $w = 4/3$ ga teng ekan.

2.9. Simpleks jadval yordamida turg'unlik tahlili

Biz turg'unlik tahlili tushunchasi bilan chiziqli dasturlash masalasini grafik usulda yechish jarayonida tanishgan edik. Endi simpleks jadval yordamida turg'unlik tahlilini qanday hal qilish lozimligini ko'rib o'tamiz.

Taqqoslash maqsadida grafik usul yordamida tahlil qilingan masalaga qaytamiz (2.4-2.7). Shu masalani simpleks usul bilan yechishda quyidagi oxirgi 2.36-jadvalga yetib kelamiz.

2.36-jadval

		x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	s_4	b
B	c_b	60	50	0	0	0	0	
s_4	0	0	0	2/3	-2/3	0	1	6
x_2	50	0	1	1	-1/2	0	0	12
s_3	0	0	0	-5/3	-5/6	1	0	80
x_1	60	1	0	-2/3	2/3	0	0	12
z_j		60	50	10	15	0	0	1320
$c_j - z_j$		0	0	-10	-15	0	0	

2.9.1. Simpleks usulda o'ng tomon tahlili

Masalaning ikkiyoqlama qiymati va zaxiradagi resurs miqdorlari o'zgarishining turg'unligini jadvalga qarab aniqlash qoidasi bilan tanishamiz.

Oxirgi jadvalning z_j satrining s_1, s_2, s_3, s_4, qoldiq o'zgaruvchilar ustuniga mos kelgan qiymatlar grafik usul yordamida olingan ikkiyoqlama qiymatlarga mos kelishini kuzatish mumkin. Qoldiq o'zgaruvchilarning z_j satriga to'g'ri kelgan qiymatlar resurslarning ikkiyoqlama qiymatidan iborat bo'ladi. Jadvalga ko'ra birinchi resursning ikkiyoqlama qiymati $y_1 = 10$ ga, ikkinchi resursniki $y_2 = 15$, uchinchiniki $y_3 = 0$ va to'rtinchi resursniki $y_4 = 0$ ga teng. Bilamizki, ikkiyoqlama qiymat resurs bahosini beradi. Bu ma'lumotlar birinchi va ikkinchi resurslarning kamyob ekanligini ko'rsatadi. Shu bilan birga, ikkinchi resursning ikkiyoqlama qiymati birinchisiga nisbatan katta bo'lgani uchun birinchi navbatda ikkinchi resursni ko'paytirish maqsadga muvofiq ekanligini ko'rsatadi.

Demak, masalaning ikkiyoqlama qiymatlari oxirgi jadvaldagi qoldiq o'zgaruvchilar ustunidagi z_j satrda joylashgan sonlardan olinadi.

Endi o'ng tomonning turg'unlik oralig'ini simpleks jadvaldan topishni ko'ramiz. Bu shunday oraliqki, unda ikkiyoqlama qiymat o'zgarishsiz qoladi. Ya'ni undan tashqariga chiqilganda shart ortiqcha chegaraga o'tib qoladi.

O'ng tomon turg'unlik oralig'ini aniqlash uchun simpleks jadval ustida kerakli hisoblashlarni bajarishga to'g'ri keladi.

Shartlarning o'ng tomoni o'zgargan taqdirda simpleks jadvalning o'zgarishini ko'ramiz. Buning uchun biror shartni o'zgartirib, masalani qayta simpleks usulda yechish yetarli. Agar simpleks jadvalning b ustunidagi miqdorlarning hech qachon hal qiluvchi element bolmasligini inobatga olsak, o'ng tomoni o'zgargan masala uchun yangi simpleks jadvalni qurish shart emas. Fikrimizni yuqoridagi misol bilan asoslaymiz. Aytaylik, birinchi shartning o'ng tomonini 42 birlikdan 45 birlikka oshirib va uni simpleks jadval yordamida qayta hisoblab chiqsak, oxirgi 2.37-jadvalga kelamiz.

2.37-jadval

		x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	s_4	b
B	c_b	60	50	0	0	0	0	
s_4	0	0	0	2/3	-2/3	0	1	8
x_2	50	0	1	1	-1/2	0	0	15
s_3	0	0	0	-5/3	-5/6	1	0	75
x_1	60	1	0	-2/3	2/3	0	0	10
	z_j	60	50	10	15	0	0	1350
	$c_j - z_j$	0	0	-10	-15	0	0	

Agar 2.37-jadvalga nazar solsak, uning 2.36-jadvaldan farqi faqat oxirgi ustunda ekanligini ko'rish mumkin. Qolgan qiymatlar esa o'zgarmagan. Bu xulosa oldingi jadvallar uchun ham o'rinlidir. 2.37-jadvalni 2.36-jadvaldan osongina keltirib chiqarish mumkin. Buning uchun 2.36-jadvalning b va s_1 ustunlaridan foydalanamiz. s_1 ustun tanlanishiga sabab biz faqat birinchi shartning o'ng tomonini o'zgartirdik. Biz birinchi shartning o'ng tomonini 3 birlikka oshirganimiz uchun 2.37-jadvalning b ustunidagi elementlari bilan quyidagicha hisoblashlarni amalga oshi-

ramiz. 2.36-jadvalning birinchi satrining b va s_1 ustunida joylashgan elementlardan foydalanib, quyidagi hisoblashni amalga oshiramiz: $6+\frac{2}{3}\cdot 3=8$. Bu yerda 6 — b ustundagi, 2/3 — s_1 ustundagi qiy-matlar bo'lib, 3 soni esa birinchi shartning o'ng tomonini 3 birlikka oshirganimizdir. Qolgan ustunlarda ham hisoblashni shu tarzda davom ettirsak, $12+1\cdot 3=15$, $80-\frac{5}{3}\cdot 3=75$, $12-\frac{2}{3}\cdot 3=10$ qiymatlarga ega bo'lamiz. Hosil bo'lgan qiymatlar 2.37-jadvalning b ustunidagi qiymatlar bilan bir xil. Demak, 2.37-jadvalni 2.36-jadvaldan foydalanib, shu tarzda hosil qilish mumkin ekan.

Endi birinchi shartning o'ng tomonini d_1 birlikka oshiradigan bo'lsak, yangi jadvalning b ustunidagi qiymatlar $6+\frac{2}{3}\cdot d_1$, $12+1\cdot d_1$, $80-\frac{5}{3}\cdot d_1$, $12-\frac{2}{3}\cdot d_1$ larga teng bo'ladi. Ikkinchi shartning o'ng tomoni o'zgartirilgan taqdirda s_2 ustun elementlaridan foydalanamiz. Masalan, agar ikkinchi shartni d_2 ga o'zgartirib, qolgan parametrlar o'zgartirishsiz qoldirilganda yakuniy jadvalning b ustunidagi qiymatlar $6-\frac{2}{3}\cdot d_2$, $12-\frac{1}{2}\cdot d_2$, $80-\frac{5}{6}\cdot d_2$, va $12+\frac{2}{3}\cdot d_2$ ga teng bo'ladi.

Shunday qilib, o'ng tomondagi ixtiyoriy shartning o'zgarishi simpleks jadvalning o'ng qismigagina ta'sir qilar ekan. Ya'ni zaxira miqdorining o'zgarishi mumkin bo'lgan yechimgagina ta'sir etadi. Bazis yechimlarning nomanfiy bo'lishini e'tiborga olgan holda d_1 ning o'zgarish oralig'ini topamiz. Demak, quyidagi tengsizliklarni yechib,

$$\begin{cases} 6+\frac{2}{3}d_1 \geq 0, \\ 12+d_1 \geq 0, \\ 80-\frac{5}{3}d_1 \geq 0, \\ 12-\frac{2}{3}d_1 \geq 0, \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad -9 \leq d_1 \leq 18$$

d_1 ning o'zgarish chegarasini topamiz. $b_1 = 42 + d_1$ tenglikdan birinchi shartdagi o'ng tomoni turg'unligini aniqlaymiz: $33 \le b_1 \le 60$. Bu xulosa grafik usul yordamida olingan natija bilan mos keladi. Xuddi shu yo'l bilan qolgan o'ng tomonlar turg'unligini aniqlash mumkin.

2.9.2. Maqsad funksiyasi koeffitsiyentlarining turg'unlik tahlili

Simpleks jadvalni qurish jarayonida maqsad funksiyasi koeffitsiyentlarining o'zgarishi jadvalning oxirgi ikki satriga ta'sir qiladi. Maqsad funksiyasi koeffitsiyentlarini turg'unligini topish qoidasi oxirgi 2.36-jadval yordamida oson hal qilinadi. Bizning maqsad 2.36-jadval yordamida, masalan, maqsad funksiyasining birinchi koeffitsiyentining turg'unligini ko'raylik. Buning uchun 2.36-jadvalda x_1 oldidagi koeffitsiyentni c_1 bilan almashtirib, yangi 2.38-jadvalni hisoblab chiqamiz.

2.38-jadval

		x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	s_4	b
B	c_b	c_1	50	0	0	0	0	
s_4	0	0	0	2/3	-2/3	0	1	6
x_2	50	0	1	1	-1/2	0	0	12
s_3	0	0	0	-5/3	-5/6	1	0	80
x_1	c_1	1	0	-2/3	2/3	0	0	12
z_j		c_1	50	$50-2c_1/3$	$-25+2c_1/3$	0	0	$600+12c_1$
c_j-z_j		0	0	$-50+2c_1/3$	$25-2c_1/3$	0	0	

Optimal yechimni o'zgarishsiz qolishini talab qilsak, 2.38-jadvalning oxirgi satridagi sonlar musbat bo'lmasligini talab qilamiz. U holda,

$$\begin{cases} -50 + 2c_1/3 \le 0, \\ 25 - 2c_1/3 \le 0. \end{cases}$$

tengsizliklar sistemasidan $75/2 \le c_1 \le 75$ ekanligi kelib chiqadi. Bu natija grafik usul yordamida olingan natija bilan mos tushadi. Xuddi shuningdek, maqsad funksiyasining ikkinchi koeffitsiyentining turg'unligini topish mumkin $40 \le c_2 \le 80$.

Shuni ham ta'kidlash lozimki, c_1 ning qiymati optimallik oralig'ida joylashganda optimal yechim o'zgarishsiz qolib, maqsad funksiyasining qiymatini esa $z = 600 + 12c_1$ dan topamiz. Masalan, $c_1 = 40$ bo'lganda bu qiymat turg'unlik chegarasida bo'lgani uchun optimal yechim $x_1 = 12$, $x_2 = 12$, $s_1 = 0$, $s_2 = 0$, $s_3 = 80$ va $s_4 = 6$ saqlanib, maqsad funksiyasining qiymati $z = 600 + 12c_1 = 1080$ ga teng bo'ladi.

2.10. Ikkiyoqlama masalalar

Chiziqli dasturlashning har bir masalasiga ikkiyoqlama masala deb ataluvchi masala mos qo'yiladi. Ikkiyoqlama masalaning kelib chiqishiga oid masalaga murojaat qilamiz.

2.10.1. Ikkiyoqlama masala tushunchasi

Korxona ikki xil mahsulot ishlab chiqaradi. Birinchi birlik mahsulotni sotishdan $3, ikkinchisidan esa $5 foyda keladi. Har bir mahsulotni ishlab chiqarish uchun sarflanadigan resurs miqdorlari va zaxiraning resurs miqdorlari 2.39-jadvalda keltirilgan.

2.39-jadval

	1-mahsulot	2- mahsulot	Zaxira miqdori
1-resurs	1	-	4
2-resurs	-	2	12
3-resurs	3	2	18

Birinchi mahsulotdan x_1 miqdorda, ikkinchidan esa x_2 miqdorda ishlab chiqariladi deb belgilasak, masalaning matematik modeli quyidagicha bo'ladi.

$$z = 3x_1 + 5x_2 \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} x_1 \le 4, \\ 2x_2 \le 12, \\ 3x_1 + 2x_2 \le 18, \end{cases} \qquad (2.27)$$

$$x_1, x_2 \ge 0$$

Boshqa bir korxona shu korxonaning resurslarini sotib olmoqchi. Resurslarga qanday narx qo'yish kerak?

Faraz qilaylik, resurslar birliklarining narxi mos ravishda y_1, y_2, y_3 bo'lsin. U holda $4y_1+12y_2+18y_3$ ifoda resurslarning umumiy narxini belgilaydi. Albatta, ikkinchi korxona resurslarni mumkin qadar arzon sotib olishga harakat qiladi. Ya'ni

$$w=4y_1+12y_2+18y_3 \rightarrow \min.$$

Birinchi korxona ham resurslarni sotishda mahsulotni tayyorlaganda olinadigan foydadan kam miqdorda sotmaslikka harakat qiladi. Birinchi mahsulotning birligi uchun sarflanadigan resurs miqdori y_1+3y_2 ga teng. Birinchi korxonaning birinchi mahsuloti birligidan keladigan foyda 3 ga teng bo'lgani uchun $y_1+3y_3 \geq 3$ tengsizlikka ega bo'lamiz. Xuddi shuningdek, ikkinchi mahsulot uchun $2y_2+2y_3 \geq 5$ tengsizlikka ega bo'lamiz. $y_1, y_2, y_3 \geq 0$ shartlarning qo'yilishi o'z-o'zidan ravshan.

Shunday qilib, biz chiziqli dasturlash masalasiga keldik.

$$\begin{gathered} w=4y_1+12y_2+18y_3 \rightarrow \min \\ \begin{cases} y_1+3y_3 \geq 3, \\ 2y_2+2y_3 \geq 5 \end{cases} \\ y_1, y_2, y_3 \geq 0 \end{gathered} \tag{2.28}$$

(2.28) masala (2.27) ga *ikkiyoqlama masala* deyiladi. (2.27) esa *boshlang'ich masala* deyiladi. Umumiy ko'rinishdagi ikkiyoqlama masalani keltiramiz.

Quyidagi standart ko'rinishdagi maksimallashtirish masalasi uchun

$$\begin{gathered} z=c_1x_1+c_2x_2+\ldots+c_nx_n \rightarrow \max \\ \begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n \leq b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n \leq b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\ldots+a_{mn}x_n \leq b_n, \end{cases} \\ x_j \geq 0, \ (j=1,2,\ldots,n) \end{gathered} \tag{2.29}$$

ikkiyoqlama masala quyidagi ko'rinishda bo'ladi.

$$w = b_1y_1 + b_2y_2 + \ldots + b_my_m \to \min$$

$$\begin{cases} a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + \ldots + a_{m1}y_m \ge c_1, \\ a_{12}y_1 + a_{22}y_2 + \ldots + a_{m2}y_m \ge c_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{1n}y_1 + a_{2n}y_2 + \ldots + a_{mn}y_m \le c_n, \end{cases} \tag{2.30}$$

$$y_i \ge 0, \ (i = 1,2,\ldots,m)$$

$y_1, y_2, \ldots, y_m$ resurs narxlari *oshkormas, ikkiyoqlama* narxlar deyiladi. Boshlang'ich masala optimal rejani aniqlash bo'lsa, ikkiyoqlama masalada resurslarning optimal narxini shunday topish kerakki, unda resurslarning umumiy qiymati minimal bo'lib, birlik mahsulot ishlab chiqarishdagi xarajatlar birlik mahsulot narxidan kam bo'lmasligi lozim.

O'zaro ikkiyoqlama bo'lgan (2.29) va (2.30) masalalar quyidagi xossalarga ega:

1. Ikkiyoqlama masalalarning birida maqsad funksiyasining maksimumi izlansa, unga ikkiyoqlama bo'lgan masalada maqsad funksiyasining minimumi izlanadi.
2. Boshlang'ich masaladagi sistema shartlarini ifodalovchi matritsa koeffitsiyentlarini transponirlash yordamida ikkiyoqlama masalaning koeffitsiyentlari hosil qilinadi:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{2n} \\ \ldots & & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$$A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & a_{m2} \\ \ldots & & \ldots \\ a_{1n} & a_{2n} & a_{mn} \end{pmatrix}$$

3. Ikkiyoqlama masalaning o'zgaruvchilar soni boshlang'ich masalaning shartlar soniga teng va aksincha.
4. Ikkiyoqlama masala maqsad funksiyasining koef- boshlang'ich masala shartlarining o'ng to- va aksincha.

5. Boshlang‘ich va ikkiyoqlama masalalar shartlaridagi tengsizlik belgilari qarama-qarshidir. Maksimallashtirish masalasida barcha shartlardagi tengsizlik belgisi “$\le$” ko‘rinishida bo‘lsa, minimallashtirish masalasida esa “$\ge$” ko‘rinishga ega.

Ikkiyoqlama masala uchun tuzilgan ikkiyoqlama masala boshlang‘ich masaladan iborat bo‘ladi. Shuning uchun qaysi masalani boshlang‘ich deb olishning ahamiyati yo‘q. Shu ma’noda bunday masalalar *o‘zaro juft ikkiyoqlama masalalar* deyiladi.

Berilgan masalaga ikkiyoqlama masala tuzishga oid misollar ko‘rib chiqamiz.

1-misol. Quyidagi masalaning ikkiyoqlama masalasini quramiz.

$$z = -x_1 + 2x_2 \to \max$$
$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 \ge 1, \\ -x_1 + 4x_2 \le 24, \\ x_1 - x_2 \le 3, \\ x_1 + x_2 \ge 5, \end{cases} \tag{2.31}$$
$$x_1, x_2 \ge 0$$

Boshlang‘ich masala maksimallashtirish bo‘lgani uchun barcha shartlardagi tengsizliklarni “$\le$” ko‘rinishga keltiramiz. Buning uchun birinchi va to‘rtinchi tengsizliklarni -1 ga ko‘paytiramiz.

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 \le -1, \\ -x_1 + 4x_2 \le 24, \\ x_1 - x_2 \le 3, \\ -x_1 - x_2 \le -5, \end{cases}$$

Endi ikkiyoqlama masalani tuzish mumkin.

$$w = -y_1 + 24y_2 + 3y_3 - 5y_4 \to \min$$
$$\begin{cases} -2y_1 - y_2 + y_3 - y_4 \ge -1, \\ y_1 + 4y_2 - y_3 - y_4 \ge 2, \end{cases} \tag{2.32}$$
$$y_1, y_2, y_3, y_4 \ge 0$$

(2.32) masala (2.31) uchun ikkiyoqlama masala bo‘ladi.

2-misol. Agar shartlar ichida "=" belgisi qatnashgani mavjud bo'lsa, bu shart ekvivalent bo'lgan ikki "≤" va "≥" shartlar bilan almashtiriladi. Masalan, quyidagi masalaga

$$w = x_1 + 3x_2 + 5x_3 \to \min$$

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 4x_3 \geq 2, \\ x_1 + 4x_2 + 5x_3 \geq 12, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 10 \end{cases} \qquad (2.33)$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

ikkiyoqlama masala tuzish uchun uchinchi shartni unga ekvivalent bo'lgan ikki shart bilan almashtiramiz:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 4x_3 \geq 2, \\ x_1 + 4x_2 + 5x_3 \geq 12. \\ x_1 + x_2 + x_3 = 10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x_1 - x_2 + 4x_3 \geq 2, \\ x_1 + 4x_2 + 5x_3 \geq 12, \\ x_1 + x_2 + x_3 \geq 10, \\ x_1 + x_2 + x_3 \leq 10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x_1 - x_2 + 4x_3 \geq 2, \\ x_1 + 4x_2 + 5x_3 \geq 12, \\ x_1 + x_2 + x_3 \geq 10, \\ -x_1 - x_2 - x_3 \geq -10. \end{cases}$$

Demak, ikkiyoqlama masala quyidagicha bo'ladi.

$$z = 2y_1 + 12y_2 + 10y_3 - 10y_4 \to \max$$

$$\begin{cases} 2y_1 + y_2 + y_3 - y_4 \leq 1, \\ -y_1 + 4y_2 + y_3 - y_4 \leq 3, \\ 4y_1 + 5y_2 + y_3 - y_4 \leq 5, \end{cases} \qquad (2.34)$$

$$y_1, y_2, y_3, y_4 \geq 0$$

2.10.2. Ikkiyoqlama masalalarga oid teoremalar

Ikkiyoqlama masalalar jufti orasidagi bog'lanish ikkiyoqlama masalalarga oid teoremalarda o'z aksini topadi.

Teorema. *Agar o'zaro ikkiyoqlama masalalardan birining optimal yechimi mavjud bo'lsa, ikkinchisining ham optimal yechimi mavjud bo'lib*

$$z_{\max} = w_{\min}$$

o'rinli bo'ladi.

Agar o'zaro ikkiyoqlama masalalarning birortasidagi maqsad funksiyasi chegaralanmagan bo'lsa, ikkinchisining joiz sohasi bo'sh to'plam bo'ladi.

Bu teorema (2.28) va (2.29) ikkiyoqlama masalalarning bir vaqtda yechimi mavjud bo'lishi yoki bo'lmasligini ko'rsatadi va optimal yechimlarning ustma-ust tushishini ko'rsatadi. Bundan shu kelib chiqadiki, ikkiyoqlama masalalarning birini yechish bilan ikkinchisining ham yechimini topgan bo'lamiz. Binobarin, o'zaro ikkiyoqlama masalalarning qaysi biri oson bo'lsa, shunisini yechish maqsadga muvofiq. Masalan, (2.31) va (2.32) o'zaro ikkiyoqlama masalalarda (2.31) ni grafik usulda yechib, $z_{\max}=36$ ekanligini aniqlash mumkin. U holda teoremaga ko'ra (2.32) masalaning optimal yechimi ham $w_{\min}=36$ bo'ladi.

Bu teoremaning iqtisodiy ma'nosi shuni ko'rsatadiki, korxona uchun optimal reja bo'yicha mahsulot ishlab chiqarish yoki resurslarni optimal narxda sotishning farqi yo'q.

Endi e'tiborimizni teoremaning ikkinchi qismiga qaratamiz.

Quyidagi ikkiyoqlama masalani ko'rib chiqamiz:

Boshlang'ich masala	Ikkiyoqlama masala
$z=-8y_1+2y_2\to\min$	$w=x_1-x_2\to\max$
$\begin{cases}-y_1+2y_2\ge 1,\\ -2y_1+y_2\ge -1,\end{cases}$	$\begin{cases}x_1+2x_2\ge 8,\\ 2x_1+x_2\le 2,\end{cases}$
$y_1\ge 0,\ y_2\ge 0.$	$x_1\ge 0,\ x_2\ge 0.$

Masalani grafik yoki simpleks usulda yechishda $z_{\min}=-\infty$ ekanligini ko'rish mumkin. Ikkiyoqlama masalada joiz soha bo'sh to'plam ekanligini ko'rish qiyin emas.

Izoh. Teoremaning ikkinchi bandida keltirilgan xulosaning teskarisi umuman olganda to'g'ri emas. Ya'ni, boshlang'ich masalaning joiz sohasi bo'shligidan ikkiyoqlama masala maqsad funksiyasining chegaralanmaganligi kelib chiqmaydi.

Bu fikrning tasdig'ini quyidagi misolda ko'rish mumkin:

Boshlang‘ich masala

$$z = 3x_1 + 5x_2 \to \max$$

$$\begin{cases} 3x_1 - 4x_2 \le 5, \\ 2x_1 \qquad \le -7, \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$$

Ikkiyoqlama masala

$$w = 5y_1 - 7y_2 \to \min$$

$$\begin{cases} 3y_1 + 2y_2 \ge 3, \\ -4y \qquad \ge 5, \end{cases}$$

$$y_1 \ge 0,\ y_2 \ge 0.$$

Bu masalalarda joiz sohalar bo‘sh to‘plamdan iborat ekanligini tekshirish qiyin emas.

Quyidagi 2.40-jadvalda o‘zaro ikkiyoqlama masalalar orasidagi qiyosiy munosabatlarning ro‘y berish holatlari keltirilgan.

2.40-jadval

Boshlang‘ich / Ikkiyoqlama	Optimal yechim mavjud	Maqsad funksiyasi chegaralanmagan	Joiz soha bo‘sh to‘plam
Optimal yechim mavjud	V		
Maqsad funksiyasi chegaralanmagan			V
Joiz soha bo‘sh to‘plam		V	V

O‘zaro ikkiyoqlama masalalar orasidagi munosabat faqat ularning optimal yechimlari tengligi bilan chegaralanmaydi.

O‘zaro ikkiyoqlama bo‘lgan (2.29) va (2.30) masalalarni ko‘rib chiqamiz. Simpleks jadval yordamida yechishda qoldiq va ortiq o‘zgaruvchilar kiritar edik. Ya’ni (2.29) va (2.30) masala shartlari quyidagi ko‘rinishga keltiriladi.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n + s_1' = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n + s_2' = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n + s_m' = b_m, \end{cases} \tag{2.35}$$

$$
\begin{cases}
a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + \ldots + a_{m1}y_m - s_1'' = c_1, \\
a_{12}y_1 + a_{22}y_2 + \ldots + a_{m2}y_m - s_2'' = c_2, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
a_{1n}y_1 + a_{2n}y_2 + \ldots + a_{mn}y_m - s_n'' = c_n,
\end{cases}
\qquad (2.36)
$$

(2.35) va (2.36) sistemada $s_1', s_2', \ldots, s_m'$ boshlang'ich masala uchun qoldiq o'zgaruvchilar, $s_1'', s_2'', \ldots, s_n''$ esa ortiq o'zgaruvchilardir.

O'zaro ikkiyoqlama masalalar o'zgaruvchilari orasida 2.41-jadvalda ko'rsatilgan munosabatlar mavjud. Bu munosabat orqali biz ikkiyoqlama masala yechimi yordamida boshqasining yechimlarini topib olamiz.

2.41-jadval

Boshlang'ich masala o'zgaruvchilari											
Asosiy						Qoldiq					
x_1	x_2	…	x_j	…	x_n	s_1'	s_2'	…	s_i'	…	s_m'
$\updownarrow$	$\updownarrow$		$\updownarrow$		$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$		$\updownarrow$		$\updownarrow$
s_1''	s_2''		s_j''		s_n''	y_1	y_2		y_j		y_m
		…		…				…		…	
Ortiq						Asosiy					
Ikkiyoqlama masala o'zgaruvchilari											

Teorema. *Ikkiyoqlama masalaning optimal yechimlari quyidagi tengliklarni qanoatlantiradi.*

$$
y_i \cdot s_i' = 0, \qquad i = 1, \ldots, m,
$$
$$
x_j \cdot s_j'' = 0, \qquad j = 1, \ldots, n.
$$

Bu teoremadan quyidagi xulosalarni qilish mumkin.

1. i-resursning optimal narxi nolga teng bo'lmasa ($y_i^* > 0$), optimal rejada resurs to'la ishlatiladi ($s_i' = 0$).
2. Agar optimal rejada resurs to'la ishlatilmasa ($s_i' > 0$), u holda uning bahosi nolga teng ($y_i^* = 0$).
3. Agar j-mahsulot optimal rejaga kirsa ($x_j^* > 0$), u holda uning resursdagi bahosi zararsizdir ($s_j'' = 0$).
4. Agar j-mahsulot optimal resurs bahosida zararli bo'lsa ($s_j'' > 0$), u holda u optimal rejaga kirmaydi ($x_j^* = 0$).

(2.27) va (2.28) masalalarning oxirgi simpleks jadvalini keltiramiz.

2.42-jadval (2.27) masalaning oxirgi simpleks jadvalidir:

2.42-jadval

		x_1	x_2	s'_1	s'_2	s'_3	b
B	c_b	3	5	0	0	0	
s'_1	0	0	0	1	1/3	-1/3	2
x_2	5	0	1	0	1/2	0	6
x_1	3	1	0	0	-1/3	1/3	2
z_j		3	5	0	3/2	1	36
$c_j - z_j$		0	0	0	-3/2	-1	

2.42-jadvalga ko'ra yechim $x_1 = 2$, $x_2 = 6$, $s'_1 = 2$, $s'_2 = 0$, va $s'_3 = 0$ bo'ladi.

(2.27) ikkiyoqlama masalaning oxirgi simpleks jadvali 2.43-jadvalda keltirilgan (masala maksimallashtirishga keltirib yechilgan va sun'iy o'zgaruvchilar tushirib qoldirilgan).

2.43-jadval

		y_1	y_2	y_3	s''_1	s''_2	b
B	c_b	-4	-12	-18	0	0	
y_3	-18	1/3	0	1	-1/3	0	1
y_2	-12	-1/3	1	0	1/3	-1/2	3/2
z_j		-2	-12	-18	2	6	-36
$c_j - z_j$		-2	0	0	-2	-6	

2.43-jadvalga ko'ra ikkiyoqlama masalaning yechimlari: $y_1 = 0$, $y_2 = 3/2$, $y_3 = 1$, $s''_1 = 0$, va $s''_2 = 0$ bo'ladi. Biz ikkiyoqlama masalaning yechimlarini boshlang'ich masalaning oxirgi jadvalidan olishimiz mumkin. Buning uchun o'zaro ikkiyoqlama masalalarning o'zgaruvchilari orasidagi munosabatdan,

x_1	x_2	s'_1	s'_2	s'_3
s''_1	s''_2	y_1	y_2	y_3

birinchi jadvalning oxirgi satrini -1 ga ko'paytirsak, ikkiyoqlama masalaning yechimlarini topgan bo'lamiz. Demak, o'zaro ikkiyoqlama masalaning birortasini simpleks usulda yechib, ikkinchi masalaning yechimini topish mumkin.

Tayanch iboralar

Dasturlash, chiziqli dasturlash, matematik model, chiziqli dasturlash masalasining kanonik va standart shakllari, chegaraviy shartlar, maqsad funksiyasi, joiz soha, bazis yechim, optimal yechim, kamyob xomashyo, kamyob bo'lmagan xomashyo, ortiqcha shart, maqsad funksiyasi koeffitsiyentlarining turg'unligi, shartlarning o'ng tomonining turg'unligi, ikkiyoqlama qiymat, resurs statusi, bazis o'zgaruvchilar, simpleks usul, simpleks jadval, optimallik mezoni, M-usul, simpleks jadvaldan ikkiyoqlama qiymatni aniqlash, simpleks jadvaldan maqsad funksiyasi turg'unligini aniqlash, ikkiyoqlama masalalar, ikkiyoqlama baholar, ikkiyoqlama masalalarga oid teoremalar.

Savollar

1. Masalaning matematik modeli nima uchun kerak?
2. Chiziqli dasturlash masalalarining qanday ko'rinishlarini bilasiz?
3. Ishlab chiqarishni optimallashtirishda maqsad funksiyasi qanday ma'noni anglatadi?
4. Chiziqli dasturlash masalasidagi joiz soha nimani anglatadi?
5. Qanday hollarda chiziqli dasturlash masalasini grafik usulda yechish mumkin?
6. Maqsad funksiyasining sath chizig'i qanday ma'noni anglatadi?
7. Chiziqli dasturlash masalasini grafik usulda yechish jarayonida cheksiz ko'p yechimga ega bo'lishi, yechim mavjud bo'lmasligi va maqsad funksiyasining chegaralanmaganligi qanday aniqlanadi?
8. Chiziqli dasturlash masalasini grafik usulda yechishda resurs statusi qanday aniqlanadi?
9. Chiziqli dasturlash masalasini grafik usulda yechishda ikkiyoqlama qiymat nimani anglatadi?

10. Chiziqli dasturlash masalasini grafik usulda yechishda maqsad funksiyasining turg'unligi nimani anglatadi?
11. Chiziqli dasturlash masalasini grafik usulda yechishda shartlarning o'ng tomoning turg'unligi nimani bildiradi?
12. Chiziqli dasturlash masalasini simpleks usulda yechishda hal qiluvchi satr, hal qiluvchi ustun va hal qiluvchi element qanday aniqlanadi?
13. Chiziqli dasturlash masalasini simpleks usulda yechishda optimallik mezoni qanday aniqlanadi?
14. Simpleks jadvalda resurs statuslari qanday aniqlanadi?
15. Simpleks jadvalda resurs samaradorligi qanday aniqlanadi?
16. Simpleks jadvalda maqsad funksiyasi koeffitsiyentlarining turg'unligi qanday aniqlanadi?
17. Simpleks jadvalda shartlarning o'ng tomon turg'unligi qanday topiladi?
18. Chiziqli dasturlashning qanday masalalarida sun'iy usul (M-usul) ishlatiladi?
19. Ikkiyoqlama masalalarning iqtisodiy ma'nosi qanday?
20. Boshlang'ich masalaga ikkiyoqlama masala qanday tuziladi?
21. Biror boshlang'ich masalaning yechimi yordamida ikkiyoqlama masalaning yechimi qanday aniqlanadi?

Mashqlar

2.1. Fermerning 50 gektar yeri bo'lib, u yerga uch xil (sabzi, selder, petrushka) ekin ekishni rejalashtirmoqda. Sabzining bir gektarini yetishtirish uchun \$200 sarf qilinadi va \$60 foyda olinadi. Selderning bir gektarini yetishtirish uchun \$80 sarf qilinadi va \$20 foyda olinadi. Petrushkada bu ko'rsatkichlar mos ravishda \$140 va \$30 tashkil qiladi. Ko'katlarni yetishtirishdagi umumiy xarajat \$10,000 dan oshmasligi lozim. Maksimal foyda olish uchun har bir ekindan qanchadan ekish kerak bo'ladi? Masalaning matematik modelini tuzing.

2.2. Universitetning auditoriya va laboratoriyalari 5000 dan ko'p bo'lmagan talabalarga mo'ljallangan. Universitet o'z davlatining fuqarolarini qabul qilishi 4000 dan oshmasligi kerak. Chet el fuqarolarini qabul qilishda chegara yo'q. Universitetning o'qituvchilar salmog'i 440 kishidan iborat. Me'yorga ko'ra o'z davlatining 12 talabasiga va chet el talabalarining 10 tasiga bitta o'qituvchi to'g'ri keladi. Universitetning auditoriyalar hajmi 2800 o'rindan iborat. Shu davlatning 40% talabalari va chet ellik talabalarning 80%i auditoriyalarga joylashishi kerak. Yiliga universitet o'z davlatining har bir talabasi uchun davlatdan $2000, chet ellik talabalar uchun esa $3000 oladi. Universitet maksimal foyda olishi uchun qabul rejasi qanday bo'lishi kerak?

2.3. Chiziqli dasturlash masalalarini grafik usulda yeching.

1)
$$\begin{aligned}&\min\ 2x_1 + x_2\\ &x_1 + x_2 \geq 10,\\ &3x_1 + 5x_2 \leq 15\\ &x_1, x_2 \geq 0\end{aligned}$$
optimal yechimni toping

2)
$$\begin{aligned}&\max\ x_1 + x_2\\ &2x_1 + x_2 \leq 4,\\ &x_1 + 2x_2 \leq 3,\\ &x_1, x_2 \geq 0.\end{aligned}$$
optimal yechimni toping

2.4. Korxona velosipedning uch xil modelini ishlab chiqaradi. Har bir velosiped modellarini yig'ish, bo'yash va qadoqlash uchun talab qilinadigan vaqt (soatlarda) jadvalda keltirilgan.

	A model	B model	C model
Yig'ish	2	2,5	3
Bo'yash	1,5	2	1
Qadoqlash	1	0,75	1,25

Yig'ish, bo'yash va qadoqlash bo'limlarining imkoniyatlari mos ravishda 4006 soat, 2495 soat va 1500 soatga teng. Har bir A model velosipeddan tushadigan foyda $45, B modeldan $50 va C modeldan $55 ga teng. Maksimal foyda olish uchun har bir velosiped qanchadan ishlab chiqarilishi maqsadga muvofiq? Masalani matematik modelini tuzing va simpleks usulda yeching.

2.5. Quyidagi misollarni sun'iy o'zgaruvchi kiritish usuli bilan yeching.

1)
$$\begin{aligned}&\max\ 4x_1 + 8x_2\\ &2x_1 + 2x_2 \leq 10\\ &-x_1 + x_2 \geq 8\\ &x_1, x_2 \geq 0\end{aligned}$$

2)
$$\begin{aligned}&\max\ 2x_1 + x_2 + x_3\\ &4x_1 + 2x_2 + 2x_3 \geq 4\\ &2x_1 + 4x_2 \leq 20\\ &4x_1 + 8x_2 + 2x_3 \leq 16\\ &x_1, x_2, x_3 \geq 0\end{aligned}$$

III bob. BUTUN SONLI CHIZIQLI DASTURLASH

3.1. Masalaning qo'yilishi

Chiziqli dasturlashga tegishli ko'plab iqtisodiy masalalarda iqtisodiy ma'nosiga ko'ra yechim butun sonlardan iborat bo'lishi taqozo qilinadi. Masalan, ishlab chiqarish rejasini optimallashtirishda ishlab chiqariladigan mahsulotlar turi bo'linmaydigan turda bo'lishi mumkin.

Butun sonli chiziqli dasturlash masalasi quyidagicha beriladi:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, \quad i = 1,2,\dots,m \tag{3.1}$$

$$x_j \geq 0, \quad j=1,\ 2,\dots,\ n, \tag{3.2}$$

$$x_j \text{ butun sonlar} \tag{3.3}$$

shartlarni qanoatlantiruvchi va

$$Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \tag{3.4}$$

funksiyani maksimallashtiruvchi (minimal) qiymatlarni topish.

Butun sonli chiziqli dasturlash masalasini yechishning eng sodda usuli uzluksiz masalani yechib, uni butun songacha yaxlitlashdir. Albatta, bu usul yaxlitlashda qo'yilgan xatolik kam bo'lgan holda maqsadga muvofiq. Aks holda katta xatoliklarga yo'l qo'yilishi mumkin.

Fikrimizni quyidagi sodda misol orqali isbotlaymiz.

$$z=21x_1+11x_2 \to max$$
$$7x_1+4x_2 \leq 13,$$
$$x_1,x_2 \geq 0, \quad x_1,x_2 \text{ butun.}$$

Misolning butun sonli optimal yechimi $x_1=0,\ x_2=3,\ z_{max}=33$ (buni grafik usulda yechib ishonch hosil qilish mumkin (3.2 paragrafga qarang)). Yechimning butunligini inobatga olinmasa, yechim $x_1=13/7$, $x_2=0$, $z_{max}=39$ bo'ladi. Agar yechimni yaxlitlasak, $x_1=2$, $x_2=0$, $z_{max}=42$ bo'lib, yechim joiz sohadan chiqib ketadi. Agar yaxlitlash jarayonida yechimning kasr qismini tashlab yuborsak, $x_1=1$, $x_2=0$, $z_{max}=21$ natija chiqadi va bu optimal butun yechimdan ancha yiroqdadir.

Biz bu yerda butun sonli chiziqli dasturlash masalalarini yechishning grafik, Gomori (kesuvchi tekisliklar), tarmoqlar va chegaralar usuli bilan tanishamiz.

3.2. Grafik usul

Chiziqli dasturlash masalasida o'zgaruvchilar ikkiga teng bo'linganda grafik usulda yechish imkoniyati borligini ko'rgan edik. Ikki o'zgaruvchili butun sonli chiziqli dasturlash masalasini ham grafik usulda yechish imkoniyati mavjud.

Butun sonli chiziqli dasturlash masalasini grafik usulda yechishni quyidagi masalani yechish jarayonida ko'rsatamiz.

Firma ishlab chiqarishni kengaytirish maqsadida 19/3 m^3 maydon va dastgohlarni sotib olish uchun 10 ming pul birligi ajratdi. Firma ikki turdagi dastgohlarni sotib olish niyatida. Birinchi tur dastgohning bir komplekti 1 ming pul birligiga ikkinchi tur dastgohniki esa 3 ming pul birligiga teng. Birinchi turdagi dastgoh ishlab chiqarishni kuniga 2 birlikka, ikkinchi tur dastgoh esa 4 birlikka oshirishi ma'lum. Birinchi tur dastgohlarni joylashtirish uchun 2 m^2, ikkinchi tur dastgohlar uchun esa 1 m^2 maydon kerak bo'ladi. Har bir dastgohdan qanchadan sotib olinganda ishlab chiqarish samaradorligi eng yuqori bo'ladi? Masalaning matematik modeli quyidagicha bo'lishiga ishonch hosil qilish qiyin emas:

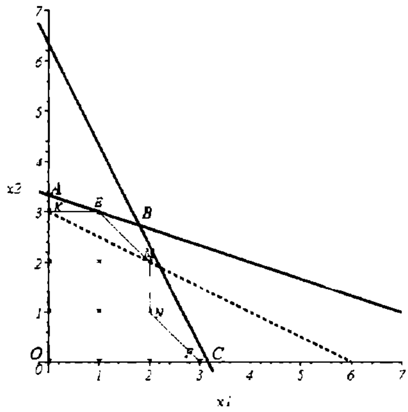
$$z = 2x_1 + 4x_2 \to \max \tag{3.5}$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \le 19/3, \\ x_1 + 3x_2 \le 10, \end{cases} \tag{3.6}$$

$$x_1, x_2 \ge 0 \tag{3.7}$$

$$x_1, x_2 \text{ butun sonlar} \tag{3.8}$$

(3.8) shart hisobga olinmaganda uzluksiz masalaning joiz sohasi OABC ko‘pburchakdan iborat (3.1-rasmga qarang). Punktirli chiziq orqali maqsad funksiyalaridan birining ($z=2x_1+4x_2=12$) grafigi keltirilgan. Grafik usuldan foydalanib uzluksiz masalaning optimal yechimi B nuqta ekanligini ko‘rish qiyin emas. Demak, $x_1=9/5$, $x_2=41/15$ va $z_{max}=218/14$. Bu yechim (3.5)-(3.7) shartlarni qanoatlantirib, (3.8) shartni qanoatlantirmaydi. Joiz sohada ko‘rsatilgan 12 butun nuqtalar (3.8) shartni qanoatlantiradi. Masalaning (3.8) shartni qanoatlantiruvchi yechimini topish uchun OABC ko‘pburchak o‘rniga barcha butun nuqtalarni o‘z ichiga oluvchi OKEMNF ko‘pburchakni qaraymiz. Bu shunday ko‘pburchakki, uning uchlari butun sonlardan iborat. OKEMNF ko‘pburchakdagi (3.5) maqsad funksiyasining maksimal qiymati masalaning yechimidan iborat bo‘ladi.



3.1-rasm

Rasmdan ko‘rinib turibdiki, optimal nuqta E nuqtadan iborat. Shunday qilib, masalaning yechimi $x_1=1$, $x_2=3$ va $z_{max}=14$.

3.3 Gomori usuli

Gomori tomonidan taklif qilingan bu usul butun sonli chiziqli dasturlash masalasining matematik modelida qatnashgan o‘zgaruvchilar soni ixtiyoriy bo‘lganda ham ishlatilishi mumkin.

Avvalo, uzluksiz masala yechiladi. Ya'ni (3.3) shartni inobatga olmasdan masalani simpleks usulda yechamiz. Agar olingan natija butun bo'lsa, jarayon to'xtatiladi va izlangan natijaga erishamiz. Agar natija butun bo'lmasa, unda joiz sohaning barcha butun nuqtalarini o'z ichiga oladigan va topilgan uzluksiz masalaning yechimini o'z ichiga olmaydigan qo'shimcha shart kiritiladi. Bu qo'shimcha shart to'g'ri *kesuvchi tekislik* deyiladi. Geometrik jihatdan bu kesuvchi tekislik uzluksiz masalaning joiz sohasini tashkil qiluvchi ko'pyoqni shunday kesadiki, unda uzluksiz masalaning barcha butun nuqtalari saqlanib qoladi.

Yangi qo'shimcha shartni inobatga olgan holda masala takror yechiladi. Chekli qadamlardan keyin butun yechimga kelamiz yoki shartlarning birgalikda emasligini kuzatamiz. (3.1)-(3.4) masalani (3.3) shartni hisobga olmasdan simpleks usulda yechib quyidagi tengliklarga kelamiz:

$$x_i + \sum_{j=m-1}^{n} a_{ij}^{*} x_j = b_i^{*},\ i = 1,2,\dots,m \tag{3.9}$$

Bu yerda $x_i,\ i = 1,2,\dots,m$ oxirgi simpleks jadvaldagi bazis o'zgaruvchilar, $x_i,\ i = m+1, m+2,\dots,n$ nobazis o'zgaruvchilardir, b_i^{*} esa bazis o'zgaruvchilarning qiymati.

Ba'zi belgilashlar kiritamiz. $\{c\}$ belgi sonning kasr qismini bildiradi, ya'ni $\{c\} = c - [c]$, $[c]$ sonning butun qismi. Sonning butun qismi deb o'zidan katta bo'lmagan eng katta butun songa aytiladi. Masalan, $c = 2\frac{1}{3}$ bo'lsa, $\{c\} = 2\frac{1}{3} - 2 = 1/3$; $c = -2\frac{1}{3}$ bo'lsa, $[c] = -3$ va $\{c\} = -2\frac{1}{3} - (-3) = \frac{2}{3}$ bo'ladi. Ma'lumki, $c \ge [c]$, $0 \le \{c\} < 1$.

Kiritilgan belgilashlarga ko'ra (3.9) ni quyidagicha yozish mumkin:

$$x_i - [b_i^{*}] + \sum_{j=m+1}^{n} [a_{ij}^{*}] x_j = \{b_i^{*}\} - \sum_{j=m+1}^{n} \{a_{ij}^{*}\} x_j \tag{3.10}$$

Faraz qilaylik, x_i bazis yechim butun bo'lsin. U holda (10) tenglikning o'ng tomoni

$$d=\{b_i^*\}-\sum_{j=m+1}^{n}\{a_{ij}^*\}x_j \qquad (3.11)$$

butun son. $0\le\{b_i^*\}<1$, $0\le\{a_{ij}^*\}<1$ bo'lgani uchun esa $d\le 0$ yoki $d\ge 1$ bo'lishi mumkin. Agar $d\ge 1$ bo'lsa, (3.11) dan

$$\{b_i^*\}=d+\sum_{j=k+1}^{n}\{a_{ij}^*\}x_j\ge 1+\sum_{j=k+1}^{n}\{a_{ij}^*\}x_j\ge 1$$

kelib chiqadi. Bu esa $0\le\{b_i^*\}<1$ shartga zid. Shuning uchun $d\le 0$ bo'ladi, ya'ni

$$\sum_{j=m+1}^{n}\{a_{ij}^*\}x_j\ge\{b_i^*\} \qquad (3.12)$$

Butun bo'lmagan yechim (3.12) shartni qanoatlantirmaydi. Haqiqatan, nobazis komponentlar uchun $x_j=0,\ j=m+1,m+2,...,n$ bo'lgani uchun (3.12) tengsizlikning chap tomoni nolga teng bo'lib o'ng tomoni $0<\{b_i^*\}$ shartni qanoatlantiradi.

Shunday qilib, (3.12) qo'shimcha shartdan iborat bo'ladi.

Agar natijalarning bir nechtasi uchun yechim butun bo'lmasa, (3.12) qo'shimcha shart eng katta butun 5) $z_{max}=3$, $x_1=1$, $x_2=0$; $x_3=0$; 6) $z_{min}=50$, $x_1=0$, $x_2=0$; $x_3=5$ yechimdan tanlanadi. Agar (3.1), (3.2), (3.4) va (3.12) yaxshilangandan so'ng yana yechimda kasrli yechim uchrasa, jarayon butun natija olingunga qadar takrorlanadi.

(3.5)-(3.8) masalani Gomori usuli bilan yechishni ko'rib chiqamiz. Masalani simpleks usulda yechib, 3.1-jadvalni hosil qilamiz.

3.1-jadval

		x_1	x_2	s_1	s_2	b
B	c_b	2	4	0	0	
x_1	2	1		3/5	-1/5	9/5
x_2	4		1	-1/5	2/5	41/15
	z_j	2	4	2/5	6/5	218/15
	c_j-z_j	0	0	-2/5	-6/5	

Ikki yechim ham butun emas. x_1 ning kasr qismi katta bo‘lgani uchun (12) shart bizning misolda quyidagicha bo‘ladi.

$$\left\{\frac{3}{5}\right\}s_1+\left\{-\frac{1}{5}\right\}s_2\ge\left\{\frac{9}{5}\right\}$$

yoki

$$\frac{3}{5}s_1+\frac{4}{5}s_2\ge\frac{4}{5} \qquad (3.13)$$

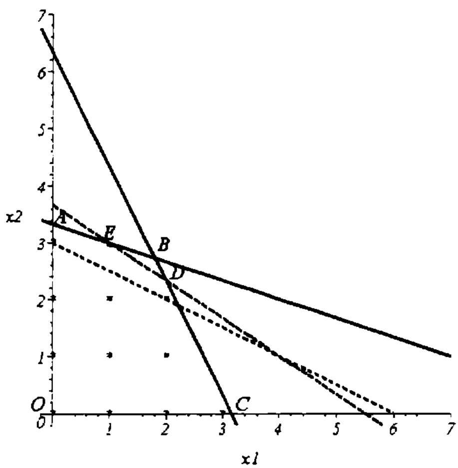
(3.13) tengsizlikni grafik usul bilan taqqoslash maqsadida jadvaldan quyidagilarni aniqlaymiz.

$$x_1+\frac{3}{5}s_1-\frac{1}{5}s_2=\frac{9}{5},\quad x_2-\frac{1}{5}s_1+\frac{2}{5}s_2=\frac{41}{15}$$

Bu sistemadan s_1 va s_2 larni x_1, x_2 orgali ifodalaymiz: $s_1=-2x_1-x_2+\frac{19}{3}$, $s_2=10-3x_2-x_1$. U holda (3.13) tengsizlik

$$2x_1+3x_2\le 11 \qquad (3.14)$$

ko‘rinishga keladi. (3.14) tengsizlikni (3.6) shartlarga qo‘shib joiz sohani ifodalaymiz (3.2-rasm).



3.2-rasm

3.2-rasmdan ko'rinib turibdiki, (3.14) shart qo'shilganda boshlang'ich joiz sohadan EBD uchburchak kesib tashlanganligini ko'rsatadi. Shuning uchun ham, ba'zan bu usul *kesuvchi tekisliklar usuli* deb ham yuritiladi. Natijada yangi joiz soha: OAEDC ko'pburchak hosil bo'ladi va yechim yangi sohada izlanadi.

(3.14) tengsizlikni oxirgi jadvalga kiritish uchun sun'iy o'zgaruvchi kiritib, quyidagi 3.2-jadvalga kelamiz.

3.2-jadval

		x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	a	b
B	c_b	2	4	0	0	0	-M	
x_1	2	1		3/5	-1/5		0	9/5
x_2	4	0	1	-1/5	2/5		0	41/15
a	-M	0	0	3/5	4/5	-1	1	4/5
z_j		2	4	-3M/5	-4M/5	M	-M	
$c_j - z_j$		0	0	3M/5	4M/5	-M	0	

Simpleks usulni yechish qoidasiga ko'ra quyidagi oxirgi 3.3-jadvalga kelamiz.

3.3-jadval

		x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	b
B	c_b	2	4	0	0	0	
x_1	2	1	0	0	-1	1	1
x_2	4	0	1	0	2/3	-1/3	3
s_1	0	0	0	1	4/3	-5/3	4/3
z_j		2	4	0	2/3	2/3	14
$c_j - z_j$		0	0	0	-2/3	-2/3	

Asosiy o'zgaruvchilarning qiymati butun bo'lgani uchun butun sonli yechimga erishamiz: $x_1 = 1$, $x_2 = 3$ va $z_{max} = 14$. Bu natija grafik usulda olingan natijaga mos keladi.

3.4. Tarmoqlar va chegaralar usuli

Bu usulda boshlang'ich masala ketma-ket tartibli variantlarga ajratilib, variantlarning keraksizini tashlab yuborib, maqsadga muvofiqligi saqlanadi. Maqsadga muvofiq deb tanlangan masala takroran tarmoqlarga ajratiladi va maqsadga muvofig'i tanlanadi va h.k. Jarayon optimal butun yechim olingunga qadar davom ettiriladi.

Tarmoqlar usulining algoritmi quyidagicha.

Avvalo, Gomori usuli kabi o'zgaruvchilarning butunligi inobatga olinmasdan masala simpleks usulda yechiladi. Aytaylik, bu yechim X_0 bo'lsin. Agar yechim komponentlari ichida kasr son bo'lmasa, yechim aniqlangan va $z_{max} = z(X_0)$ bo'ladi.

X_0 yechimlari ichida kasrli sonlar bo'lsa, tartibli keyingi rejani aniqlashga o'tiladi. Aytaylik, x_{i_0} o'zgaruvchi kasrli bo'lsin va $\lfloor x_{i_0} \rfloor = k$. Quyidagi ikki chiziqli dasturlash masalasini qaraymiz.

I	II
$z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$	$z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$
$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i,$ $i = 1,2,\ldots,m$	$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i,$ $i = 1,2,\ldots,m$
$x_{i_0} \le k,$	$x_{i_0} \ge k+1,$
$x_j \ge 0,$	$x_j \ge 0,$
$j = 1,2,\ldots,n$	$j = 1,2,\ldots,n$

I va II masalalarni simpleks usul bilan yechamiz. Tabiiyki, bu yerda quyidagi hollardan birortasi uchrashi mumkin.

1. Masalalardan biri yechimga ega emas, ikkinchisining esa optimal butun yechimi mavjud. U holda bu yechim boshlang'ich masalaning optimal yechimi bo'ladi.
2. Masalalardan biri yechimga ega emas, ikkinchisining esa optimal butun bo'lmagan yechimi mavjud. U holda yuqoridagi kabi masalani ikki tarmoqqa ajratamiz.

3. Ikki masala ham yechimga ega. Shulardan biri optimal butun yechimga ega. Ikkinchisining esa optimal yechimida kasrli o'zgaruvchilar bor. Ikkala masalaning ham maqsad funksiyasini topib, ularni solishtiramiz. Agar butun yechimli masalaning maqsad funksiyasining qiymati kasrli masalaning maqsad funksiyasining qiymatidan katta bo'lsa, butun sonli masalaning yechimlari boshlang'ich masalaning yechimi bo'ladi. Aks holda, yuqoridagidek, yechimi kasrli bo'lgan masalani yana ikki qismga ajratamiz.
4. Ikki masala ham kasrli yechimga ega. Maqsad funksiyasining qiymati katta bo'lgan masalani tanlab, undan yuqoridagidek ikki masala tuzamiz.

Shunday qilib, bayon qilingan algoritm daraxtni eslatadi. Bu daraxt uchi (3.1),(3.2) va (3.4) ning optimal yechimidan iborat. x_r dan chiqqan tarmoq uchlari esa I va II masalaning tarmoq uchlaridir. Bularning har birining tarmoq uchlari mavjud. Shu bilan birga, har bir qadamda maqsad funksiyasining qiymati eng katta uch tanlanadi. Agar jarayonning muayyan qadamida butun yechim olingan bo'lib, maqsad funksiyasining qiymati boshqa tarmoqdagidan katta bo'lsa, olingan yechim boshlang'ich masalaning yechimi bo'ladi.

1-misol. Tarmoqlar usulini (3.5)-(3.8) misol bilan ko'rib chiqamiz.

Maqsad funksiyasining eng kichik qiymati sifatida (0,0) nuqtani olamiz $z_0=z(0,0)=0$.

1-bosqich. (3.5)-(3.7) masalani simpleks usul bilan yechamiz: $x_1 = 9/5$, $x_2 = 41/15$ va $z_{\max} = 218/14$. Ikkala yechim komponentlari kasrli. Birortasini, masalan, birinchisini olib, ikki masala tuzamiz ($1 < x_1 < 2$ oraliq hisoblashdan chiqariladi):

2-masala	3-masala
$z = 2x_1 + 4x_2 \to \max$	$z = 2x_1 + 4x_2 \to \max$
$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \le 19/3, \\ x_1 + 3x_2 \le 10, \end{cases}$	$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \le 19/3, \\ x_1 + 3x_2 \le 10, \end{cases}$
$x_1 \le 1$,	$x_1 \ge 2$,
$x_1, x_2 \ge 0$	$x_1, x_2 \ge 0$
x_1, x_2 butun	x_1, x_2 butun

2-bosqich. 2 yoki 3-masaladan ixtiyoriy birini simpleks usulda yechamiz. 2-masalani yechib, $x_1 = 1$, $x_2 = 3$ va $z_{max} = 14$ natijaga erishamiz. 3-masalaning yechimi: $x_1 = 2$, $x_2 = 7/3$ va $z_{max} = 40/3$. $14 > 40/3$ bo'lganligi uchun 2-masalaning yechimi boshlang'ich masalaning yechimidir.

2-misol. Quyidagi misolni tarmoqlar usulida yechamiz.

$$z = 3x_1 + x_2 \to \max$$

$$\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 \le 18, \\ x_1 + 2x_2 \le 6, \\ 0 \le x_1 \le 5, \\ 0 \le x_2 \le 4, \end{cases} \qquad (3.15)$$

x_1, x_2 butun

1-bosqich. Masalani simpleks usulda yechamiz: $z_{max} = 13{,}5$; $x_1 = 4{,}5$; $x_2 = 0$. x_1 kasrli bo'lgani uchun joiz sohadan $4 < x_1 < 5$ maydonni yo'qotamiz. Natijada boshlang'ich masala quyidagi ikki masalaga tarmoqlanadi.

2-masala

$$z = 3x_1 + x_2 \to \max$$

$$\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 \le 18, \\ x_1 + 2x_2 \le 6, \\ 0 \le x_1 \le 4, \\ 0 \le x_2 \le 4, \end{cases}$$

x_1, x_2 butun

3-masala

$$z = 3x_1 + x_2 \to \max$$

$$\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 \le 18, \\ x_1 + 2x_2 \le 6, \\ 5 \le x_1 \le 5, \\ 0 \le x_2 \le 4, \end{cases}$$

x_1, x_2 butun

2-bosqich. Ikki masaladan birini simpleks usul bilan yechamiz. 3-masala simpleks usul bilan yechilganda yechimning mavjud emasligini ko'rish mumkin. 2-masalani simpleks usul bilan yechib, quyidagi natijaga kelamiz: $z_{max} = 38/3$; $x_1 = 4$; $x_2 = 2/3$.

3-bosqich. x_2 kasr bo'lganligi uchun $0 < x_2 < 1$ maydonni yo'qotamiz. Natijada 2-masala ikki tarmoqqa bo'linadi.

4-masala

$$z = 3x_1 + x_2 \to \max$$

$$\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 \le 18, \\ x_1 + 2x_2 \le 6, \\ 0 \le x_1 \le 4, \\ 0 \le x_2 \le 0. \end{cases}$$

x_1, x_2 butun

5-masala

$$z = 3x_1 + x_2 \to \max$$

$$\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 \le 18, \\ x_1 + 2x_2 \le 6, \\ 0 \le x_1 \le 4. \\ 1 \le x_2 \le 4. \end{cases}$$

x_1, x_2 butun

4-bosqich. 4-masalani simpleks usulda yechamiz: $z_{\max} = 12$; $x_1 = 4$; $x_2 = 0$. Natija butun bo'lgani uchun $z_0 = 12$. 5-masalani simpleks usulda yechamiz: $z_{\max} = 12{,}25$; $x_1 = 3{,}75$; $x_2 = 1$.

5-masala maqsad funksiyasining qiymati 4-masala maqsad funksiyasining qiymatidan katta bo'lgani uchun hisoblashni davom ettiramiz. 5-masalani ikki tarmoqqa ajratamiz.

6-masala

$$z = 3x_1 + x_2 \to \max$$

$$\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 \le 18, \\ x_1 + 2x_2 \le 6, \\ 0 \le x_1 \le 3. \\ 1 \le x_2 \le 4. \end{cases}$$

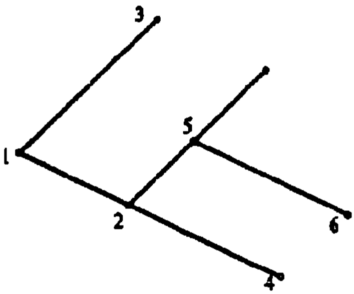
x_1, x_2 butun

7-masala

$$z = 3x_1 + x_2 \to \max$$

$$\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 \le 18, \\ x_1 + 2x_2 \le 6, \\ 4 \le x_1 \le 4, \\ 1 \le x_2 \le 4, \end{cases}$$

x_1, x_2 butun



3.3-rasm

5-bosqich. 7-masalada joiz soha bo'sh to'plam. 6-masalaning yechimi: $z_{\max} = 10{,}5$; $x_1 = 3$; $x_2 = 1{,}5$. 6-masalaning maqsad funksiyasining qiymati $z_0 = 12$ dan kichik bo'lgani uchun jarayonni tugallaymiz. Demak, boshlang'ich masalaning optimal butun yechimi 4-bosqichda topilgan 4-masalaning yechimidan iborat $z_{\max} = 12$; $x_1 = 4$; $x_2 = 0$ (3.3-rasm).

Izoh. Tarmoqlar usulini ketma-ket qo'llash jarayonida keyingi tarmoq masalasi oldingidan bitta shartning o'zgarishi hosil qilinishini kuzatish qiyin emas. Shuning uchun keyingi tarmoq masalasini simpleks usul bilan yechish jarayonida yechimni boshidan boshlamay, balki oldingi tarmoqda olingan masalaning oxirgi jadvaliga o'zgartirish kiritib, hisoblashni davom ettirish maqsadga muvofiq.

Tayanch iboralar

Butun sonli dasturlash, butun sonly dasturlashni grafik usulda yechish, kesuvchi tekisliklar usuli, Gomori usuli, chegaralar va tarmoqlar usuli

Savollar

1. Qanday masalalar butun sonli chiziqli dasturlash masalasi deyiladi?
2. Gomori usulining mohiyati nimadan iborat?
3. Tarmoqlar va chegaralar usuli qanday amalga oshiriladi?

Mashqlar

3.1. Quyidagi masalalarni grafik, Gomori, tarmoqlar va chegaralar usulida yeching.

1) $z = 3x_1 + 2x_2 \; max$
$2x_1 + 2x_2 \le 9,$
$3x_1 + 4x_2 \le 18,$
$x_1, x_2 \ge 0$ va butun.

2) $z = 5x_1 + 4x_2 \; min$
$3x_1 + 2x_2 \ge 5,$
$2x_1 + 3x_2 \ge 7,$
$x_1, x_2 \ge 0$ va butun.

3.2 Firma uch turdagi mahsulot ishlab chiqaradi. Birlik mahsulotni ishlab chiqarishga ketadigan vaqt va xomashyo miqdorlari jadvalda keltirilgan.

Mahsulot turi	Vaqt (soat)	Xomashyo (kg)
1	3	4
2	4	3
3	5	6
Kunlik imkoniyat	100	100

Har bir mahsulotdan keladigan daromad mos ravishda 25, 30 va 45 dollarga teng. Uchinchi turdagi mahsulot ishlab chiqariladigan bo'lsa, kunlik me'yor 5 birlikdan kam bo'lmasligi talab qilinadi. Butun sonli chiziqli dasturlash masalasiga keltiring va yeching.

IV bob. CHIZIQLI VA BUTUN SONLI CHIZIQLI DASTURLASH MASALALARINI KOMPYUTERDA YECHISH

Yuqorida bayon qilingan chiziqli dasturlash masalalarini yechishning grafik va simpleks usullari bilan tanishdik. Chiziqli dasturlash masalasi ikki o‘zgaruvchili bo‘lganda uni grafik usulda yechish mumkin. O‘zgaruvchilar soni uchdan yuqori bo‘lganda universal simpleks usul qo‘llaniladi. Agar masalaning matematik modelidagi o‘zgaruvchilar soni yetarli katta bo‘lganda simpleks usulda yechish texnik qiyinchiliklarga olib keladi. Shuning uchun ham, maxsus kompyuter dasturlari ishlab chiqilgan. Hozirgi vaqtda chiziqli dasturlash masalalarini yechishning juda ko‘p paketlari mavjud. Bunday dasturlash paketlari o‘zgaruvchilar soni o‘n minglab bo‘lganda ham masalani yechish imkonini beradi.

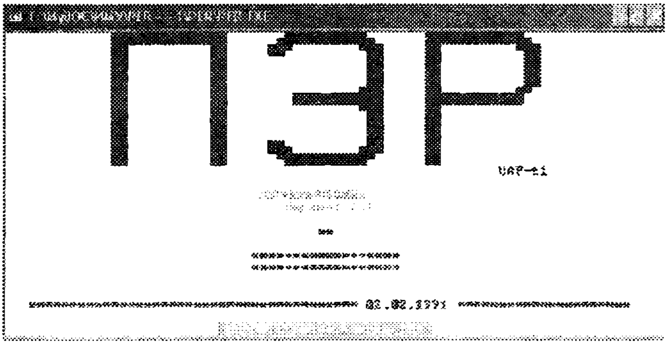
Hisoblash paketlarining maxsus **(PER, TORA, LP88, LINGO, LINDO, Lp_solve, LP-Optimizer, SoPlex, SPLP** va boshqalar) va umumiy **(Excel, MATLAB, MathCad, MATHEMATICA, Maple)** turlari bor.

Biz ayrim hisoblash paketlari bilan tanishib o‘tamiz. Har qanday dasturlash paketlari bir necha fayllardan iborat bo‘ladi. Paketdagi fayllardan biri asosiy bo‘lib, u hisoblash dasturini ishga tushiradi (exe fayl). Paketlardan foydalanish qiyinlik tug‘dirmaydi.

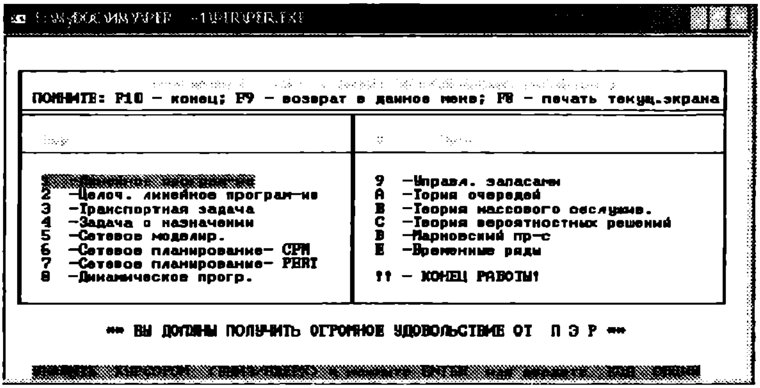
4.1. Maxsus hisoblash paketlari

*Bu mavzuda **PER, TORA** va **LINGO** maxsus hisoblash paketlari bilan tanishamiz.*

PER(ПЭР) paketida ko‘rsatmalar ruscha bayon qilingan. Bu paket DOS tizimida ishlaydi va paketdagi **per.exe** fayli yordamida ishga tushiriladi. Bu paket iqtisodiy masalalarning ko‘p jabhalarini o‘z ichiga oladi. PER paketi ishga tushirilganda quyidagi darcha ochiladi:

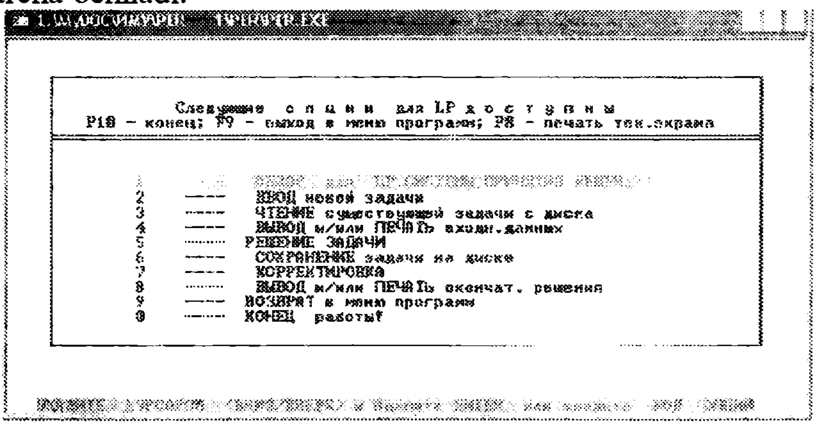


Ixtiyoriy tugma bosilganda ekranda quyidagi darcha hosil bo'ladi.



Darchada aks etgan menyulardan kerakli bo'lim tanlanadi.

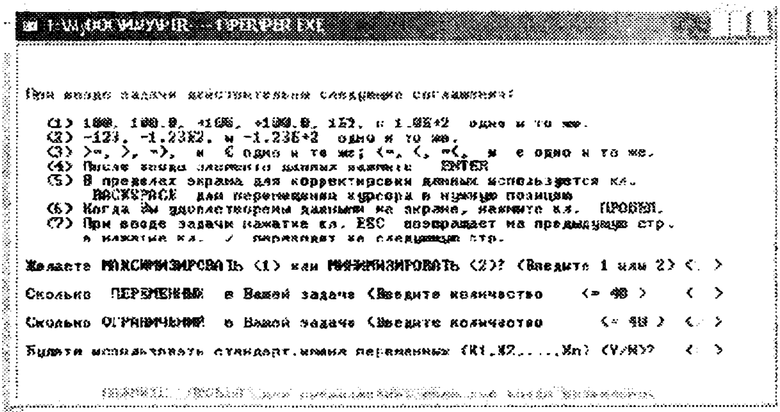
Masalan, chiziqli dasturlash bo'limini tanlasak, quyidagi darcha ochiladi.



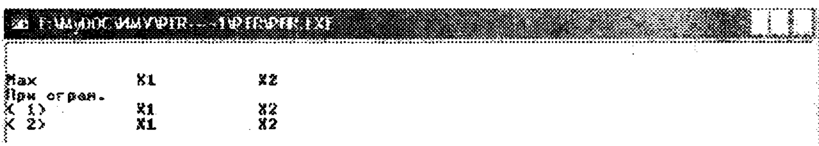
Misol. Quyidagi misolni **PER**da yechamiz.

$$\begin{aligned} &Max\ \ 2x_1+3x_2 \\ &x_1+2x_2 \leq 10, \\ &2x_1+x_2 \leq 14, \\ &x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned} \qquad (4.1)$$

Menyuning ”ВВОД новой задачи” satrini tanlab, ”Enter” tugmasi bosilganda

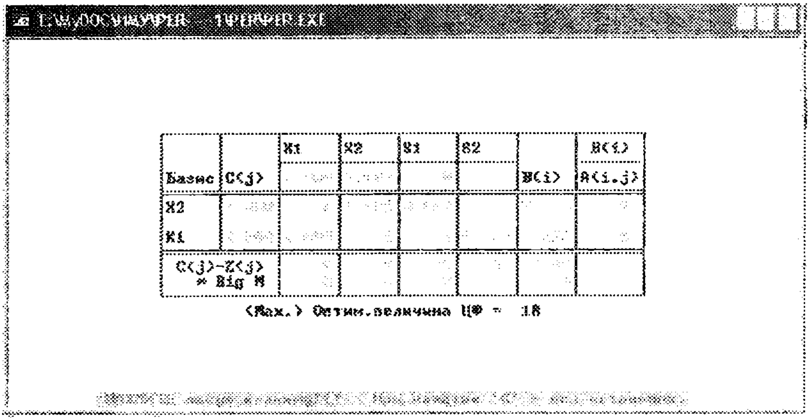


darcha hosil bo‘ladi. Bu darchada keltirilgan savollarga javob berilsa, keyingi darchada misolning koeffitsiyentlari kiritiladi:

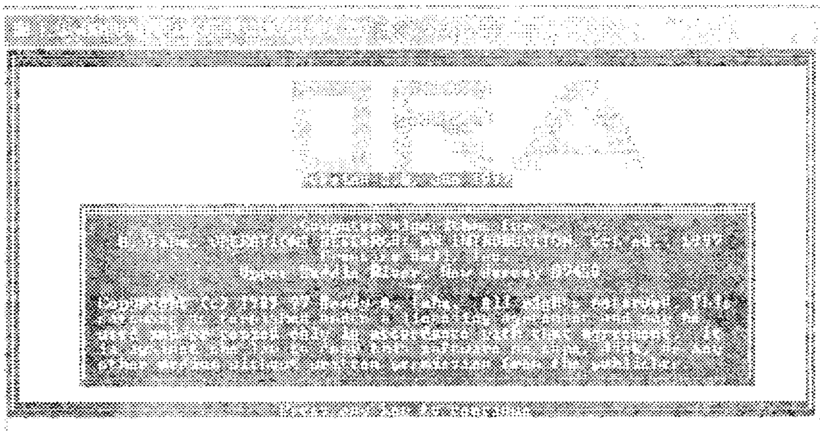


Chiziqli dasturlash bo‘limidagi “Решение задачи” satrini faollashtirib, “Enter” tugmasi bosilsa, keyingi darchada oxirgi yechimni keltirish talab qilinsa, quyidagi darcha hosil bo‘ladi.

Bu jadvaldan misolning yechimi $x_1=6$, $x_2=2$ ekanligini va maqsad funksiyasining qiymati 18 ga tengligi ko‘rish mumkin. **PER**da chiziqli dasturlash masalasini simpleks usulda yechish jarayonida kelib chiqadigan barcha jadvallarni ekranga chiqarish imkoniyati mavjud.



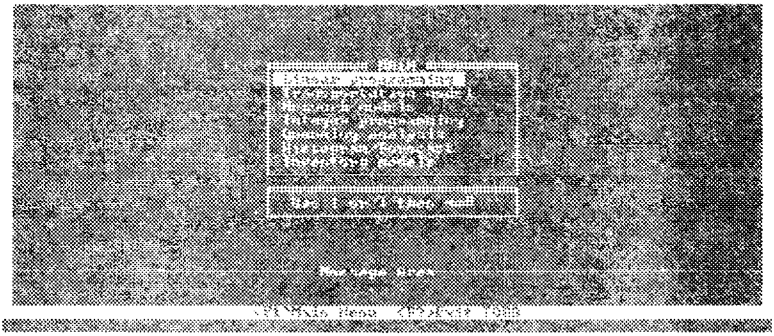
TORA. Bu paket ham **PER** paketining imkoniyatlariga yaqin bo'lib, DOS tizimida ishlaydi. Paketdagi **tora.exe** fayli yordamida ishga tushirilganda ekranda quyidagi darcha hosil bo'ladi:



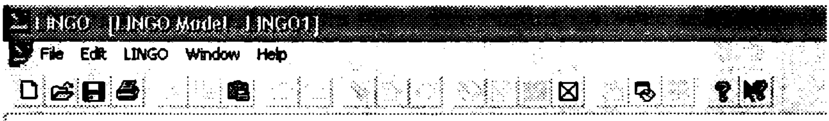
Ixtiyoriy tugmani bosish natijasida ekranda quyidagi darcha hosil bo'ladi.

Menyudan kerakli bo'limni tanlab, keyingi bosqichga o'tiladi. Keyingi darcha menyusida keltirilgan savollarga javob berish yordamida kerakli natijaga erishish mumkin.

LINGO. Bu paket ham iqtisodiy masalalarni yechishga asoslangan. Paket kompyuterga o'rnatilgandan so'ng windows tizimida ishga tushiriladi. Bu paketni http://www.lindo.com/ inter-



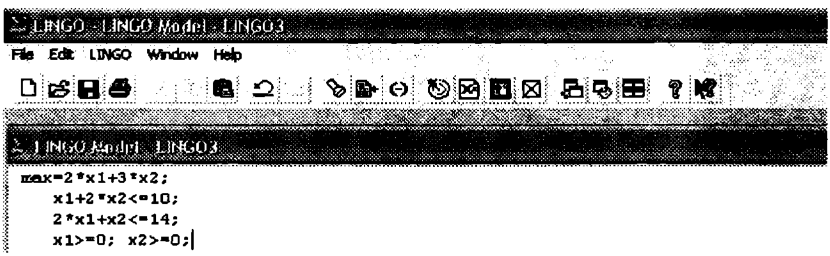
net manzilidan olish mumkin. LINGO paketi kompyuterga sozlangandan so‘ng maxsus ikonka yordamida ishga tushiriladi. Paket ishga tushirilganda ekranning asosiy qismining ko‘rinishi quyidagicha bo‘ladi.



Help menyusidagi tayyor misollar paket tizimini tezda o‘zlashtirishga imkon yaratadi.

Misol. (4.1) misolni LINGO paketida yechamiz.

LINGO paketi ishga tushirilgandan so‘ng misol quyidagi ko‘rinishda teriladi:



Misol terib bo‘lingach LINGO menyusidagi Solution faollashtirilganda misolning yechimi quyidagi ko‘rinishda ekran darchasida namoyon bo‘ladi:

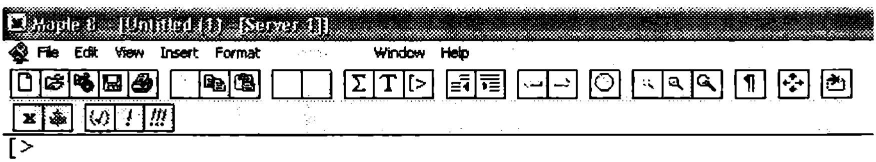
```
Global optimal solution found.
Objective value:                          18.00000
Total solver iterations:                         2


                   Variable        Value        Reduced Cost
                         X1     6.000000            0.000000
                         X2     2.000000            0.000000

                        Row  Slack or Surplus     Dual Price
                          1     18.00000            1.000000
                          2     0.000000            1.333333
                          3     0.000000           0.3333333
                          4     6.000000            0.000000
                          5     2.000000            0.000000
```

Demak, keltirilgan misolning optimal yechimi $x_1=6$, $x_2=2$ bo'lib, maqsad funksiyasining maksimal qiymati 18 ga teng ekan.

4.2. Maple paketida ishlash

*Bu mavzu universal paketlardan biri bo'lgan **Maple** paketida ishlashga bag'ishlangan.*

Maple (www.mapleapps.com) dasturi universal bo'lib, matematikaning barcha jabhalarini o'z ichiga oladi. Bu dasturning ko'p variantlari mavjud. Biz Maple-8 variantiga to'xtalib o'tamiz. Maple dasturi ishga tushirilganda ekranda quyidagi manzara namoyon bo'ladi:



Qizil rangda aks etadigan > belgisidan so'ng Maple buyruqlarini kiritish mumkin. Maple buyrug'ini tahrirlash qoidasi Windows tizimidagi kabi amalga oshiriladi. Agar buyruq oxiri nuqtali vergul (;) bilan tugallansa, natija ekranda qayd qilinadi, agar ikki nuqta bilan (:) tugallansa, natija ekranda qayd qilinmaydi.

Matritsa, determinant va chiziqli tenglamalar sistemasi

Maple paketi yordamida matritsa, determinant va chiziqli tenglamalar sistemasi qanday yechilishi bilan tanishamiz. Buning uchun, avvalo, **with(linalg):** buyrug'i yordamida kerakli dastur xotiraga joylashtiriladi.

Vektor va matritsalarni kiritish quyidagicha bajarilishi mumkin:

> **x:=vector([3,2,1]);**

$$x := [3, 2, 1]$$

> **A:=matrix([[5,2],[2,3]]);**

$$A := \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

> **B:=matrix([[1,-1,2],[1,4,-2],[6,1,4]]);**

$$B := \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & -2 \\ 6 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

Matritsaning determinantini hisoblash quyidagicha amalga oshiriladi.

> **d:=det(B);**

$$d := -12$$

Teskari matritsani hisoblash:

> **g:=inverse(B);**

$$g := \begin{bmatrix} \frac{-3}{2} & \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{4}{3} & \frac{2}{3} & \frac{-1}{3} \\ \frac{23}{12} & \frac{7}{12} & \frac{-5}{12} \end{bmatrix}.$$

A1 matritsani

> **A1:=matrix([[5,2],[2,3],[1,3]]);**

$$A1 := \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 3 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

B matritsaga ko'paytirish qoidasi:

> **M:=multiply(B,A1);**

$$M := \begin{bmatrix} 5 & 5 \\ 11 & 8 \\ 36 & 27 \end{bmatrix}$$

Teskari matritsani quyidagicha topish imkoniyati ham mavjud:
> **evalm(B^(-1));**

$$\begin{bmatrix} \frac{-3}{2} & \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{4}{3} & \frac{2}{3} & \frac{-1}{3} \\ \frac{23}{12} & \frac{7}{12} & \frac{-5}{12} \end{bmatrix}$$

Quyidagi tenglamalar sistemasini yechish uchun

$$5x + 2y = 9$$
$$2x + 2y = 6$$

Ushbu matritsalarni tayyorlab

¬ **A:=matrix([[5,2],[2,2]]);**

$$A := \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

¬ **C:=matrix(2,1,[9,6]);**

$$C := \begin{bmatrix} 9 \\ 6 \end{bmatrix}$$

quyidagi Maple buyrug'i sistemaning yechimini beradi:

¬ **linsolve(A,C);**

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Matritsa rangini quyidagi buyruq amalga oshiradi:

¬ **rank(A);**

$$2$$

Matritsalarning xos son va xos vektorlarini aniqlash uchun quyidagi buyruqlar ishlatiladi:
> **eigenvals(A);**

$$6, 1$$

```
> eigenvectors(A);
```

$$[1, 1, \{[1, -2]\}], [6, 1, \{[2, 1]\}]$$

Chiziqli dasturlash masalasini Mapleda yechish

Maple dasturi ishga tushirilgandan so‘ng quyidagi buyruq yordamida chiziqli dasturlash masalalarini yechish imkoniyati yaratiladi.

```
> with(simplex):
```

Misol. Quyidagi misolni **Maple**da yechishning buyruqlarini ko‘ramiz.

$$z = 2x_1 + 5x_2 + 3x_3 \to \max$$

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 \ge 20, \\ 2x_1 + 4x_2 + x_3 = 50 \end{cases}$$

$$x_1, x_2, x_3 \ge 0.$$

```
> z:=2*x1+5*x2+3*x3;
```

$$z := 2\,x1 + 5\,x2 + 3\,x3$$

```
> maximize(z,{x1-
2*x2+x3>=20,2*x1+4*x2+x3<=50},NONNEGATIVE);
```

$$\{x1 = 0, x2 = 0, x3 = 50\}$$

Maximize buyrug‘i ishga tushirilganda natijani olish mumkin. Quyidagi buyruq yordamida maqsad funksiyasining optimal qiymatini aniqlash mumkin.

```
> subs(%,z);
```

$$150$$

Demak, maqsad funksiyasining optimal qiymati 150 ga teng ekan.

Butun sonli chiziqli dasturlash masalasini Maple dasturida yechish

Biz shu o‘rinda **Maple** paketida butun sonli chiziqli dasturlash masalalarini yechishga oid misollar keltiramiz. Avvalo, quyidagi masalaning

$$z = 2x_1 + 4x_2 \to \max$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \le 19/3, \\ x_1 + 3x_2 \le 10, \end{cases}$$
$$x_1, x_2 \ge 0$$
$$x_1, x_2 \text{ butun sonlar}$$

yechimining butunligi hisobga olinmagan yechimini topamiz. Buning uchun **Maple**da quyidagi buyruqni kiritamiz:

```
> with(simplex):
>maximize(2*x1+4*x2,{2*x1+x2<=19/3,x1+3*x2<=10},NO
NNEGATIVE);
```

Bu buyruqni ishga tushirgandan song keyingi satrda

$$\{x2 = \frac{41}{15}, x1 = \frac{9}{5}\}$$

ko‘rinishdagi javob chiqadi. Bundan ko‘rinadiki, javoblar butun emas. Masalaning butun yechimini topish maqsadida quyidagi buyruqlarni kiritamiz:

```
> z[1]:=0:
> for x1 from 0 to 2 do
for x2 from 0 to 3 do  2*x1+4*x2;
if 2*x1+4*x2>z[1] and 2*x1+x2<=19/3 and x1+3*x2<=10
then
z:=[2*x1+4*x2,x1,x2] fi; od; od;
  ¬ z;
```

Bu buyruqlarni bajargandan so‘ng keyingi satrda $[14, 1, 3]$ qiymatlar hosil bo‘ladi. Demak, masalaning yechimi $z_{max} = 14,\ x_1 = 1,\ x_2 = 3$ bo‘ladi.

Quyidagi masalani **Maple** dasturida yechamiz.

Masala. Samolyotga besh xil turdagi yuk joylashtiriladi. Birlik yukning turi, og‘irligi, hajmi va qiymati jadvalda keltirilgan.

Yuk turi	Birlik yuk og‘irligi (tonna)	Yuk hajmi, (kub. m)	Birlik yuk qiymati ($100)
1	5	1	4
2	8	8	7

3	3	6	6
4	2	5	5
5	7	4	4

Samolyotning maksimal yuk ko'tarish qobiliyati 112 tonna bo'lib, 109 m^3 hajmdagi yuklarni sig'dira oladi. Qaysi turdagi yuklardan qanchadan samolyotga joylashtirganda yuklarning umumiy qiymati eng yuqori bo'ladi?

Masalaning matematik modelini tuzamiz. x_1, x_2, x_3, x_4 va x_5 o'zgaruvchilar orqali yuk turlarining miqdorlarini belgilaymiz. U holda masalaning matematik modeli quyidagicha yoziladi:

$$Z=4x_1+7x_2+6x_3+5x_4+4x_5 \to max$$
$$5x_1+8x_2+3x_3+2x_4+7x_5\le 112$$
$$x_1+8x_2+6x_3+5x_4+4x_5\le 109$$
$$x_i\ge 0,\ i=1,2,3,4,5$$
$$x_i\ge 0,\ (i=1,2,3,4,5)\ butun.$$

Masala **Maple**da o'zgaruvchilarning butun bo'lishini inobatga olmagan holda, quyidagi buyruq yordamida yechiladi.

>maximize(4*x1+7*x2+6*x3+5*x4+4*x5,{5*x1+8*x2+3*x3+2*x4+7*x5<=112,x1+8*x2+6*x3+5*x4+4*x5<=109}, NONNEGATIVE);

Natija quyidagicha bo'ladi.

$$\{x2=0, x3=0, x5=0, x4=\frac{433}{23}, x1=\frac{342}{23}\}$$

Butun sonli yechimni topish uchun esa quyidagi buyruqlar ketma-ketligini kiritamiz:

```
> z[1]:=0:
> for x1 from 0 to 15 do
for x2 from 0 to 4 do for x3 from 0 to 4 do for x4 from 0 to 19
do for x5 from 0 to 4 do 4*x1+7*x2+6*x3+5*x4+4*x5;
if 4*x1+7*x2+6*x3+5*x4+4*x5>z[1] and
5*x1+8*x2+3*x3+2*x4+7*x5<=112 and
x1+8*x2+6*x3+5*x4+4*x5<=109 then
z:=[4*x1+7*x2+6*x3+5*x4+4*x5,x1,x2,x3,x4,x5] fi; od; od;
od;od;od;
> z;
```

Bu buyruq ishlatilgandan so‘ng esa ekranda

[151, 14, 0, 0, 19, 0]

qiymatlar qayd qilinadi.

Demak, birinchi tur yuklardan 14 birlik to‘rtinchi turdagi yuklardan 19 birlik samolyotga joylashtirilganda undagi mahsulotning qiymati eng yuqori bo‘lib, u $15100 teng bo‘ladi.

Tayanch iboralar

Maxsus hisoblash paketlari, umumiy hisoblash paketlari, **PER, TORA, LINGO, Maple** paketlari.

Savollar

1. Qanday turdagi dasturlash paketlari mavjud?
2. Chiziqli dasturlash masalalarini qanday paketlarda yechish mumkin?
3. PER va TORA paketlardagi farq nimada?
4. PER paketini qanday ishga tushiriladi?
5. TORA paketini ishga tushirish qanday amalga oshiriladi?
6. Chiziqli dasturlash masalalarini Maple 8 paketida yechish qanday hal qilinadi?

Mashqlar

Kompaniya yuk ortuvchi mashina va yuk tashuvchi aravalarni ishlab chiqaradi. Har ortuvchi mashinadan $80 va har bir aravadan $40 foyda ko‘radi. Kompaniyaning metallni qayta ishlash, payvandlash va yig‘ish bo‘limlari mavjud. Bo‘limlarning oylik quvvati va birlik mexanizmlarni ishlab chiqarish uchun sarf qilinadigan vaqtlari (soatlarda) jadvalda keltirilgan.

Bo‘limlar	Yuk ortuvchi mashina	Yuk tashuvchi arava	Oylik quvvati
Metallni qayta ishlash	6	4	2400
Payvandlash	2	3	1500
Yig‘ish	9	3	2700

Foyda maksimal bo'lishi uchun yuk ortuvchi mashina va yuk tashuvchi aravalar qanchadan ishlab chiqarish kerak? Masalaning natematik modelini quring va kompyuterda yeching.

4.2. Avtomobil zavodi «Lochin» va «Pahlavon» rusumdagi mashinalar ishlab chiqaradi. Zavodda 1000 ta tajribasiz va 800 ta tajribali ishchi ishlaydi. Har bir ishchining haftalik ish soati 40 ga teng. «Lochin» rusumdagi mashinani ishlab chiqarish uchun 30 s. tajribasiz va 50 s. tajribali ishchi soatlari sarf qilinadi; «Pahlavon» rusumdagi mashinani ishlab chiqarish uchun esa 40 s. tajribasiz va 20 s. tajribali ishchi soatlari sarf qilinadi. «Lochin» rusumidagi har bir mashina uchun $500 lik, «Pahlavon» rusumidagi har bir mashina uchun esa $1500 lik xomashyo sarf qilinadi. Haftalik umumiy xarajat $900000 dan oshmasligi lozim. Mashinalarni yetkazib beruvchi ishchilar haftada besh kun ishlab, har kuni 210 dan ko'p bo'lmagan mashinalarni yetkazib beradi.

«Lochin» rusumidagi har bir avtomobildan tushadigan foyda $1000, «Pahlavon»dan esa $500. Haftada har bir rusumdagi mashinalardan qanchadan ishlab chiqarganda zavod eng ko'p foyda ko'radi. Masalaning matematik modelini tuzing va kompyuterda yeching.

4.3. Fermerning 15 gektar yeri bo'lib, u yerga ikki xil A va B o'simliklar ekish niyatida. Yerning bir gektarini A turdagi o'simlik ekishga tayyorlash uchun bir kun, B turdagi o'simlik ekishga tayyorlash uchun esa ikki kun kerak bo'ladi. Yerni ekishga tayyorlash uchun yilda 240 kun bor. A turdagi o'simlik hosilini yig'ishtirish uchun 0,3 kun, B turdagi o'simlik hosilini yig'ishtirish uchun esa 0,1 kun kerak bo'ladi. Hosilni yig'ishtirish 30 kundan oshmasligi kerak. Agar A turdagi o'simlikning har gektaridan olinadigan foyda $140, B turdagi o'simlikdan esa $235 bo'lsa, maksimal foyda olish uchun har bir turdagi o'simlik qanchadan ekilishi kerak? Matematik modelni tuzing va kompyuterda yeching.

4.4. Quyidagi misollarni kompyuterda yeching.

1) $5x_1 + 7x_2 - 6x_3 + 9x_4 + 8x_5 \to \max$

$0{,}7x_1 + 0{,}9x_2 + 1{,}5x_3 + 2{,}3x_4 + 1{,}8x_5 \le 50000$

$0{,}4x_1 + 1{,}1x_2 - 0{,}5x_3 + 1{,}3x_4 - 2{,}8x_5 \ge 32000$

$0{,}5x_1 + 1{,}8x_3 + 0{,}7x_4 + 2x_5 \le 40000$

$2{,}2x_1 - 1{,}4x_2 - 0{,}8x_3 + 0{,}9x_4 = 15000$

$x_j \ge 0 \ (j = 1,2,\ldots,5)$

2) $x_1 + 4x_3 + 8x_4 - 12x_5 \to \min$

$x_1 + 9x_2 + x_3 - 4x_4 = 250$

$0{,}4x_1 + x_2 - 5x_3 + 3x_4 + 8x_5 \le 460$

$0{,}5x_1 + 10x_2 - 8x_3 + 6x_4 + 2x_5 \le 190$

$11x_2 - 8{,}5x_3 + 3x_4 + 2x_5 = 200$

$x_j \ge 0 \ (j = 1,2,\ldots,5)$

3) $4x_1 + 6x_2 - 14x_3 + 49x_5 \to \min$

$21x_1 + 9x_2 - 2x_4 - 12x_5 \ge 58$

$110x_2 - 60x_3 + 80x_4 - 45x_5 = 290$

$5x_2 + 27x_3 - 14x_4 + x_5 \le 72$

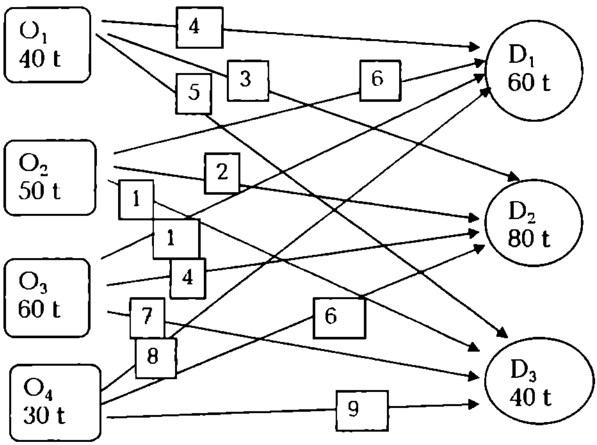
$87x_1 - 6{,}4x_2 + 130x_4 = 140$

$x_j \ge 0 \ (j = 1,2,\ldots,5)$

5.1. Masalaning qo'yilishi va uning matematik modeli. Transport masalasining yechimi haqidagi teoremalar

Bu mavzuda transport masalasiga olib keladigan holat tushuntiriladi. Masalaning matematik modelini tuzish jarayoni misol orqali bayon qilinib, umumlashtirilib, umumiy ko'rinishdagi transport masalasining matematik modeli keltirib chiqariladi. Transport masalasining yechimi haqidagi teorema keltiriladi.

Faraz qilaylik, to'rtta ombordan (O_1, O_2, O_3, O_4) uchta do'konlarga (D_1, D_2, D_3) bir xil mahsulotlarni jo'natish rejalashtirilmoqda. Ombordagi mahsulot miqdorlari va do'konlarning talablari hamda birlik mahsulotni eltish xarajati 5.1-rasmda keltirilgan.



5.1-rasm

Har bir ombordan do'konlarga mahsulotlar eltishni shunday rejalashtirish kerakki, unda xarajat minimal bo'lsin.

Barcha ombordagi mahsulot miqdori 40+50+60+30=180 t, do'konlarning umumiy talabini qondirish uchun esa 60+80+40=180 t miqdorda mahsulot kerak. Ya'ni omborlardagi mahsulot miqdori bilan do'kon talablari teng. Bunday masalalarga **yopiq transport masalasi** deyiladi.

Masalaning matematik modelini quramiz. $x_{ij}, i=1,\dots,4,\ j=1,2,3$ orqali i-ombordan j-do'konga eltish lozim bo'lgan mahsulot miqdorini (tonnalarda) belgilaymiz. Bizning misolda noma'lumlar 3x4=12 ta ($x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{21}, x_{22}, x_{23}, \ x_{31}, x_{32}, x_{33}, x_{41}, x_{42}, x_{43}$). Ombordagi mahsulotlarni do'konlarga eltishdagi umumiy xarajat

$$f = 4x_{11} + 3x_{12} + 5x_{13} + 6x_{21} + 2x_{22} + 1x_{23} +$$
$$10x_{31} + 4x_{32} + 7x_{33} + 8x_{41} + 6x_{42} + 9x_{43} \to \min$$

yoki qisqacha

$$f = \sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{3} c_{ij}x_{ij} \to \min$$

bu yerda

$$C = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 5 \\ 6 & 2 & 1 \\ 10 & 4 & 7 \\ 8 & 6 & 9 \end{pmatrix}$$

birlik mahsulotni eltishdagi *xarajat* matritsasi.

Shartlar ikki turga bo'linadi:

1) Har bir ombordagi mahsulotlarni to'la eltish;
2) Har bir do'kon talablarini to'la qondirish.

$x_{11} + x_{12} + x_{13}$ yig'indi birinchi ombordan do'konlarga eltish lozim bo'lgan mahsulot miqdorini ifodalaydi. Birinchi ombordagi imkoniyat 40 tonnani tashkil qilganligi uchun va ombordagi mahsulot miqdori to'la jo'natiladigan taqdirda

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} = 40 \tag{5.1}$$

shartni hosil qilamiz. Xuddi shuningdek, qolgan ombordagi mahsulot miqdorlarini to'la eltish lozimligi shartidan

$$\begin{aligned} x_{21} + x_{22} + x_{23} &= 50 \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} &= 60 \\ x_{41} + x_{42} + x_{43} &= 30 \end{aligned} \tag{5.2}$$

tenglamalarga ega bo'lamiz. Har bir do'kon talablarini qondirish shartidan esa

$$\begin{aligned} x_{11}+x_{21}+x_{31}+x_{41}&=60\\ x_{12}+x_{22}+x_{32}+x_{42}&=80\\ x_{13}+x_{23}+x_{33}+x_{43}&=40, \end{aligned} \tag{5.3}$$

tengliklar hosil bo'ladi. O'zgaruvchilar mahsulot miqdorini ifodalaganligi uchun

$$x_{ij}\geq 0, i=1,\dots,4,\ j=1,2,3 \tag{5.4}$$

bo'ladi.

Shunday qilib, masalaning matematik modeli:

$$f=4x_{11}+3x_{12}+5x_{13}+6x_{21}+2x_{22}+1x_{23}+$$
$$10x_{31}+4x_{32}+7x_{33}+8x_{41}+6x_{42}+9x_{43}$$

funksiyaning (5.1)-(5.4) shartlarni qanoatlantiruvchi minimumini topishdan iborat.

Bu natijalar m ta ishlab chiqarish punktlaridagi ishlab chiqarish hajmlari a_i ($i=1,2,\dots m$) larga, va n ta iste'molchi punktlardagi iste'mol hajmlari b_j ($j=1,2,\dots,n$) larga teng bo'lgan va

$$\sum_{i=1}^{m}a_i=\sum_{j=1}^{n}b_j \tag{5.5}$$

shartni qanoatlantiruvchi transport masalalariga umumlashtirilishi mumkin. Agar c_{ij} bitta mahsulotni i-ishlab chiqarish punktidan j-iste'molchi punktiga tashish uchun sarflangan xarajat bo'lsa, masala quyidagi

$$\begin{aligned} x_{11}+x_{12}+\dots+x_{1n}&=a_1\\ x_{21}+x_{22}+\dots+x_{2n}&=a_2\\ &\dots\dots\dots\\ x_{m1}+x_{m2}+\dots+x_{mn}&=a_m\\ x_{11}+x_{21}+\dots+x_{m1}&=b_1\\ x_{12}+x_{22}+\dots+x_{m2}&=b_2\\ &\dots\dots\dots\\ x_{1n}+x_{2n}+\dots+x_{mn}&=b_n \end{aligned} \tag{5.6}$$

munosabatlarni qanoatlantiruvchi va

$$C = c_{11}x_{11} + c_{12}x_{12} + \ldots + c_{mn}x_{mn}$$

funksiyani minimallashtiruvchi $x_{ij} \geq 0$ larni topishdan iborat bo'ladi. (5.6) munosabatlarni qisqaroq quyidagicha ifodalash mumkin.

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i > 0 \quad (i = 1,\ldots,m) \tag{5.7}$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j > 0 \quad (j = 1,\ldots,n) \tag{5.8}$$

shartlarni qanoatlantiruvchi va

$$C = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \tag{5.9}$$

funksiyaga minimal qiymat beruvchi $x_{ij} \geq 0$ larni topish.

Transport masalasi ham chiziqli dasturlash masalasi bo'lganligi uchun simpleks usulda yechish mumkin. Lekin transport masalasi shartlarining maxsus ko'rinishda ekanligi simpleks usulning soddalashishiga olib keladi. Simpleks usulning transport masalasiga tatbiqi *taqsimot masalasi* deyiladi. Simpleks usul kabi o'zgaruvchilar bazis va nobazis o'zgaruvchilarga ajratiladi.

Yopiq transport masalasining yechimi mavjudligi haqidagi teorema.

Har qanday yopiq transport masalasi yechimga ega.

Buning uchun berilgan shartlarda (7) va (8) sistemani qanoatlantiruvchi yechim mavjudligini va (9) maqsad funksiyasining chegaralanganligini ko'rsatamiz.

Isboti. $\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j = A$ bo'lsin. U holda $x_{ij} = a_i b_j / A$ $(i = 1,2,\ldots,m;\ j = 1,2,\ldots,n)$ (7) va (8) sistemani qanoatlantiradi, haqiqatan

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = \sum_{j=1}^{n} \frac{a_i b_j}{A} = \frac{a_i}{B}\sum_{j=1}^{n} b_j = \frac{a_i}{A}A = a_i,$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = \sum_{i=1}^{m} \frac{a_i b_j}{A} = \frac{b_j}{B}\sum_{i=1}^{m} a_i = \frac{b_j}{A}A = b_j.$$

(9) maqsad funksiyasidan $M = \max c_{ij}$ deb belgilash kiritsak,

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \le M\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = A\sum_{i=1}^{m} a_i = M \cdot A$$

tengsizlik kelib chiqadi.

Xuddi shuningdek, $m = \min c_{ij}$ deb olsak,

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \ge m\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = A\sum_{i=1}^{m} a_i = m \cdot A$$

kelib chiqadi.

Demak, $m \cdot A \le C \le M \cdot A$,
ya'ni maqsad funksiyasi chegaralangan.

Transport masalasida bazis o'zgaruvchilarning soni transport masalasining shartlarini ifodalovchi sistemaning ((5.7), (5.8) maksimal chiziqli bog'liq bo'lmagan tenglamalar soni) rangiga teng. (5.7) va (5.8) sistemaning rangi to'g'risidagi xulosa quyidagi teoremada aks etgan.

Teorema. *(5.9) shartni qanoatlantiruvchi (5.7) va (5.8) sistemaning rangi m+n-1 ga teng.*

Isboti. Haqiqatan ham, (5.9) shart bajarilganda (5.7) va (5.8) sistema tenglamalarining chiziqli bog'langanligini ko'rish qiyin emas.

(5.7) dan

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} x_{ij},$$

va (5.8) dan

$$\sum_{j=1}^{n} b_j = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} x_{ij},$$

tengliklar kelib chiqadi. (5.9) shartga ko'ra birinchi va ikkinchi tengliklarning chap tomonlari teng, o'ng tomonlarining tengligi o'z-o'zidan ravshan. Demak, (5.8) va (5.9) sistema tenglamalari chiziqli bog'langan.

Shuning uchun $r \le n + m - 1$ bo'ladi.

Endi $r \ge n + m - 1$ tengsizlik o'rinli ekanligini ko'rsatamiz. Buning uchun chiziqli algebradagi quyidagi faktga suyanamiz. Agar chiziqli tenglamalar sistemasining biror k ta o'zgaruvchilarni qolgan o'zgaruvchilar orqali ifodalsh imkoniyati bo'lsa, bunday sistemaning rangi k dan kichik bo'lmaydi.

Masalan, (5.7) sistemaning birinchi ustun va birinchi satridagi elementlarni qolgan x_{ij} elementlar orqali ifodalashni ko'raylik $i=2,3,\dots,m$, $j=2,3,\dots,n$. x_{1j} uchun (j=2,3,…,n) (5.8) dan

$$x_{1j} = b_j - \sum_{i=2}^{m} x_{ij}. \tag{5.12}$$

Birinchi ustunning har bir x_{i1} o'zgaruvchisi uchun $i=2,3,\dots,m$, (7) dan

$$x_{i1} = a_i - \sum_{j=2}^{n} x_{ij}.$$

x_{11} ifodasini topish uchun (5.7) ning birinchi tenglamasidan foydalanamiz:

$$x_{11} = b_1 - \sum_{i=2}^{m} x_{1j}. \tag{5.13}$$

(5.13) ning o'ng tomoniga (5.12) dan foydalanib qiymatlarini qo'yib chiqsak, x_{11} uchun kerakli ifodani topamiz.

Shunday qilib, $m+n-1$ o'zgaruvchini qolgan $mn-n-m+1$ o'zgaruvchi orqali ifodalash mumkin. Ya'ni sistemaning rangi $r \geq n+m-1$ shartni qanoatlantiradi.

Olingan natijalardan $r=n+m-1$ ekanligi kelib chiqadi. Shuning uchun joiz bazis yechimda $m+n-1$ ta bazis o'zgaruvchi ishtirok etadi.

Transport masalasining yechish jarayonini jadvallar ketma-ketligi ko'rinishida ifodalash qulay. Jadval strukturasi 5.1-jadvalda keltirilgan.

5.1-jadval

c_{11} x_{11}	c_{12} x_{12}	…	c_{1n} x_{1n}	a_1
c_{21} x_{21}	c_{22} x_{22}	…	c_{1n} x_{1n}	a_2
…	…	…	…	…
c_{m1} x_{m1}	c_{m2} x_{m2}	…	c_{mn} x_{mn}	a_m
b_1	b_2	…	b_n	

Jadvalning satrlari ishlab chiqarish shoxobchalarini (omborlarni), ustunlar esa iste'mol shoxobchalarini (do'konlarni) ifodalaydi. Har bir satrning oxirgi katagida shoxobchaning zaxiradagi mahsulot miqdori, ustunning oxirgi katagida iste'molchilarning talabi keltirilgan. Jadvalning har bir katagida (oxirgi satr va oxirgi ustundagi kataklar bundan mustasno) i-ishlab chiqarish shoxobchasidan j-iste'molchiga eltish lozim bo'lgan mahsulot miqdori va birlik mahsulotni eltish uchun ketadigan xarajat ko'rsatilgan.

Jadvalning $m+n-1$ katagi bazis kataklar bo'lib, qolganlari *erkin* (bo'sh, *nobazis*) kataklar hisoblanadi. Simpleks usuldagi kabi har bir keyingi jadvalni qurish jarayonida erkin kataklardan biri bazisga kiritilib, ixtiyoriy bazis katak bazisdan chiqariladi. Ixtiyoriy erkin katakni bazisga kiritish maqsad funksiyasining yaxshilanishi tomon amalga oshiriladi.

Transport masalasini yechish jarayoni ikki bosqichdan iborat:

- boshlang'ich bazisni aniqlash;
- optimal yechimni topish.

5.2. Boshlang'ich bazisni aniqlash usullari

Boshlang'ich bazisni aniqlashning ikki usuli bilan tanishamiz : «shimoli-g'arb katagi» usuli va minimal xarajatlar usuli. Bu usullar transport masalasidagi boshlang'ich taqsimotni aniqlashga yordam beradi. Shu bilan birga bu mavzuda boshlang'ich bazisni aniqlash jarayonida ro'y beradigan maxsus hollar ham bayon qilinadi.

5.2.1. Boshlang'ich bazisni aniqlashning «shimoli-g'arb katagi» usuli

Bu usulda ta'minotchi zaxirasidagi mahsulotlar ketma-ket iste'molchilarga taqsimlanadi. Har bir qadamda biror ta'minotchi zaxirasi mahsulotlari to'la taqsimlash yoki iste'molchi talabini to'la qondirishdan iborat bo'ladi. Har bir q-qadamdagi taqsimlanmagan zaxira miqdorlarini $a_i^{(q)}$ bilan, qondirilmagan talab miqdorlarini $b_j^{(q)}$ belgilaymiz. Boshlang'ich jadvalni hosil qilish jarayoni yuqori chap katakdan boshlanib (shimoli-g'arb katagi), $a_i^{(0)} = a_i$, $b_j^{(0)} = b_j$ deb olinadi. Har bir joriy i-satr j-ustundagi katak uchun mahsulot miqdori $x_{ij} = \min\{a_i^{(q)}, b_j^{(q)}\}$ ga teng deb olinadi. Shundan so'ng, taqsimlanmagan zaxira miqdori va qondirilmagan talab miqdorlari x_{ij} ga kamaytiriladi:

$$a_i^{(q+1)} = a_i^{(q)} - x_{ij}, \quad b_j^{(q+1)} = b_j^{(q)} - x_{ij}$$

Tabiiyki, har bir qadamdan so'ng, $a_i^{(q+1)} = 0$, $b_j^{(q+1)} = 0$ shartlarning birortasi albatta bajariladi. Agar birinchi shart o'rinli bo'lsa, i-shoxobchadagi zaxira miqdori tugallanib, $i+1-$ shoxobchaning zaxira miqdori taqsimlashga o'tiladi, ya'ni ustun bo'yicha keyingi katakka o'tiladi. Agar $b_j^{(q+1)} = 0$ bo'lish j-iste'molchining talabi to'la qondirilganligini bildiradi va shu satr bo'yicha keyingi katakka o'tish lozimligini ko'rsatadi. Ajratilgan katak joriy hisoblanib, yuqoridagi jarayon qaytariladi.

"Shimoli-g'arb katagi" usulida yuqorida keltirilgan masalaning boshlang'ich bazisini topamiz. Bu misol uchun hisoblash jadvalining ko'rinishi 5.2-jadval kabi bo'ladi.

5.2-jadval

4	3	5	40
6	2	1	50
10	4	7	60
8	6	9	30
60	80	40	

x_{11} o'zgaruvchiga mumkin bo'lgan eng katta qiymatni beramiz. Ya'ni (1,1) katakka ("shimoli-g'arb katagi") $x_{11} = \min\{40,60\} = 40$ qiymatni beramiz. Shu bilan birinchi ta'minotchining imkoniyati tugallanadi va birinchi satr kataklari keyingi jarayonlarda ishtirok etmaydi. To'ldirilgan kataklarni tutash chiziq bilan, bo'sh kataklarni esa punktir chiziqlar bilan ajratamiz. Yangi "shimoli-g'arb katagi" (2,1) bo'ladi. Bu katakka mumkin bo'lgan eng katta qiymatni beramiz. Birinchi iste'molchining 60 birlik talabidan 40 birligi qondirilganligi uchun $x_{21} = \min\{20,50\} = 20$ bo'ladi. Birinchi iste'molchi ham to'la qondirilganligi uchun keyingi hisoblashlarda birinchi ustun ham e'tibordan chetda qoladi. (2,1) katakni uzluksiz chiziq bilan, (3,1) va (4,1) kataklarni punktir chizig'l bilan belgilaymiz. Qolgan kataklarda ham xuddi shunday yo'l tutsak, 5.3-jadvaldagi taqsimotni hosil qilamiz.

5.3-jadval

4 40	3	5	40
6 20	2 30	1	50
10	4 50	7 10	60
8	6	9 30	30
60	80	40	

5.3-jadvalda bazis kataklar soni $m+n-1=4+3-1=6$ ga teng. Boshlang'ich jadvalga ko'ra umumiy xarajat miqdori $f=4\cdot 40+6\cdot 20+2\cdot 30+4\cdot 50+7\cdot 10+9\cdot 30=880$ ga teng.

"Shimoli-g'arb katagi" usulining asosiy kamchiliklaridan biri xarajat koeffitsiyentlarini inobatga olmagan holda topiladi. Minimal xarajatlar usulida topilgan boshlang'ich taqsimot optimal yechimga yaqin bo'ladi

5.2.2. Boshlang'ich jadvalni tuzishning minimal xarajatlar usuli

Bu usulning asosiy g'oyasi shundan iboratki, avvalo, eng kam xarajatli yo'l rejalashtiriladi. Kam xarajatli usul quyidagicha amalga oshiriladi. Avvalo, birlik mahsulotni eltishning eng kam xarajatlisi tanlanadi, ya'ni $\min c_{ij}, (i=1,2,...,m, j=1,2,...,n)$ aniqlanadi.

Agar $a_i > b_j$ bo'lsa, j-iste'molchining talabi to'la qondiriladi: $x_{ij}=b_j$. i-ta'minotchining zaxira miqdori b_j birlikka kamayadi va j-iste'molchi navbatdagi hisoblashlarda qatnashmaydi. Agar $a_i < b_j$ shart o'rinli bo'lsa, $x_{ij}=a_i$ bo'ladi. Shu bilan birga, j-iste'molchining talabi a_i miqdorga kamayadi. i-ta'minotchi keyingi jarayonda ishtirok etmaydi.

"Shimoli-g'arb katagi" usulida yechilgan masalani kam xarajatlar usulida boshlang'ich bazisni topaylik. Ikkinchi ta'minotchidan uchinchi iste'molchiga jo'natish eng kam xarajatli bo'lgani uchun (2, 3) katagini tanlaymiz. Ikkinchi ta'minotchining zaxiradagi mahsulot miqdori 50 tonna, uchinchi iste'molchining talabi esa 40 tonnaga teng. Shuning uchun ikkinchi ta'minotchi uchinchi iste'molchiga 40 tonna mahsulot jo'natadi ($x_{23} = 40$). Ikkinchi ta'minotchining zaxirasi 40 tonnaga kamayadi (ikkinchi ta'minotchi zaxirasida 10 tonna mahsulot qoladi). Uchinchi ustun hisoblashlardan chiqadi, chunki uning talabi to'la qondirildi (5.4-jadval).

5.4-jadval

4	3	5	40
6	2	1 40	$50 \to 10$
10	4	7	60
8	6	9	30
60	80	0	

5.4-jadvalda qolgan kataklar ichida eng kam xarajatlisi (2,2) katagidir. Ikkinchi ta'minotchi zaxirasidagi qolgan mahsulotlar miqdori 10 tonna, ikkinchi iste'molchiga esa 80 tonna mahsulot kerak. Ikkinchi ta'minotchi zaxiradagi barcha mahsulotlarni ikkinchi iste'molchiga jo'natadi ($x_{22} = 10$). Ikkinchi ta'minotchi navbatdagi hisoblashlarda inobatga olinmaydi. Ikkinchi iste'molchining talabi 10 tonnaga kamayadi (5.5-jadval).

5.5-jadval

4	3	5	40
6	2 10	1 40	0
10	4	7	60
8	6	3	30
60	$80 \to 70$	0	

Xuddi shunday jarayonlarni takrorlash natijasida 5.6-jadvalni hosil qilamiz.

5.6-jadval

4	3 40	5	40
6	2 10	1 40	50
10 30	4 30	7	60
8 30	6	9	30
60	80	40	

5.6-jadvalga ko‘ra maqsad funksiyasining qiymati

$$f = 3 \cdot 40 + 2 \cdot 10 + 1 \cdot 40 + 10 \cdot 30 + 4 \cdot 30 + 8 \cdot 30 = 840$$

ga teng bo‘ladi.

Shuni ta’kidlash lozimki, har doim ham minimal xarajatlar usuli “shimoli-g‘arb katagi” usuliga qaraganda yaxshi natija beravermaydi. Agar xarajat matritsasi

$$C = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 5 \\ 6 & 2 & 1 \\ 10 & 4 & 7 \\ 8 & 6 & 3 \end{pmatrix}$$

ko‘rinishda bo‘lsa, “shimoli-g‘arb katagi” usulida olinadigan natijada maqsad funksiyasining qiymati 700 birlikka teng bo‘lib, minimal xarajatlar usulida bu ko‘rsatkich 840 ga teng bo‘ladi.

Agar minimal xarajatlar usulida eng kam xarajatni ifodalovchi kataklar bir nechta bo‘lsa, ular uchun mumkin bo‘lgan miqdorlar ichidan eng kattasi olinadi.

5.2.3. Maxsus hollar

Boshlang‘ich bazisni aniqlash jarayonida bir vaqtda satr va ustunlar hisoblashlardan chetda qolishi mumkin. Bu holda bazis kataklar qanday aniqlanishini ko‘rib o‘tamiz.

5.7- jadvalda berilgan transport masalasining boshlang'ich bazisini topishni "shimoli-g'arb katagi" usulida yechish bilan amalga oshiramiz.

5.7-jadval

1	3	3	30
3	3	2	30
4	1	2	10
20	10	40	

(1,1) katagiga 20 birlik beriladi $(x_{11} = 20)$. Shu bilan birinchi iste'molchining talabi qondirilib, 1-ustun hisoblashlardan chiqadi. Ikkinchi qadamda (1,2) katagiga 10 birlik qiymat beriladi. Bu holda hisoblashlardan bir vaqtda 2-ustun va 1-satr chiqariladi. Hisoblashlarni shu tariqa davom ettirsak, to'ldirilgan kataklar (1,1), (1,2), (2,3) va (3,3) bo'lib, bazis kataklar soni $m+n-1=3+3-1=5$ dan kichik bo'ladi. Bazis kataklar sonini to'ldirish uchun quyidagi sun'iy usul ishlatiladi.

Ikkinchi qadamni ikki qismga ajratamiz. (1,2) katagi to'ldirilganda bir vaqtda ustun va satrning chiqishiga yo'l qo'ymaymiz. Aytaylik, avvalo, 1-satr hisoblashdan chiqarilsin. Ikkinchi ustunning bo'sh kataklaridan ixtiyoriysiga, masalan, (2,2) katagiga nol (sun'iy) qiymat berib, uni ham bazis katak deb e'lon qilamiz. Keyingi qadamlar odatdagidek davom ettiriladi. Natijada 5.8-jadvaldagi boshlang'ich ta'minotni olamiz.

5.8-jadval

1 20	3 10	3	30
3	3 0	2 30	30
4	1	2 10	10
20	10	40	

Natijada bizda bazis kataklar soni 5 ta bo'ladi. Ya'ni bazisga qiymati nolga teng bo'lgan katak ham kiritiladi. Bunday sun'iy usul kam xarajatlar usulida ham ishlatiladi.

5.3. Transport masalasini yechishning potensiallar usuli

Bu yerda oldingi mavzuda olingan boshlang'ich taqsimotning optimallikka yetaklovchi jarayon keltiriladi. Potensiallar usuli deb ataluvchi bu usulda optimallik mezonini aniqlovchi holat keltiriladi. Mavzu oxirida potensiallar usulida uchraydigan maxsus hollarga o'rin ajratilgan.

5.3.1. Potensiallar usuli

Transport masalasini yechish jarayoni ikki qism: 1) boshlang'ich bazisni tuzish va 2) topilgan boshlang'ich bazisni ketma-ket yaxshilashdan iborat. Biz yuqorida boshlang'ich bazisni aniqlash usullari bilan tanishdik. Endi topilgan boshlang'ich bazisni yaxshilashning potensiallar usuli bilan tanishamiz. Oldingi mavzuda keltirilgan (5.7)-(5.9) masalalar transport masalasi bo'lgani uchun unga ikkiyoqlama masala tuzamiz.

1. $u_1, u_2, \dots, u_m$, $v_1, v_2, \dots, v_n$ – ixtiyoriy o'zgaruvchilar,
2. $u_i + v_j \le c_{ij}$, $j = \overline{1,n}, i = \overline{1,m}$
3. $T = \sum_{i=1}^{m} a_i u_i + \sum_{j=1}^{n} b_j v_j \to \max$

Faraz qilaylik, $x_{ij}^*, (i = 1,2,\dots,m,\ j = 1,2,\dots,n)$ masalaning yechimi bo'lsin.

Bu yechimning optimalligini tekshirish jarayoni quyidagi teoremaga asoslanadi.

Teorema *(optimallik mezoni):* $x_{ij}^*, (i = 1,2,\dots,m,\ j = 1,2,\dots,n)$ *lar masalaning optimal yechimi bo'lishi uchun barcha band kataklar uchun*

$$u_i + v_j = c_{ij} \tag{5.12}$$

bo'lishi va barcha bo'sh kataklar uchun esa

$$u_i + v_j \le c_{ij} \tag{5.13}$$

bo'lishi zarur va yetarlidir.

u_i va v_j sonlar ta'minotchi va iste'molchi shoxobchalarining *potensiallari* deyiladi.

Potensiallarning iqtisodiy ma'nosini izohlaymiz. $u'_i = -u_i$ belgilash kiritsak, u ta'minotchi birlik mahsulotining narxi bo'lsa, $v_j = c_{ij} + u'_i$ esa iste'molchi birlk mahsulotining narxidir. Iste'molchi birlik mahsulotining narxi ta'minotchi birlik mahsuloti narxining transport xarajatlari bilan yig'indisiga teng. $v_j \leq c_{ij} + u'_i$ shartning bajarilishi mahsulotlarni oshirib sotishga yo'l qo'yilmasligini ifodalaydi. Potensial so'zining kelib chiqishi esa fizikadagi elektrostatik maydondagi zaryad harakatidan olingan. Zaryadlarning elektrostatik maydonda ko'chish ishi zaryadning shu maydondagi potensiallar ayirmasiga teng. Bizda birlik mahsulotni eltishdagi xarajat birlik mahsulotning yo'l boshi va oxiridagi mahsulotlar ayirmasiga teng.

Keltirilgan teorema transport masalasining optimal yechimini topishga imkon yaratadi.

Aytaylik, biror yechim aniqlangan bo'lsin. Bu yechimda $m + n - 1$ ta bazis kataklar mavjud. (5.12) tenglamadan potensiallarni aniqlaymiz. Lekin (5.12) sistemada tenglamalar soni $m + n - 1$ bo'lib, noma'lumlar $m+n$ ta. Birorta o'zgaruvchini nolga teng deb, qolganlari tenglamadan aniqlanadi. Barcha bo'sh kataklar uchun $c'_{ij} = u_i + v_j$ qiymatlarni hisoblaymiz. Agar barcha bo'sh kataklar uchun $c'_{ij} \leq c_{ij}$ bo'lsa, topilgan yechim optimal bo'ladi. Agar loaqal birorta bo'sh katak uchun $c'_{ij} \geq c_{ij}$ bo'lsa, yechim optimal bo'lmaydi va yechim sikl bo'yicha qayta taqsimlanadi.

Transport masalasi jadvalidagi uchlari bazis kataklarda, tomonlari esa jadvalning ustun yoki satrlarida joylashgan yopiq siniq chiziqqa *sikl* deyiladi. Shu bilan birga, siklning har bir uchida siniq chiziqlarning ikki tarmog'i tutashgan bo'lib, ulardan biri satrda, ikkinchisi esa ustunda joylashadi. Agar siklni tashkil qiluvchi siniq chiziqlar o'zaro kesishsa, kesishish nuqtasi sikl uchi bo'lmaydi.

Yechimning yaxshilanish jarayoni (5.13) shart bajarilganga qadar davom ettiriladi.

5.9-jadval ko'rinishida berilgan transport masalasining

5.9-jadval

4	3	5	40
6	2	1	50
10	4	7	60
8	6	9	30
60	80	40	

"shimoli-g'arb katagi" usulida topilgan boshlang'ich jadvali quyidagicha bo'lishini biz avvalgi mavzuda bayon qilgan edik. Bu jadvalning oxirgi ustuni va oxirgi satrini potensiallar uchun ajratamiz (5.10-jadval).

5.10-jadval

4 40	3	5	$u_1=0$
6 20	2 30	1	$u_2=2$
10	4 50	7 10	$u_3=4$
8	6	9 30	$u_4=6$
$v_1=4$	$v_2=0$	$v_3=3$	

5.10- jadvalda bazis kataklar ajratib ko'rsatilgan.

1. (5.12) sistema jadvalga ko'ra quyidagicha bo'ladi.

$$u_1+v_1=4$$
$$u_2+v_1=6$$
$$u_2+v_2=2$$
$$u_3+v_2=4$$
$$u_3+v_3=7$$
$$u_4+v_3=9$$

Bu sistemada $u_1=0$ deb olib, sistemaning 1-tenglamasidan $v_1=4$ ekanligi kelib chiqadi. 2-tenglamadan $u_2=2$ bo'ladi. 3-tenglamadan esa $v_2=0$ ekanligi kelib chiqadi. 4-tenglamadan $u_3=4$. Shu tarzda davom ettirib, $v_3=3$, $u_4=6$ kelib chiqadi.

Keyingi hisoblashlarda potensiallar qiymatini bevosita jadvalga kiritish maqsadga muvofiq.

2. Barcha bo'sh kataklar uchun $d_{ij} = c_{ij} - (u_i + v_j)$ qiymatlarni hisoblab, natijalarni har bir bo'sh katakning chap yuqori burchagiga joylashtiramiz (5.11-jadval).

5.11-jadval

4 40	3 3	2 5	$u_1 = 0$
6 20	2 30	-4 1	$u_2 = 2$
2 10	4 50	7 10	$u_3 = 4$
-2 8	0 6	9 30	$u_4 = 6$
$v_1 = 4$	$v_2 = 0$	$v_3 = 3$	

Agar barcha bo'sh kataklar uchun $d_{ij} \geq 0$ bo'lsa, optimal yechimga erishilgan bo'ladi va jarayon tugallanadi. Agar biror bo'sh katak uchun $d_{ij} < 0$ bo'lsa, keyingi qadamga o'tiladi.

3. Bazisga kiruvchi o'zgaruvchini (katakni) aniqlaymiz. Buning uchun manfiy d_{ij} larning eng kichigini aniqlaymiz. Bizning misolimizda $d_{41} = -2$. Bazisga (4,1) katagini kiritamiz.

Izoh. Agar bir nechta kataklar uchun eng kichik manfiy d_{ij} lar teng bo'lsa, ixtiyoriysi bazisga kiritiladi.

Bazisga kiritilishi lozim bo'lgan katak aniqlangandan so'ng, siklni tashkil qiluvchi kataklar aniqlanadi. Bazisga kiruvchi (4,1) katagining $+W$ belgisini katakning pastki o'ng qismiga joylashtiramiz. Bu yerda w (4,1) katakning hozircha noma'lum qiymati ($x_{41} = w$). (4,1) katagining bazisga kiritilishi 4-ta'minotchidan 1-iste'molchiga mahsulot jo'natish lozimligini ko'rsatadi. 4-ta'minotchining barcha mahsuloti 3-iste'molchiga jo'natilar edi. 4-ta'minotchidan 3-iste'molchiga jo'natiladigan mahsulot miqdorini w ga kamaytiramiz (30—w). Chunki 4-ta'minotchining imkoniyati 30 tonnaga teng. Tabiiyki, 3-iste'molchining talabini to'la qondirish uchun 3-ta'minotchidan keladigan mahsulot miqdorini oshirish kerak. (3,3) katagining qiymati 10+w bo'ladi. Balans saqlanishi uchun (3,2) katagining qiymati 50−w bo'ladi. (2,2) katak miqdori 30+w bo'ladi. U holda (2,1) katagining miqdorini 20−w ga o'zgartiramiz. Shunday qilib, (4,1), (4,3), (3,3), (3,2), (2,2), (2,1) kataklari siklni tashkil qiladi (5.12-jadval).

Izoh. Har doim faqat yagona sikl aniqlanadi.

5.12-jadval

4 **40**	3 3	2 5	$u_1=0$
6 **20-w**	2 **30+w**	-4 1	$u_2=2$
2 10	4 **50-w**	7 **10+w**	$u_3=4$
-2 8 **+w**	0 6	9 **30-w**	$u_4=6$
$v_1=4$	$v_2=0$	$v_3=3$	

w ning qiymati sifatida mumkin bo'lgan eng katta qiymat olinadi. Buning uchun mahsulotlar ayiriladigan kataklardan, ya'ni *20−w, 50−w* va *30−w* ayirmalardan *w* ning mumkin bo'l-gan eng katta qiymati *w=20* bo'ladi. Boshqacha aytganda, *w=min (20,50,30)* bo'ladi. Demak, (2,1) katagi bazisdan chiqadi, natijada qayta taqsimlangan mahsulot miqdorlari 5.13-jadvaldagidek joylashadi.

5.13-jadval

4 **40**	3	5	$u_1=0$
6	2 **50**	1	$u_2=0$
10	4 **30**	7 **30**	$u_3=2$
8 **20**	6	9 **10**	$u_4=4$
$v_1=4$	$v_2=2$	$v_3=5$	

Olingan oxirgi taqsimot bo'yicha joriy yechim $x_{11}=40$, $x_{22}=50$, $x_{32}=30$, $x_{33}=30$, $x_{41}=20$ va $x_{43}=10$ ga, umumiy xarajat esa 840 birlikka teng. Bu natijaning yaxshilanganligini ko'rsatadi.

4. Olingan natijani optimallikka tekshiramiz. Potensiallarni jadvaldan foydalanib osongina hal qilish mumkin. Bo'sh kataklar uchun $d_{ij}=c_{ij}-(u_i+v_j)$ qiymatlarni joylashtirib chiqamiz. Natijada 5.14-jadvalni hosil qilamiz.

5.14-jadval

4 **40**	1 3	0 5	$u_1=0$
2 6	2 **50**	-4 1	$u_2=0$
4 10	4 **30**	7 **30**	$u_3=2$
8 **20**	0 6	9 **10**	$u_4=4$
$v_1=4$	$v_2=2$	$v_3=5$	

$d_{23}=-4$ bo'lgani uchun hali optimallikka erishilmadi. (2,3) katagini bazisga kiritamiz.

5. Siklni tashkil qiluvchi kataklarni aniqlaymiz. (2,3) katagiga +w qiymat beramiz, (2,2) katakning qiymati 50−w bo'ladi. (3,2) katagi uchun 30+w va (3,3) katagining qiymati 30−w ga o'zgaradi. Demak, sikl kataklar: (2,3), (2,2), (3,2) va (3,3). Min(30,50)=30 bo'lgani uchun w=30 bo'ladi (5.15-jadval).

5.15-jadval

4 **40**	1 3	0 5	$u_1=0$
2 6	2 **50-w**	-4 1 **+w**	$u_2=0$
4 10	4 **30+w**	7 **30-w**	$u_3=2$
8 **20**	0 6	9 **10**	$u_4=4$
$v_1=4$	$v_2=2$	$v_3=5$	

Shu narsaga e'tibor berish lozimki, siklni tashkil qiluvchi kataklar ichida bazisga kiritilishi lozim bo'lgan katakdan tashqari barcha kataklar bazis kataklardan iborat bo'ladi.

Demak, qayta taqsimlash natijasida 5.16-jadval yuzaga keladi.

5.16-jadval

4 **40**	-3 3	0 5	$u_1=0$
6 6	2 **20**	1 ***30***	$u_2=-4$
8 10	4 **60**	4 7	$u_3=-2$
8 **20**	-4 6	9 **10**	$u_4=4$
$v_1=4$	$v_2=$	$v_3=$	

Olingan oxirgi taqsimot bo'yicha joriy yechim $x_{11}=40$, $x_{22}=20$, $x_{23}=30$, $x_{32}=60$, $x_{41}=20$ va $x_{43}=10$ ga, umumiy xarajat esa 720 birlikka teng bo'ladi. Xarajat yaxshilandi.

6. Natijani optimallikka tekshiramiz. Buning uchun yangi potensiallarni aniqlaymiz.

Oxirgi jadvalning o'zida bo'sh kataklar uchun $d_{ij}=c_{ij}-(u_i+v_j)$ qiymatlarni hisoblab chiqamiz. $d_{12}=-3$ va $d_{42}=-4$ bo'lgani uchun optimal yechimga erishilmadi. Bazisga (4,2) katagini kiritamiz.

7. Siklni aniqlaymiz. Buning uchun yuqorida bayon qilingan jarayonni takrorlab, 5.17-jadvalni hosil qilamiz.

5.17-jadval

4 **40**	3	5	$u_1=0$
6	2 **20-** **w**	1 ***30*** **+*w***	$u_2=-4$

10	4 **60**	7	$u_3=-2$
8 **20**	6 **+w**	9 **10-w**	$u_4=4$
$v_1=4$	$v_2=$	$v_3=$	

Bazis kataklar: (4,2), (4,3), (2,3) va (2,2). *w=10* bo'lib, (4,3) katagi bazisdan chiqadi. Qayta taqsimlash natijasida 5.18-jadval hosil bo'ladi.

5.18-jadval

4 **40**	1 3	4 5	$u_1=0$
2 6	2 **10**	1 **40**	$u_2=0$
4 10	4 **60**	4 7	$u_3=2$
8 **20**	6 **10**	4 9	$u_4=4$
$v_1=4$	$v_2=$	$v_3=$	

Joriy yechim $x_{11}=40$, $x_{22}=10$, $x_{23}=40$, $x_{32}=60$, $x_{41}=20$ va $x_{42}=10$ ga, umumiy xarajat esa 680 birlikka teng bo'ladi.

8. Natijaning optimalligini tekshiramiz. Buning uchun potensiallarni qayta hisoblab chiqamiz. $u_1=0$, $v_1=4$, $u_4=4$, $v_2=2$, $u_3=2$, $u_2=0$ va v_3-1 ga teng bo'ladi. Bo'sh kataklar uchun $d_{ij}=c_{ij}-(u_i+v_j)$ ning qiymatlarini joylashtirib chiqamiz. Barcha bo'sh kataklar uchun d_{ij} ning qiymati nomanfiy bo'lgani uchun optimal yechimga erishildi. Demak, optimal taqsimot $x_{11}=40$, $x_{22}=10$, $x_{23}=40$, $x_{32}=60$, $x_{41}=20$ va $x_{42}=10$ bo'lib, minimal xarajat 680 birlikka teng bo'ladi.

5.3.2. Maxsus hollar

Transport masalasini potensiallar usuli bilan yechish jarayonida uchraydigan maxsus hollarga to'xtalib o'tamiz.

1. Ba'zi hollarda sikl bo'yicha qayta taqsimlash jarayonida w=0 bo'lishi mumkin. Bu holat siklni tashkil qiluvchi ayir-

malarda $(x_{ij} - w)$ kataklarning birortasida x_{ij} nolga teng bo'lganda ro'y beradi. Bunda yangi bazisga kiradigan katak qiymati nolga teng deb olinadi. Bazisdagi nol qiymatli katak bazisdan chiqadi.

2. Agar qayta taqsimlash jarayonida, bir vaqtda bir necha kataklar bazisdan chiqadigan holat ro'y bersa, ixtiyoriysi bazisdan chiqarilib, qolganlari nol qiymatli sifatida bazisda qoladi.

Bu holatlarni misolda ko'rib chiqamiz. 5.19-jadval ko'rinishida berilgan transport masalasiga murojaat etamiz.

5.19-jadval

1	3	3	30
3	3	2	30
4	1	2	10
20	10	40	

Boshlang'ich jadvalni "shimoli-g'arb katagi" usulida yechib, 5.20-jadvalni hosil qilamiz.

5.20-jadval

1 **20**	3 **10**	3	$u_1 = 0$
3	3 **0**	2 **30**	$u_2 = 0$
4	1	2 **10**	$u_3 = 0$
$v_1 = 1$	$v_2 = 3$	$v_3 = 2$	

Jadvalning optimalligini aniqlaymiz. Buning uchun potensiallarni hisoblaymiz va bo'sh kataklarda $d_{ij} = c_{ij} - (u_i + v_j)$ qiymatlarni hisoblab, kataklarning yuqori chap qismiga joylashtiramiz (5.21-jadval).

5.21-jadval

1 **20**	3 **10**	1 3 3	$u_1 = 0$
2 3	3 **0**	2 **30**	$u_2 = 0$

3 4	-2 1	2 **10**	$u_3=0$
$v_1=1$	$v_2=3$	$v_3=2$	

(3,2) katagida $d_{32}=-2$ bo'lgani uchun yechim optimal emas. Jadvaldan sikl tashkil qilamiz.

5.22-jadval

1 **20**	3 **10**	3	$u_1=0$
3	3 **0-w**	2 **30+w**	$u_2=0$
4	1 **+w**	2 **10-w**	$u_3=0$
$v_1=1$	$v_2=3$	$v_3=2$	

(3,2), (3,3), (2,3) va (2,2) kataklar sikl tashkil qiladi (5.22-jadval). *min (0,10)=0* bo'lgani uchun *w=0* bo'ladi. Natijada qayta taqsimotda katak qiymatlari o'zgarmaydi, faqat bazis kataklarning joylashuvi o'zgaradi (5.23-jadval).

5.23-jadval

1 **20**	3 **10**	-1 3	$u_1=0$
4 3	2 3	2 **30**	$u_2=-2$
5 4	1 **0**	2 **10**	$u_3=-2$
$v_1=1$	$v_2=3$	$v_3=4$	

5.23-jadvalni optimallikka tekshiramiz. Buning uchun potensiallarni qayta hisoblab chiqamiz (natija jadvalning oxirgi satr va ustunida keltirilgan). $d_{ij}=c_{ij}-(u_i+v_j)$ qiymatlarni bo'sh kataklar uchun hisoblab chiqamiz va siklni tuzamiz.

5.24-jadval

1 **20**	3 **10-w**	-1 3 **+w**	$u_1=0$
4 3	2 3	2 **30**	$u_2=-2$
5 4	1 **0+w**	2 **10-w**	$u_3=-2$
$v_1=1$	$v_2=3$	$v_3=4$	

(1,2), (1,3) ,(3,2) va (3,3) kataklar sikl tashkil qiladi (5.24-jadval). (1,2) va (3,3) kataklardagi qiymatlar teng va w=min (10,10)=10 bo'ladi. Bunda (1,2) yoki (3,3) kataklardan birini, masalan, (3,3) katakni bazisdan chiqaramiz. U holda 5.25-jadval hosil bo'ladi.

5.25-jadval

1 **20**	3 **0**	3 **10**	$u_1=0$
3 3	1 3	2 **30**	$u_2=-1$
5 4	1 **10**	1 2	$u_3=-2$
$v_1=1$	$v_2=3$	$v_3=3$	

Natijani optimallikka tekshiramiz. Potensiallarni aniqlab, bosh kataklar uchun $d_{ij}=c_{ij}-(u_i+v_j)$ qiymatlarni jadvalga tushiramiz. Barcha bo'sh kataklar uchun $d_{ij}>0$ bo'lgani uchun optimal yechim aniqlandi.

5.4. Ochiq transport masalasi

Bu mavzuda transport masalasidagi talab va takliflar teng bo'lmagan holatdagi masalalarni yechish usuli keltiriladi. Ochiq transport masalasini yopiq turdagi transport masalasiga qanday keltirish mumkinligi bayon qilinadi.

Yuqorida ta'kidlanganidek, taklif talabga teng, ya'ni $\sum_{i=1}^{m}a_i=\sum_{j=1}^{n}b_j$ bo'lganda, yopiq transport masalasi deyiladi. Aks holda ochiq transport masalasi deyiladi. Ochiq transport masalasida ikki holat bo'lishi mumkin: a) taklif talabdan katta, ya'ni $\sum_{i=1}^{m} a_i > \sum_{j=1}^{n} b_j$; b) talab taklifdan katta $\sum_{i=1}^{m} a_i < \sum_{j=1}^{n} b_j$. Masalaning matematik modelida ikkala holatda ham maqsad funksiyasining ko'rinishi o'zgarishsiz qoladi:

$$f = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \to \min$$

Shartlarning ko'rinishi *a*) holatda

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \le a_i, \ i = 1,2,...m,$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j, \ j = 1,2,...n,$$

b) holatda

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, \ i = 1,2,...m,$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} \le b_j, \ j = 1,2,...n,$$

$$x_{ij} \ge 0, \ (i = 1,2,...,m, \ j = 1,2,...,n).$$

Ochiq transport masalasi yopiq transport masalasiga keltirilib yechiladi:

a) holatda, ya'ni taklif talabdan ortiq bo'lganda qo'shimcha sun'iy iste'molchi kiritilib, uning talabi $b_{n+1} = \sum_{i=1}^{m} a_i - \sum_{j=1}^{n} b_j$ ga teng deb qaraladi.

b) holatda, ya'ni talab taklifdan ortiq bo'lganda qo'shimcha sun'iy ta'minotchi kiritilib, uning talabi $a_{m+1} = \sum_{j=1}^{n} b_j - \sum_{i=1}^{m} a_i$ ga teng deb qaraladi.

Sun'iy iste'molchiga ham, sun'iy ta'minotchidan ham mahsulotlar eltib berilmaganligi uchun birlik mahsulotni transport xarajati nolga teng deb olinadi. Natijada masala yopiq transport masalasiga aylanadi va u yopiq transport masalasini yechish kabi yechiladi.

1-misol. 5.26-jadvalda keltirilgan transport masalasini ko'rib chiqamiz.

5.26-jadval

4	3	5	40
6	2	1	50
10	4	7	45
8	6	3	30
60	80	40	

Bu masalada taklif 40+50+45+30=165 talabga 60+80+40=180 teng emas. Demak, masala ochiq transport masalasidir. Talabi 180-165=15 birlikka teng bo'lgan sun'iy iste'molchi kiritib, masalani yopiq transport masalasiga aylantiramiz. Natijada 2.27-jadval hosil bo'ladi.

5.27-jadval

4	3	5	40
6	2	1	50
10	4	7	45
8	6	3	30
0	0	0	15
60	80	40	

Yopiq transport masalasini qanday yechishni bilamiz. Kam xarajatlar usulidan foydalanib, quyidagi boshlang'ich taqsimotni olishimiz mumkin (5.27- jadval).

5.27-jadval

4	3 **40**	5	40
6	2 **10**	1 **40**	50
10 **15**	4 **30**	7	45
8 **30**	6	3	30
0 **15**	0	0	15
60	80	40	

Potensiallar usuli yordamida hisoblashlarni davom ettirib, quyidagi oxirgi jadvalga kelamiz (5.29-jadval).

5.29-jadval

4 **40**	3	5	40
6	2 **35**	1 **15**	50
10	4 **45**	7	45
8 **5**	6	3 **25**	30
0 **15**	0	0	15
60	80	40	

Bu jadvalga ko'ra birinchi iste'molchiga 15 birlik kam mahsulot yetkaziladi, qolgan iste'molchilarning talablari to'la qondiriladi. Umumiy xarajat 540 birlikni tashkil qiladi.

2-misol. 1-misolni birinchi iste'molchining talabi to'la qondirish sharti ostida yechamiz.

Bu yerda ham 1-misoldagi kabi, sun'iy ta'minotchi kiritamiz. Shu bilan birga, sun'iy ta'minotchidan birinchi iste'molchiga yetkaziladigan birlik transport xarajatini yetarli katta son, masalan, 1000 deb olish kerak. Sun'iy ta'minotchidan qolgan iste'molchilarga bo'lgan xarajat 0 birlikka teng deb olinadi. Hisoblash jadvali 5.30-jadval ko'rinishida bo'ladi.

5.30-jadval

4	3	5	40
6	2	1	50
10	4	7	45
8	6	3	30
1000	0	0	15
60	80	40	

Minimal xarajatlar usuli bilan boshlang'ich bazisni aniqlaymiz (5.31- jadval).

5.31-jadval

4	3 **40**	5	40
6	2 **10**	1 **40**	50
10 **30**	4 **15**	7	45
8 **30**	6	3	30
1000	0	0	15
60	80	40	

Potensiallar usuli bilan optimal yechimni topamiz (5.32-jadval).

5.32-jadval

4 **40**	3	5	40
6	2 **20**	1 **30**	50
10	4 **45**	7	45
8 **20**	6	3 **10**	30
1000	0 **15**	0	15
60	80	40	

Natijada quyidagi yechimga ega bo'lamiz. Birinchi ta'minotchidan birinchi iste'molchiga 40 birlik, ikkinchi ta'minotchi ikkinchi iste'molchiga 20 birlik, uchinchi iste'molchiga esa 30 birlik, uchinchi ta'minotchi 45 birlik ikkinchi iste'molchiga, to'rtinchi ta'minotchi 20 birlik birinchi iste'molchiga va 10 birlik uchinchi iste'molchiga mahsulot jo'natiladi. ikkinchi iste'molchiga talabidan 15 birlik kam mahsulot yetkaziladi. Umumiy xarajat 600 birlikka teng bo'ladi.

3-misol. 1-misolda keltirilgan transport masalasiga qo'shimcha shart kiritamiz: barcha iste'molchilarning talabi tekis qondirilsin.

Bunday masalani yopiq transport masalasiga keltirish uchun barcha iste'molchilarning talabi kamaytiriladi. Buning uchun iste'molchilarning talab miqdorlari $\sum_{j=1}^{n} a_i \Big/ \sum_{i=1}^{m} b_j$ koeffitsiyentga ko'paytiriladi. Sun'iy ta'minotchi kiritishga hojat qolmaydi.

Bizning misolda bu koeffitsiyent 165/180=0,917 ga teng. Iste'molchilarning talablarini o'zgartirib chiqamiz: birinchi iste'molchi talabi $60 \cdot 0{,}917 = 55{,}02$, ikkinchi iste'molchi talabi $80 \cdot 0{,}917 = 73{,}36$, uchinchi iste'molchi uchun $40 \cdot 0{,}917 = 36{,}68$ bo'ladi. Bu miqdorlarni butun sonlargacha yaxlitlaymiz. U holda hisoblash jadvali 5.33-jadval ko'rinishida bo'ladi.

5.33-jadval

4	3	5	40
6	2	1	50
10	4	7	45
8	6	3	30
55	73	37	

Bu oddiy yopiq transport masalasini yechib, 5.34-jadvalni hosil qilamiz.

5.34-jadval

4 **40**	3	5	40
6	2 **28**	1 **22**	50
10	4 **45**	7	45
8 **15**	6	3 **15**	30
55	73	37	

Bu jadvalga ko'ra birinchi iste'molchi 60-55=5 birlik, ikkinchi iste'molchi 80-73=7 birlik va uchinchi iste'molchi esa 40-37=3 birlik kam miqdordagi mahsulotlarga ega bo'ladi. Umumiy transport xarajati esa 583 birlikka teng bo'ladi.

Taklif talabdan yuqori bo'lganda ham misollarni yechish jarayoni ko'rsatilgan tarzda amalga oshiriladi.

5.5. Transport masalasiga keltiriladigan masalalar

Bu mavzuda transport masalasini yechish usullarini qo'llab, transport masalasiga keltiriladigan masalalar bayon qilinadi va uni yechish usullari keltiriladi.

5.5.1. Maksimallashtirish masalasi

Ba'zi transport masalalarida maqsad funksiyasini maksimallashtirish lozim bo'ladi. Bunda baholash matritsasining koeffitsiyentlari ta'minotchidan iste'molchiga birlik mahsulotni eltishdan keladigan foydani anglatadi.

Boshlang'ich bazisni "shimoli-g'arb katagi" usulida aniqlash qoidasi minimallashtirish masalasi kabi amalga oshiriladi. Lekin boshlang'ich bazisni kam xarajatlar usulida emas, balki ko'p foyda usulida qo'llash talab etiladi. Ya'ni, avvalo, baholash qiymati eng yuqori katak tanlanadi.

Yechimni potensiallar usuli bilan yaxshilash jarayonida ham taktikani o'zgartiramiz. Yechimni yaxshilash maqsadida bo'sh kataklar uchun $c_{ij}-(u_i-v_j)$ qiymatlarning musbatlari ichidan eng kattasi olinadi. Agar barcha bo'sh kataklar uchun $c_{ij}-(u_i-v_j)\le 0$ bo'lsa, optimal yechim topilgan bo'ladi.

Maksimallashtirish masalasini minimallashtirish usuliga keltirib yechish ham mumkin. Buning uchun maqsad funksiyasi – 1 ko'paytiriladi va jadvaldagi baholash matritsasining barcha qiymatlari ham manfiy bo'ladi. So'ngra masala minimallashtirish masalasi kabi yechiladi.

5.5.2. Mahsulotlarni eltishni taqiqlash usuli

Bunday masalalar, masalan, ta'minotchidan iste'molchi olib boruvchi yo'l berk bo'lishi (ta'mir ishlari munosabati bilan) mumkin. Buni hal qilish uchun marshrut mumkin bo'lmagan katakka minimallashtirish masalasida yetarli katta M>0 son qo'yib yechiladi. Qolgan barcha hisoblash ishlari risoladagidek davom ettiriladi.

5.5.3. Marshrut imkoniyati chegaralangan holat

Ba'zan marshrutlarning imkoniyati chegaralangan bo'lishi mumkin. Masalan, i-ta'minotchidan j-iste'molchiga yetaklovchi marshrut imkoniyati q birlik bo'lsin. Bu holda j-iste'molchining ustuni ikki ustunga ajratiladi: j^* va j^{**}. Birinchi ustundagi talab $b_j^* = b_j - q$ ga ikkinchi ustundagi talab esa $b_j^{**} = q$ ga teng deb olinadi. I satrning j^* ustunidagi katakning bahosi taqiqlangan katak deb hisoblab, uning qiymatini M deb olamiz (M yetarli katta musbat son). j^{**} ustuniga mos katak bahosi esa c_{ij} ga teng deb olinadi. Qolgan hisoblash ishlari ham odatdagidek davom ettiriladi.

5.5.4. Ishga optimal tayinlash

Firma m ta kishini n ta lavozimga ishga olmoqchi. i-kishi j-lavozimga tayinlanganda firma foydasi c_{ij} bo'lsin. Masala qaysi kishini qaysi lavozimga tayinlash maqsadga muvofiqligidan iborat bo'ladi. Bu yerda shuni nazarda tutish lozimki, har bir kishi faqat bitta lavozimga tayinlanadi.

Masalaning matematik modelini qurish uchun x_{ij} orqali i-kishining j-lavozimga tayinlanishini belgilaymiz. Har bir kishi faqat bitta ishga tayinlanganligi uchun x_{ij} faqat 1 yoki 0 qiymatni qabul qiladi: agar i-kishi j-lavozimga tayinlanganda $x_{ij} = 1$ bo'lib, tayinlanmaganda esa $x_{ij} = 0$ bo'ladi. Shuning uchun $\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = 1$ va $\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1$ bo'ladi. I-kishini j-lavozimga tayinlanganda foyda $c_{ij}x_{ij}$ bo'ladi. Umumiy foyda esa $f = \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} x_{ij}$ ga teng bo'ladi.

Shunday qilib, quyidagi masalaga kelamiz.

$$f = \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} x_{ij} \to \max$$

$$\sum_{j=1}^{m} x_{ij} = 1 \quad (i = 1,2,\ldots,m)$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1 \quad (j = 1,2,\dots,n)$$

$$x_{ij} \geq 0.$$

Misol. Ishga optimal tayinlash masalasiga misol keltiramiz. Uchta bo'sh o'ringa uch kishini olish kerak. Ishchilarning firmaga keltiradigan foydasi 5.35-jadvalda keltirilgan.

5.35-jadval

	1-ish	2-ish	3-ish
1-ishchi	5	4	7
2-ishchi	6	7	3
3-ishchi	8	11	3

"Shimoli-g'arb katagi" usulida *biror* boshlang'ich bazis kataklarni aniqlaymiz. (1,1) katagi bazis deb olingandan so'ng bir vaqtda 1-satr va 1-ustun hisoblashdan chiqishini e'tiborga olsak, qoidaga ko'ra 1-satr yoki 1-ustundagi biror bo'sh katakni (masalan, bizning misolda (2,1) katagi) 0 qiymat bilan bazisga kiritamiz va h.k. 5.36-jadval hosil qilinadi.

5.36-jadval

	1-ish	2-ish	3-ish
1-kishi	5 **1**	4	7
2- kishi	6 **0**	7 **1**	3
3- kishi	8	11 **0**	3 **1**

Hisoblashlarni potensiallar usuli bilan davom ettirib, oxirgi 5.37-jadvalga kelamiz.

5.37-jadval

	1-ish	2-ish	3-ish
1-kishi	5 **0**	4	7 **1**
2-kishi	6 **1**	7 **0**	3
3-kishi	8	11 **1**	3

Demak, bu jadvalga ko'ra 1-kishi 3-ishga, 2-kishi 1-ishga va 3-kishi 2-ishga olinganda firma eng yuqori foyda ko'radi.

5.5.5. Turli mahsulotli transport masalasi

Iste'molchilarga har xil turdagi mahsulotlarni eltish zaruriyati tug'ilgan bo'lsin. Bunday masalalarni yechishda har bir ta'minotchi m turli mahsulot bo'lsa, shuncha ta'minot shoxobchalariga; iste'molchilarning n turli mahsuloti n ta turli shartli iste'molchilarga ajratiladi.

Turli mahsulotli transport masalasini misollar bilan ko'rib chiqamiz.

A_1 fermer xo'jaligida 3000 tonna I nav va 4000 tonna II nav bug'doy urugi bor. A_2 fermer xo'jaligida esa mos ravishda 5000 tonna va 2000 tonna I va II navli bug'doy urug'lari bor. Urug'lar ikki elevatorga yetkazilishi kerak. Birinchi elevatorga 2000 tonna I nav, 3000 tonna II nav va 2000 tonna ixtiyoriy navdagi urug'larni yetkazish lozim.

Shuningdek, 2-elevatorga 8250 tonna urug' jo'natishi kerak bo'lib, shulardan 1000 tonnasi I nav, 1500 tonnasi II nav urug'-lar bo'lishi kerak.

Bir tonna urug'ning transport xarajatlari: A_1 dan B_1 va B_2 ga mos ravishda 1 va 1,5 birlikka, A_2 dan B_1 va B_2 ga mos ravishda 2 va 1 birlikka teng. Transport xarajatini minimallashtiruvchi rejani aniqlash kerak.

Har bir ta'minotchini shartli ravishda (bug'doy turiga qarab) ikki ta'minotchiga ajratamiz: A_1^1, A_1^2, A_2^1 va A_2^2. Har bir iste'molchilar shartli ravishda uchta iste'molchi shoxobchalariga ajratiladi: B_1^1, B_1^2 va B_1^0 (I nav, II nav va ixtiyoriy nav) ; B_2^1, B_2^2 va B_2^0. Talab taklifdan yuqori bo'lgani uchun sun'iy ta'minotchi A_3 kiritamiz. Jadvalning ba'zi kataklarini yetarli katta son M bilan ajratamiz. Masalan, (1,2) katagini M bilan belgilaymiz, chunki A_1^1 ta'minotchi B_1^2 iste'molchining talabini qondira olmaydi. A_1^1 ta'minotchida B_1^2 iste'molchini qondiruvchi urug' yo'q.

Natijada 5.38-jadval hosil bo'ladi.

5.38-jadval

Iste'molchi / Ta'minotchi		B_1			B_2			Zaxira (ming tonna)
		B_1^1	B_1^2	B_1^0	B_2^1	B_2^2	B_2^0	
A_1	A_1^1	1	M	1	1,5	M	1,5	3
	A_1^2	M	1	1	M	1,5	1,5	4
A_2	A_2^1	2	M	2	1	M	1	5
	A_2^2	M	2	2	M	1	1	2
A_3		0	0	0	0	0	0	1,25
Taklif (ming tonna)		2	3	2	1	1,5	5,75	

5.38-jadvaldan foydalanib optimal yechimni aniqlaymiz.

5.39-jadval

Iste'molchi / Ta'minotchi		B_1			B_2			Zaxira (ming tonna)
		B_1^1	B_1^2	B_1^0	B_2^1	B_2^2	B_2^0	
A_1	A_1^1	1 **2**	M	1 **1**	1,5	M	1,5	3
	A_1^2	M	1 **3**	1 **1**	M	1,5	1,5	4
A_2	A_2^1	2	M	2	1 **1**	M	1 **4**	5
	A_2^2	M	2	2	M	1 **1,5**	1 **0,5**	2
A_3		0	0	0	0	0	0	1,25
Taklif (ming tonna)		2	3	2	1	1,5	5,75	

5.39-jadvalga asosan 1-ta'minotchi 1-iste'molchiga I nav urug'-dan, 2 ming tonna; 2 navdan 3 ming tonna va ixtiyoriy navdan (I va II navdan) 2 tonna (I navdan ming, II navdan ming tonna jo'natadi).

Ikkinchi ta'minotchi ikkinchi elevatorga I nav bug'doydan 1 ming tonna, II navdan 1,5 ming tonna, ixtiyoriy navdan 4,5 tonna jo'natadi. Ikkinchi elevatorning ixtiyoriy nav uchun bo'lgan talabi to'la qondirilmaydi (1,25 ming tonna yetkazilmaydi). Minimal xarajat $f_{\min} = 14$ birlikka teng bo'ladi.

Tayanch iboralar

Transport masalasi, ochiq va yopiq transport masalalari, bazis kataklar, bo'sh kataklar, "shimoli-g'arb katagi" usuli, minimal xarajatlar usuli, xarajat matritsasi, potensiallar usuli, sikl, optimallik mezoni, boshlang'ich bazisni topishdagi maxsus hollar, biror marshrut bo'yicha yo'l yopiq, biror marshrut bo'yicha yo'l chegaralangan, ochiq transport masalasida biror talabni to'la qondirish, biror taklif tomonni to'la qondirish, transport masalasiga keltiriladigan masalalar, dastgohlarni optimal taqsimlash, optimal ishga taqsimlash, turli xildagi transport masalalari, maksimallashtirish masalasi.

Savollar

1. Qanday transport masalalari yopiq transport masalalari turkumiga kiradi?
2. Yopiq transport masalarida boshlang'ich taqsimotni topish "shimoli-g'arb katagi" usulida qanday amalga oshiriladi?
3. Boshlang'ich taqsimotni minimal xarajatlar usulida topishning mohiyati nimadan iborat?
4. Boshlang'ich taqsimotni aniqlash jarayonida ro'y beradigan maxsus hollar nimalardan iborat?
5. Transport masalasini yechishning potensiallar usuli qanday amalga oshiriladi?
6. Transport masalasini potensiallar usuli bilan yechish jarayonida siklga kiruvchi kataklar qanday aniqlanadi?
7. Yopiq transport masalasini minimallashtirishda oxirgi jadvalga kelinganligi qanday aniqlanadi?
8. "Shimoli-g'arb katagi" usulini maksimallashtirish masalasida qo'llash jarayoni minimallashtirish masalasidan farq qiladimi?
9. Boshlang'ich taqsimotni topish jarayoni minimal xarajatlar usulini maksimallashtirish masalasiga qanday tatbiq qilinadi?
10. Biror marshrut yopiq holatda bo'lgan transport masalasi qanday yechiladi?
11. Talab taklifdan kichik bo'lgan transport masalasini biror iste'molchi talabini to'la qondirish shartida qanday yechiladi?

12. Talab taklifdan katta bo‘lgan transport masalasini biror ta’minotchi talabini to‘la qondirish shartida qanday yechiladi?
13. Talab taklifdan kichik bo‘lgan transport masalasini barcha iste’molchilar talabini proporsional qondirish shartida qanday yechiladi?
14. Biror marshrut imkoniyati chegaralangan tpansport masalasini yechish qanday amalga oshiriladi?
15. Transport masalasini maksimallashtirishga yechishda potensiallar usulini qo‘llash jarayoni minimallashtirish masalasidan nimasi bilan farq qiladi?
16. Transport masalasining xarajat matritsasi *nxm* o‘lchovli bo‘lganda bazis kataklar soni nechaga teng bo‘ladi?
17. Turli mahsulotli transport masalasi qanday yechiladi?
18. Ishga optimal taqsimlash masalasi qanday yechiladi?

Mashqlar

5.1. Bazaning uchta omborida mos ravishda $S_1=180$, $S_2=60$ va $S_3=80$ birliklarga teng yuklar joylashgan. Bu yuklarni to‘rtta do‘konga tarqatish kerak. Do‘konlarning yuklarga talablari mos ravishda $D_1=120$, $D_2=40$, $D_3=60$ va $D_4=80$ birliklarga teng. Birlik yukni omborlardan do‘konlarga eltishdagi transport xarajatlari jadvalda berilgan.

	D_1	D_2	D_3	D_4
S_1	2	3	4	3
S_2	5	3	1	2
S_3	2	1	4	2

Yuklarni omborlardan do‘konlarga eltishdagi transport xarajatlarini minimallashtirishning matematik modelini tuzing.

5.2. A, B va C omborlarda mos ravishda 100, 150 va 250 tonna urug‘ bor. Bu urug‘larni 4 ta punktga jo‘natish kerak. Punkt talablari mos ravishda 50 t, 100 t, 200 t va 150 t ga teng. A ombordan 1 t urug‘ni punktlarga jo‘natishdagi transport xarajatlari mos ravishda 80, 30, 20 va 20 pul birligiga, B ombordan esa 40, 10, 60 va 70 ga hamda C ombordan esa 10, 90, 40 va 30 ga teng. Transport xarajatlarini minimallashtiruvchi optimal rejani aniqlang.

5.3. Quyidagi transport masalalari uchun optimal maksimallashtirish rejasini toping.

1)

	1	2	3	Taklif
1	5	3	4	100
2	2	1	10	150
3	6	8	3	80
Talab	90	130	110	

2)

	1	2	3	Taklif
1	4	2	4	100
2	10	0	1	150
3	2	7	5	80
Talab	100	120	110	

5.4. Quyidagi ochiq transport masalasida minimallashtirishga oid jadvallar keltirilgan.

1)

	1	2	3	Taklif
1	5	3	4	90
2	2	1	10	150
3	6	8	3	80
Talab	90	130	110	

2)

	1	2	3	Taklif
1	4	2	4	100
2	1	6	1	130
3	2	7	5	80
Talab	100	120	110	

1-masalani uchinchi iste'molchining talabi to'la qondirilish sharti ostida yeching.

2-masalani ikkinchi iste'molchining talabi to'la qondirilish sharti ostida yeching.

5.5. Quyida transport masalasiga oid jadvallar keltirilgan.

1)

	1	2	3	Taklif
1	5	3	4	90
2	2	1	8	130
3	6	7	3	80
Talab	90	100	110	

2)

	1	2	3	Taklif
1	4	2	4	100
2	1	6	1	110
3	2	7	5	90
Talab	100	90	110	

1-jadvalda ikkinchi ta'minotchidan ikkinchi iste'molchiga eltuvchi yo'l imkoniyati chegaralangan bo'lib, uning imkoniyati 10 birlikka teng bo'lganda transport xarajatini minimallashtiruvchi optimal rejani aniqlang.

2-jadvalda ikkinchi ta'minotchidan uchinchi iste'molchiga eltuvchi yo'l imkoniyati chegaralangan bo'lib, uning imkoniyati 40 birlikka teng bo'lganda transport xarajatini minimallashtiruvchi optimal rejani aniqlang.

VI bob. MATRITSALI O'YINLAR

6.1. Boshlang'ich tushunchalar

Bu mavzuda o'yinlar nazariyasi tushunchasi qisqacha bayon qilinib, bunday nazariyaga olib keladigan holatlar, matritsali va bimatritsali o'yinlar tushunchasi keltiriladi.

Ko'plab iqtisodiy va harbiy masalalarni yechishda ziddiyatli jarayonlarni tahlil qilishga to'g'ri keladi. Bunday jarayonlarda ikki yoki undan ortiq tomonlar ishtirok etib, ularning maqsadlari qarama-qarshi bo'ladi. Bir tomonning qanday tadbirni amalga oshirishi qarshi tomonlarning harakatiga bog'liq bo'ladi.

Masalan, urush holatida bo'lgan tomonlarning niyati qarshi tomonning o'z maqsadini amalga oshirishdagi urunishlariga qarshilik qilishdan iborat. Iqtisodiyotdagi ziddiyatli holatlarga savdo-sotiq bilan shug'ullanuvchi firmalar bilan ishlab chiqaruvchilar orasidagi munosabatni keltirish mumkin.

Bunday ziddiyatli holatlar tahlili bilan matematikaning maxsus bo'limi **o'yinlar nazariyasi** shug'ullanadi. O'yinlar nazariyasi qarama-qarshi tomonlar uchun optimal yo'lni tanlashga imkon beradi.

O'yinlar nazariyasida o'yinlarning turlari o'yinchilar va strategiyalar soni, o'yinchilar munosabatidagi xarakter, yutuq xarakteriga qarab aniqlanadi.

O'yinda ikki yoki undan ortiq oyinchilar ishtirok etishi mumkin. Ikki o'yinchi qatnashgan o'yinlar yaxshi o'rganilgan. Uch va undan ortiq o'yinchilar qatnashgan o'yinlar kam o'rganilgan.

O'yindagi strategiyalar soniga qarab oyinlar chekli yoki cheksiz bo'lishi mumkin. Agar barcha o'yinchilarning strategiyalari chekli bo'lsa, *chekli strategiyali* o'yin deyiladi. Agar o'yindagi biror o'yinchining strategiyalar soni cheksiz bo'lsa, bunday o'yin *cheksiz strategiyali* o'yin deyiladi.

O'yindagi o'yinchilarning o'zaro xarakteriga qarab:

- koaliatsionsiz (o'yinchilarning o'zaro kelushuvi taqiqlanadi)
- koaliatsionli (kooperativ) bo'lishi mumkin.

O'yin yutug'ining xarakteriga qarab, **nol yig'indili o'yin** (barcha o'yinchilar yutuqlarining yig'indisi nolga teng) va **nolmas yig'indili o'yinlarga** bo'linadi.

Yutuq funksiyasining ko'rinishiga qarab, o'yinlar matritsali, bimatritsali, uzluksiz, qavariq va boshqa turlarga bo'linadi.

Ikki o'yinchidan iborat nol yig'indili o'yin **matritsali o'yin** deyiladi. Matritsali o'yinda I o'yinchining yutug'i matritsa ko'rinishida beriladi. Matritsaning satrlari I o'yinchining strategiyalarini, ustunlari esa II o'yinchining strategiyalarini ifodalaydi. Matritsaning i-satri va j-ustunida joylashgan element I o'yinchining tanlangan strategiyalardagi yutug'ini beradi.

Ikki o'yinchidan iborat nolmas yig'indili o'yin **bimatritsali o'yin** deyiladi. Bu turdagi o'yinda har bir o'yinchining yutuq matritsasi alohida beriladi.

Bu bobda biz matritsali o'yinlar bilan shug'ullanamiz.

Umumiy holda matritsali o'yin 6.1-jadval (matritsa) ko'rinishida beriladi.

6.1-jadval

	b_1	b_2	...	b_n
a_1	a_{11}	a_{12}	...	a_{1n}
a_2	a_{21}	a_{22}	...	a_{2n}
...	...	...	...	...
a_n	a_{m1}	a_{m2}	...	a_{mn}

Bu yerda a_i — I o'yinchining strategiyalari, b_j — II o'yinchining strategiyalari. a_{ij} — I oyinchining i-strategiyani, II o'yinchi j-strategiyani tanlagandagi yutug'i. Matritsali o'yin nol yig'indili o'yin bo'lgani uchun, II o'yinchining to'lov matritsasining ko'rinishi I o'yinchi to'lov matritsasining teskari ishora bilan olinganiga teng.

Matritsali o'yinga olib keladigan ikki masalani ko'ramiz.

1-masala. Bir bozorda faqat ikki A va B raqobatchi kompaniyaning mahsulotlari sotiladi. Boshlang'ich vaqtda ularning bozordan keladigan ulushlari teng. Ularning ikkalasi ham bozordan keladigan ulushini ko'paytirishga harakat qiladi. Agar A kompaniya haftalik reklama harakatlarini boshlab yuborsa va B kompaniya hech bir tadbir qilmasa, u holda A ning ulushi 3 foizga ortadi. Lekin agar B hafta davomida narxlarni tushirsa va A hech bir tadbir qilmasa, B ning ulushi 4 foizga ortadi. Agar A haftalik reklamani amalga oshirsa, B ning ulushi 1 foizga ortadi. Agar ikkala kompaniya ham hech qanday tadbir o'tkazmasa, ularning ulushida ham o'zgarish bo'lmaydi.

Shunday qilib, har bir kompaniya uchun ikkitadan yo'l bor. Ularning tutgan yo'llariga mos keluvchi A kompaniyaning yutug'i (B kompaniyaning mag'lubiyati) 6.2-jadvalda keltirilgan.

6.2-jadval

B / A	narxni tushirish	tadbir yo'q
reklama	-1	3
tadbir yo'q	-4	0

Har bir tomon uchun qaysi yo'lni tanlash kerak degan masala ko'ndalang qo'yilgan.

Bu masalada ikkita o'yinchi bor. Birinchi o'yinchi – A kompaniyaning tanlashi mumkin bo'lgan holatlari (sof strategiyalari)

a_1 = reklama o'tkazish;

a_2 = tadbir qo'llamaslik.

Ikkinchi o'yinchi – B kompaniyaning tanlashi mumkin bo'lgan holatlari (sof strategiyalari)

b_1 = narxni tushirish;

b_2 = tadbir qo'llamaslik.

Shunday qilib, to'lov matritsasi quyidagicha bo'ladi.

$$\begin{bmatrix} -1 & 3 \\ -4 & 0 \end{bmatrix}$$

Matritsada manfiy elementlar ham ishtirok etmoqda. Bu son unga mos strategiyalar tanlanganda birinchi o'yinchi uchun mag'lubiyat, ikkinchi o'yinchi uchun yutuq bo'lishini ko'rsatadi.

2-masala. Harbiy o'yin. I o'yinchi – polkovnik, II o'yinchi – general. Polkovnikda 4 ta polk, generalda 3 ta polk mavjud. Har birining maqsadi ikki qishloqni egallashdan iborat. Qishloqni egallashi 1 ball bilan baholanadi. Qarama-qarshi tomonlar qishloqlarga butun sondagi polklarni jo'natishi yoki umuman jo'natmasligi mumkin. Qishloqqa jo'natilgan polklarning soni qaysi tomonda ko'p bo'lsa, shu tomon qishloqni egallagan bo'ladi. Yutuq qishloqni egallaganligi va qishloqni egallamagan tomonning polklar sonining yig'indilari bilan baholanadi.

Agar qishloqdagi polkovnik va general yuborgan polklar soni teng bo'lsa, hech qaysi tomon yutmaydi va 0 bilan baholanadi. Har bir tomonning yutug'i har bir qishloqdan baholar yig'indisiga teng. Qarshi tomonlardan birortasining yutug'i ikkinchi tomonning mag'lubiyatiga teng.

Polkovnik va generalning maqsadlari qarama-qarshi va birining yutug'i ikkinchisining mag'lubiyatiga teng bo'lgani uchun masalani nol yig'indili matritsali o'yin sifatida ifodalash mumkin.

O'yinchilarning holatlari {a,b} ko'rinishidagi sof strategiyalardan iborat bo'ladi, bu yerda a – birinchi qishloqqa jo'natilgan polklar soni, b esa ikkinchi qishloqqa jo'natilgan polklar soni.

Shunday qilib, polkovnikning strategiyalari:

1. I qishloqqa barcha polkni jo'natish, ya'ni {4,0}.
2. II qishloqqa barcha polkni jo'natish, ya'ni {0,4}.
3. I qishloqqa 3 ta, II qishloqqa 1 ta polkni jo'natish, ya'ni {3,1}.
4. II qishloqqa 3 ta, I qishloqqa 1 ta polkni jo'natish, ya'ni {1,3}.
5. Har bir qishloqqa 2 tadan polk jo'natish, ya'ni {2,2}.

Generalning strategiyalari:

1. I qishloqqa barcha polkni jo'natish, ya'ni {3,0}.
2. II qishloqqa barcha polkni jo'natish, ya'ni {0,3}.
3. I qishloqqa 2 ta, II qishloqqa 1 ta polkni jo'natish, ya'ni {2,1}.
4. II qishloqqa 2 ta, I qishloqqa 1 ta polkni jo'natish, ya'ni {1,2}.

Shunday qilib, polkovnikda 5 ta, generalda 4 ta strategiya mavjud. Yutuq qoidasiga ko'ra polkovnikning (I o'yinchi) yutuqlar matritsasini tuzamiz.

Aytaylik, polkovnik 1-strategiyani, general 2-strategiyani tanlagandagi polkovnik yutug'ini hisoblaymiz. Ya'ni I qishloqqa polkovnik barcha 4 polkni jo'natadi. General esa barcha polkni II qishloqqa jo'natadi. Polkovnik I qishloqni egallagani uchun 1 bilan baholanadi, II qishloqni egallay olmagani uchun uning II qishloqdagi yutug'i -1 ga teng bo'ladi. Natijada ikki qishloq bo'yicha olingan yutuq 1-1=0 ga teng bo'ladi.

Polkovnik ikkinchi strategiyani tanlab, general uchinchi strategiyani tanlagandagi polkovnik yutug'ini aniqlaymiz. Polkovnik I qishloqqa birorta ham polk jo'natmaydi, general esa 2 ta polkni jo'natadi. Polkovnikning I qishloq bo'yicha olgan yutug'i – 1 ga teng. II qishloqqa polkovnik 4 ta polkni, general 1 ta polkni jo'natadi. Shuning uchun, II qishloq bo'yicha polkovnik yutug'i (qishloqni egallagani uchun 1 ball; generalning II qishloqdagi polklar soni 1 ga teng bo'lgani uchun 1 ball) 2 ga teng bo'ladi. Ikki qishloq bo'yicha polkovnik yutug'i 2+1=3 bo'ladi. Qolgan strategiyalar bo'yicha shu tarzda hisoblashlarni amalga oshirsak, polkovnikning yutuq matritsasini hosil qilamiz.

$$A=\begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 3 & 0 \\ -1 & 1 & 3 & 0 \\ -2 & -2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

O'yinning yechimi. O'yinni yechish – quyidagi savollarga javob berishdir.

1. Har bir o'yinchi o'zining yutug'ini maksimallashtirish uchun qaysi strategiyani tanlashi lozim?
2. Agar o'yinchilar bu strategiyalarni tanlasa, o'yinchilarga tegadigan to'lovlar qanday bo'ladi?

O'yinlarning ayrimlari sof optimal strategiyalarda yechilishi mumkin.

6.2. Sof optimal strategiyalarda yechiladigan o'yinlar

Bu mavzu sof optimal strategiyalarni topishga bag'ishlangan. Bu yerda o'yinning quyi va yuqori baholarini topish keltiriladi.

Bozordagi raqobat masalasi sof optimal strategiyalarda yechiladigan o'yinga misol bo'la oladi. Agar A kompaniya a_1 ni B kompaniya b_2 ni tanlasa, A kompaniyaning bozor ulushi eng yuqori (3 ga teng) bo'lar edi. Lekin «aqlli» B kompaniya b_2 ni tanlamaydi. Buning sababi B kompaniya uchun b_1 ni tanlashi ma'qulroq. Agar A kompaniya a_1 ni tanlasa, B ning bozor ulushi 1 ga, agar A kompaniya a_2 ni tanlasa, B ning bozor ulushi 4 ga teng bo'ladi. Shularni bilgan holda B kompaniya b_1 ni, A kompaniya esa a_2 ni tanlaydi.

Umuman sof optimal strategiyalar quyidagi mulohazalar yordamida topiladi.

1. Ikkala o'yinchi ham o'zining har bir tanlashi mumkin bo'lgan holatiga mos keluvchi eng yomon to'lovni aniqlaydi.
2. Eng yomon to'lovlarning eng yaxshisiga mos keluvchi holatni tanlaydi.

- A kompaniya uchun.

1-qadam. Har bir satrning minimumini topadi. Topilgan natijalarni jadvalning o'ng tomonidagi yangi ustunga yozadi.
2-qadam. Eng yaxshi strategiya sifatida 1-qadamda topilgan minimumlarning maksimumiga mos keluvchi satrni tanlaydi.

- B kompaniya uchun.

1-qadam. Har bir ustunning maksimumini topadi. Topilgan natijalarni jadvalning quyi tomonidagi yangi satrga yozadi.
2-qadam. Eng yaxshi strategiya sifatida 1-qadamda topilgan maksimumlarning minimumga mos keluvchi ustunini tanlaydi (6.3-jadval).

6.3-jadval

A \ B	b_1	b_2	A kompaniya uchun eng yomon natija
a_1	-1	3	-1
a_2	-4	0	-4
B kompaniya uchun eng yomon yo'qotish	-1	3	

Shunday qilib, A kompaniya o'zining minimum yutuqlarini maksimallashtirishga harakat qiladi (maximin), shu vaqtning o'zida B kompaniya o'zining maksimum yo'qotishlarini minimallashtirishga harakat qiladi (minimax).

Ikkinchi o'yinchi – B kompaniyaning tanlashi mumkin bo'lgan holatlari (sof strategiyalari)

1. A kompaniya a_1 strategiyani, B kompaniya b_1 strategiyani tanlashi kerak (a_1 = reklama o'tkazish, b_1 = narxni tushirish).
2. Agar o'yinchilar yuqoridagi strategiyalarni tanlasa, o'yinning bahosi –1 ga teng bo'ladi.

O'yin doimiy takrorlanib turadi, deb hisoblaymiz. Shu sababli o'yinchilar o'z strategiyalarini o'zgartirib turish imkoniyatiga ega. Lekin agar biror o'yinchi o'z strategiyasini yuqoridagidan boshqa strategiyaga o'zgartirsa, uning bozor ulushi yaxshilanmaydi. Boshqacha aytganda o'yinchi sof optimal strategiyadan chetlansa, u «jazolanadi».

Umuman o'yin kxn o'lchamli

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{2n} \\ \dots & & \\ a_{k1} & a_{k2} & a_{kn} \end{bmatrix}$$

matritsa yordamida beriladi. I o'yinchi satrlarni tanlaydi, ya'ni uning sof strategiyalari satrlar. I o'yinchining k ta sof strategiyasi bor.

II o'yinchi ustunlarni tanlaydi, ya'ni uning sof strategiyalari ustunlar. I o'yinchining n ta sof strategiyasi bor.

Ushbu $\underline{v} = \max_i \min_j a_{ij}$ son o'yinning *quyi bahosi* deyiladi.

Yuqorida keltirilgan masalada $\bar{v} = -1$.

Ushbu $\bar{v} = \min_j \max_i a_{ij}$ son o'yinning *yuqori bahosi* deyiladi.

Yuqorida keltirilgan masalada $\underline{v} = -1$.

Agar $v = \bar{v} = \underline{v}$ bo'lsa, u holda bu son matritsali *o'yinning bahosi*, o'yinchilarning bu songa mos keluvchi strategiyalari esa ularning *sof optimal strategiyalari* deb yuritiladi.

Masalan, $a_{i_0 j_0} = v$ bo'lsa, i_0 – I o'yinchining sof optimal strategiyasi, j_0 – II o'yinchining sof optimal strategiyasi bo'ladi.

O'yinning bahosi matritsaning i_0-satrda eng kichik va j_0-ustunda eng katta bo'lgan $a_{i_0j_0}$ elementiga teng bo'ladi, ya'ni

$$a_{ij_0} \le a_{i_0j_0} \le a_{i_0j}, \quad i=1,\dots,k, \quad j=1,\dots,n$$

munosabatlar bajariladi.

O'yinchilarning sof optimal strategiyalari bir nechta bo'lishi ham mumkin. Bunga quyidagi matritsali o'yin misol bo'la oladi.

$$\begin{bmatrix} 7 & -1 & 2 \\ 4 & 4 & 6 \\ 6 & 3 & 0 \\ 7 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

Matritsali o'yinda $\bar{v} = \underline{v}$ tenglik bajarilmasligi ham mumkin. Bu holda matritsali o'yinning sof strategiyalarda bahosi bo'lmaydi.

6.3. Hukmron strategiyalar

Bu mavzuda hukmron strategiya haqida tushuncha keltirilib, uning yordamida o'yin matritsasini soddalashtirish mumkinligi bayon qilinadi. Bu, o'z navbatida, matritsali o'yin yechimini topish jarayonini osonlashtiradi.

Agar o'yinlar matritsasining *i*-satr elementlari uning *j*-satrining mos elementlaridan kichik bo'lmasa, I o'yinchining *i*-sof strategiyasi uning *j*-sof strategiyasi ustidan *hukmron* deyiladi. Bunda *i*-sof strategiyani *tobe* strategiya deb ham yuritamiz.

Quyida keltirilgan o'yinda I o'yinchining a_2 strategiyasi uning a_3 strategiyasi ustidan hukmron; a_1 strategiyasi esa a_2 va a_3 strategiyalari ustidan hukmron.

$$\begin{array}{c} \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 3 & 3 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

Agar o'yinlar matritsasining *i*-ustun elementlari uning *j*-ustunining mos elementlaridan katta bo'lmasa, II o'yinchining

i-sof strategiyasi uning j-sof strategiyasi ustidan hukmron deyiladi. Bunda j-sof strategiyani *tobe strategiya* deb ham yuritamiz.

Yuqoridagi misolda II-o'yinchining b_1 strategiyasi uning b_2 va b_3 strategiyalari ustidan hukmron, lekin b_4 strategiyasi ustidan hukmron emas.

Qandaydir o'yinchining i-strategiyasi uning j-strategiyasi ustidan hukmron bo'lsin. U holda uning i-strategiyani tanlagandagi yutug'i j-strategiyani tanlagandagi yutug'idan kam bo'lmaydi. Shu sababli bunday hollarda j-strategiyani o'chirib tashlash mumkin. Shu yo'l bilan o'yinlar matritsasining tartibi kamaytiriladi.

Yuqoridagi matritsadan b_2 va b_3 ustunlarni tashlab yuborib

$$\begin{bmatrix} & b_1 & b_4 \\ a_1 & 3 & 4 \\ a_2 & 2 & 1 \\ a_3 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

matritsani, a_2 va a_3 satrlarni tashlab yuborib esa

$$\begin{bmatrix} & b_1 & b_4 \\ a_1 & 3 & 4 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} & b_1 \\ a_1 & 3 \end{bmatrix}$$

jadvallarni hosil qilamiz. So'nggi jadval b_4 ustunni tashlab yuborishdan hosil qilindi.

6.4. Aralash strategiyalar

Agar matritsali o'yinda sof strategiya mavjud bo'lmasa, bunday o'yinlarning yechimi aralash strategiyada qidiriladi. Bu mavzuda aralash strategiyalarni topishning nazariy asoslari keltiriladi.

Endi matritsali o'yinning yuqori va quyi baholari teng bo'lmagan hollarni qaraymiz. Shu maqsadda quyidagi matritsali o'yinni ko'rib chiqamiz.

$$\begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 7 \end{bmatrix}$$

Bu matritsali o'yin uchun $\underline{v}=3$ va $\bar{v}=5$. O'yinning yuqori va quyi baholari teng emasligi sababli sof optimal strategiyalarda bu o'yinning bahosi yo'q. Umuman $\underline{v}<\bar{v}$ bo'lgan holda I o'yinchi kamida $\underline{v}$ ga teng yutuqni ta'minlaydi, II o'yinchi esa I o'yinchining yutug'i $\bar{v}$ dan oshmasligini ta'minlaydi. Qolgan $\underline{v}-\bar{v}$ miqdorni o'yinchilar o'rtasida qanday taqsimlash kerak?

Agar birinchi o'yinchi faqat bitta sof strategiyasini tanlayversa, bu uning uchun yaxshi yo'l hisoblanmaydi. Masalan, u faqat ikkinchi satrni tanlayversa, u holda ikkinchi o'yinchi faqat birinchi ustunni tanlab turaveradi. Bu holda birinchi o'yinchining yutug'i har bir o'yin uchun 3 ga teng bo'lib qolaveradi.

Agar birinchi o'yinchi ayrim hollarda birinchi satrni, ayrim hollarda ikkinchi satrni tanlasa, uning yutug'i qanday o'zgaradi? Aytaylik, birinchi o'yinchi birinchi satrni 0,5 ehtimollik bilan, ikkinchi satrni ham 0,5 ehtimollik bilan tanlasin.

Agar bunda ikkinchi o'yinchi faqat birinchi ustunni tanlasa, birinchi o'yinchining o'rtacha yutug'i $0{,}5\cdot5+0{,}5\cdot3=4$ ga teng bo'ladi.

Agar ikkinchi o'yinchi faqat ikkinchi ustunni tanlasa, birinchi o'yinchining o'rtacha yutug'i $0{,}5\cdot3+0{,}5\cdot7=5$ ga teng.

Ikkinchi o'yinchining maqsadi birinchi o'yinchining yutug'ini kamaytirishdan iborat bo'lgani uchun u birinchi ustunni tanlaydi. Shunday qilib, birinchi o'yinchi o'zining sof strategiyalarini aralashtirib tanlasa, uning yutug'i ortishini ko'ramiz.

Biz yuqorida birinchi o'yinchi o'zining sof strategiyalarini 0,5 ehtimollik bilan tanlasin deb oldik. U o'zining o'rtacha yutug'ini maksimallashtirish uchun satrlarni qanday ehtimollik bilan tanlashi kerak?

Ushbu

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{2n} \\ \dots & & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{mn} \end{bmatrix}$$

matritsa bilan berilgan o'yinni ko'rib chiqamiz.

I o'yinchining m ta sof strategiyasi bo'lgani sababli uning aralash strategiyasi

$$p_1 \geq 0,\ p_2 \geq 0,\ \ldots,\ p_m \geq 0,\ p_1 + p_2 + \ldots + p_m = 1 \qquad \textbf{(6.1)}$$

shartlarni qanoatlantiruvchi m ta sondan tuzilgan

$$P = (p_1, p_2, \ldots, p_m)$$

vektor sifatida aniqlanadi.

II o'yinchining n ta sof strategiyasi bo'lgani sababli uning aralash strategiyasi

$$q_1 \geq 0,\ q_2 \geq 0,\ \ldots,\ q_n \geq 0,\ q_1 + q_2 + \ldots + q_n = 1 \qquad \textbf{(6.2)}$$

shartlarni qanoatlantiruvchi n ta sondan tuzilgan

$$Q = (q_1, q_2, \ldots, q_n)$$

vektor sifatida aniqlanadi.

Har bir sof strategiya aralash strategiyaning xususiy holi hisoblanadi. Masalan, I o'yinchining i-sof strategiyasini i-elementi 1 ga, qolgan elementlari 0 ga teng bo'lgan

$$P = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$$

aralash strategiya sifatida aniqlash mumkin.

O'yinchilarning har biri aralash strategiyasini boshqasidan mahfiy ravishda qo'llaydi deb hisoblaymiz.

Agar o'yinchilar $P = (p_1, p_2, \ldots, p_m)$ va $Q = (q_1, q_2, \ldots, q_n)$ aralash strategiyalarni tanlasa, sof strategiyalardan tuzilgan (i, j) holat $p_i q_j$ ehtimollik bilan yuz beruvchi tasodifiy miqdorga aylanadi. (i, j) holatda I o'yinchi a_{ij} ga teng yutuq olgani sababli (P,Q) aralash strategiyalar holatida I o'yinchi yutug'ining matematik kutilmasi

$$\mathrm{E}(A,P,Q) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} a_{ik} p_i q_k$$

ga teng bo'ladi. Bu son (P,Q) aralash strategiyalar holatida I o'yinchining *o'rtacha yutug'i* deyiladi.

Agar $P^0 = (p_1^0, p_2^0, \ldots, p_m^0)$ va $Q^0 = (q_1^0, q_2^0, \ldots, q_n^0)$ strategiyalar uchun ixtiyoriy $P = (p_1, p_2, \ldots, p_m)$ va $Q = (q_1, q_2, \ldots, q_n)$ larda

$$\mathrm{E}(A,P,Q^0) \leq \mathrm{E}(A,P^0,Q^0) \leq \mathrm{E}(A,P^0,Q)$$

munosabatlar o'rinli bo'lsa, u holda P^0 va Q^0 strategiyalar o'yinchilarning *optimal aralash strategiyalari* deyiladi.
Bu esa

$$\max_P \min_Q E(A,P,Q) = E(A,P^0,Q^0) = \min_Q \max_P E(A,P,Q)$$

ekanini bildiradi. $v = E(A,P^0,Q^0)$ son *o'yinnning bahosi* deyiladi.

O'yinchilarning optimal aralash strategiyalari va o'yinning bahosidan tuzilgan (P^0,Q^0,v) uchlik *o'yinning yechimi* deyiladi.

Bu yerda quyidagi savollarning tug'ilishi tabiiy:

1. Qanday matritsali o'yinlar aralash strategiyalarda yechimga ega?
2. Agar matritsali o'yin yechimga ega bo'lsa, uni qanday topish mumkin?

Bu savollarga quyidagi teoremalar javob beradi.

Matritsali o'yinlar nazariyasining asosiy teoremasi

1-teorema (J.fon Neyman). *Ixtiyoriy matritsali o'yin uchun*

$$\max_P \min_Q E(A,P,Q) \quad va \quad \min_Q \max_P E(A,P,Q)$$

miqdorlar mavjud va ular teng:

$$\max_P \min_Q E(A,P,Q) = \min_Q \max_P E(A,P,Q).$$

Bundan tashqari, aralash strategiyalarda hech bo'lmaganda bitta (P^0,Q^0) *holat topilib,*

$$E(A,P^0,Q^0) = \max_P \min_Q E(A,P,Q) = \min_Q \max_P E(A,P,Q)$$

bo'ladi.

Optimal aralash strategiyalarning asosiy xossalari

2-teorema. $P^0 = (p_1^0, p_2^0, \ldots, p_m^0)$ *va* $Q^0 = (q_1^0, q_2^0, \ldots, q_n^0)$ *optimal aralash strategiyalar va* v *o'yinning bahosi bo'lsin. U holda*

1) *Agar I o'yinchi i-strategiyani tanlaganda II o'yinchi* Q^0 *strategiyani tanlasa, II o'yinchining yutqazishi o'yin bahosiga teng,*

$$ya'ni \ \sum_{k=1}^{n} a_{ik} q_k^0 = v \quad i=1,2,..,m; \qquad (6.3)$$

2) *Agar II o'yinchi k-strategiyani tanlaganda I o'yinchi* P^0 *strategiyani tanlasa, I o'yinchining yutug'i o'yin bahosiga teng,*

$$ya'ni \ \sum_{i=1}^{m} a_{ik} p_i^0 = v \quad k=1,2,..,n; \qquad (6.4)$$

Matritsali o'yinlar yechimlarini tuzish usullari shu tengliklarga asoslangan.

To'lov matritsasi

$$a_{ij} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{matrix} p_1 \\ p_2 \end{matrix} \qquad (6.5)$$

ko'rinishda bo'lgan 2x2 matritsali oyinni aralash strategiyasini topishni ko'rib chiqamiz.

6.5. 2x2 matritsali o'yinni aralash strategiyasini topishning analitik usuli

Bu mavzuda 2x2 matritsali o'yinning sof strategiyasi mavjud bo'lmaganda uni aralash strategiyalari topishning analitik usuli bilan tanishamiz.

(6.5) matritsali o'yinning sof strategiyasi mavjud bo'lmasin. (6.1)-(6.4) formulalarga ko'ra quyidagi tenglamalar sistemasini keltirish mumkin.

$$\left.\begin{aligned} a_{11}p_1 + a_{21}p_2 &= v \\ a_{12}p_1 + a_{22}p_2 &= v \\ p_1 + p_2 &= 1 \end{aligned}\right\} \qquad (6.6)$$

bu sistemalarni yechib, optimal strategiya va o'yin bahosini topamiz.

$$P^0 = \{p_1, p_2\} \ ; \ \ Q^0 = \{q_1, q_2\},$$

Bu yerda

$$p_1 = \frac{a_{22} - a_{21}}{a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22}}, \ \ p_2 = 1 - p_1$$

$$q_1 = \frac{a_{22} - a_{12}}{a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22}}, \ \ q_2 = 1 - q_1 .$$

O‘yin bahosini quyidagi tengliklarning biri orqali aniqlash mumkin.

$$v = p_1 a_{11} + (1 - p_1)a_{21},\ v = p_1 a_{12} + (1 - p_1)a_{22},$$
$$v = q_1 a_{11} + (1 - q_1)a_{12},\ v = q_1 a_{21} + (1 - q_1)a_{22}.$$

6.6. 2x2 matritsali o‘yinni aralash strategiyasini topishning grafik usuli

Bu mavzuda 2x2 matritsali o‘yindagi aralash strategiyalarni topishning grafik usuli o‘rganiladi.

2x2 matritsali o‘yinning geometrik talqinini keltirish mumkin. Buning uchun I o‘yinchi $P = (p, 1 - p)$ aralash strategiyani ($p = p_1$), II o‘yinchi esa 1-sof strategiyani tanlaganda, (6.6) ga ko‘ra I-o‘yinchining oladigan yutug‘i

$$y_1 = pa_{11} + (1 - p)a_{21} \tag{6.7}$$

II o‘yinchi esa 2-sof strategiyani tanlaganda

$$y_2 = pa_{12} + (1 - p)a_{22} \tag{6.8}$$

ga teng bo‘ladi. Shuning uchun (p, y) tekislikning $0 \le p \le 1$ oralig‘ida (6.7) va (6.8) to‘g‘ri chiziqlarning grafigi chiziladi. Bu grafiklarning kesishish nuqtasi o‘yin yechimini beradi.

Misol. To‘lov matritsasi

$$\begin{bmatrix} 1.5 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

ko‘rinishida bo‘lgan matritsali o‘yinning grafik usulda aralash strategiyasini topamiz.

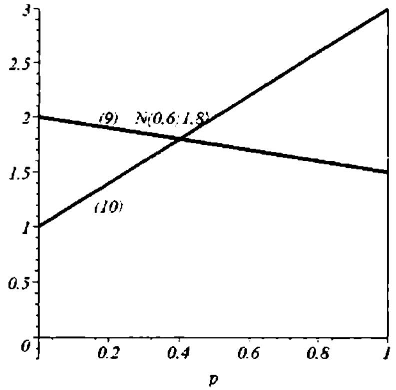
(6.7) va (6.8) chiziqlar ko‘rinishi quyidagicha bo‘ladi.

$$y_1 = 1.5p + 2(1 - p) = -0{,}5p + 2 \tag{6.9}$$
$$y_2 = 3p + (1 - p) = 2p + 1 \tag{6.10}$$

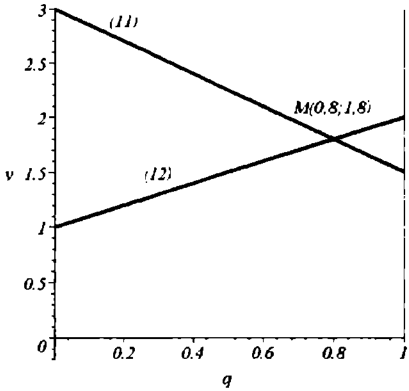
Bu chiziqlarning grafiklari 6.1-rasmda ko‘rsatilgan. Grafikning p=0 chizig‘ida to‘lov matritsasining ikkinchi satr elementlari, p=1 chizig‘ida esa 1-satr elementlari joylashganligiga e’tibor bering.

To‘g‘ri chiziqlarning kesishish nuqtasi N ning abssissasi p_1 ni, ordinatasi esa o‘yin bahosini beradi. Demak, I o‘yinchining optimal strategiyasi $p_1^0 = 0{,}6,\ p_2^0 = 1 - 0{,}6 = 0{,}4$ bo‘lib, o‘yin bahosi $v = 1{,}8$ ga teng bo‘ladi.

II o‘yinchining optimal strategiyasini aniqlash uchun (6.6) sistemaning o‘ng qismidagi sistemadan foydalanamiz.



6.1-rasm



6.2-rasm

Agar $q_1 = q,\ q_2 = 1 - q$ belgilashlar kiritsak, sistema quyidagi ko‘rinishga ega bo‘ladi:

$$y_1 = 1{,}5q + 3(1 - q) = -1{,}5p + 3 \qquad (6.11)$$

$$y_2 = 2q + 1 - q = q + 1 \qquad (6.12)$$

Bu chiziqlarning grafigi 6.2-rasmda keltirilgan. Chiziqlar kesishish nuqtasining abssissasi $q_1 = 0{,}8$, ordinatasi o‘yin bahosiga teng $v = 1{,}8$. Demak, II o‘yinchining optimal strategiyasi $Q^0 = (0{,}8;0{,}2)$ bo‘ladi.

6.7. 2xn va mx2 matritsali o‘yinlarni yechishning grafik usuli

O‘yin matritsasining strukturasi 2xn va mx2 ko‘rinishni taqozo qilsa, bunday o‘yinlarni grafik usulda yechish imkoniyati tug‘iladi. Bu mavzu shu imkoniyatni ochishga bag‘ishlangan.

I o'yinchining yutuqlar matritsasi 2xn

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{2n} \end{pmatrix}$$

matritsa bilan berilgan bo'lsin. Aytaylik, I o'yinchi $P=(p,1-p)$ aralash strategiyani tanlagan. Avvalgi bandda keltirilgan 2-teoremaga ko'ra o'yinning bahosi va p ning optimal p^0 qiymatini topish

$$v=\min_{1\le k\le n}(a_{1k}p^0+a_{2k}(1-p^0))=\max_p\min_{1\le k\le n}(a_{1k}p+a_{2k}(1-p))$$

tenglamani yechishga teng kuchli.

$$\min_{1\le k\le n}(a_{1k}p+a_{2k}(1-p)) \tag{6.13}$$

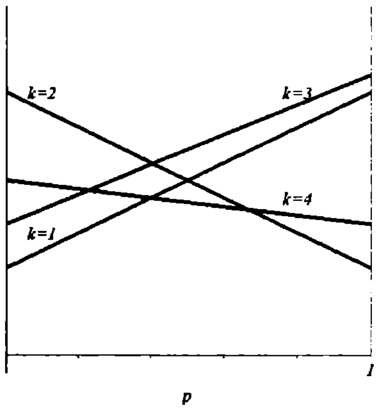
funksiyaning maksimumini uning grafigi yordamida topish oson. Buning uchun quyidagicha yo'l tutiladi. I o'yinchi $P=(p,1-p)$ aralash strategiyani, II o'yinchi esa k-sof strategiyasini tanlaganda I o'yinchining oladigan o'rtacha yutug'i

$$y_k=a_{1k}p+a_{2k}(1-p)\,,\ \ k=1,2,...,n$$

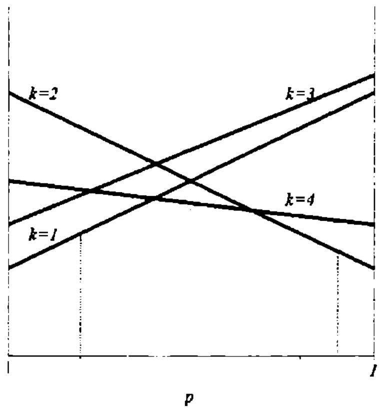
ga teng. Shu sababli II o'yinchining har bir sof strategiyasiga bir to'g'ri chiziq mos keladi. Shuning uchun tekislikda dastlab

$$y_k=a_{1k}p+a_{2k}(1-p)\,,\ \ k=1,2,...,n$$

to'g'ri chiziqlarning grafiklari chiziladi (6.3-rasm).

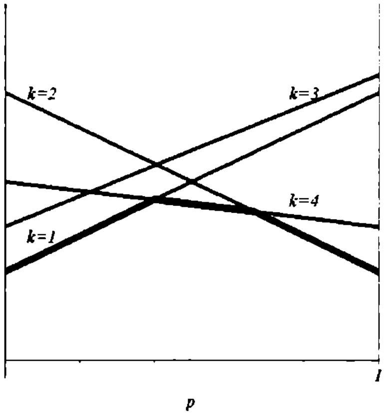


6.3-rasm

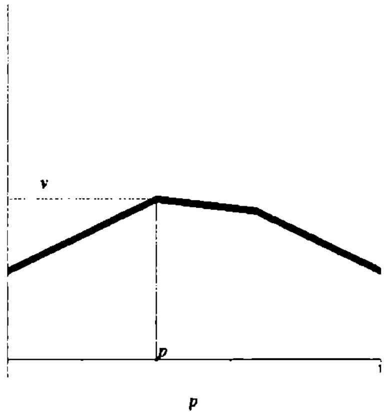


6.4-rasm

So‘ngra har bir $p,\ 0 \le p \le 1$ uchun y_k larning qiymatlari ketma-ket taqqoslanib, ularning eng kichigi belgilanadi (6.4-rasm). Natijada (6.13) funksiyaning grafigini hosil qilamiz (6.5-rasm). Bu siniq chiziq barcha to‘g‘i chiziqlarni past tomondan o‘raydi.



6.5-rasm



6.6-rasm

Uni quyi grafik deb ataymiz (6.6-rasm). Quyi grafikning eng yuqori (p^0, v) nuqtasi yordamida I o‘yinchining $P^0 = (p^0, 1-p^0)$ optimal strategiyasi va o‘yinning bahosi (v) aniqlanadi.

Misol. Ushbu 2x6

$$\begin{pmatrix} 6 & 4 & 3 & 1 & -1 & 0 \\ -2 & -1 & 1 & 0 & 5 & 4 \end{pmatrix}$$

matritsali o‘yinga e’tibor qaratamiz.

1. *O‘yinning optimal sof strategiyalari bor yoki yo‘qligini tekshiramiz.* O‘yinning quyi bahosi -1 ga, yuqori bahosi esa 1 ga tengligi sababli uning optimal sof strategiyalari yo‘q. O‘yinning yechimini aralash strategiyalarda qidirish kerak.
2. *I o‘yinchining o‘rtacha yutuqlarini hisoblaymiz.* Ushbu

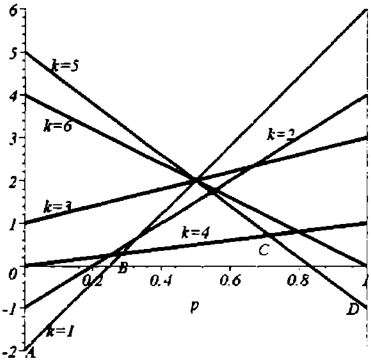
$$\begin{array}{c|cccccc} p & 6 & 4 & 3 & 1 & -1 & 0 \\ 1-p & -2 & -1 & 1 & 0 & 5 & 4 \end{array}$$

jadvaldan

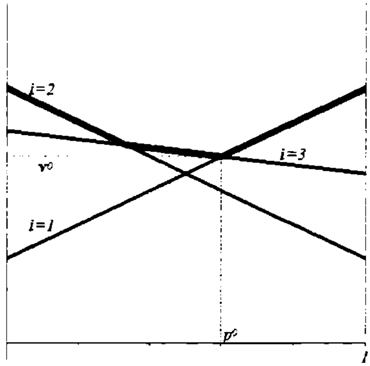
$$y_1 = 6p - 2(1-p), \quad y_2 = 4p - (1-p)$$
$$y_3 = 3p + (1-p), \quad y_4 = p$$
$$y_5 = -p + 5(1-p), \quad y_6 = 4(1-p)$$

funksiyalarni hosil qilamiz.

O'yin grafigini yasaymiz (6.7-rasm). Grafikdan ko'rinib turibdiki, barcha to'g'ri chiziqlar



6.7-rasm



p

6.8-rasm

past tomondan 1, 4 va 5- to'g'ri chiziqlarning kesmalari ABCD siniq chiziq bilan o'ralgan. ABCD siniq chiziqning eng yuqori nuqtasi C nuqtadir. Bu nuqta 4 va 5- to'g'ri chiziqning kesishish nuqtasidan topiladi. Ya'ni

$$y_4 = p, \qquad y_5 = -p + 5(1-p)$$

to'g'ri chiziqlar kesishgan nuqtada yotadi. Bu tengliklar o'ng qismlarini tenglashtirib

$$p^0 = \frac{5}{7}, \quad v = \frac{5}{7}$$

ekanini topamiz. Shuning uchun o'yinning bahosi va I o'yinchining optimal aralash strategiyasi quyidagicha

$$P^0 = \left(\frac{5}{7}, \frac{2}{7}\right), \quad v = \frac{5}{7}.$$

Endi II o'yinchi uchun

$$Q^0=(q_1^0,q_2^0,q_3^0,q_4^0,q_5^0,q_6^0)$$

optimal aralash strategiyani topamiz. Buning uchun

$$q_1^0=0,\ q_2^0=0,\ q_3^0=0,\ q_4^0=q,\ q_5^0=1-q,\ q_6^0=0$$

deb olamiz. Shu bilan biz quyi grafikning eng yuqori nuqtasini aniqlayotgan 4 va 5-funksiyalarga mos keluvchi II o'yinchining 4 va 5-sof strategiyasini ajratdik. Endi I o'yinchi sof strategiyalarini tanlaganda hosil bo'ladigan o'rtacha yutuqlarning birortasini (qaysi biri ekanining ahamiyati yo'q) o'yinning bahosiga tenglab, q ning optimal qiymatini topamiz:

$$q-(1-q)=\frac{5}{6},\quad 5(1-q)=\frac{5}{7}.$$

Har ikkala holda ham $q^0=\frac{6}{7}$ ekanini aniqlaymiz. Shunday qilib, berilgan o'yinning to'la yechimi

$$P^0=\left(\frac{5}{7},\frac{2}{7}\right),\quad Q^0=\left(0,0,0,\frac{6}{7},\frac{1}{7},0\right),\quad v=\frac{5}{7}.$$

Umuman, masalaning yechimini topishda quyidagi hollar kuzatilishi mumkin.

A. *Quyi grafik faqat 1 ta* (p^0,v) ***eng yuqori nuqtaga ega.***

1) agar $p^0=0$ bo'lsa, o'yin sof optimal strategiyalarda yechimga ega. Bunda $P^0=(p^0,1-p^0)=(0,1)$ I o'yinchining sof optimal strategiyasi. II o'yinchining sof optimal strategiyasi a) $(0,v)$ nuqtadan o'tuvchi; b) quyi grafikning biror qismini tashkil etuvchi to'g'ri chiziqqa mos kelgan sof strategiya bo'ladi.
2) agar $p^0=1$ bo'lsa, bu holda ham o'yin sof optimal strategiyalarda yechimga ega. Bunda $P^0=(p^0,1-p^0)=(1,0)$ I o'yinchining sof optimal strategiyasi. II o'yinchining sof optimal strategiyasi a) $(1,v)$ nuqtadan o'tuvchi; b) quyi grafikning biror qismini tashkil etuvchi to'g'ri chiziqqa mos kelgan sof strategiya bo'ladi.
3) agar $0<p^0<1$ bo'lsa, u holda quyi grafikning eng yuqori nuqtasida kamida 2 ta to'g'ri chiziq kesishadi. Ulardan birining

(aytaylik, k-sining) burchak koeffitsiyenti musbat, ikkinchisining (aytaylik, l-sining) burchak koeffitsiyenti manfiy bo'ladi. Ushbu

$$a_{1k}q + a_{1l}(1-q) = a_{2k}q + a_{2l}(1-q)$$

tenglamani yechib va

$$q_k = q\,,\ q_l = 1-q\,,\ q_j = 0\,,\ j \neq k,l$$

deb olib II o'yinchining optimal aralash strategiyasini topamiz.

B. *Quyi grafikning eng yuqori qiymatlari kesmani tashkil etadi.* II o'yinchining bu kesma orqali o'tuvchi to'g'ri chiziqqa mos kelgan k^0-sof strategiyasi uning uchun optimal bo'ladi.

Endi mx2 ko'rinishdagi o'yinni ko'ramiz. Bu o'yinning baholash matritsasi quyidagi ko'rinishda bo'ladi.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} \end{pmatrix}$$

Bunday o'yinlarning tahlili 2xn ko'rinishdagi o'yinga o'xshab ketadi. $Q=\{q,1-q\}$ II o'yinchining aralash strategiyasi bo'lsin. Agar I o'yinchi sof i-strategiyani ($i=1,2,..,m$) tanlaganda, II o'yinchining o'rtacha yutug'i

$$v = a_{i1}q + a_{i2}(1-q), \qquad i = 1,2,\ldots,m$$

ga teng bo'ladi. Bu munosabat q ga nisbatan to'g'ri chiziqni ifodalaydi.

$$\max_{1\le i\le m}(a_{i1}q + a_{i2}(1-q))$$

funksiyaning grafigi I o'yinchining sof strategiyalaridan tashkil topgan to'g'ri chiziqlarni yuqoridan o'rovchi siniq chiziqdan iborat bo'ladi (6.8-rasm).

Siniq chiziq quyi nuqtasining abssissasi q^0 II o'yinchining optimal strategiyasini, v^0 ordinatasi esa o'yin bahosini beradi.

I o‘yinchining optimal strategiyasini aniqlash qoidasi 2xn o‘yinda II o‘yinchining strategiyasini topish kabi bo‘ladi.

Misol keltiramiz. 3x2 oyinning bahosi quyidagicha bo‘lsin.

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Avvalo, o‘yinda sof strategiya bor-yo‘qligini aniqlaymiz. Bu o‘yinning quyi chegarasi 0, yuqori chegarasi esa 3 ga teng bo‘lgani uchun o‘yinning *egar nuqtasi* yo‘q.

B o‘yinchining aralash strategiyasini aniqlaymiz.

Quyidagi

q	1-q
3	-1
-1	3
1	0

Jadvaldan

$$(1): \qquad v = 3q - (1-q),$$

$$(2) \qquad v = -q + 3(1-q),$$

$$(3) \qquad v = q$$

to‘g‘ri chiziq tenglamalarini hosil qilamiz.

Yuqorida zikr qilingan to‘g‘ri chiziqlarning grafiklarini qurib, yuqoridan chegaralovchi siniq chiziqni aniqlaymiz (8.9-rasm). Yuqoridan o‘ralgan siniq chiziqlarning quyi chegarasi (1) va (2) chiziqlarning kesishish nuqtasidadir.

Quyidagi

$$\begin{cases} v = 3q - (1-q), \\ v = -q + 3(1-q), \end{cases}$$

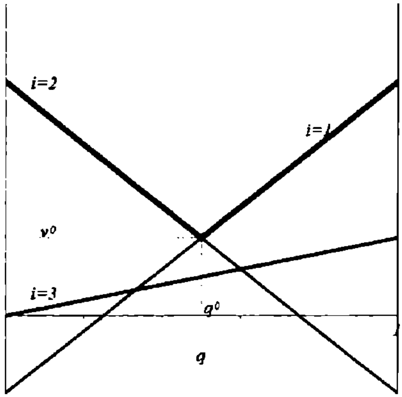
sistemani birgalikda yechsak,

$$q^0 = 1/2, \quad v^0 = 1$$

II o‘yinchining strategiyasi va o‘yin bahosini aniqlaymiz.

I o‘yinchining optimal strategiyasini topamiz.

Buning uchun



6.9-rasm

$$p_1^0 = p, \; p_2^0 = 1 - p, \; p_3^0 = 0$$

deb olib, I oyinchining sof strategiyalardagi yutuqlarini tenglab,

$$3p - (1 - p) = -p + 3(1 - p)$$

$p = 1/2$ ekanligini topamiz.

Shunday qilib, o'yin bahosi va o'yinchilarning optimal strategiyasi

$$v = 1, \quad P^0 = \{1/2, 1/2, 0\}, \quad Q^0 = \{1/2, 1/2\}$$

ga teng bo'ladi.

6.8. Chiziqli dasturlash va matritsali o'yinlar

Bu mavzuda 2xn va mx2 turdagi o'yinlarga keltirish imkoniyati bo'lmaganda taqdirda o'yinning yechimi qanday topish mumkinligi bayon qilinadi. Bunday holatda yana simpleks usul yordamga keladi.

Birinchi o'yinchi uchun yutuq funksiyasi bu o'yinchi yutug'ining matematik kutilmasi

$$E(A, P, Q) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} a_{ik} p_i q_k ,$$

$$P = (p_1, p_2, \ldots, p_m), \; Q = (q_1, q_2, \ldots, q_n)$$

orqali ifodalangan edi.
Misol sifatida quyidagi

$$A=\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

matritsa bilan berilgan o‘yinga to‘xtalamiz. Agar o‘yinchilar $P=(p_1, p_2, p_3)$ va $Q=(q_1, q_2, q_3)$ aralash strategiyalarni qo‘llasa, u holda

$$\mathrm{E}(A,P,Q)=(p_1, p_2, p_3)\cdot\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix}$$

bo‘ladi. Bu yerdan

$$\mathrm{E}(A,P,Q)=(p_2-p_3)q_1+(-p_1+p_3)q_2+(p_1-p_2)q_3$$

ekanini topamiz. Masalan, $P=(0{,}1;0{,}4;0{,}5)$ va $Q=(0{,}3;0{,}3;0{,}4)$ bo‘lganda $\mathrm{E}(A,P,Q)=-0{,}03$ bo‘ladi. Shunday qilib, agar o‘yinchilar yetarlicha ko‘p o‘yin o‘ynasa va har bir o‘yinda yuqoridagi aralash stategiyalarni qo‘llasa, u holda I o‘yinchi har bir o‘yin uchun 0,03 birlik yutqazishini kutishi mumkin.

Affin qoidasi. Matritsali o‘yinlarning yechimini qidirishda ko‘p hollarda quyidagi qoida juda foydali hisoblanadi.

Elementlari ushbu

$$b_{ij}=\lambda a_{ij}+w,\ i=1,2,\dots,m,\ j=1,2,\dots,n\ (\lambda>0)$$

munosabatlar bilan bog‘langan A *va* B *matritsali o‘yinlar bir xil optimal strategiyalarga ega, ularning baholari esa*

$$v_B=\lambda v_A+w$$

tenglikni qanoatlantiradi.

Haqiqatan ham,

$$\mathrm{E}(B,P,Q)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}b_{ik}p_iq_k=\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}(\lambda a_{ik}+w)p_iq_k$$
$$=\lambda\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}a_{ik}p_iq_k+w\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}p_iq_k$$

Endi

$$p_1+p_2+\dots+p_m=1,\ q_1+q_2+\dots+q_n=1$$

ekanidan

$$E(B,P,Q)=\lambda\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}a_{ik}p_iq_k+w=\lambda E(A,P,Q)+w$$

tenglikni hosil qilamiz. Yangi B matritsali o'yinning optimal strategiyalari w ga bog'liq emasligi ko'rinib turibdi. Shu sababli P^0 va Q^0 optimal strategiyalar uchun

$$E(B,P^0,Q^0)=\lambda E(A,P^0,Q^0)+w,$$

ya'ni $v_B=\lambda v_A+w$ bo'ladi.

Yangi B matritsali o'yinning bahosini w ni tanlash hisobiga doim musbat bo'ladigan qilib olish mumkin.

Matritsali o'yin

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{2n} \\ . & & \\ . & & \\ . & & \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{mn} \end{pmatrix}$$

matritsa bilan berilgan bo'lsin. Agar 1 o'yinchi o'zining optimal strategiyasini tanlab, 2-o'yinchi ixtiyoriy sof strategiyani tanlasa, 1 o'yinchining yutug'i o'yin bahosidan kichik bo'lmaydi. U holda

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}p_1+a_{21}p_2+\ldots+a_{m1}p_m\geq v, \\ a_{12}p_1+a_{22}p_2+\ldots+a_{m2}p_m\geq v, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{1n}p_1+a_{2n}p_2+\ldots+a_{mn}p_m\geq v, \\ p_1+p_2+\ldots+p_m=1, \\ p_1\geq 0,\ p_2\geq 0,\ldots,\ p_m\geq 0 \end{array}\right\} \qquad (6.14)$$

shartlarni qanoatlantiruvchi $P=(p_1,p_2,\ldots,p_m)$, vektorni topish masalasi kelib chiqadi.

Shuningdek, II o'yinchi

$$\left.\begin{array}{l}
a_{11}q_1 + a_{12}q_2 + \ldots + a_{1n}q_n \le v, \\
a_{12}q_1 + a_{22}q_2 + \ldots + a_{2n}q_n \le v, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
a_{m1}q_1 + a_{m2}q_2 + \ldots + a_{mn}q_n \le v, \\
q_1 + q_2 + \ldots + q_n \;\; = 1 \\
q_1 \ge 0,\; q_2 \ge 0, \ldots, q_n \ge 0
\end{array}\right\} \qquad (6.15)$$

shartlarni qanoatlantiruvchi $Q=(q_1.q_2,\ldots,q_n)$ vektorni topishi kerak. A matritsaning barcha elementlariga biror w sonini qo'shish hisobiga uning elementlarini musbat qilib olishimiz mumkin. Shu sababli oldindan matritsali o'yinning bahosi musbat: $v>0$ deb hisoblaymiz. (6.13) va (6.14) munosabatlarning har birini v ga bo'lamiz va

$$x_i = \frac{p_i}{v}, \quad y_i = \frac{q_i}{v}$$

deb belgilaymiz. Bunda

$$\sum_i x_i = \frac{1}{v}\sum_i p_i = \frac{1}{v}$$

$$\sum_j y_j = \frac{1}{v}\sum_j q_j = \frac{1}{v}$$

ekanini sezish qiyin emas. Shu sababli yutuqni maksimallashtirishi kerak bo'lgan I o'yinchi $\sum_i x_i$ yig'indini minimallashtirishi kerak. Shuningdek, II o'yinchi $\sum_j y_j$ yig'indini maksimallashtirishi kerak. Endi (6.13) va (6.14) munosabatlarni ularga ekvivalent chiziqli dasturlash masalalari shaklida ifodalash mumkin.

- **Dastlabki masala**

Ushbu

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_m$$

yig'indiga minimum qiymat beruvchi va quyidagi

$$\begin{array}{c}
a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + \ldots + a_{m1}x_m \ge 1 \\
a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{m2}x_m \ge 1 \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
a_{1n}x_1 + a_{2n}x_2 + \ldots + a_{mn}x_m \ge 1 \\
x_i \ge 0
\end{array}$$

munosabatlarni qanoatlantiruvchi $X=(x_1,x_2,...,x_m)$ vektor topilsin

- **Ikkiyoqlama masala**

Ushbu

$$y_1+y_2+...+y_n$$

yig'indiga maksimum qiymat beruvchi va quyidagi

$$\begin{aligned}
&a_{11}y_1+a_{12}y_2+...+a_{1n}y_n\le 1\\
&a_{21}y_1+a_{22}y_2+...+a_{2n}y_n\le 1\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&a_{m1}y_1+a_{m2}y_2+...+a_{mn}y_n\le 1\\
&y_i\ge 0
\end{aligned}$$

munosabatlarni qanoatlantiruvchi $Y=(y_1,y_2,...,y_n)$ vektor topilsin.

Har bir matritsali o'yin yechimga ega bo'lgani uchun yuqoridagi chiziqli dasturlash masalalari yechimga ega va

$$\min\sum_i x_i=\max\sum_j y_j=\frac{1}{v}$$

bo'ladi. Agar yuqoridagi chiziqli dasturlash masalalaridan biri simpleks usul bilan yechilsa, boshqasining yechimini ham so'nggi simpleks jadval yordamida topish mumkin. Uning komponentlari z_j-c_j satrning qoldiq o'zgaruvchilariga mos keluvchi elementlardan iborat bo'ladi.

Misol. Ushbu

$$A=\begin{pmatrix}15 & -5 & 15\\ 5 & 35 & 35\\ 10 & 10 & 35\end{pmatrix}$$

matritsali o'yinning optimal strategiyalarini va bahosini toping.

Yechish.

(a) A matritsaning 1-ustuni uning 3-ustunidan hukmron bo'lgani uchun 3-ustunni tashlab yuborishimiz mumkin. Natijada yutuqlar matritsasi

$$A_1=\begin{pmatrix}15 & -5\\ 5 & 35\\ 10 & 10\end{pmatrix}$$

ko'rinishga keladi.

(*b*) A_1 matritsaning barcha elementlariga ixtiyoriy sonni, masalan, 15 ni qo'shib, unga optimal strategiyalari bir xil bo'-ladigan

$$A_2=\begin{pmatrix}30 & 10\\ 20 & 50\\ 25 & 25\end{pmatrix}$$

matritsali o'yinni hosil qilamiz.

(*c*) A_2 optimal sof strategiyalari yo'q.

(*d*) optimal aralash strategiyalarni topish uchun o'zaro ikki-yoqlama masalalarni tuzamiz.

1. Dastlabki masala.

$$\begin{gathered}x_1+x_2+x_3\to\min\\ 30x_1+20x_2+25x_3\geq 1\\ 10x_1+50x_2+25x_3\geq 1\\ x_1\geq 0,\ x_2\geq 0,\ x_3\geq 0\end{gathered}$$

2. Ikkiyoqlama masala.

$$\begin{gathered}y_1+y_2\to\max\\ 30y_1+10y_2\leq 1\\ 20y_1+50y_2\leq 1\\ 25y_1+25y_2\leq 1\\ y_1\geq 0,\ y_2\geq 0,\ y_3\geq 0\end{gathered}$$

Bu masalalarning optimal yechimlari:

$$x_1=\frac{3}{130},\ x_2=\frac{1}{65},\quad x_3=0,$$
$$y_1=\frac{2}{65},\quad y_2=\frac{1}{130},$$

va bunda $v_1=26$. U holda $X=\left(\frac{3}{5},\frac{2}{5},0\right)$, $Y=\left(\frac{4}{5};\frac{1}{5}\right)$ vektorlar A_2 matritsali o'yin uchun optimal aralash strategiyalar va $v_1=26$ ning bahosi. Uni matritsa elementlari yordamida ham topishimiz mumkin:

$$E(A_2,X,Y)=\sum_i\sum_j a_{ij}p_iq_j=$$
$$+30\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{4}{5}+10\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{1}{5}+20\cdot\frac{2}{5}\cdot\frac{4}{5}++50\cdot\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{5}=26$$

Shuning uchun berilgan masalaning yechimi –

$$P=\left(\frac{3}{5},\ \frac{2}{5},\ 0\right),\ Q=\left(\frac{4}{5},\ \frac{1}{5},\ 0\right)$$

– o'yinchilarning optimal strategiyalari, $v=26-15=11$ esa o'yinning bahosi bo'ladi.

6.9. Statistik o'yinlar

Matritsali o'yinlardan farqli o'laroq, shunday holatlar bo'ladiki, unda ikkinchi o'yinchi tabiat hisoblanadi. Bu mavzuda shu turdagi o'yinlarning optimal variantlarini topish keltiriladi.

6.9.1. Boshlang'ich tushunchalar

Boshqarish jarayonida ehtimoliy variantlardan eng optimalini topish holatlari uchraydi. Bunday masalalar maxsus turdagi matritsali o'yinlar orqali ifodalanadi. Bu o'yinlarda I o'yinchi II o'yinchi bilan muloqotda bo'lmay, balki "tashqi muhit" (II o'yinchi) bilan muloqotda bo'ladi. Tashqi muhit o'yinchining yutishi yoki yutqazishi bilan ishi yo'q. O'yinchining (I o'yinchi) o'ziga maqbul bo'lgan variantni tanlash jarayonida tashqi muhit bir necha holatlarda bo'lishi mumkin. O'yinchi qaror qabul qilish jarayonida tashqi muhit xarakteriga mos noaniqliklarga duch keladi.

Tashqi muhitning noaniq holatida kechadigan o'yinlar **statistik o'yinlar** yoki **"tabiat bilan o'yin"** deb yuritiladi.

Umumiy holda statistik o'yinda to'lov matritsasi 6.4-jadval ko'rinishida bo'ladi.

6.4-jadval

	F_1	F_2	...	F_j	...	F_n
E_1	e_{11}	e_{12}	...	e_{1j}	...	e_{1n}
E_2	e_{21}	e_{22}	...	e_{2j}	...	e_{2n}
...	...	...	...	...	...	...
E_I	e_{i1}	e_{i2}	...	e_{ij}	...	e_{in}
...	...	...	...	...	...	...
E_m	e_{m1}	e_{m2}	...	e_{mj}	...	e_{mn}

Bu jadvalda $E_1, E_2, ... E_m$ o'yinchining variantlari, $F_1, F_2, ..., F_n$ lar tashqi muhit holatlarini ifodalaydi. e_{ij} esa tashqi muhit F_j holatda bo'lganda o'yinchi E_i strategiyani tanlagan vaziyatda qayd qilinadigan o'yinchi yutug'idir.

Masala. Yangi mahsulot ishlab chiqarish uchun firma katta, o'rtacha yoki kichik zavod qurishi mumkin. Yangi mahsulotga bo'ladigan talab oldindan noma'lum. Agar talab yuqori bo'lsa, katta zavod ko'p foyda keltiradi, agar talab kichik bo'lsa, kichik zavod foydali bo'lib, katta zavod zarar keltiradi. Masalan, kichik zavod qurilib, talab ham kichik bo'lsa, firma 20 mln. so'm foyda oladi. 6.5-jadvaldagilardan foydalanib, firma qanday zavod qurishi kerakligini aniqlash talab qilinadi.

6.5-jadval

	kichik talab	o'rtacha talab	katta talab
kichik zavod	20	20	20
o'rtacha zavod	0	40	60
katta zavod	−30	60	120

Bu yerda variantlar E_1={kichik zavod qurish}, E_2={o'rtacha zavod qurish}, E_3={katta zavod qurish}. Tashqi holatlar F_1={kichik talab}, F_2={o'rtacha talab}, F_3={katta talab}. Qarorning natijasi e_{ij} deganda E_i variantga va F_j tashqi holatga mos keluvchi iqtisodiy samara (foyda) ni tavsiflovchi baho tushuniladi.

Qaror qabul qilish mezoni. Bunday o'yinlarda o'yinning yechimi deyilganda o'yinchining biror strategiyani tanlashini tushunamiz. Strategiyani tanlash jarayoni qaror qabul qilish mezoni yordamida amalga oshiriladi. Eng maqbul variantni topish uchun baholash (maqsad) funksiyasini kiritish lozim.

Har bir E_i variantni e_i miqdor bilan baholaymiz. Biz eng katta e_i ga mos keluvchi variantni qidiramiz. Bunda e_i baho yutuq, foyda, ishonchlilik kabi miqdorlarni xarakterlaydi. Unga qarama-qarshi xarajat, yo'qotish kabi baholi holatlarni ham bahoni minimallashtirish yo'li bilan tadqiq qilish mumkin. Shunday qilib, optimal variantni tanlash

$$E_0 = \{E_{i0} \mid E_{i0} \in E, e_{i0} = \max_i e_i\}. \qquad (6.15)$$

mezonga ko'ra amalga oshiriladi ($E=\{E_1, E_2, \ldots, E_m\}$). Bu qoida quyidagicha o'qiladi: optimal variantlar to'plami E_0 barcha variantlar to'plami E ga tegishli va e_{i0} bahosi eng katta bo'lgan E_{i0} variantlardan tuzilgan. (6.15) mezon bo'yicha optimal variant, umuman olganda, bir qiymatli chiqmaydi, chunki $\max_i e_i$ bir necha variantlarda erishilishi mumkin.

Baholovchi funksiyalar

Baholovchi (maqsad) funksiyani kiritib, eng foydali variantni topishimiz mumkin. Bunda qarorlar matritsasi $\| e_{ij} \|$ bir ustunga keltiriladi. Har bir E_i variantga qandaydir e_{ir} natija yoziladi (6.6-jadval).

6.6-jadval

E_1	e_{1r}
E_2	e_{2r}
...	...
E_I	e_{ir}
...	...
E_m	e_{mr}

Optimal variantni tanlash tartibi (6.15) mezon bo'yicha olib boriladi. Lekin e_{ir} ga qanday ma'no berish kerak, degan muammo paydo bo'ladi. Masalan,

$$e_{ir} = \min_j e_{ij} + \max_j e_{ij}$$

deb olsak, eng yaxshi natija

$$\max_i e_{ir} = \max_i (\min_j e_{ij} + \max_j e_{ij})$$

bo'ladi. Optimal variantni (6.15) mezonga muvofiq olib borishimiz mumkin.

6.9.2. Statistik o'yinlarning klassik mezonlari

1. *Optimistik pozitsiya*:

$$\max_i e_{ir} = \max_i (\max_j e_{ij})$$

Qaror qabul qiluvchi eng katta foyda kelishiga e'tibor qaratadi. Bu holda qaror qabul qiluvchining pozitsiyasi optimistik pozitsiya deyiladi.

2. *Neytralitet pozitsiyasi*:

$$\max_i e_{ir} = \max_i \left(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} e_{ij}\right).$$

3. *Pessimistik pozitsiya-minimaks (MM) mezoni*:

$$\max_i e_{ir} = \max_i (\min_j e_{ij})$$

Qaror qabul qiluvchi har bir variant uchun eng yomon natijani oladi. So'ngra bu natijalarning eng yaxshisini tanlaydi. Minimaks mezonida o'ta ehtiyotkorlikka mos keluvchi baho funksiyasi qo'llaniladi. Bu holda qaror qabul qiluvchining pozitsiyasi pessimistik pozitsiya deyiladi.

MM mezoni bo'yicha qaror qabul qilish qoidasini quyidagicha talqin qilish mumkin: Qarorlar matritsasi $\| e_{ij} \|$ har bir satrning eng kichik e_{ir} elementlaridan tuzilgan yangi ustun bilan to'ldiriladi. Bu ustunning eng katta e_{ir} elementi joylashgan satrlardagi variantlar tanlanadi.

Misol. Variantlar: E_1={biror tashkilot aksiyalarini sotib olish}; E_2={pulni muomalaga chiqarish}, E_1={pulni uyda saqlash}; Tashqi holatlar F_1={hech qanday inflatsiya yo'q}, F_2={inflatsiya darajasi 30%}, F_3={inflatsiya darajasi 100%} bo'lsin (6.7-jadval).

6.7-jadval

	F_1	F_2	F_3	$\min e_{ij}$	$\max\min e_{ij}$
E_1	3	9	6	3	
E_2	8	5	11	5	5
E_3	9	6	-6	-6	

Javob: E_0={E_3} – pulni muomalaga chiqarish.

Bu mezon bo'yicha optimal variant tanlanganda qaror qabul qiluvchi o'zi ko'zlagan natijadan yomoniga duch kelmaydi, ya'ni bu mezon bo'yicha variant tanlanganda risk bo'lmaydi.

Qaysi F_j holat ro'y bermasin, unga mos keluvchi natija $Z_{MM} = \max\limits_i e_{ir}$ dan kichik bo'lishi mumkin emas. Shuning uchun ham, MM mezoni asosiy mezonlardan hisoblanadi. Lekin riskning yo'qligi, umuman olganda, turli yo'qotishlarga olib kelishi mumkin.

Bu mezon bo'yicha qaror qabul qilinayotgan holat quyidagilar bilan tavsiflanadi.

- F_j tashqi holatlarning yuzaga kelishi haqida hech narsa ma'lum emas;
- qaror bir marta qabul qilinadi;
- riskka yo'l qo'yilmasligi kerak.

4. *Bayes-Laplas (BL) mezoni.* q_j orqali F_j tashqi holatning yuzaga kelish ehtimolini belgilaymiz. U holda BL mezoni quyidagicha aniqlanadi:

$$Z_{BL} = \max_i e_{ir},$$

$$e_{ir} = \sum_{j=1}^{n} e_{ij} q_j,$$

$$E_0 = \{E_{i0} \mid E_{i0}, e_{i0} = \max_i \sum_{j=1}^{n} e_{ij} q_j, q_1 + \ldots + q_n = 1\}.$$

BL mezoni bo'yicha qaror qabul qilish qoidasini quyidagicha talqin qilish mumkin: Qarorlar matritsasi $\| e_{ij} \|$ har bir satrdagi qiymatlarning matematik kutilmalari e_{ir} dan tuzilgan yangi ustun bilan to'ldiriladi. Satrlarda eng katta e_{ir} qiymat joylashgan variantlar tanlanadi.

Misol. 6.8-jadvaldagi ma'lumotlarni BL mezoni bo'yicha hisoblaymiz.

6.8-jadval

	F_1	F_2	F_3	$\sum_{j=1}^{n} q_j e_{ij}$	$\max e_{ir}$
E_1	10	4	-5	3	
E_2	2	9	6	17/3	
E_3	8	7	11	25/3	25/3
E_4	9	6	-6	3	

$E_0 = E_3$.

Bu mezon bo'yicha qaror qabul qilinayotgan holat quyidagilar bilan tavsiflanadi.

- tashqi holatlarning yuzaga kelish ehtimollari ma'lum va vaqtga bog'liq emas;
- qaror cheksiz ko'p marta qabul qilinadi;
- qaror qabul qilishlar soni oz bo'lganda riskka yo'l qo'yiladi.

6.9.3. Hosilaviy mezonlar

Gurvist mezoni (HW-mezon). Gurvist mezoni quyidagi baho funksiyasi orqali aniqlanadi.

$$Z_{HW} = \max_i e_{ir}$$
$$e_{ir} = c \cdot \min_j e_{ij} + (1-c) \cdot \max_j e_{ij} \qquad (6.16)$$

Bu yerda $0 \le c \le 1$. Optimal variant quyidagicha tanlanadi.

$$E_0 = \{E_{i0} \mid E_{i0} \in E, e_{i0} = \max_i [c \cdot \min_j e_{ij} + (1-c) \cdot \max_j e_{ij}]\}$$

Gurvist mezoni bo'yicha qaror qabul qilish qoidasini quyidagicha talqin qilish mumkin: Qarorlar matritsasi $\| e_{ij} \|$ har bir satrdagi qiymatlarning eng katta va eng kichik qiymatlarning o'rtachalari e_{ir} (6.16) dan tuzilgan yangi ustun bilan to'ldiriladi. Satrlarda eng katta e_{ir} qiymat joylashgan variantlar tanlanadi.

$c=1$ da Gurvist mezoni MM mezoniga, $c=0$ da esa maksimaks mezoniga aylanadi. Ko'pincha «o'rtacha nuqtayi nazar» sifatida $c = 0.5$ deb olinadi. c soni optimizm va pessimizm orasidagi munosabatni ifodalovchi ko'rsatkich sifatida talqin qilinadi.

Bu mezon bo'yicha qaror qabul qilinayotgan holat quyidagilar bilan tavsiflanadi.

- tashqi holat F_j larning yuzaga kelishi haqida hech narsa ma'lum emas;
- qaror oz marta qabul qilinadi;
- qaror qabul qilishda riskka yo'l qo'yiladi.

Misol. Fabrika to‘rt xil mahsulot ishlab chiqaradi. E_1={birinchi mahsulot}, E_2={ikkinchi mahsulot}, E_3={uchinchi mahsulot}, E_4={to‘rtinchi mahsulot}. Foyda mahsulot turiga mos keluvchi F_j talab holatiga bog‘liq. Foydalar matritsasi 6.9-jadvalda keltirilgan.

6.9-jadval

	F_1	F_2	F_3	F_4	e_{ir}	E_{HW}
E_1	10	6	4	4	7.2	
E_2	8	11	5	3	8.6	
E_3	5	4	10	8	7.2	
E_4	6	7	8	12	10.2	E_4

bunda $c = 0.3$.

Huja-Lemon mezoni. Bu mezon BL va MM mezonlari asosiga qurilgan. Bu mezon bo‘yicha tashqi muhit ro‘y berishi ehtimollarining aniqlilik darajasini belgilovchi parametr beriladi. Bu parametrning qiymatlari {0,1] oralig‘ida joylashadi. Agar tashqi muhit ro‘y berishning ehtimollar yuqori bo‘lsa, BL mezonning mavqeyi yuqori bo‘ladi.

$$e_{ir} = \left(v\sum_{j=1}^{n} e_{ij} q_j + (1-v)\min_j e_{ij} \right)$$

$$z_{HL} = \max_i e_{ir}$$

Bu yerda $0 \le v \le 1$. Baholash matritsasi e_{ir} ustun bilan to‘ldiriladi. Bu yerda u tashqi muhit holatlarining ro‘y berish ehtimolining aniqlilik darajasi. Bu mezon bo‘yicha strategiyani tanlash $\max_i e_{ir}$ bo‘yicha amalga oshiriladi.

Bu mezonni quyidagi holatlarga ishlatish mumkin.

1. Tashqi muhit holatlarining ro‘y berish ehtimollari ko‘p bo‘lmagan tajribadan olingan bo‘lib, u o‘zgarishi mumkin.
2. Nazariy jihatdan qabul qilingan qaror juda ko‘p marta takrorlanganda yaxshi natija beradi.
3. Qabul qilingan qaror juda kam marta takrorlanganda riskdan holi emas.

Sevij (S) mezoni. Bu mezon quyidagicha aniqlanadi.

$$Z_S = \min_i(\max_j(\max_i e_{ij} - e_{ij}))$$
$$a_{ij} = \max_i e_{ij} - e_{ij}$$

Elementlari a_{ij} lardan iborat matritsa risk matritsasi deyiladi. a_{ij} ni tashqi F_j holat bo'lganda, optimal variant o'rniga undan yomon variantni tanlash tushuniladi. Ya'ni optimal variantni tanlamagandagi mag'lubiyat deb qarash mumkin. Riskni minimallashtirishga harakat qilinadi.

Demak, bu mezon bo'yicha optimal strategiyani aniqlash uchun risk matritsasini aniqlaymiz.

$$a_{ij} = \max_i e_{ij} - e_{ij}$$

Risk matritsasi $e_{ir} = \max_i a_{ij}$ ustun bilan to'ldiriladi $\min_i e_{ir}$ shartni qanoatlantiruvchi strategiya optimal bo'ladi.

Bu mezonni ishlatish MM mezoni kabidir.

S mezoniga ko'ra strategiyani tanlash quyidagicha kechadi: $\|e_{ij}\|$ matritsaning har bir elementi shu ustundagi eng katta elementdan ayrilib, risk matritsasi $\|a_{ij}\|$ hosil qilinadi. Bu matritsa uning satr elementlarining eng kattalari bilan to'ldiriladi – e_{ir}. Shu ustundagi eng kichik element joylashgan strategiya optimal hisoblanadi.

Geyermeyer mezoni. Bu mezon bo'yicha qaror qabul qilish quyidagicha.

$$Z_G = \max_i e_{ir}$$
$$e_{ir} = \min_j e_{ij} q_j$$

Optimal yechimni aniqlash quyidagicha yoziladi:

$$E_0 = \{E_{i0} \mid E_{i0} \in E, e_{i0} = \max_i \min_j e_{ij} q_j \ \text{va} \ e_{ij} < 0\}$$

Ko'p xo'jalik masalalarida narx-navo va xarajatlar bilan ish ko'riladi. Shuning uchun $e_{ij} < 0$ sharti odatda bajariladi. Agar e_{ij}

lar ichida musbatlari ham uchrasa, barcha elementlarni manfiy qilishga matritsa elementlarini $e_{ij}-a$ almashtirish yordamida erishiladi, bu yerda $a>0$ bo'lib, biror yo'l bilan aniqlanadi.

Ko'paytma mezoni. Bu mezon quyidagicha aniqlanadi $(e_{ij}>0)$

$$Z_P=\max_i \prod_j e_{ij}$$

Bu mezon eng katta yutuqqa asoslangan.

Strategiyani aniqlash quyidagicha amalga oshiriladi:

Matritsa yangi ustun bilan to'ldiriladi. Bu ustun elementlari matritsa satrlarining ko'paytmasiga teng. Shu ustun elementlari ichida eng katta qiymat beruvchi satr optimal strategiya hisoblanadi.

Bu mezonni quyidagi holatlarda ishlatish mumkin.

Tashqi muhitning ro'y berish ehtimollari ma'lum emas. Har bir tashqi muhit ro'y berishini e'tibordan chetlashtirmaslik lozim. Bu mezonga ko'ra qaror kam marta qabul qilinadi. Mezonda riskka yo'l qo'yiladi.

Agar berilgan matritsada $e_{ij}>0$ sharti bajarilmasa, $e_{ij}+a$ matritsa tuziladi. Bu yerda $a>\left|\min e_{ij}\right|$. Albatta, natija a ning qiymatiga bog'liq bo'ladi. Amaliyotda $a=\left|\min e_{ij}\right|+1$ deb olinadi.

Bu mezonga ko'ra tashqi muhit ro'y berish ehtimollari va qaror qabul qilishning takrorlanishlari ham inobatga olinmaydi.

Statistik o'yinga olib keladigan bir iqtisodiy masala ko'rib chiqamiz.

Masala. Qishloq xo'jalik fermasi karam yetishtiradi. Ferma karamni kuzdan bahorgacha saqlash va sotish bilan shug'ullanadi. Ferma karamni saqlash va sotish jarayonida uchta rejaga ega:

E_1 – karam kuzda terib olingandan so'ng barchasini sotish;

E_2 – karamning ma'lum qismini saqlab, uni kuzgi va qishki davrda sotuvga chiqarish;

E_3 – hosilning barchasini saqlab, sotishni bahorda amalga oshirish.

Fermaning karamni yetishtirish, saqlash va sotishdagi xarajatlari strategiyalarni tanlashga qarab mos ravishda 20, 30 va 40 ming pul birligiga teng.

Bozorda karamga nisbatan quyidagi holatlar ro‘y berishi mumkin:

F_1 — karamning bozorga tushish jarayoni tekis bo‘lib, karamning narxi turg‘un bo‘ladi;

F_2 — kuzgi davrda bozorda karam qish va bahorga qaraganda mo‘l bo‘ladi. Natijada davrga qarab karam narxi o‘zgarib turadi. Qish boshlanishi bilan karam narxi kuzdagiga nisbatan ko‘tarilib, bu narx bahorgacha turg‘un saqlanadi;

F_3 — kuzda bozordagi karam miqdori qish va bahordagi davrga qaraganda yetarlicha yuqori. Karamning bozorga tushishi kamayib boradi. Natijada karam narxidagi turg‘unlik yo‘qoladi.

Fermaning bozordagi holatga qarab rejadagi strategiyalarda oladigan daromadi 6.10-jadvalda keltirilgan.

6.10-jadval

Ferma strategiyasi	Daromad (ming pul birligida)		
	F_1	F_2	F_3
E_1	30	25	22
E_2	30	40	33
E_3	30	40	60

Masalada quyidagilarni aniqlash kerak:

1. Agar bozor holatlarining ro‘y berish ehtimollari 0,3, 0,6 va 0,1 bo‘lsa, qaysi strategiya ferma uchun eng ma’qul?
2. Bozor holatining ehtimollari ma’lum emas. Quyidagi talablarni amalga oshirish uchun ferma qaysi strategiyani tanlagani ma’qul?
   a) minimal kafolatlangan yutuq bo‘lishi uchun;
   b) qaror qabul qilishda riskni hisobga olish;
   c) pessimistlik koeffitsiyenti 0,3 ga teng bo‘lganda;
3. Bozor holatining ro‘y berish ehtimollari yetarli aniqlikka ega emas, bu ma’lumotning aniqlilik darajasini ko‘rsatuvchi parametrning qiymati 0,7 ga teng (Sevij mezoni).

Masala yechimining iqtisodiy talqinini keltiring.

Yechish.

1. O'yinning yutuq matritsasini tuzamiz. Buning uchun daromaddan xarajatlarni ayirib, foydani aniqlaymiz. Yutuq matritsasi 6.11-jadval ko'rinishida bo'ladi.

6.11-jadval

	F_1	F_2	F_3
E_1	10	5	2
E_2	0	10	3
E_3	-10	0	20

2. BL mezoniga ko'ra (6.12-jadval)

e_{1r} = 10·0,3 + 5·0,6 + 2·0,1 = 6,2

e_{2r}= 0·0,3 + 10·0,6 + 3·0,1 = 6,3

e_{23}= -10·0,3 + 0·0,6 + 20·0,1 = -1

6.12-jadval

	F_1	F_2	F_3	e_{ir}
P_j	0,3	0,6	0,1	
E_1	10	5	2	6.2
E_2	0	10	3	$\boxed{6.3}$
E_3	-10	0	20	-1

$$Z_{BL} = \max_i e_{ir} = e_{2r} = 6{,}3\,.$$

Bu mezon bo'yicha tashqi holatning berilgan ehtimolliklarida fermaning eng optimal strategiyasi E_2 bo'ladi.

3. MM, neytralitet va Gurvis mezonlari bo'yicha optimal strategiyani aniqlaymiz (6.13-jadval).

6.13-jadval

	F_1	F_2	F_3	e_{ir} (MM)	e_{ir} (neytralitet)	e_{ir} (G)
E_1	10	5	2	$\boxed{2}$	$\boxed{5{,}67}$	7,6
E_2	0	10	3	0	4,33	7
E_3	-10	0	20	-10	3,33	$\boxed{11}$

MM mezoni bo'yicha optimal strategiya E_1 bo'ladi ($Z_{MM}=2$).

Neytralitet mezoni bo'yicha ham optimal strategiya E_1 bo'ladi ($Z_N=5{,}67$). Gurvis mezoni bo'yicha aniqlangan optimal strategiya E_3 bo'ladi ($Z_G=11$).

4. Sevij mezoni bo'yicha optimal strategiyani aniqlaymiz. Buning uchun, avvalo, risk matritsasini aniqlaymiz (6.14-jadval).

6.14-jadval

	F_1	F_2	F_3	e_{ir}
E_1	0	5	18	18
E_2	10	0	17	$\boxed{17}$
E_3	20	10	20	20

Bu mezon bo'yicha optimal strategiya E_2 bo'ladi ($Z_S=17$).

4. Huja-Lemon mezoni bo'yicha optimal strategiyani aniqlaymiz (6.15-jadval).

6.15-jadval

	F_1	F_2	F_3	e_{ir}
q_j	0,3	0,6	0,1	
E_1	10	5	2	$\boxed{4{,}94}$
E_2	0	10	3	4,41
E_3	-10	0	20	-3,7

Huja-Lemon mezoni bo'yicha optimal strategiya E_1 bo'ladi ($Z_{HL}=4{,}97$).

6. Olingan natijalarni iqtisodiy talqin qilamiz.

Agar fermaga bozor holatining ehtimolliklari ma'lum bo'lsa, eng maqbul strategiya karamning bir qismini kuzda sotish va qolgan qismini qishda sotish uchun saqlashdir (foyda 6,3 mln. pul birligiga teng). Agar bozorning holatlari to'g'risidagi ma'lumot ma'lum bo'lmasdan, foydani yo'qotish riskini minimallashtirishda ham bu strategiya eng optimal bo'ladi.

Bozor holatining ehtimolliklari ma'lum bo'lmaganda, ferma uchun foydani maksimallashtirishdan ko'ra kafolatlangan yutuqqa erishish asosiy deb hisoblansa, eng maqbul qaror barcha karamni bahorda sotish maqsadga muvofiq. Agar ferma bozor holati to'g'risida ma'lumotga ega bo'lib, lekin bu ma'lumotning aniqlilik darajasi yetarli bo'lmasa ham, bu strategiya eng maqbul bo'lib qolaveradi.

Agar bozor holati to'g'risidagi ma'lumotga ega bo'lmay, foydani yo'qotish riski ferma uchun asosiy omil hisoblanmaganda ferma karam hosilini bahorgacha saqlab, so'ng sotishga qo'yish eng optimal bo'ladi.

Tayanch iboralar

Matritsali o'yinlar, to'lov matritsasi, o'yinning quyi va yuqori baholari, sof strategiya, aralash strategiya, fon Neyman teoremasi, hukmdorlik qoidasi, 2x2, 2xn, mx2 matritsali o'yinlar, affin qoidasi, matritsali o'yinlar va simpleks usul, statistik o'yinlar, statistik o'yinlarda klassik mezonlar, hosilaviy mezonlar.

Savollar

1. Qanday o'yinlar matritsali o'yinlar turkumiga kiradi?
2. Matritsali o'yinda o'yinning yuqori va quyi baholari nimani anglatadi?
3. Qanday o'yinlar sof strategiyali o'yinlar hisoblanadi?
4. Aralash strategiyali o'yin deb qanday o'yinga aytiladi?
5. 2x2 o'yinda aralash strategiyalar qanday topiladi?
6. O'yin matritsasini soddalashtirishda hukmronlik qoidasi nima?
7. 2xm va nx2 o'yinlarni grafik usulda yechish uslubi qanday?
8. Affin qoidagi qanday ma'noni kasb etadi?
9. Matritsali o'yinlarni chiziqli dasturlash masalasiga keltirish jarayoni qanday hal qilinadi?
10. Qanday o'yinlar statistik o'yinlar deyiladi?
11. Qarorlar qabul qilishdagi maksimalist, minimax, neytralitet va Bayes-Laplas mezonlari qanday tatbiq qilinadi?
12. Qaror qabul qilishning hosilaviy mezonlaridan qaysilarini bilasiz?

Mashqlar

6.1. A o'yinchi {1,3,4} to'plamdan, B o'yinchi esa {1,2,5} to'plamdan sonlar tanlaydi. Agar tanlangan sonlar yig'indisi juft bo'lsa, A ning yutug'i shu songa teng, toq bo'lsa, B ning yutug'i shu songa teng bo'ladi. A o'yinchining yutuqlar matritsasini tuzing.

6.2. Harbiy mashqlarda ikkita *A* va *B* tomon bo'lib, *A* lar 6 ta rotadan, *B* lar esa 4 ta rotadan tuzilgan. *B* lar bir qishloqni himoya qilmoqdalar va bu qishloqqa *A* lar ikki yo'nalishdangina kela olishi mumkin. *B* larning komandiri ixtiyoriy rotani ixtiyoriy bir yo'nalishning himoyasiga yuborishi mumkin. Agar *A* lar biror yo'nalishda *B* larga nisbatan 3 marta ko'p yoki undan ortiq kuch yig'sa, ular *B* larni yutib chiqadi. Agar *B* lar biror yo'nalishni himoya qilmasalar ham, *A* lar yutib chiqadi. *A* tomonning yutuqlar matritsasini tuzing (Izoh. *A* larning yutug'ini 1, mag'lubiyatini -1 bilan belgilang. Strategiyalarni (1-5) ko'rinishda kiriting (1-yo'nalishga 1 ta, 2-yo'nalishga 5 ta)).

6.3. Quyidagi matritsali o'yinlarning quyi va yuqori baholarini aniqlang. Sof strategiyalarda yechimga ega bo'lsa, yechimni toping.

1) $\begin{pmatrix} 7 & 2 & 5 & 1 \\ 2 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 3 & 4 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 6 \end{pmatrix}$ 2) $\begin{pmatrix} 3 & 5 & 2 & 4 \\ 2 & 6 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ 3) $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \\ 2 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$

6.4. Quyida I o'yinchining yutuq matritsasi berilgan. Matritsani soddalashtirib, analitik usulda yeching.

1) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ 2) $\begin{pmatrix} 5 & 6 & 2 \\ 3 & 4 & 4 \\ 4 & 5 & 1 \end{pmatrix}$ 3) $\begin{pmatrix} 3 & 7 & 4 \\ 2 & 5 & 3 \\ 5 & 1 & 5 \end{pmatrix}$

6.5. Quyidagi matritsali o'yinlarni grafik usulda yeching

1) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -2 & 3 & -3 \end{pmatrix}$ 2) $\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 4 \\ 0 & 5 \\ -1 & 6 \end{pmatrix}$

6.6. Quyidagi jadvallarda 1-o‘yinchining yutuq matritsalari berilgan. Har bir o‘yinchining strategiyalarini aniqlaydigan matematik model tuzing.

1) $\begin{pmatrix} 4 & 5 & 3 \\ 6 & 4 & 7 \\ 5 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ 2) $\begin{pmatrix} 5 & 6 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \\ 4 & 5 & 3 \end{pmatrix}$ 3) $\begin{pmatrix} 7 & 3 & 8 & 1 \\ 1 & 7 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 7 \end{pmatrix}$

6.7. Quyida 1-o‘yinchining yutuq matritsasi berilgan, masalani chiziqli dasturlash masalasiga keltirib, simpleks usulda yeching.

1) $\begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 \\ -3 & 4 & -5 \\ 4 & -5 & 6 \end{pmatrix}$ 2) $\begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ 3) $\begin{pmatrix} 4 & 3 & 4 & 2 \\ 3 & 4 & 6 & 5 \\ 2 & 5 & 1 & 5 \end{pmatrix}$

VII bob. BIMATRITSALI O'YINLAR

7.1. Bimatritsali o'yinlar tushunchasi

Matritsali o'yinlarda o'yin holati yagona matritsa orqali ifodalangan bo'lsa, bimatritsali o'yinlarda har bir o'yinchining to'lov matritsasi mavjud bo'ladi. Bu mavzuda shu turdagi o'yinlar keltiriladi.

Yuqorida qaralgan matritsali o'yinlarda o'yinchilarning maqsadlari to'la qarama-qarshi edi. Lekin o'yinchilarning maqsadlari qarama-qarshi bo'lmagan holatlar hayotda ko'p uchraydi.

O'zaro muholif bo'lgan A va B o'yinchilar quyidagi imkoniyatlarga ega bo'lsin.

A o'yinchi A_1, ..., A_m strategiyalarning ixtiyoriy birini tanlashi mumkin;

B o'yinchi B_1,..., B_n strategiyalarning ixtiyoriy birini tanlashi mumkin bo'lsin.

Har safar ularning birgalikda tanlagan strategiyalari aniq baholangan bo'lsin: *agar A o'zining i-strategiyasi A_i ni, B esa k-strategiyasi B_k ni tanlagan bo'lsa, u holda A ning yutug'i biror a_{ik} songa, B ning yutug'i esa biror b_{ik} songa teng.*

Boshqacha aytganda, har safar har bir o'yinchi yutuq oladi.

A va B ning barcha strategiyalarini ketma-ket qarab chiqib ularning yutuqlarini ifodalovchi 2 ta jadval tuzishimiz mumkin:

Birinchi o'yinchining yutuqlarini ifodalovchi

7.1-jadval

	B_1	...	B_k	...	B_n
A_1	a_{11}	...	a_{1k}		a_{1n}
A_i	a_{i1}		a_{ik}		a_{in}
A_m	a_{m1}		a_{mk}		a_{mn}

7.1-jadval va II o'yinchining yutuqlarini ifodalovchi

7.2-jadval

	B_1	...	B_k	...	B_n
A_1	b_{11}	...	b_{1k}	...	b_{1n}
...	...		...		...
A_i	b_{i1}		b_{ik}		b_{in}
	...		...		...
A_m	b_{m1}		b_{mk}		b_{mn}

7.2-jadval. Odatda bu jadvallar matritsa shaklida beriladi.

$$
A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{1k} & a_{1n} \\ \dots & & \\ a_{i1} & a_{ik} & a_{in} \\ & & \\ a_{m1} & a_{mk} & a_{mn} \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{1k} & b_{1n} \\ & & \dots \\ b_{i1} & b_{ik} & b_{in} \\ \dots & & \dots \\ b_{m1} & b_{mk} & b_{mn} \end{pmatrix}
$$

Bunda A I o'yinchining yutuqlari matritsasi, B esa II o'yinchining yutuqlari matritsasi. A o'yinchi o'zining A_i strategiyasini, B esa o'zining B_k strategiyasini tanlasa. A o'yinchi a_{ik}, B esa b_{ik} ga teng yutuq oladi. Shunday qilib, o'yinchilarning maqsadlari turlicha (lekin qarama-qarshi bo'lishi shart emas) bo'lganda 2 ta to'lov matritsasi hosil bo'ladi bittasi A ning to'lov matritsasi, boshqasi B ning to'lov matritsasi. Shu sababli bunday o'yinlarga bimatritsali o'yinlar deb nom berilishi tabiiy.

Avval ko'rib chiqilgan matritsali o'yinlarni ham bimatritsali o'yinlar sifatida qarash mumkin. Bunda B ning to'lovlar matritsasi A ning to'lovlar matritsasiga qarama-qarshi bo'ladi:

$$b_{ik} = -a_{ik}$$

yoki

$$
A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{1n} \\ & \dots \\ a_{m1} & a_{mn} \end{pmatrix}, \qquad B = -A = \begin{pmatrix} -a_{11} & -a_{1n} \\ & \\ -a_{m1} & -a_{mn} \end{pmatrix}.
$$

Umuman olganda, bimatritsali o'yin nol yig'indili o'yin emas. Bimatritsali o'yinlar sinfi matritsali o'yinlar sinfiga nisbatan ancha keng sinfni tashkil etadi.

Masala. Kichik **A** firma (**A** o'yinchi) boshqa yirik **B** firma (**B** o'yinchi) tomonidan egallangan ikkita bozorning biriga o'z mahsulotlarini olib kelish taraddudida turibdi. Buning uchun bozorlarning birida reklama harakatlarini boshlab yuborishi mumkin. Har ikkala bozorda ham hukmronlik qiluvchi **B** firma bunga to'sqinlik qiladi (albatta, qonun doirasida). Agar biror bozorda B chora ko'rmasa, **A** uni egallab oladi, aks holda **A** bozorni qo'ldan boy beradi.

Aniqlik uchun **A** ga 1-bozorga kirib olish 2-bozorga kirib olishga nisbatan manfaatliroq bo'lsin, deb olaylik. Masalan, **A** firmaning 1-bozordar g'alaba qilishi unga 2-bozordagi g'alabaga nisbatan ikki marta ko'p yutuq olib keladi. Shu bilan birga 1-bozordagi mag'lubiyati uni to'la xonavayron qilib, B ni raqibdan xalos etadi. Tabiiyki 1-bozorni egallash uchun ham ko'p kuch sarflash kerak deyish mumkin.

Endi 2-bozorga kelsak, **A** mag'lubiyatga uchraganda uning talafoti uncha katta emas. Shu bilan birga, uning g'alabasi ham unga ko'p yutuq keltirmaydi.

Shunday qilib, **A** firmaning ikkita strategiyasi bor:

A_1- birinchi bozorni tanlash, A_2- ikkinchi bozorni tanlash.

B ning strategiyalari ham huddi shunday:

B_1- birinchi bozorni tanlash. B_2- ikkinchi bozorni tanlash.

To'lov matritsalarini qurish uchun o'yinchilarning har juft strategiyasiga mos keluvchi miqdorlar hisoblanishi kerak. Biz ularni shartli birliklarda keltiramiz:

$$A=\begin{pmatrix}-10 & 2\\ 1 & -1\end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix}5 & -2\\ -1 & 1\end{pmatrix}$$

Keltirilgan to'lov matritsalarini ko'zdan kechiramiz. Agar har ikkala o'yinchi bitta bozorni tanlasa, g'alaba kuchli *B* firma tomonida bo'ladi.

B ning yutuqlari (A_1, B_1) holatda 5 ga, (A_2, B_2) holatda 1 ga tengligi birinchi bozorning manfaatliroqligini (yaxshi joylashgan, gavjum) tasdiqlaydi. A ning yutuqlari (A_1, B_1) holatda -10 ga, (A_2, B_2) holatda -1 ga tengligi unga juda qayg'uli.

Firmalar o'z e'tiborlarini turli bozorlarga qaratgan holatlar: (A_1, B_2) va (A_2, B_1) ga kelsak, bunda **A** firmani haqiqiy yutuqlar kutyapti. *B* esa shu sonlarga teng talafotlar ko'ryapti.

7.2. Aralash strategiyalar

Bu mavzuda bimatritsali o'yinlar uchun aralash strategiya tushunchasi keltiriladi.

Matritsali o'yinlarda agar o'yinchilarning faqat

$$A_1,\dots,A_m,\dots,B_1,\dots,B_n.$$

sof strategiyalari bilan chegaralansak, muvozanat holati bo'lmasligi ham mumkinligini ko'rdik. Bu qiyinchilik aralash strategiyalarni kiritish bilan bartaraf qilingan edi.

Bimatritsali o'yinlarda ham o'yinchilarning aralash strategiyalarini aniqlaymiz. Birinchi o'yinchining aralash strategiyasini

$$p_1+\dots+p_m=1,\ p_1\ge 0,\dots,p_m\ge 0$$

shartlarni qanoatlantiruvchi $P=(p_1,\dots,p_m)$ vektor sifatida kiritamiz.

Ushbu

$$q_1+\dots+q_m=1,\ q_1\ge 0,\dots,q_n\ge 0$$

shartlarni qanoatlantiruvchi $Q=(q_1,\dots,q_n)$ vektorni II o'yinchining aralash strategiyasi deb ataymiz. O'yin o'zgarmas sharoitda davomiy takrorlanib turadi deb hisoblaymiz. Matritsali o'yinlarda A va B o'yinchilarning o'rtacha yutuqlari A matritsaning elementlari va p_i va q_k ehtimolliklar yordamida

$$H_A=\sum_{i,k}a_{ik}p_iq_k,\ H_B=-\sum_{i,k}a_{ik}p_iq_k.$$

tengliklar bilan aniqlangan edi. Bimatritsali o'yinlarda ham A va B o'yinchilarning tanlagan aralash strategiyalarga ularning o'rtacha yutuqlari mos keladi va ular endi

$$H_A=\sum_{i,k}a_{ik}p_iq_k,\qquad H_B=\sum_{i,k}b_{ik}p_iq_k.$$

tengliklar bilan aniqlanadi.

7.3. 2x2-bimatritsali o'yinlar. Muvozanat holati

Bu mavzuda 2x2 bimatritsali o'yinlarning yechimini topish bayon qilinadi.

Biz bu bo'limda har bir o'yinchining faqat ikkitadan strategiyasi bor bo'lgan holni, ya'ni $m = n = 2$ holni o'rganamiz.

2x2-bimatritsali o'yinda o'yinchilarning to'lov matritsalari

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$$

ko'rinishda bo'ladi. O'yinchilarning $P = (p_1, p_2)$ va $Q = (q_1, q_2)$ aralash strategiyalari uchun

$$p_1 = p, \quad p_2 = 1 - p, \quad q_1 = q, \quad q_2 = 1 - q$$

deb olamiz. U holda o'rta qiymatlar

$$H_A(p,q) = a_{11}pq + a_{12}p(1-q) + a_{21}(1-p)q + a_{22}(1-p)(1-q)$$
$$H_B(p,q) = b_{11}pq + b_{12}p(1-q) + b_{21}(1-p)q + b_{22}(1-p)(1-q)$$

formulalar yordamida hisoblanadi, bunda

$$0 \le p \le 1, \quad 0 \le q \le 1.$$

Agar $0 \le p \le 1$, $0 \le q \le 1$ shartlarni qanoatlantiruvchi ixtiyoriy p va q larda bir vaqtda

$$H_A(p,q^*) \le H_A(p^*,q^*)$$

va

$$H_B(p^*,q) \le H_B(p^*,q^*)$$

tengsizliklar bajarilsa, u holda

$$(p^*, q^*), \; 0 \le p^* \le 1, \; 0 \le q^* \le 1$$

juftlik *muvozanatli holat deyiladi.*

Bu tengsizliklarga quyidagicha ma'no berish mumkin: aralash strategiyalardan tuzilgan (p^*,q^*) holat muvozanatli holat bo'lishi uchun undan chetlashgan o'yinchining yutug'i (boshqasi chetlashmaganda) kamayishini bildiradi. Shunday qilib, agar muvozanatli holat mavjud bo‘lsa, undan chetlanish chetlashuvchi o‘yinchining o‘zi uchun foydali bo‘lmaydi.

Bimatritsali o‘yinlarda muvozanatli holat mavjudmi? Bunga quyidagi tasdiq javob beradi.

1-teorema (J.Nesh). *Har qanday bimatritsali o‘yin aralash strategiyalarda kamida bitta muvozanatli holatga (muvozanat nuqtasiga) ega.*

Muvozanatli holatni topish uchun quyidagi tasdiqdan foydalanamiz.

2-teorema. Ushbu

$$H_A(p,q^*)\le H_A(p^*,q^*), \qquad H_B(p^*,q)\le H_B(p^*,q^*)$$

tengsizliklarning bajarilishi

$$H_A(0,q^*)\le H_A(p^*,q^*),\ H_B(p^*,0)\le H_B(p^*,q^*)$$
$$H_A(1,q^*)\le H_A(p^*,q^*),\ H_B(p^*,1)\le H_B(p^*,q^*)$$

tengsizliklarning bajarilishiga teng kuchli.
Boshqacha aytganda, (p^*,q^*) juftlik muvozanatli holat aniqlanishini tekshirish uchun

$$H_A(p,q^*)\le H_A(p^*,q^*)$$

tengsizlikni B o‘yinchining faqat sof strategiyalarida ($p=0$ va $p=1$ da),

$$H_B(p^*,q)\le H_B(p^*,q^*)$$

tengsizlikni B o‘yinchining faqat sof strategiyalarida ($q=0$ va $q=1$ da) tekshirish yetarli. 2-teorema muvozanat nuqtasini amaliy topish imkonini beradi. A va B o‘yinchilarning o‘rtacha yutuqlarini qulay shaklda yozib chiqamiz:

$$H_A(p,q)=(a_{11}-a_{12}-a_{21}+a_{22})pq+(a_{12}-a_{22})p+(a_{21}-a_{22})q+a_{22}$$
$$H_B(p,q)=(b_{11}-b_{12}-b_{21}+b_{22})pq+(b_{12}-b_{22})p+(b_{21}-b_{22})q+b_{22}$$

Olingan formulalarning birinchisida avval $p=1$, so‘ngra $p=0$ deb olib,

$$H_A(1,q)=(a_{11}-a_{12}-a_{21}+a_{22})q+a_{12}+(a_{21}-a_{22})q$$
$$H_A(0,q)=(a_{21}-a_{22})q+a_{22}$$

ekanini hosil qilamiz. Ushbu

$$
\begin{gathered}
\mathrm{H}_A(p,q)-\mathrm{H}_A(1,q)=(a_{11}-a_{12}-a_{21}+a_{22})pq+ \\
+(a_{12}-a_{22})p-(a_{11}-a_{12}-a_{21}+a_{22})q+a_{22}-a_{12} \\
\mathrm{H}_A(p,q)-\mathrm{H}_A(0,q)=(a_{11}-a_{12}-a_{21}+a_{22})pq+(a_{12}-a_{22})p.
\end{gathered}
$$

ayirmalarni qaraymiz. Quyidagicha

$$C=a_{11}-a_{12}-a_{21}+a_{22}, \quad \alpha=a_{22}-a_{12}$$

belgilashlar kiritib, ular uchun

$$
\begin{gathered}
\mathrm{H}_A(p,q)-\mathrm{H}_A(1,q)=Cpq-\alpha p-Cq+\alpha= \\
=Cq(p-1)-\alpha(p-1)=(p-1)(Cq-\alpha) \\
\mathrm{H}_A(p,q)-\mathrm{H}_A(0,q)=Cpq-\alpha p=p(Cq-\alpha)
\end{gathered}
$$

ifodalarni hosil qilamiz. Agar endi (p,q) muvozanat nuqtasi bo‘lsa, u holda bu ayirmalar nomanfiy bo‘ladi:

$$\mathrm{H}_A(p,q)-\mathrm{H}_A(1,q)\geq 0, \quad \mathrm{H}_A(p,q)-\mathrm{H}_A(0,q)\geq 0.$$

Bu yerdan

$$
\begin{gathered}
(p-1)(Cq-\alpha)\geq 0, \\
p(Cq-\alpha)\geq 0
\end{gathered}
$$

munosabatlarni hosil qilamiz.

$H_B(p,q)$ ning formulasidan $q=1$ va $q=0$ lar uchun

$$
\begin{gathered}
\mathrm{H}_B(p,1)=(b_{11}-b_{12}-b_{21}+b_{22})p+(b_{12}-b_{22})p+b_{21}, \\
\mathrm{H}_B(p,0)=(b_{12}-b_{22})p+b_{22}
\end{gathered}
$$

tengliklarni hosil qilamiz. Ushbu

$$\mathrm{H}_B(p,q)-\mathrm{H}_B(p,1) \text{ va } \mathrm{H}_B(p,q)-\mathrm{H}_B(p,0)$$

ayirmalar

$$D=b_{11}-b_{12}-b_{21}+b_{22}, \quad \beta=b_{22}-b_{21}$$

belgilashlardan keyin

$$
\begin{gathered}
\mathrm{H}_B(p,q)-\mathrm{H}_B(p,1)=(q-1)(Dp-\beta), \\
\mathrm{H}_B(p,q)-\mathrm{H}_B(p,0)=q(Dp-\beta)
\end{gathered}
$$

ko‘rinishga keladi. Agar (p,q) muvozanat nuqtasi bo‘lsa, u holda bu ayirmalar nomanfiy bo‘ladi:

$$\mathrm{H}_B(p,q)-\mathrm{H}_B(p,1)\geq 0, \qquad \mathrm{H}_B(p,q)-\mathrm{H}_B(p,0)\geq 0.$$

Shu sababli

$$(q-1)(Dp-\beta)\geq 0,$$
$$q(Dp-\beta)\geq 0.$$

Shunday qilib,

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{22} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \qquad B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{22} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$$

bimatritsali o‘yinda (p, q) muvozanat nuqtasi bo‘lishi uchun

$$(p-1)(Cq-\alpha)\geq 0,$$
$$p(Cq-\alpha)\geq 0,$$
$$(q-1)(Dp-\beta)\geq 0,$$
$$q(Dp-\beta)\geq 0,$$
$$0\leq p\leq 1,$$
$$0\leq q\leq 1$$

tengsizliklarning bajarilishi zarur va yetarli, bunda

$$C=a_{11}-a_{12}-a_{21}+a_{22}, \quad \alpha=a_{22}-a_{12},$$
$$D=b_{11}-b_{12}-b_{21}+b_{22}, \quad \beta=b_{22}-b_{12}.$$

7.4. Muvozanatli holatlarni topishning grafik usuli

Bu mavzu 2x2 bimatritsali o‘yinni grafik usulda yechish jarayoniga bag‘ishlangan.

Muvozanatli holatlarni topishning grafik usulini ko‘rib chiqamiz.

Shu maqsadda bozor raqobati masalasini esga olamiz. To‘lov matritsalari quyidagicha edi:

$$A=\begin{pmatrix} -10 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \qquad B=\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Bu masala uchun C, α, D, β larning qiymatlarini topamiz:

$$C=-10-2-1-1=-14, \quad \alpha=-1-2=-3,$$
$$D=5+2+1+1=9, \qquad \beta=1+1=2.$$

Natijada

$$(p-1)(-14q-(-3))\geq 0$$
$$p(-14q-(-3))\geq 0$$

va

$$(q-1)(9p-2)\geq 0$$
$$q(9p-2)\geq 0$$

tengsizliklar sistemalarini hosil qilamiz. Dastlab birinchi tengsizliklar sistemasini ko‘rib chiqamiz.

$$(p-1)(-14q+3)\geq 0$$
$$p(-14q+3)\geq 0$$

Quyidagi uchta hol bo‘lishi mumkin: 1)..$p=1$, 2)..$p=0$, 3)..$0<p<1$.

Har bir holni batafsil qarab chiqamiz.
1. $p=1$ deb olib,

$$0\geq 0, \quad -14q+3\geq 0$$

ekanini hosil qilamiz. Bu yerdan

$$-14q-3\leq 0$$

va demak,

$$q\geq \frac{3}{14}$$

ekanini topamiz.
2. $p=0$ deb olib,

$$-(-14q+3)\geq 0, \quad 0\geq 0,$$

tengsizliklarni bu yerdan esa

$$14q-3\geq 0,$$

ya'ni

$$q\leq \frac{3}{14}$$

ekanini topamiz.
3. Nihoyat $0<p<1$ deb olib,

$$-14q+3\geq 0,$$
$$-14q+3\leq 0$$

tengsizliklarni hosil qilamiz. Bu yerdan

$$-14q+3=0$$

ekani, ya’ni

$$q = \frac{3}{14}$$

ekani kelib chiqadi.

Olingan natijalarni jamlaymiz.

$$1^o..p = 1,\ q \le \frac{3}{14},$$

$$2^o..p = 0,\ q \ge \frac{3}{14},$$

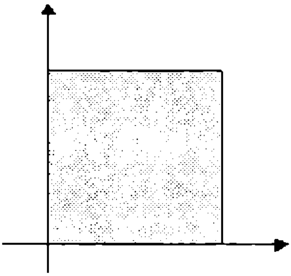
$$3^o..0 < p < 1,\ q = \frac{3}{14}$$

Endi olingan natijalarni rasmda tasvirlaymiz.

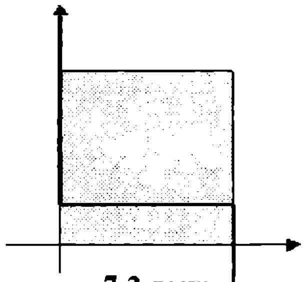
Tekislikda (p,q) koordinatalar sistemasini kiritamiz va unda

$$0 \le p \le 1,\quad 0 \le q \le 1$$

tengsizliklarga mos keluvchi birlik kvadrat ajratamiz.



7.1-rasm



7.2-rasm

7.1-rasmda 1^0, 2^0, 3^0 shartlarni qanoatlantiruvchi nuqtalarni belgilab chiqamiz. Bu nuqtalar 7.2-rasmda qalin chiziq bilan chizilgan. Bizga uning bo'yalgan birlik kvadratga tegishli qismigina kerak bo'ladi.

Endi e'tiborimizni ikkinchi

$$(q-1)(9p-2) \ge 0,$$
$$q(9p-2) \ge 0$$

tengsizliklar sistemasiga qaratamiz. Uchta

$$1)..q = 1,\quad 2)..q = 0,\quad 3)..0 < q < 1$$

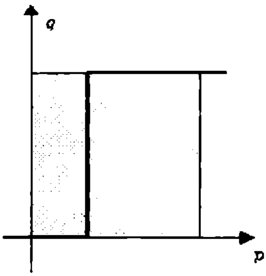
hollar bizni quyidagi

$$1^{\circ}..q=1,\quad p\geq\frac{2}{9},$$

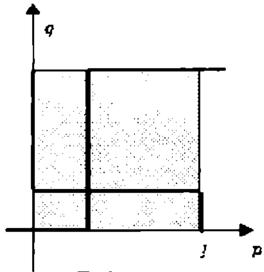
$$2^{0}..q=0,\quad p\leq\frac{2}{9},$$

$$3^{\circ}..0<q<1,\quad p=\frac{2}{9}$$

natijalarga olib keladi. Ularni rasmda tasvirlab, zinasimon chiziq hosil qilamiz (3-rasm).



7.3-rasm



7.4-rasm

Olingan natijalarni bitta rasmda tasvirlaymiz (7.4-rasm). Qurilgan «zina»larning umumiy nuqtasi bimatritsali o‘yinning muvozanat nuqtasi bo‘ladi. Uning koordinatalari

$$\left(\frac{2}{3},\frac{3}{14}\right)$$

bo‘ladi.

O‘yinchilarning unga mos keluvchi aralash strategiyalari esa

$$\mathrm{P}=\left\{\frac{2}{9},\frac{7}{9}\right\},\quad Q=\left\{\frac{3}{14},\frac{11}{14}\right\}$$

bo‘ladi. O‘yinchilarning o‘rtacha qiymatlari esa quyidagilarga teng:

$$\mathrm{H}_{\mathrm{A}}\left(\frac{2}{9},\frac{3}{14}\right)=-\frac{4}{7},\quad \mathrm{H}_{\mathrm{B}}\left(\frac{2}{9},\frac{3}{14}\right)=\frac{1}{3}.$$

Izoh. Bimatritsali o‘yinni ikkita nol yig‘indili matritsali o‘yinga ajratib ko‘rib chiqamiz.

- *A matritsali o'yin*

$$A=\begin{pmatrix}-10 & 2\\ 1 & -1\end{pmatrix}$$

Bu o'yinni grafik usul bilan yechib, A o'yinchining

$$\left\{\frac{1}{7},\frac{6}{7}\right\}$$

optimal aralash strategiyasini va o'yinning

$$v_A^0=-\frac{4}{7}$$

bahosini va B o'yinchining

$$\left\{\frac{3}{14},\frac{11}{14}\right\}$$

optimal aralash strategiyasini topamiz.

- *B matritsali o'yin*

$$B=\begin{pmatrix}5 & -2\\ -1 & 1\end{pmatrix}$$

Bu o'yinni grafik usul bilan yechib, *B* o'yinchining

$$\left\{\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right\}$$

optimal aralash strategiyasini va o'yinning

$$v_B^0=\frac{1}{3}$$

bahosini va A o'yinchining

$$\left\{\frac{2}{9},\frac{7}{9}\right\}$$

optimal aralash strategiyasini topamiz.

Olingan natijalarni bimatritsali o'yinning yechimi bilan taqqoslab, quyidagi xulosaga kelamiz: agar har bir o'yinchi o'zining yutuqlari matritsasidan kelib chiqqan holda o'z strategiyalarini qo'llasa, u holda uning optimal yutug'i muvozanat holatdagi yutug'iga teng bo'ladi va o'zining matritsasidan raqib o'yinchining optimal aralash strategiyasini ham topishi mumkin (lekin o'zinikini emas).

Tayanch iboralar

Bimatrisali o'yinlar, aralash strategiya, Nesh teoremasi, muvozanat holat, grafik usul.

Savollar

1. Qanday o'yinlar bimatritsali o'yinlar turkumiga kiradi?
2. Bimatritsali o'yinlarni muvozanat holatlari qanday aniqlanadi?
3. Bimatritsali 2x2 o'yinlar grafik usulda qanday yechiladi?

Mashqlar

7.1. Xaridor bozordan olma sotib olish niyatida. Sotuvchi olmani to'g'ri tortishi (1-strategiya) va noto'g'ri tortishi (2-strategiya) mumkin. Xaridorda ham ikki strategiya bor: sotuvchiga ishonish (1-strategiya) va ishonmasdan tekshirish (2-strategiya). Sotuvchi va xaridorning har bir holatdagi yutuqlarini aniqlang.

a) Sotuvchi to'g'ri tortdi va xaridor unga ishondi. Bunda sotuvchi va xaridorning yutuqlarini 0 bilan baholaymiz.
b) Sotuvchi aldadi xaridor ishondi. U holda sotuvchi yutug'i − 1 ga teng olamiz (chunki qo'shimcha daromad qildi). Xaridor yutug'i esa − 1 (chunki u kam olma oldi).
c) Sotuvchi to'g'ri tortdi, lekin xaridor ishonmadi. Sotuvchi yutug'i 0. Xaridor yutug'i -1/2 (befoyda vaqti ketdi va o'zini noqulay sezdi)
d) Sotuvchi aldadi, xaridor esa ishondi. Sotuvchi yutug'i-1 (sotuvchilikdan mahrum bo'lishi mumkin). Xaridor yutug'i × (aldoqchini ushladi va qo'shimcha olmaga ega bo'ldi).

Bimatritsali o'yinni grafik usulda yeching.

VIII bob. CHIZIQSIZ DASTURLASH

Biz chiziqli dasturlash bo'limida maqsad funksiyasi va chegaralarni ifodalovchi munosabatlarda chiziqli funksiyalar bilan ish ko'rgan edik. Endi matematik modelda qatnashgan o'zgaruvchilar chiziqsiz bog'langandagi hol bilan tanishamiz. Chiziqsiz dasturlash masalasiga olib keladigan ba'zi masalalarni ko'rib o'tamiz.

1-misol. Korxona A va B turdagi elektron mahsulot ishlab chiqaradi. Mahsulot ishlab chiqarish uchun platina va palladiy ishlatiladi. Har bir A mahsulot uchun 13 g platina va 8 g palladiy, B mahsulot uchun esa 8 g platina va 11 g palladiy kerak bo'ladi. Korxona zaxirasida 90g platina 88g palladiy mavjud.

A turdagi mahsulot 12 ming pul birligida, B esa *10* ming pul birligida sotiladi. Har bir mahsulotni ishlab chiqarishga ketadigan xarajat ishlab chiqarish ko'lamiga bog'liq bo'lib, A mahsulot uchun $7+0,2x$, B uchun esa $8+0,2y$ ga teng. Bu yerda x A mahsulotni ishlab chiqarish ko'lami, y – B mahsulot hajmi.

Korxona uchun maksimal foyda keltiradigan rejani aniqlash kerak.

Birlik A mahsulotni sotishdan keladigan foyda $12-(7+0,2x) = 5-0,2x$ ga teng. B mahsulotdan keladigan foyda esa – $10 - (8+0,2y)=2-0,2y$ ga teng. Demak maqsad funksiyasi (A va B mahsulotlarni sotishdan keladigan umumiy foyda) quyidagicha bo'ladi:

$$(5-0,2x)x+(2-0,2y)y = 5x-0,2x^2+2y-0,2y^2 \to \max$$

Masalaning matematik modelini keltiramiz:

$$\begin{aligned}
&(5-0,2x)x+(2-0,2y)y = 5x-0,2x^2+2y-0,2y^2 \to \max\\
&13x+6y \le 90\\
&8x+11y \le 88\\
&x, y \ge 0
\end{aligned}$$

Bu masalada shartlar chiziqli bo'lib, maqsad funksiyasi esa chiziqsiz bo'lgani uchun chiziqsiz dasturlash masalasini ifodalaydi.

2-misol. Quyidagi talablarni qanoatlantiruvchi konteyner qurish lozim:

- Konteyner hajmi 6 m^3;
- Balandligi 1 m dan 3 m gacha;
- Konteyner asosi kvadrat.

Konteyner yon tomonlari va asosi uchun ketadigan materialning har bir kvadrat metri 6 shartli pul birligiga teng, tominiki esa 4 shartli pul birligiga teng. Konteyner o'lchamlarini shunday topish kerakki, konteyner qurish uchun ketadigan material minimal bo'lsin.

Konteyner balandligini x bilan asos tomonlarini (eni va bo'yi) y bilan belgilaymiz. U holda masalaning matematik modeli quyidagicha bo'ladi:

$$6x^2 + 24xy + 4y^2 \to \min$$
$$1 \le x \le 3$$
$$xy^2 = 6$$

Maqsad funksiyasi konteyner narxini ifodalaydi. Bu masalada maqsad funksiyasi va konteyner hajmini ifodalovchi chegara chiziqsizdir.

Avvalo, biz chiziqsiz dasturlash masalalarini yechishda muhim o'rin tutadigan kvadratik shakl tushunchasi bilan tanishamiz.

8.1. Kvadratik shakllar va ularning qo'llanilishi

Bu mavzuda kvadratik shakl tushunchasi bayon qilinadi. Bu tushuncha bizga funksiya ekstremumlarini topish jarayonida asqotadi.

Quyidagi ko'rinishdagi n o'zgaruvchili $x_1, x_2, \ldots, x_n$ funksiyaga

$$f(x) = f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j =$$
$$a_{11}x_1^2 + a_{12}x_1x_2 + \ldots + a_{1n}x_1x_n + a_{21}x_2x_1 + a_{22}x_2^2 + \ldots$$
$$+ a_{2n}x_2x_n + \ldots + a_{n1}x_nx_1 + a_{n2}x_nx_2 + \ldots + a_{nn}x_n^2 ,$$

kvadratik shakl deyiladi. Bu yerda a_{ij} kvadratik shaklning koeffitsiyentlari deyiladi.

n o'zgaruvchili $x_1, x_2, ..., x_n$ kvadratik shakl koeffitsiyentlaridan quyidagicha tuzilgan simmetrik matritsa *kvadratik shakl matritsasi* deyiladi:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & \frac{1}{2}a_{12} & \frac{1}{2}a_{13} & \cdots & \frac{1}{2}a_{1n} \\ \frac{1}{2}a_{12} & a_{22} & \frac{1}{2}a_{23} & \cdots & \frac{1}{2}a_{2n} \\ \frac{1}{2}a_{13} & \frac{1}{2}a_{23} & a_{33} & \cdots & \frac{1}{2}a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{1}{2}a_{1n} & \frac{1}{2}a_{2n} & \frac{1}{2}a_{3n} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Kvadratik shakl matritsasining rangiga *kvadratik shaklning rangi* deyiladi. Kvadratik shaklni $f(\vec{x})=\vec{x}^{\mathrm{T}}A\,\vec{x}$, matritsa ko'rinishida yozish mumkin ($\vec{x}^T=(x_1, x_2, ... x_n)$).

Agar kvadratik shakl

$$f(\vec{x}) = a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + ... + a_{nn}x_n^2 = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}x_i^2 ,$$

ko'rinishida bo'lsa, bunday kvadratik shaklga *kanonik* ko'rinishdagi kvadratik shakl deyiladi.

Teorema. *(Lagranj) Har qanday kvadratik shakl uchun shunday bazis topiladiki, unda kvadratik shakl kanonik ko'rinishda yoziladi.*

Agar kanonik ko'rinishda yozilgan kvadratik shaklning koeffitsiyentlari ± 1 ga teng bo'lsa, *normal* ko'rinishdagi kvadratik shakl deyiladi (nolga teng koeffitsiyentlar hisobga olinmaganda).

Agar ixtiyoriy $\vec{x} \neq 0$ uchun $f(\vec{x}) > 0$ $(f(\vec{x}) < 0)$ bo'lsa, $f(\vec{x})$ kvadratik shaklga *musbat(manfiy)* aniqlangan, $f(\vec{x}) \geq 0$ $(f(\vec{x}) \leq 0)$ bo'lganda esa *nomanfiy (nomusbat)* aniqlangan deyiladi.

Misollar. 1. Quyidagi kvadratik shaklni Lagranj usulida kanonik ko'rinishga keltiring va almashtirishni ko'rsating.

$$L(\vec{x}) = x_1^2 - x_2^2 + 3x_3^2 + 4x_1x_2 + 2x_2x_3$$

Yechish. Berilgan kvadratik shakldagi x_1 had qatnashgan barcha hadlarni ajratib, to'liq kvadratgacha to'ldiramiz:

$$x_1^2 + 4x_1x_2 = (x_1^2 + 4x_1x_2 + 4x_2^2) - 4x_2^2 = (x_1 + 2x_2)^2 - 4x_2^2$$

Bu ifodada $y_1 = x_1 + 2x_2$ almashtirish bajaramiz va uni kvadratik shaklga qo'yamiz. U holda

$$L = y_1^2 - 5x_2^2 + 3x_3^2 + 2x_2x_3$$

L da x_2 qatnashgan hadlar ustida yuqoridagi kabi shakl almashtirishlarni o'tkazamiz:

$$-5x_2^2 + 2x_2x_3 = -5\cdot(x_2^2 - \frac{2}{5}x_2x_3 + \frac{x_3^2}{25} - \frac{x_3^2}{25}) =$$
$$= -5\cdot(x_2 - 0.2x_3)^2 + \frac{x_3^2}{5}$$

Agar $y_2 = x_2 - 0.2x_3$ deb olsak, kvadratik shaklda aralash ko'-paytmalar qatnashmaydi. Shu bilan birga $x_3 = y_3$ deb olsak, kvadratik shakl kanonik ko'rinishga keladi

$$L = y_1^2 - 5y_2^2 + 3.2y_3^2$$

x_1, x_2, x_3 o'zgaruvchilardan y_1, y_2, y_3 o'zgaruvchilarga o'tish qoidasi esa quyidagicha bo'ladi.

$$y_1 = x_1 + 2x_2,\ y_2 = x_2 - 0.2x_3,\ y_3 = x_3$$

2. Quyidagi kvadratik shaklni kanonik ko'rinishga keltiradigan almashtirishni toping va kvadratik shaklni kanonik ko'rinishga keltiring:

$$L(\bar{x}) = x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 + 2x_2x_3$$

Yechish. Boshlang'ich $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ bazisdagi kvadratik shakl matritsasi

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Kvadratik shaklning ortonormallashgan bazisdagi $\vec{e}_1', \vec{e}_2', \vec{e}_3'$ kanonik ko'rinishini topish uchun A matritsaning xos son va xos vektorlarini topamiz.

A matritsaning xarakteristik tenglamasi quyidagicha bo'ladi:

$$|A-\lambda\cdot E|=\begin{vmatrix}1-\lambda & 0 & 0\\ 0 & 2-\lambda & 1\\ 0 & 1 & 2-\lambda\end{vmatrix}=0$$

Bu yerdan

$$(1-\lambda)\cdot[(2-\lambda)^2-1]=0 \quad \text{va} \quad \lambda_{1,2}=1,\ \lambda_3=3\,.$$

Ma'lumki, matritsaning xos vektorlari $(A-\lambda\cdot E)\bar{f}=0$ tenglamadan topiladi.

$\lambda_{1,2}=1$ hol uchun

$$(A-E)\bar{f}=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \alpha_3\end{pmatrix}=0$$

Sistema matritsasining rangi 1 ga teng. Xos vektor sifatida $\bar{f}_1=(1,0,0)$, $\bar{f}_2=(0,1,-1)$ vektorlarni olish mumkin. Bu vektorlar ortoganaldir. $\bar{f}_1$ vektori normallashgan. Demak, $\bar{e}_1'=\bar{f}_1$. $\bar{f}_2$ vektorni normallashtiramiz:

$$\bar{e}_2'=\frac{\bar{f}_2}{\|\bar{f}_2\|}=(0,\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}})$$

$\lambda_3=3$ uchun xos vektorni aniqlovchi tenglama quyidagichadir

$$\begin{pmatrix}-2 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 1\\ 0 & 1 & -1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\beta_1\\ \beta_2\\ \beta_3\end{pmatrix}=0$$

Matritsa rangi 2 ga teng bo'lgani uchun yagona chiziqli bog'liq bo'lmagan yechim mavjud, masalan, $\bar{f}_3=(0,1,1)$. Bu vektorni ortonormallashtirsak, $\bar{e}_3'=\frac{\bar{f}_3}{\|\bar{f}_3\|}=(0,\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}})$

Endi ortoganal almashtirish matritsasini keltirish mumkin:

$$T_{e\to e'}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$$

Natijada kvadratik shakl quyidagi kanonik ko'rinishga keladi:

$$L(y)=y_1^2+y_2^2+3y_3^2$$

$x_1, x_2, x_3,$ o'zgaruvchilardan y_1, y_2, y_3 o'zgaruvchilarga o'tish qoidasi esa quyidagicha bo'ladi.

$$\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}y_1\\ y_2\\ y_3\end{pmatrix}$$

Yoki

$$x_1=y_1,\ x_2=\frac{1}{\sqrt{2}}y_2+\frac{1}{\sqrt{2}}y_3,\ x_3=-\frac{1}{\sqrt{2}}y_2+\frac{1}{\sqrt{2}}y_3$$

Albatta, kvadratik shaklni kanonik ko'rinishga keltirmasdan turib, uning qanday xarakterda ekanligini aniqlash imkoniyati bormikin? Bu savolga quyidagi qoidalar javob beradi.

1-qoida. *(Silvester mezoni) $f(\bar{x})$ kvadratik shaklning musbat aniqlangan bo'lishi uchun kvadratik shakl matritsasining barcha bosh minorlari musbat bo'lishi zarur va yetarlidir, yani*

$$\Delta_1>0, \Delta_2>0,\dots,\Delta_n>0.$$

Bu yerda $\Delta_1, \Delta_2,\dots,\Delta_n$ – kvadratik shaklning barcha bosh minorlaridir.

2-qoida. *$f(\bar{x})$ kvadratik shaklning manfiy aniqlangan bo'lishi uchun kvadratik shakl matritsasining barcha bosh minorlarining ishoralari quyidagicha almashlab kelishi zarur va yetarlidir*

$$\Delta_1<0, \Delta_2>0, \Delta_3<0,\dots,(-1)^n\Delta_n>0.$$

3-qoida. *Agar kvadratik shaklning rangi r < n shartni qanoatlantirib, birinchi r ta bosh minorlari musbat bo'lib qolganlari nolga teng bo'lsa, bunday kvadratik shakl nomanfiy aniqlangan bo'ladi.*

4-qoida. *Agar kvadratik shaklning rangi r < n shartni qanoatlantirib, birinchi r ta bosh minorlari manfiydan boshlab ishora almashib kelsa, qolganlari nolga teng bo'lsa, bunday kvadratik shakl nomusbat aniqlangan bo'ladi.*

5-qoida. *Agar bosh minorlar ichida manfiylari bo'lib, bosh minorlar orasida ishora almashlab kelishi mavjud bo'lmasa, kvadratik shakl aniqlanmagan bo'ladi.*

8.2. Shartsiz ekstremum masalasi

Bu mavzuda shartsiz ekstremum masalasining qo'yilishi va uni topish usullari bayon qilinadi. Bu natijalar shartli ekstremum masalarini topishga imkon beradi.

Masalaning qo'yilishi. Bizga *f(x)* funksiya berilgan bo'lsin ($x \in R^n, f : R^n \to R$). Shartsiz ekstremum masalasi quyidagicha yoziladi:

$$f(x) \to extr$$

Masalani yechishda faqat absolut (global) ekstremumlar emas, balki lokal ekstremumlarni ham topish nazarda tutiladi.

Agar a nuqtaning shunday $U_\varepsilon = \{x \mid |x - a| < \varepsilon\}$ atrofi mavjud bo'lsaki, uning barcha nuqtalari uchun $f(x) \geq f(a)$ ($f(x) \leq f(a)$) o'rinli bo'lsa, a nuqta funksiyaning *lokal minimum (maksimum) nuqtasi* deyiladi.

Agar $f(x) \geq f(a)$ ($f(x) \leq f(a)$) tengsizlik $f(x)$ funksiya aniqlanish sohasining barcha nuqtalarida o'rinli bo'lsa, a nuqta funksiyaning *global(mutlaq) minimum (maksimum) nuqtasi* deyiladi.

Optimallik shartlari yetarli (tekshirilayotgan nuqta optimallikni kafolatlaydi) va zaruriy (tekshirilayotgan nuqta yechim bo'lishi mumkin) shartlarga bo'linadi.

Ekstremumning zaruriy shartlari. Ko'p argumentli funksiyaning ekstremumga ega bo'lishining zaruriy shartini keltiramiz. Bu ko'p argumentli funksiya uchun Ferma teoremasidir.

1-teorema. *Agar a nuqta f(x) funksiyaning ekstremum nuqtasi bo'lib, f(x) a nuqtada differensiallanuvchi bo'lsa,*

$$f'(x)=0 \Leftrightarrow \frac{\partial f(a)}{\partial x_1}=\frac{\partial f(a)}{\partial x_2}=\cdots=\frac{\partial f(a)}{\partial x_n}=0$$

bo'ladi.

Ko'p argumentli funksiyaning ekstremumga ega bo'lishining zaruriy va yetarli shartini keltirishdan avval matritsaning musbat (manfiy) aniqlanganlik tushunchasini keltiramiz.

Ko'p argumentli funksiyaning ikkinchi tartibli hosilalaridan matritsa tuzamiz

$$A=f''(x)=\left(\frac{\partial f(a)}{\partial x_i \partial x_j}\right)=(a_{ij}), \quad i,j=1,2,\cdots,n.$$

2-teorema. *Agar a nuqta ikki marta differensiallanuvchi f(x) funksiya uchun minimum nuqta bo'lsa,*

$$f(a)=\min_x f(x)$$

u holda ikkinchi tartibli hosilalardan tashkil topgan matritsa a nuqtada nomanfiy aniqlangan bo'ladi:

$$h^T A h \geq 0$$

Bu yerda $h^T=(h_1,h_2,\ldots,h_n)$ — ixtiyoriy vektor.

Ekstremumning yetarli shartlari. Optimallikni kafolatlaydigan shart yetarli shart deyiladi.

3-teorema. *Agar a nuqta uchun*

- $f'(a)=0$,
- *ikkinchi tartibli hosilalardan tuzilgan matritsa* $f''(a)$ *musbat aniqlangan bo'lsa, a nuqta funksiyaning lokal minimum nuqtasi bo'ladi.*

Izoh. Matritsaning bosh minorlarining musbatligi barcha minorlarning musbatligiga teng kuchli. Nomanfiy shart uchun bu hol o'rinli emas. Ya'ni bosh minorlarning nomanfiyligidan matritsaning barcha minorlarining nomanfiyligi kelib chiqmaydi. Boshqacha aytganda, matritsaning bosh minorlarining nomanfiyligidan matritsaning nomanfiyligi kelib chiqmaydi. Masalan, $A=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$ matritsa uchun barcha minorlar nolga teng ($A_1 = A_{12} = 0$) lekin bu matritsa nomanfiy aniqlangan emas: $(Ah,h) = -h_2^2 < 0$.

Shunday qilib, shartsiz ekstremum masalasini yechib qoidasi quyidagicha:

1) Funksiyaning statsionar nuqtalarini topish kerak, ya'ni quyidagi sistema yechiladi.

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x_1} = \frac{\partial f(x)}{\partial x_2} = \cdots = \frac{\partial f(x)}{\partial x_n} = 0$$

2) Statsionar nuqtalarda ikkinchi tartibli hosilalardan iborat bo'lgan matritsa tuziladi.

$$A = f''(x) = \left(\frac{\partial f(a)}{\partial x_i \partial x_j}\right) = (a_{ij}), \quad i, j = 1, 2, \cdots, n$$

a) Matritsaning bosh minorlari hisoblanadi:

$$\Delta_1 = a_{11}, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad \ldots, \quad \Delta_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{1n} \\ \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Agar $\Delta_1 > 0$, $\Delta_2 > 0, \ldots, \Delta_n > 0$ bo'lsa, *a* nuqta lokal minimum nuqta bo'ladi.

Agar $\Delta_1 < 0$, $\Delta_2 > 0$, ..., $(-1)^n \Delta_n > 0$ bo'lsa, *a* nuqta lokal maksimum nuqta bo'ladi.

Izoh. 1) Agar $h^T Ah$ ifoda statsionar *a* nuqtada h_i va h_j qiymatlariga qarab musbat yoki manfiy qiymatlarni qabul qilsa, bu nuqtada ekstremum yo'q.

2) $h^T Ah$ ifodaning nolga tengligi noldan farqli h_i va h_j larda o'rinli bo'lsa, ekstremum masalasi ochiq qoladi.

Misollar.

1-misol. $f(x) = f(x_1, x_2) = x_1^2 - x_1 x_2 + x_2^2 - 2x_1 + x_2 \to extr.$

Statsionar nuqtalarni topamiz:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}=\frac{\partial f}{\partial x_2}=0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \begin{cases} 2x_1-x_2-2=0; \\ -x_1+2x_2+1=0. \end{cases}$$

Sistemani yechib, yagona statsionar nuqtani aniqlaymiz $a=(1,0)$. Ikkinchi tartibli hosilalardan matritsa tuzamiz

$$A=\begin{pmatrix} f''_{x_1x_1} & f''_{x_1x_2} \\ f''_{x_2x_1} & f''_{x_2x_2} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Bu matritsa Silvester mezoniga ko'ra musbat aniqlangan. Yetarli shartga ko'ra $a=(1,0)$ nuqta lokal minimum nuqta bo'ladi.

2-misol. $f(x)=f(x_1,x_2)=x_1^4+x_2^4-x_1^2-2x_1x_2-x_2^2 \to extr.$

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}=\frac{\partial f}{\partial x_2}=0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \begin{cases} x_1^3-2x_1-2x_2=0; \\ 4x_2^3-2x_1-2x_2=0. \end{cases}$$

Sistemani yechib, statsionar nuqtalarni topamiz $M=(1,1)$, $N=(1,-1)$, $L=(0,0)$. Ikkinchi tartibli hosilalardan matritsa tuzamiz:

$$A=\begin{pmatrix} f''_{x_1x_1} & f''_{x_1x_2} \\ f''_{x_2x_1} & f''_{x_2x_2} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 12x_1^2-2 & -2 \\ -2 & 12x_2^2-2 \end{pmatrix}.$$

Matritsaning statsionar nuqtadagi qiymatlarini hisoblaymiz:

$$A(1,1)=A(-1,-1)=\begin{pmatrix} 10 & -2 \\ -2 & 10 \end{pmatrix}, \qquad A(0,0)=\begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$$

Birinchi matritsa Silvester mezoniga ko'ra musbat aniqlanganligi uchun M va N nuqtalar funksiyaning lokal minimum nuqtalari bo'ladi.

$\begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$ matritsa Silvester mezoniga ko'ra musbat yoki manfiy aniqlangan emas. Yetarli kichik $h \neq 0$ uchun $f(h,-h)=2h^4>0=f(0,0)$, $f(h,h)=2h^2(h^2-2)<0=f(0,0)$ bo'ladi. Demak, L nuqta lokal ekstremum nuqta emas.

8.3. Shartli ekstremum masalasi (shartlari tengsizlik orqali berilgan hol)

Bu mavzuda sharlari tengsizliklar orqali berilgan masalalarni yechish yo'llari keltiriladi.

Endi ko'p argumentli funksiyaning biror tengsizlik shartidagi ekstremumlarini topishni ko'ramiz. Masala quyidagicha qo'yiladi:

$$f(x) \to extr; \qquad g_i(x) \le 0, \ i = 1, \cdots n$$

Bu yerda $f(x)$ va $g_i(x)$ E^n da aniqlangan, *uzluksiz va uzluksiz* hosilalarga ega bo'lgan funksiyalar. Agar shartlarni ifodalovchi soha chegaralangan bo'lsa, bunday masalalarni yechishni Veyerstrass teoremasi yordamida hal qilish mumkin.

8.3.1. Veyerstrass teoremasi

Teorema. *Agar f(x) funksiyaning aniqlanish sohasi chegaralangan va yopiq bo'lsa, f(x) funksiya o'zining global ekstremumiga statsionar nuqtalarda yoki sohaning chegaraviy nuqtalarida erishadi.*

Demak $f(x)$ funksiyaning chegaralangan yopiq sohadagi eng katta va eng kichik qiymatlarini topish uchun:

1) sohaning ichki nuqtalarda statsionar nuqtalarni topish va funksiyani shu nuqtada hisoblash;
2) soha chegarasida funksiyani ekstemumga tekshirish;
3) 1) va 2) punktda olingan funksiya qiymatlarini o'zaro taqqoslab, funksiyaning eng katta va eng kichik qiymatlarini aniqlash.

Sohaning chegarasi analitik ko'rinishda tenglamalar sistemasi ko'rinishida beriladi. Shuning uchun funksiyaning ekstremal xarakterini chegarada aniqlash uchun shartli ekstremum masalasini yechish talab etiladi. Ba'zi hollarda Veyerstrass teoremasidan foydalanib, shartli ekstremum masalasini osonroq hal qilish mumkin.

Fikrimizni misolda bayon qilamiz.

Misol. $z = x^2 - y^2$ funksiyaning $x^2 + y^2 \le 1$ shartni qanoatlantiruvchi eng katta va eng kichik qiymatini toping.

Misol $z = x^2 - y^2$ funksiyaning markazi koordinata boshida bo'lgan radiusi birga teng birlik doiradagi eng katta va eng kichik qiymatini topishdan iborat.

1) Funksiyaning statsionar nuqtalarini topamiz. Buning uchun quyidagi sistemani yechamiz:

$$\begin{cases} z'_x = 2x = 0, \\ z'_y = -2y = 0. \end{cases}$$

Sistemaning yagona yechimi $(0,0)$, va bu nuqta joiz sohada joylashgan. Funksiyaning statsionar nuqtadagi qiymati $z(0,0) = 0$.

2) Funksiyani soha chegarasi – aylanada tekshiramiz. Ya'ni funksiyaning $x^2 + y^2 = 1$ shartni qanoatlantiruvchi ekstremumini topamiz. Aylana tenglamasidan $y = \pm\sqrt{1 - x^2}$ aniqlab, chegarada funksiya $z = 2x^2 - 1$ ko'rinishga keladi. Natijada masala $z = 2x^2 - 1$ funksiyaning $-1 \le x \le 1$ sohadagi ekstremumini topishga keladi. Chegaraviy statsionar nuqtalar: $(0;\pm 1)$. Sohaning chegarasidagi nuqtalar esa $(\pm 1; 0)$ dan iborat. Bu nuqtalardagi funksiya qiymatlari: $z(0;\pm 1) = -1$, $z(\pm 1,0) = 1$ ga teng.

3) Topilgan beshta nuqtadagi funksiya qiymatlarini taqqoslaymiz. Funksiya eng katta qiymatga $(\pm 1;0)$ nuqtada erishadi va bu qiymat *1* ga teng. Funksiya eng kichik qiymatga $(0;\pm 1)$ nuqtada erishadi va bu qiymat *-1* ga teng.

2-masala. $f(x)=x_1^2-x_1x_2+x_2^2$ funksiyaning $|x_1| + |x_2| \le 1$ shartni qanoatlantiruvchi eng katta va eng kichik qiymatini toping. Quyidagi sistemadan:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial f(x)}{\partial x_1} &= 2x_1 - x_2 = 0, \\ \frac{\partial f(x)}{\partial x_2} &= -x_1 + 2x_2 = 0. \end{aligned}\right. \Rightarrow x_1 = 0,\ x_2 = 0$$

Bu nuqta joiz sohaga tegishli. Joiz soha $x_1 + x_2 = 1$, $-x_1 + x_2 = 1$, $x_1 - x_2 = 1$ va $-x_1 - x_2 = 1$ chiziqlar bilan chegaralangan. Funksiya juft bo'lganligi uchun birinchi ikki shartni inobatga olish yetarlidir. $x_1+x_2=1$, chizig'ida $f(x_1,1-x_1)=3x_1^2-3x_1+1$ bo'lib, bu funksiya hosilasi $x_1=1/2$ da nolga aylanadi. U holda $x_2=1/2$ va chegaraviy (1/2,1/2) nuqtani olamiz. Xuddi shuningdek, $-x_1+x_2=1$, chiziqda esa, (-1/2,1/2) nuqtaga ega bo'lamiz. Funksiyaning juftligidan (-1/2,-1/2) , (1/2,-1/2) nuqtalar ham eng katta va eng kichik nuqtalar bo'lishga davogar. Chiziqlarning kesishgan nuqtalari (0,1), (0,-1), (1,0) va (-1,0) nuqtalar ham joiz sohaga tegishli. Topilgan sakkizta nuqtalardagi funksiyaning qiymatlarini topamiz: $f(0,0)=0$, $f(1/2,1/2)=f(-1/2,-1/2)=1/4$, $f(-1/2,1/2)=f(1/2,-1/2)=3/4$, $f(1,0)=f(-1,0)=f(0,1)=f(0,-1)=1$. Shunday qilib, funksiyaning eng kichik qiymati koordinatalar boshida, eng katta qiymati esa joiz soha uchlarida erishadi.

8.3.2. Shartli ekstremum masalasini grafik usulda yechish

Agar o'zgaruvchilar soni ikkiga teng bo'lganda chiziqsiz dasturlash masalasini grafik usulda yechish imkoniyatlari bor. Bu holda masala $z=f(x_1,x_2)$, maqsad funksiyasining $g_i(x)\le 0$, $i=1,\cdots n$ shartlarni qanoatlantiruvchi ekstremumini topishdan iborat bo'ladi.

Shartli chiziqsiz dasturlash masalasini grafik usulda yechish tartibi chiziqli dasturlash masalasini grafik usulda yechishga o'xshab ketadi. Avvalo joiz soha topiladi, yani $g_i(x)\le 0$, $i=1,\cdots n$ shartlarni qanoatlantiruvchi soha aniqlanadi. Chiziqli dasturlash masalasida joiz soha doim qavariq bo'ladi. Chiziqsiz dasturlash masalasida esa joiz soha qavariq bo'lishi shart emas. Bundan tashqari, funksiyaning shartli ekstremumi soha ichida ham bo'lishi mumkin.

Joiz soha aniqlangandan so'ng, maqsad funksiyasining sath chiziqlarini tavsiflovchi tenglama tuziladi: $f(x_1,x_2)=C$. C ga har xil qiymatlar berib, maqsad funksiyasining o'sish (kamayish) yo'nalishi aniqlanadi. Sath chiziqlarini joiz sohada kerakli yo'nalishda harakatlantirib, maqsad funksiyasining optimal nuqtasi topiladi.

Keltirilgan qoidani misollarda bayon qilaymiz.

1-misol. $z = 2x^2 - y$ funksiyaning quyidagi shartlardagi eng katta va eng kichik qiymatini toping:

$$\begin{cases} x - y \le 2, \\ y \le 4, \\ x + y - xy \ge 0, \\ x \ge 0, \quad y \ge 0. \end{cases}$$

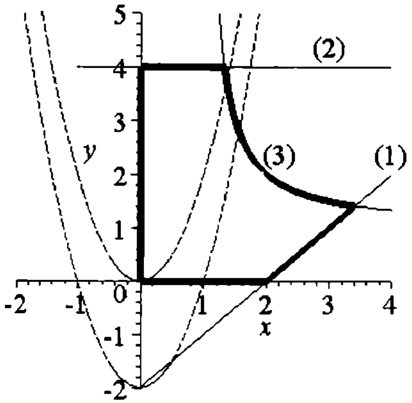
Yechish. Joiz soha $x - y = 2$, $y = 4$ to'g'ri chiziqlar, koordinata o'qlari va $x + y - xy = 0$ giperbola bilan chegaralangan (8.1-rasm). Maqsad funksiyasining sath chiziqlari — $2x^2 - y = c$ parabolalar oilasidan iborat.

$C = 0$ bo'lganda parabola koordinata boshidan o'tadi. C ni oshirib borganimizda parabola grafigi pastga siljib boradi. Parabolani C ning o'sish tomoniga siljitamiz (ya'ni parabolani pastga tushiramiz). Biz parabolani joiz sohaning oxirgi nuqtasini tark etguncha tushiramiz. Parabola joiz sohani $x - y = 2$ to'g'ri chiziq bilan $x + y - xy = 0$ giperbolaning kesishish chizig'ida tark etadi. Bu chiziqlarni birgalikda yechib, maqsad funksiyasining maksimal qiymatini topamiz. Chiziqlarning kesishish nuqtasining koordinatasi $(\sqrt{2}+2; \sqrt{2})$ ga teng. Shuning uchun $z_{max} = 2(\sqrt{2}+2)^2 - \sqrt{2} = 12 + 7\sqrt{2}$ ga teng. O'z-o'zidan ravshanki, maqsad funksiyasi joiz sohadagi eng kichik qiymatiga (0,4) nuqtada erishadi. Demak, maqsad funksiyasining minimal qiymati $z_{min} = -4$ ga teng.

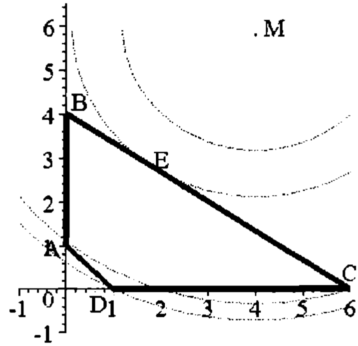
2-misol. $z = (x-4)^2 + (y-6)^2$ funksiyaning quyidagi shartlardagi eng katta va eng kichik qiymatini toping:

$$\begin{cases} x + y \ge 1, \\ 2x + 3y \le 12, \\ x \ge 0, \quad y \ge 0. \end{cases}$$

Yechish. Joiz soha 8.2-rasmda keltirilgan ABCD ko'pburchakdan iborat. Sath chiziqlari $(x-4)^2 + (y-6)^2 = C$ aylanalar to'plamidan iborat. C ning o'sishi bilan maqsad funksiyasining



8.1-rasm



8.2-rasm

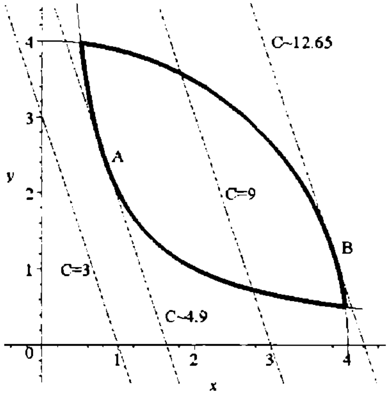
qiymati ham o'sib boradi. Maqsad funksiyasining eng kichik qiymati aylana bilan $2x-3y=12$ to'g'ri chiziqning urinish nuqtasida (E nuqta) bo'ladi. E nuqtaning koordinatasi $E(24/13;36/13)$ ga teng bo'lgani (E nuqta koordinatasining BC va ME to'g'ri chiziqlarga perpendikularligidan topiladi) uchun $z_{min}=z(E)=196/13$ ga teng bo'ladi. Maqsad funksiyasining eng katta qiymati D nuqtada ekanligi rasmdan ko'rinib turibdi. Demak, $z_{max}=z(D)=45$.

3-misol. $z=3x+y$ funksiyaning quyidagi shartlardagi eng katta va eng kichik qiymatini toping:

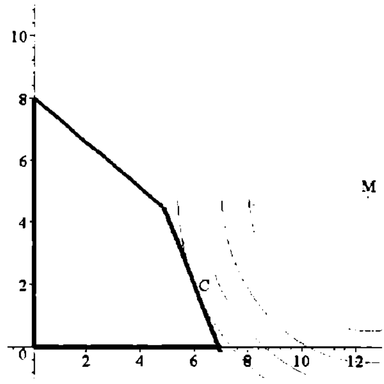
$$\begin{cases} xy \geq 2, \\ x^2+y^2 \leq 16. \end{cases}$$

Joiz soha $y=2/x$ giperbola va $y=\sqrt{16-x^2}$ aylana orasida joylashgan soha (3-rasm). 8.33-rasmda $3x+y=C$ maqsad funksiyasining bir necha grafigi keltirilgan.

Maqsad funksiyasining joiz sohadagi eng kichik qiymati maqsad funksiyasi bilan giperbolaning urinish nuqtasi A da bo'ladi. Maqsad funksiyasining joiz sohadagi eng katta qiymati esa maqsad funksiyasi bilan aylananing urinish nuqtasi B da bo'ladi. A nuqta koordinatasini topish uchun giperbola va



8.3-rasm



8.4-rasm

maqsad funksiyasining tenglamalarini sistema qilib yechamiz: $2/x = C - 3x$. Bundan $z_{min} = C = 2\sqrt{6}$ va $A(2\sqrt{6};\sqrt{6})$ ekanligi kelib chiqadi. Xuddi shunindek, $z_{max} = C = 4\sqrt{10}$ va $B(6\sqrt{10}/5; 2\sqrt{10}/5)$ ekanligini topish mumkin.

8.4. Shartlar tenglamalar orqali berilgan shartli ekstremum masalasi

Bu mavzuda shartlari tenglamalar orqali berilgan masalalarni yechimini topish bilan shug'ullanamiz. No'malumlarni yo'qotish usuli va Lagranj usuli bilan tanishamiz.

Shartlar tenglamalar orqali berilgan shartli ekstremum masalasi quyidagicha bo'lishini ko'rgan edik:

$$f(x) \to extr; \quad g_i(x) = 0,\ i = 1,\cdots,m,\ m < n$$

Bunday ko'rinishdagi shartli ekstremum masalalarini yechishning noma'lumlarni yo'qotish va Lagranj usullari bilan tanishamiz. Noma'lumlarni yo'qotish usuli sodda, lekin uning tatbig'i chegaralangan.

8.4.1. Noma'lumlarni yo'qotish usuli

Bu usuldan $g_i(x) = 0,\ i = 1,\cdots,m,\ m < n$ shartlardan m o'zgaruvchilarni, masalan, $x_1, x_2, \ldots, x_m$ larni qolgan $n-m$ o'zgaruvchi orgali ifodalash imkoni bo'lganda foydalaniladi. Ya'ni

$$x_i = \varphi_i(x_{m+1},\dots,x_n),\quad i=1,2,\dots,m.$$

Topilgan ifodalarni $z=f(x)=f(x_1,x_2,\dots,x_n)$ funksiyaga qo'ysak,

$$z=f(\varphi_1(x_{m+1},\dots,x_n),\dots,\varphi_m(x_{m+1},\dots,x_n),x_{m+1},\dots,x_n),$$

yoki

$$z=F(x_{m+1},\dots,x_n)$$

Demak, masala $z=F(x_{m+1},\dots,x_n)$ funksiya uchun oddiy ekstremum masalasiga aylanadi. Bayon qilingan usulni misol asosida ko'rib chiqamiz.

1-misol. $z=f(x,y)=x^2+y^2$ funksiyani $g(x,y)=x+y-1=0$ shartni qanoatlantiruvchi ekstremumini topamiz. $x+y-1=0$ tenglikdan $y=1-x$ topib, $z=x^2+y^2$ funksiyaga qo'ysak, bir o'zgaruvchili funksiya hosil bo'ladi:

$$F(x)=f(x,1-x)=x_2+(1-x)^2=2x^2-2x+1.$$

F(x) funksiya parabola va u $x=1/2$ nuqtada minimumga erishadi. Demak, $z=x^2+y^2$ funksiyaning $x+y-1=0$ shartni qanoatlantiruvchi ekstremum nuqtasi $(1/2,1/2)$ bo'lib, bu nuqtada $z=x^2+y^2$ funksiya minimumga erishadi va bu qiymat $z(1/2,1/2)=1/2$ ga teng.

2-misol. $u=f(x,y,z)-x^2+y^2+z^2$ funksiyaning $g(x,y,z)=$ $=4x+y^2+2z=14$ shartni qanoatlantiruvchi ekstremumini topamiz. $4x+y^2+2z=14$ tenglikdan $z=7-2x-y^2/2$ ni topib, maqsad funksiyasiga qo'ysak, $w(x,y)=f(x,y,7-2x-y^2/2)=x^2+y^2+$ $+(7-2x-y^2/2)^2$ ikki o'zgaruvchili funksiya hosil qilamiz. Demak, masala $w(x,y)$ funksiyaning shartsiz ekstremumini topishga keldi. $w(x,y)$ funksiyaning statsionar nuqtalarini topamiz. Buning uchun birinchi tartibli xususiy hosilalarni topamiz va quyidagi sistemani yechamiz:

$$\begin{cases} 10x+2y^2=14 \\ -12y+4xy+y^3=0 \end{cases}.$$

Bu sistemaning yechimlari, ya'ni statsionar nuqtalar (14/5,0); (2,2) va (2,-2) dan iborat. Bu nuqtalarning ekstremumligini aniqlash uchun Gess matritsasini tekshiramiz. $w(x,y)$ funksiyaning Gess matritsasi quyidagicha bo'ladi:

$$\begin{bmatrix} 10 & 4y \\ 4y & 4x+3y^2-12 \end{bmatrix}$$

Gess matritsasi (14/5,0) nuqtada musbat ham manfiy ham aniqlanmaganligi uchun bu nuqta ekstremum nuqta emas. (2,2) va (2,-2) nuqtalarda esa matritsa musbat aniqlanganligi bois bu nuqtalarda funksiya minimumga erishadi. Demak, $u = f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$ funksiyaning shartli minimum nuqtalari (2,2,1) va (2,-2,1) ga teng.

8.4.2. Funksiyaning shartli ekstremumini topishning Lagranj usuli

Shartli ekstremum masalasi noma'lumlarni o'rniga qo'yish usuli chegaralanganligi yuqorida aytildi. Bunday masalalarni Lag_ranj usuli bilan yechish keng qamrovli usullardan hisoblanadi.

Bizga

$$f(x) \to extr; \quad g_i(x) = 0, \; i = 1,\cdots,m,$$

shartli ekstremum masalasi berilgan bo'lsin. Funksiyaning shartli ekstremumini topishning birinchi tartibli zaruriy shartini keltiramiz.

Teorema. a *nuqta shartli ekstremum masalasining lokal ekstremum nuqtasi bo'lsin va* $f(x)$, $g_i(x) = 0$, $i = 1,\dots,m$ *funksiyalar a nuqta atrofida uzluksiz differensiallanuvchi bo'lsin. U holda shunday noldan farqli* $\lambda = (\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_m)$ *vektor topiladiki, Langranj funksiyasi deb ataluvchi* $L(x,\lambda) = \lambda_0 f(x) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i g_i(x)$ *funksiya uchun*

$$\frac{\partial L(x,\lambda)}{\partial x_j} = 0, \quad j = 1,\dots,n$$

$$\frac{\partial L(x,\lambda)}{\partial \lambda_i} = 0, \quad i = 1,2,\dots,m,$$

tengliklar bajariladi.

Endi funksiya ekstremumga ega bo'lishining ikkinchi tartibli zaruriy sharti bilan tanishamiz.

Teorema. *a nuqta shartli ekstremum masalasining lokal minimum (maksimum) nuqtasi bo'lsin va* $f(\mathrm{x}), g_i(\mathrm{x})=0,\ i=1,\cdots,m$ *funksiyalar* a *nuqta atrofida uzluksiz ikki marta differensiallanuvchi bo'lsin.* a *nuqtada* $g_i(x)$ *funksiyaning gradiyentlari chiziqli bog'lanmagan bo'lsin. U holda* $\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial g_i(x)}{\partial x_j}\cdot h_j=0,\ i=1,2,\dots,m$ *shartni qanoatlantiruvchi ixtiyoriy* $h=(h_1,h_2,\dots,h_n)$ *vektori uchun shunday noldan farqli* $\lambda=(\lambda_1,\dots,\lambda_m)$ *vektor topilib,*

$$\frac{\partial L(x,\lambda)}{\partial x_j}=0,\quad j=1,\dots,n$$

$$\frac{\partial L(x,\lambda)}{\partial \lambda_i}=0,\quad i=1,2,\dots,m.$$

va

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial^2 L}{\partial x_j\partial x_k}\cdot h_j h_k\geq(\leq)0$$

shartlar bajariladi.

Funksiya shartli ekstremumga ega bo'lishining yetarli sharti-ni keltiramiz.

Teorema. $f(x),\ g_i(x)=0,\ i=1,\cdots,m,$ *funksiyalar* a *nuqta atrofida uzluksiz ikki marta differensiallanuvchi va* a *nuqtada* $g_i(x)$ *funksiyaning gradiyentlari chiziqli bog'lanmagan bo'lsin. a nuqta shartli ekstremum masalasining lokal minimum (maksimum) nuqtasi bo'lishi uchun* $\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial g_i(x)}{\partial x_j}\cdot h_j=0,\ i=1,2,\dots,m$ *shartni qanoatlantiruvchi ixtiyoriy* $h=(h_1,h_2,\dots,h_n)$ *vektori uchun shunday noldan farqli* $\lambda=(1,\lambda_1,\dots,\lambda_m)$ *vektor topilib,*

$$\frac{\partial L(x,\lambda)}{\partial x_j}=0,\quad j=1,\dots,n$$

$$\frac{\partial L(x,\lambda)}{\partial \lambda_i}=0,\quad i=1,2,\dots,m,$$

va

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial^2 L}{\partial x_j \partial x_k}\cdot h_j h_k > (<)0$$

shartlar bajarilishi yetarli.

Shunday qilib, Lagranj usuliga ko'ra lokal ekstremumlarni topish quyidagicha amalga oshiriladi:

1) Lagranj funksiyasi quriladi;

$$L(x,\lambda) = \lambda_0 f(x) + \sum_{i=1}^{m}\lambda_i g_i(x)$$

2) Lagranj funksiyasining statsionar nuqtalari aniqlanadi. Ya'ni quyidagi sistema yechiladi

$$\frac{\partial L(x,\lambda)}{\partial x_j} = 0, \quad j = 1...n$$

$$\frac{\partial L(x,\lambda)}{\partial \lambda_i} = 0, \quad i = 1...m$$

Shu bilan birga, quyidagi hollarni alohida qarash lozim *a*) $\lambda_0 = 1$, (yoki ixtiyory musbat son) *b*) $\lambda_0 = -1$, (yoki ixtiyory manfiy son). *a*) holatda statsionar nuqtada minimum bo'lishi mumkin. *b*) holda statsionar nuqta maksimum nuqta bo'lishi mumkin.

3) $\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial g_i(x)}{\partial x_j}\cdot h_j = 0, i = 1,2,...,m$ shartlarni qanoatlantiruvchi noldan farqli ixtiyoriy $h = (h_1, h_2, ..., h_n)$ vektori uchun

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial^2 L}{\partial x_j \partial x_k}\cdot h_j h_k > 0$$

shartni tekshirish kerak. Agar bu shart bajarilsa,

4) *a*) holda statsionar nuqta masalaning lokal minimum nuqtasi bo'ladi; *b*) holda statsionar nuqta funksiyaning lokal maksimum nuqtasi bo'ladi.

5) Agar ekstremumning yetarli sharti bajarilmasa, $\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial^2 L}{\partial x_j \partial x_k}\cdot h_j h_k \geq 0$ shartning bajarilishini tekshirish lozim. Agar bu shart bajarilmasa, statsionar nuqta shartli ekstremum nuqta bo'lmaydi.

Misol. xyz funksiyaning $xy+yz+xz-12=0$ shart bajarilgandagi lokal maksimum va lokal minimum nuqtalarini toping.

Yechish.

a) Lagranj funksiyasini quramiz:

$$L(x,y,z,\lambda)=xyz+\lambda(xy+yz+zx-12)$$

b) Shartli statsionar nuqtalarni topamiz.

$$\left(\frac{\partial L}{\partial x}=0\right) \quad yz+\lambda(y+z)=0, \tag{8.1}$$

$$\left(\frac{\partial L}{\partial y}=0\right) \quad xz+\lambda(x+z)=0, \tag{8.2}$$

$$\left(\frac{\partial L}{\partial z}=0\right) \quad xy+\lambda(x+y)=0, \tag{8.3}$$

$$\left(\frac{\partial L}{\partial \lambda}=0\right) \quad xy+yz+xz-12=0. \tag{8.4}$$

(8.1)-(8.4) tengliklardan $x\neq 0$, $y\neq 0$, $z\neq 0$, $\lambda\neq 0$, va

$$\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=-\frac{1}{\lambda},$$
$$\frac{1}{x}+\frac{1}{z}=-\frac{1}{\lambda},$$
$$\frac{1}{y}+\frac{1}{x}=-\frac{1}{\lambda}$$

munosabatlarni hosil qilamiz. Bu yerdan $x=y=z=-2\lambda$ ekani kelib chiqadi. U holda (9) tenglikdan $12\lambda^2=12$, ya'ni $\lambda=\pm 1$ ekanini topamiz.

Shunday qilib, ikkita shartli statsionar nuqtani topdik:

1) $x=y=z=-2$, $\lambda=1$; 2) $x=y=z=2$, $\lambda=-1$.

c) h vektor uchun tenglik yozamiz.

$$\left(\frac{\partial g}{\partial x},\frac{\partial g}{\partial y},\frac{\partial g}{\partial z}\right)=(y+z,\,x+z,\,x+y)$$

ekanidan x=y=z=-*2* nuqtada

$$\left(\frac{\partial g}{\partial x},\frac{\partial g}{\partial y},\frac{\partial g}{\partial z}\right)=(-4,-4,-4),$$

$x=y=z=2$ nuqtada esa

$$\left(\frac{\partial g}{\partial x},\frac{\partial g}{\partial y},\frac{\partial g}{\partial z}\right)=(4,4,4)$$

ekanini topamiz. Har ikkala holda ham $h=(h_1,h_2,h_3)$ vektor uchun

$$h_1+h_2+h_3=0 \tag{8.5}$$

tenglikni hosil qilamiz. Endi Lagranj funksiyasining ikkinchi tartibli hosilalaridan tuzilgan matritsani topamiz.

$$\left(\frac{\partial^2 L(x,\lambda)}{\partial x_j \partial x_k}\right)=\begin{bmatrix} 0 & z+\lambda & y+\lambda \\ z+\lambda & 0 & x+\lambda \\ y+\lambda & x+\lambda & 0 \end{bmatrix}$$

U holda birinchi statsionar nuqta uchun

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial^2 L}{\partial x_j \partial x_k}\cdot h_j h_k=-2h_1h_2-2h_1h_3-2h_2h_3$$

bo‘ladi.
(8.5) tenglikdan $h_3=-(h_1+h_2)$ ekanini topamiz. Shuning uchun

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial^2 L}{\partial x_j \partial x_k}\cdot h_j h_k=2h_1^2+2h_2^2+3h_1h_2$$

Endi $h\neq 0$ da

$$h_1^2+h_1h_2+h_2^2=\left(h_1+\frac{1}{2}h_2\right)^2+\frac{3}{4}h_2^2>0$$

ekanligidan

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial^2 L}{\partial x_j \partial x_k}\cdot h_j h_k>0$$

tengsizliklar bajariladi. Shunday qilib, $x=-2$, $y=-2$, $z=-2$ – shartli lokal minimum nuqta ekan.

Xuddi shuningdek, $x=2$, $y=2$, $z=2$ nuqtaning shartli maksimumligini aniqlash qiyin emas.

Tayanch iboralar

Chiziqsiz dasturlash, kvadratik shakl, kvadratik shakl rangi, Silvester mezoni, shartsiz ekstremum, lokal va global ekstremum, shartli ekstremum, Veyerstrass teoremasi, Gess matritsasi, grafik usul, o'zgaruvchilarni yo'qotish usuli, Lagranj usuli.

Savollar

1. Chiziqsiz dasturlash masalalari qanday ko'rinishda bo'ladi?
2. Kvadratik shakl nima?
3. Qanday kvadratik shakllarni musbat aniqlangan deymiz?
4. Silvester mezoni qanday mezon?
5. Global va lokal ekstremumlarning farqi nimada?
6. Shartsiz ekstremum masalasi qanday masala va u qanday yechiladi?
7. Shartsiz ekstremum masalasi bilan kvadratik shakl orasida qanday bog'liqlik bor?
8. Shartlari tengsizlik orqali berilgan shartli ekstremum masalasini grafik usulda yechish mumkinmi?
9. Shartlari tengliklar orqali berilgan shartli ekstremum masalasini noma'lumlarni yo'qotish usulida yechish qanday amalga oshiriladi?
10. Shartli ekstremum masalasini Lagranj usulida yechish qanday amalga oshiriladi?

Mashqlar

8.1. Quyidagi kvadratik shakllarning matritsasini tuzing.

1) $x_1^2 - 2x_2^2 + x_3^2 - 6x_1x_3$ 2) $x_2^2 - 2x_3^2 + 3x_4^2 + 4x_1x_2 - 2x_3x_4$

8.2. Kvadratik shaklni kanonik ko'rinishga keltiruvchi ortoganal almashtirishlarni toping va kvadratik shaklning kanonik ko'rinishini tuzing.

1) $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 2x_1x_2 - 2x_1x_3 - 2x_2x_3$ 2) $6x_1^2 + 5x_2^2 + 7x_3^2 - 4x_1x_2 + 4x_1x_3$

8.3. Kvadratik shaklning musbat, manfiy, nomanfiy yoki nomusbat aniqlanganligini tekshiring.

3) $x_1^2-4x_3^2-2x_1x_2+2x_1x_3$ 4) $x_2^2+x_3^2+x_1x_3-2x_2x_3$

8.4. Quyidagi funksiyalarning ekstremum nuqtalarini toping.

1) $f=x_1^3+x_2^3-3x_1x_2$ 2) $f=x_1^2+x_2^2+3x_3^2+x_1x_3+x_2x_3-x_2$

8.5. Funksiyaning eng katta va eng kichik qiymatini toping.

1) $f=x_1^2-x_2^2$ 2) $f=x_1^2+x_2^2-12x_1+16x_2$

$X=\{x\ |x_1^2+x_2^2\le 16\}$ $X=\{x\ |x_1^2+x_2^2\le 25\}$

8.6. Korxona ikki xil turdagi mahsulot ishlab chiqaradi. Agar korxona vaqt birligida 1-mahsulotdan x birlik 2-mahsulotdan y birlik ishlab chiqarilsa, $C(x,y)=2x^2+xy+2y^2$ xarajat bo'ladi. Agar mahsulot narxlari 12 va 18 birliklarga teng bo'lsa, korxona qancha 1-mahsulot va qancha 2-mahsulot ishlab chiqarganda eng ko'p foyda ko'radi?

8.7. Firma mahsulotini uchta bozorda sotadi. Tekshirishlar shuni ko'rsatdiki, har bir bozorning mahsulotga bo'lgan talab funksiyalari o'zgacha: 1-bozorda $p_1=63-4x$, 2-bozorda $p_2=105-5y$; 3-bozorda $p_3=75-6z$. x,y va z mos ravishda har bir bozorda sotiladigan mahsulot miqdorlari. Agar xarajat funksiyasi $C=20+15q$ $(q=x+y+z)$ bo'lsa, foyda eng yuqori bo'lishi uchun mahsulotlarni bozorlarga qanday taqsimlash lozim?

8.8. Quyidagi chiziqsiz dasturlash masalalarini grafik usulda yeching.

1) $f=4x+3y\to\max$
$x^2-2x+y^2-2y\le 34$
$x\ge 1$
$y\ge 1$
$x,y\ge 0$

2) $f=x-y-5\to extr$
$(x-1)y\ge 1$
$x+y\ge 3.5$
$0\le x\le 5$
$0\le y\le 5$

8.9. Quyidagi funksiyalarning shartli ekstremumlarini toping.

1) $x^2+y^2+z^2\to extr$
$x+y+z=1$
$x+y-z=1/2$

2) $2x^2-6x-6y-3z^2\to extr$
$x-y+z=0$ $5x+y-2z=1$

8.10. Rejaga ko'ra korxona 180 ta detal tayyorlashi lozim. Bu detallar ikki texnologiya bo'yicha tayyorlanadi. 1-usul bilan x detalni tayyorlash uchun $4x+x^2$ xarajat qilinadi. 2-usul bilan tayyorlaganda esa xarajat $8y+y^2$ bilan ifodalanadi. Har bir texnologiyadan qanchadan detal ishlab chiqarganda ishlab chiqarishning umumiy xarajati eng kam bo'ladi?

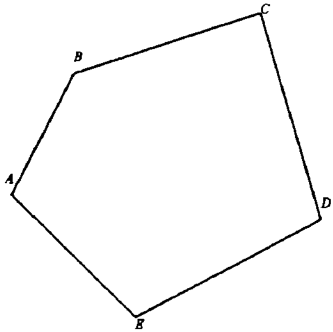
8.11. Muharrir yangi kitob chiqarish va uning reklamasi uchun $60000 mablag' ajratgan. Tahlillar shuni ko'rsatdiki, agar x ming dollar ishlab chiqarishga y ming dollar reklamaga sarf qilinsa, $f(x,y)=20x^{3/2}y$ dona kitob sotiladi. Sotish ko'lamini maksimallashtirish uchun muharrir mablag'ning qanchasini ishlab chiqarishga va qanchasini reklamaga ajratishi kerak?

8.12. Agar x ming dollar ishchilarga y ming dollar resurslarga ajratilsa, fabrikaning ishlab chiqarish quvvati $f(x,y)=60x^{1/3}y^{2/3}$ birlikka teng bo'ladi. Agar fabrikaning imkoniyati $120000 bo'lsa, ishlab chiqarish quvvati yuqori bo'lishi uchun mablag' qanday taqsimlanishi lozim?

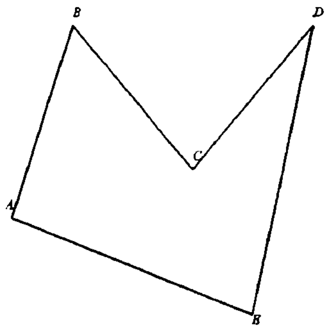
9.1. Qavariq to'plamlar

Bu mavzuda qavariq to'plam tushunchasi keltirilib, uning xossalari bilan tanishamiz.

Bo'sh bo'lmagan $X \subset R^n$ to'plam berilgan. Agar to'plam o'zining ixtiyoriy z_1 va z_2 nuqtalari bilan birgalikda ularni tutashtiruvchi kesmani ham o'z ichiga olsa, bunday to'plam qavariq to'plam deyiladi. Boshqacha aytganda, qavariq to'plamda barcha $z_1, z_2 \in X$ va $\lambda \in [0;1]$ lar uchun $\lambda z_1 + (1-\lambda)z_2 \in X$ o'rinli bo'ladi.



9.1-rasm



9.9.2-rasm

Masalan, 9.1-rasmda keltirilgan ABCDE ko'pburchak qavariq bo'lib, 9.2-rasmda keltirilgan ko'pburchak esa qavariq emas.

Doira, sektor, kesma, kub, piramida, yarim tekislik va h.k shakllar qavariq to'plamlarni tashkil qiladi. Aylana, halqa va h.k to'plamlar qavariq bo'lmagan to'plamga misol bo'la oladi.

Ta'rifdan foydalanib, $X = \{(x, y) \mid 3x + 5y \le 7\}$ to'plamning qavariqligini ko'rsatamiz. To'plamning ixtiyoriy ikkita nuqtasini olamiz: $z_1 = (x_1, y_1)$, va $z_2 = (x_2, y_2)$. U holda

$$3x_1 + 5y_1 \le 5, \quad 3x_2 + 5y_2 \le 5. \tag{9.1}$$

Barcha $(x_1,y_1),(x_2,y_2)\in X$ va $\lambda\in[0;1]$ lar uchun

$$\lambda z_1+(1-\lambda)z_2=\lambda(x_1,y_1)+(1-\lambda)(x_2,y_2)=$$
$$=(\lambda x_1+(1-\lambda)y_1,\lambda x_2+(1-\lambda)y_2)$$

nuqta ham shu to'plamga tegishli ekanini ko'rsatamiz. Haqiqatan ham, (8.1) tengsizliklardan

$$3(\lambda x_1+(1-\lambda)y_1)+5(\lambda x_2+(1-\lambda)y_2)$$
$$=\lambda(3x_1+5y_1)+(1-\lambda)(3x_2+5y_2)\le\lambda\cdot5+(1-\lambda)\cdot5=5$$

ekanini hosil qilamiz. Demak, berilgan to'plam qavariq ekan.

Qavariq to'plamlar quyidagi xossaga ega.

Har qanday qavariq to'plamning kesishmasi ham qavariqdir.

Bu xossaning isbotini ikki to'plam uchun keltirish yetarlidir. M va N nuqtalar A va B to'plamlarning kesishmasiga tegishli bo'lsin. Qavariq to'plamning ta'rifiga ko'ra MN kesmaning barcha nuqtalari ham A to'plamga, ham B to'plamga tegishli bo'ladi. Ya'ni A va B to'plamlarning kesishmasiga tegishli bo'ladi.

Agar $x_1,x_2,\dots,x_n\in A$ bo'lsa, $\lambda_1+\lambda_2+\dots+\lambda_n=1$ va $\lambda_i\ge0, i=1,2,\cdots,n$ shartlarni qanoatlantiruvchi $x=x_1+x_2+\dots+x_n\in A$ bo'ladi.

9.2. Qavariq funksiyalar

Bu mavzuda qavariq funksiyalar tushunchasi beriladi va qavariq funksiyaning xossalari bilan tanishamiz.

Ta'rif. Qavariq X to'plamda aniqlangan $f(x)$ funksiya uchun ixtiyoriy $z_1,z_2\in X$ va $\lambda\in[0,1]$ larda

$$f(\lambda z_1+(1-\lambda)z_2)\le\lambda f(z_1)+(1-\lambda)f(z_2) \qquad (9.2)$$

tengsizlik o'rinli bo'lsa bunday funksiyalar **pastga qavariq** funksiyalar deyiladi.

Agar (9.2) tengsizlikda $\le$ belgi o'rniga $\ge$ belgisi ishlatilsa, **yuqoriga qavariq** funksiyalar ta'rifi hosil bo'ladi. Agar (9.2) tengsizlikda $\le$ belgisi $<$ belgisi bilan almashtirilsa, **qat'iy pastga qavariq** funksiya ta'rifi kelib chiqadi.

Qavariq funksiyalarning xossalari

1) Qavariq to'plamda aniqlangan qavariq funksiya to'plamning ichki nuqtasida uzluksiz bo'ladi.

2) Qavariq to'plam X da aniqlangan qavariq f(x) funksiya ixtiyoriy λ uchun

$$\{x \in X \mid f(x) \le \lambda\}$$

to'plam qavariq bo'ladi (agar bunday to'plam bo'sh bo'lmasa).

3) Qavariq X to'plamda aniqlangan qavariq f(x) funksiya uchun

$$f(\sum_{i=1}^{m} \lambda_i x_i) \le \sum_{i=1}^{m} \lambda_i f(x_i)$$

tengsizlik o'rinli bo'ladi. Bu yerda $x_i \in X, i = 1,2,\ldots,m;\ \sum_{i=1}^{m} \lambda_i = 1$

4) $\varphi_i(x),\ i = 1,2,\ldots,m$ funksiyalar qavariq bo'lsa, $\sum_{i=1}^{m} \lambda_i \varphi_i(x)$ funksiya ham qavariq bo'ladi ($\lambda_i \ge 0$).

5) Har qanday qat'iy qavariq funksiya bittadan ortiq statsionar nuqtaga ega bo'lmaydi. Shu bilan birga, bu nuqta funksiyaning lokal va mutlaq minimumlariga mos keladi.

6) Ikki marta differensiallanuvchi funksiyaning qavariq bo'lishi uchun funksiyaning Gess matrisasining nomanfiy aniqlangan bo'lishi zarur va yetarlidir.

9.3. Shartli minimum masalasi

Bu mavzuda shartli minimum masalasini berilishi va uni qanday topish usuli bayon qilinadi. Shartli minimumni topishning Kun-Takker shartlari keltiriladi.

Bizga uzluksiz hosilalarga ega bo'lgan qavariq

$$f(x) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)\,, \qquad (9.3)$$

funksiya berilgan bo'lsin. Quyidagi tengsizliklar yordamida

$$g_j(x) = g_j(x_1, x_2, \ldots, x_n) \le 0,\ (j=1,2,\ldots,m) \qquad (9.4)$$

aniqlangan qavariq A to'plamni qaraylik. Bu yerda $g_j(x)$ qavariq va uzluksiz birinchi tartibli hosilalarga ega funksiyalar. Shu bilan birga A to'plamning ichki nuqtalari mavjud deb olamiz. Ya'ni $g_j(x)<0$ $(j=1,2,\ldots,m)$ shartlarni qanoatlantiruvchi nuqta mavjud.

(9.4) shartlarni qanoatlantiruvchi (9.3) funksiya minimum qiymatga erishadigan x^* nuqtani topish masalasi *qavariq dasturlash* masalasi deyiladi:

$$f(x^*) = \min_{x\in A} f(x) \tag{9.5}$$

Qavariq dasturlash masalasida lokal minimum nuqta mutlaq minimum bilan mos keladi.

Haqiqatan ham, $f(x)$ funksiya $x^{(1)}$ nuqtada lokal minimumga erishsin, ya'ni $x^1 \subset A$ nuqta atrofida $f(x^{(1)})\leq f(x)$ o'rinli bo'ladi. Faraz qilaylik, biror A $\ni x^{(2)}$ nuqta uchun $f(x^{(2)})<f(x^{(1)})$ bo'lsin. $x=(1-t)x^{(1)}+tx^{(2)}$ $(0\leq t\leq 1)$ kesmani qaraylik.

A to'plamning qavariqligidan kesmaning barcha nuqtalari A to'plamda yotadi. Kesmada $x^{(1)}$ atrofida joylashgan $x^{(0)}=(1-t_0)x^{(1)}+t_0x^{(2)}$ nuqta mavjud. $f(x)$ funksiyaning qavaqriqligidan

$$f(x^{(0)})\leq (1-t_0)f(x^{(1)})+t_0f(x^{(2)})=f(x^{(1)})+t_0[f(x^{(2)})-f(x^{(1)})]<f(x^{(1)}).$$

Bu esa $f(x^{(1)})\leq f(x)$ shartiga zid. Shuning uchun ixtiyoriy $x\in$ A uchun $f(x^{(1)})\leq f(x)$ o'rinlidir.

Qavariq dasturlash masalasini yechish uchun Lagranj funksiyasi deb ataluvchi

$$L(x,\bar{\lambda}) = f(x) + \lambda_1 g_1(x) + \ldots + \lambda_m g_m(x)$$

funksiyani quramiz. Bu yerda $\lambda_1,\ldots,\lambda_m$ sonlar Lagranj ko'paytuvchilari, $\bar{\lambda}=(\lambda_1,\ldots,\lambda_m)$ vektor esa Lagranj ko'paytuvchilari vektori deb yuritiladi.

Teorema ***(Kun-Takkar).*** *$f(x)$ va $g_j(x)$ $(j=1,2,\ldots,m)$ funksiyalar A sohada differensiallashuvchi bo'lib, A sohaning ichki nuqtasi mavjud bo'lsin. U holda x^* nuqta (9.4) shartlarini qanoatlantiruvchi $f(x)$ funksiyaga minimum nuqta bo'lishi uchun shunday λ^* vektori mavjud bo'lishi kerakki, unda (x^*, λ^*) vektori uchun quyidagi shartlarning bajarilishi zarur va yetarlidir:*

$$a)\ \frac{\partial f(x)}{\partial x_i} + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \frac{\partial g_j(x)}{\partial x_i} = 0,\ (i = 1,2,\ldots,n),$$

$$b)\ \lambda_j \geq 0,\ (j = 1,2,\ldots,m),$$

$$c)\ \lambda_j g_j(x) = 0,\ (j = 1,2,\ldots,m).$$

Qavariq dasturlash masalasini ((9.4),(9.5)) yechishning umumiy sxemasi quyidagicha:

1. Masala qavariq dasturlash masalasi ekanligini aniqlash lozim. Buning uchun barcha funksiyalarning qavariqligini tekshirish va masala minimum masalasi bo'lishli lozim.
2. A to'plamning ichki nuqtalari mavjudligini aniqlash kerak.
3. Teorema shartlaridan x^* va λ^* aniqlash lozim.
4. x^* nuqtaning A to'plamga tegishliligini aniqlash kerak va unga mos λ^* nomanfiyligini tekshirish lozim

Misol. $x^2 - xy + y^2 - 2x + y \to \min$, $x^2 + y^2 \le 1$, $A = R^2$, qavariq dasturlash masalasini qaraymiz. Bunda

$$f(x) = x^2 - xy + y^2 - 2x + y,\ g(x) = x^2 + y^2 - 1.$$

f(x) funksiya uchun Gess matritsasi musbat aniqlangan bo'lgani uchun u qavariq funksiyadir va $g(x)=x^2+y^2-1$ funksiyaning ham qavariqligini tekshirish qiyin emas. A to'plam birlik doiradan iborat bo'lgani uchun uning ichki nuqtalari mavjud. Masalani yechish uchun Lagranj funksiyasini tuzamiz.

$$L(x, y, \lambda) = \left(x^2 - xy + y^2 - 2x + y\right) + \lambda_1\left(x^2 + y^2 - 1\right)$$

Lagranj funksiyasidan xususiy hosilalar olamiz.

$$L'_x(x, \lambda) = 2x - y - 2 + 2\lambda_1 x = 0, \tag{9.6}$$

$$L'_y = (-x + 2y + 1) + 2\lambda_1 y = 0 \tag{9.7}$$

tengliklarni, teoremaning c) shartidan esa

$$\lambda_1 \cdot \left(x^2 + y^2 - 1\right) = 0 \tag{9.8}$$

ekanini b) shartidan esa , $\lambda_1 \ge 0$ ekanini hosil qilamiz.

Agar $\lambda_1 = 0$ bo'lsa, u holda (9.6), (9.7) tengliklardan quyidagilarni hosil qilamiz.

$$\begin{cases} 2x - y = 2 \\ -x + 2y = -1 \end{cases} \quad x = 1,\ y = 0.$$

Topilgan nuqta masalaning yechimi bo'ladi.

Masalaning yechimi topilgani uchun boshqa hollarni qarab chiqish shart emas.

Misol. $f(x) = 2x_1^2 + 4x_2^2 - 2x_1x_2 - 4(\sqrt{5} - 2)x_1 - 5(2 - \sqrt{5})x_2 \to \min,$ $x_1^2 + x_2^2 \le 4,\quad x_1^2 - x_2 \le 0,\quad x_1 + x_2 \ge 1,\quad x_1 \ge 0,$ qavariq dasturlash masalasi uchun $x' = (0,2)$ va $x^* = \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}, \frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)$ nuqtalarning misolning yechimi bo'lishini tekshiring.

Yechish. Maqsad funksiyasi va $g_1(x) = x_1^2 + x_2^2 - 4,\ g_2(x) = x_1^2 - x_2,$ $g_3(x) = -x_1 - x_2 + 1,\ g_4(x) = -x_1,$ funksiyalar qavariqligini tekshirish qiyin emas. Lagranj funksiyasining ko'rinishi quyidagicha bo'ladi:

$$L(x) = 2x_1^2 + 4x_2^2 - 2x_1x_2 - 4(\sqrt{5} - 2)x_1 - 5(2 - \sqrt{5})x_2 + \lambda_1(x_1^2 + x_2^2 - 4) +$$
$$+ \lambda_2(x_1^2 - x_2) + \lambda_3(1 - x_1 - x_2) - \lambda_4 x_1.$$

Teoremaning *a)* shartidan

$$L'_{x_1} = 4x_1 - 2x_2 - 4(\sqrt{5} - 2) + \lambda_1 2x_1 + \lambda_2 2x_1 - \lambda_3 - \lambda_4, \qquad (9.9)$$
$$L'_{x_2} = -2x_1 + 8x_2 - 5(2 - \sqrt{5}) + \lambda_1 2x_2 - \lambda_2 - \lambda_3, \qquad (9.10)$$

c) shartidan

$$\lambda_1(x_1^2 + x_2^2 - 4) = 0, \qquad (9.11)$$
$$\lambda_2(x_1^2 - x_2) = 0, \qquad (9.12)$$
$$\lambda_3(-x_1 - x_2 + 1) = 0, \qquad (9.13)$$
$$\lambda_4 x_1 - 0, \qquad (9.14)$$

tenglamalarga kelamiz.

$x' = (0,2)$ nuqta koordinatalari (9.11)-(9.14) tenglamalarning yechimi bo'lishidan $\lambda_1 \ne 0, \lambda_2 = 0, \lambda_3 = 0, \lambda_4 \ne 0$ kelib chiqadi. (9.9)-(9.10) tenglamalardan $\lambda_1 = (-5\sqrt{5} - 6)/4$, $\lambda_4 = 4 - 4\sqrt{5}$ kelib chiqadi. Bu esa teoremaning b) shartiga zid. Demak, $x' = (0,2)$ nuqta yechim bo'la olmaydi.

Xuddi shuningdek, $x^* = \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}, \frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)$ nuqta uchun (9.9)-(9.14) tenglamalardan $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 2, \lambda_4 = 0$ kelib chiqadi va masalaning yechimi ekanligini ko'rsatadi.

Tayanch iboralar

Qavariq to'plam, qavariq funksiya, qavariq dasturlash, shartli minimum masalasi, Langranj funksiyasi, egar nuqta, Kun-Takker shartlari.

Savollar

1. Qanday to'plamlar qavariq deyiladi?
2. Qanday funksiyalarga qavariq funksiyalar deymiz?
3. Qavariq funksiyaning qanday xossalarini bilasiz?
4. Qavariq dasturlash masalasi deb qanday masalaga aytiladi?
5. Qavariq dasturlash masalasi qanday yechiladi?
6. Kun-Takker shartlari nimadan iborat?

Mashqlar

9.1. Quyidagi to'plamlarning qavariqligini ko'rsating.

1) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 \le 3 \\ x_1 + 5x_2 \le 7 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 1 \\ x_1 - 2x_2 \le 0 \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x_1 + x_2 \le 1 \\ x_1^2 \le 1 \end{cases}$

9.2. Quyidagi funksiyalarning qavariqligini ta'rif bo'yicha ko'rsating.

1) $f(x) = x^2$ 2) $f(x, y) = x^2 + y^2$ 3) $f(x, y) = |x| + |y|$

9.3. Quyidagi funksiyalarni qavariqligini Silvester mezonidan foydalanib tekshiring.

1) $f(x) = x_1^4 + x_2^4 + x_1^2 + x_2^2 + x_1^2 x_2^2$ 2) $f(x) = 5x_1^2 + 5x_2^2 + 4x_3^2 + 4x_1x_2 + 2x_2x_3$

9.4. Quyidagi masalalarni minimumga yeching.

1) $x^2 + y^2 - 2x - 2y + 7 \to \min$
$x + y \le 5 \quad x \ge 2,$

2) $x^2 - xy + y^2 + 2x \to \min$
$x + y \le 1, \quad x \ge 0.$

X bob. DINAMIK DASTURLASH

10.1. Masalaning qo'yilishi. Bellman tenglamasi

Bu mavzuda dinamik dasturlash tushunchasi bayon qilinib, Bellman tenglamasi keltiriladi. Dinamik dasturlash masalalariga keltiriladigan masalalar Bellman tenglamalari orqali ifodalanadi.

Chiziqli va chiziqsiz dasturlash masalalarida iqtisodiy jarayonlar statik xarakterga ega edi. Ya'ni ularda kechadigan jarayonlar vaqtga bog'liq emas. Jarayonning optimal yechimi bir bosqichda qaralar edi. Bunday jarayonlar bir bosqichli jarayonlar deyiladi.

Dinamik xarakterdagi iqtisodiy jarayonlar ko'p bosqichli jarayonlar bo'lib unda umumiy jarayonning optimalligi har bir bosqichning optimalligiga erishilib, umumiy optimallik aniqlanadi.

Dinamik dasturlash usuli bilan yechiladigan masalalarga, masalan, resurslarni korxonalarga optimal taqsimlash, resurslarni bir necha yil davomida ishlatish, dastgohlarni almashtirish va h.k. kiradi. Dinamik dasturlash masalasining qo'yilishini ko'rib chiqamiz. Biror iqtisodiy boshqaruv jarayonini biror *n* bosqichga ajratish mumkin bo'lsin. Boshqarish jarayonida obyekt s_0 holatdan s_n holatga o'tsin. k-qadamdagi holatni s_k deb, boshqaruvni esa u_k orqali belgilaymiz. Demak, $u_1, u_2, \dots, u_n$ boshqaruv iqtisodiy holatni s_0 dan s_n holatga olib keladi. Boshqaruvni 10.1-rasmdagi zanjir orqali tasavvur qilish mumkin:

$$S_0 \xrightarrow{u_1} S_1 \xrightarrow{u_2} \dots \xrightarrow{u_{k-1}} S_{k-1} \xrightarrow{u_k} S_k \xrightarrow{u_{k+1}} \dots \xrightarrow{u_n} S_n$$

10.1-rasm

Bunday jarayonning samaradorligi — maqsad funksiyasi boshlang'ich holatga va boshqaruv parametrlariga bog'liq bo'ladi:

$$z=F(s_0,u) \qquad (10.1)$$

Bu yerda $u=(u_1,u_2,\dots,u_n)$.

Dinamik dasturlash usulini qo'llashda quyidagi shartlar o'rinli deb qaraladi.

1. Jarayonning s_k holati faqat oldingi holati s_{k-1} va k-bosqichdagi boshqaruv u_k gagina bog'liq bo'ladi, ya'ni

$$s_k=f_k(s_{k-1},u_k), \quad k=1,2,\dots,n \qquad (10.2)$$

2. Maqsad funksiyasi additivlik xususiyatiga ega, ya'ni:

$$z=\sum_{k=1}^{n} f_k(s_{k-1},u_k) \qquad (10.3)$$

Dinamik dasturlash masalasi quyidagicha qo'yiladi: *u_k boshqaruvni shunday amalga oshirish kerakki, unda maqsad funksiyasining qiymati z eng katta (kichik) bo'lsin.*

3. **Bellman tenglamasi**. Masalalarni dinamik dastur usulida yechish ikki qismdan iborat. Birinchi qism *teskari quvlash usuli* yoki *shartli ekstremum* qismi deyiladi. Ikkinchi qism *to'g'ri quvlash usuli* bo'lib, unda *shartsiz ekstremum masalasi* yechiladi.

4. *Birinchi qism*. Fikrimizni masalaning n-qadamiga qarataylik. S_{n-1} n-qadam boshidagi holat bo'lsin, u_n n-bosqichdagi boshqaruv bo'lsin, $f_n(s_{n-1},u_n)$ n-qadamdagi maqsad funksiyasi. Optimallik shartiga ko'ra u_n shunday tanlash loziki s_{n-1} holatning har qanday qiymatida ham maqsad funksiyasi maksimumga (minimumga) erishsin. $z_n^*(s_{n-1})$ orqali n-qadamdagi maqsad funksiyasining optimal qiymatini belgilaymiz. Bu maqsad funksiyasining n-qadamdagi shartli optimal qiymati deyiladi. Ravshanki,

$$z_n^*(s_{n-1}) = \max_{\{u_n\}}(\min) f_n(s_{n-1},u_n) \qquad (10.5)$$

Maksimallashtirish (minimallashtirish) barcha mumkin bo'lgan boshqaruvlar ichidan olinadi. n-qadamdagi optimal boshqaruvni $u_n^*(s_{n-1})$ orqali belgilaymiz.

(10.5) tenglamadan foydalanib, mumkin bo'lgan barcha s_{n-1} holatlar uchun $z_n^*(s_{n-1})$ va $u_n^*(s_{n-1})$ funksiyalarni aniqlaymiz. Oxirgi ikki qadamdagi maqsad funksiyasining qiymati

$$f_{n-1}(s_{n-2},u_{n-1}) + z_n^*(s_{n-1}) \qquad (10.6)$$

ga teng bo'ladi. Demak, s_{n-2} holat uchun u_{n-1} boshqaruvni shunday aniqlash lozimki unda (10.6) funksiya maksimumga (minimumga) erishsin. n-1 qadamdagi optimal boshqaruvni $u_{n-1}^*(s_{n-2})$ orqali belgilaymiz. $z_{n-1}^*(s_{n-2})$ oxirgi ikki qadamdagi maqsad funksiyasining shartli optimal qiymati bo'ladi.

$$z_{n-1}^*(s_{n-2}) = \max_{\{u_{n-1}\}}(\min)\left\{f_{n-1}(s_{n-2}, u_{n-1}) + z_n^*(s_{n-1})\right\} \tag{10.7}$$

Shuni ta'kidlash lozimki, figurali qavs ichidagi ifoda faqat s_{n-2} va u_{n-1} largagina bog'liq. Haqiqatan ham, s_{n-1} ni (10.2) ga ko'ra aniqlash mumkin

$$s_{n-1} = \varphi_{n-1}(s_{n-2}, u_{n-1})$$

va $z_n^*(s_{n-1})$ ifodada s_{n-1} o'rniga qo'yish mumkin. Pirovardida, (10.7) ga binoan maksimallashtirish (minimallashtirish) natijasida $z_{n-1}^*(s_{n-2})$ va $u_{n-1}^*(s_{n-2})$ qiymatlarni aniqlaymiz.

$z_k^*(s_{k-1})$ orqali maqsad funksiyasining k-qadamdan oxirgi qadamgacha bo'lgan shartli optimal qiymatini belgilasak, quyidagi rekurent formulaga kelamiz

$$z_k^*(s_{k-1}) = \max_{\{u_k\}}(\min)\left\{f_k(s_{k-1}, u_k) + z_{k+1}^*(s_k)\right\} \tag{10.8}$$

$k=n-1, n-2, \ldots, 2, 1.$

(10.8) formuladagi maksimumga (minimumga) olib keluvchi optimal boshqaruvni $u_k^*(s_{k-1})$ orgali belgilaymiz. (10.8) bo'yicha optimallikni topish jarayonida s_k o'rniga (10.2) formuladan olingan $s_k = \varphi_k(s_{k-1}, u_k)$ ifodani qo'yish kerak.

(10.8) tenglamalarga *Bellman tenglamalari* deyiladi. Shunday qilib hisoblashning birinchi qismi tugallanadi. Natijada biz ikki ketma-ketlikka ega bo'lamiz: maqsad funksiyasining shartli ekstremumlari

$$z_n^*(s_{n-1}), z_{n-1}^*(s_{n-2}), \ldots, z_2^*(s_1), z_1^*(s_0),$$

va optimal boshqaruvlar

$$u_n^*(s_{n-1}), u_{n-1}^*(s_{n-2}), \ldots, u_2^*(s_1), u_1^*(s_0)$$

Ikkinchi qism. Bu qismda birinchi qadamdan boshlab shartsiz optimal yechim izlanadi. $z_1^*(s_0)$ n qadamdagi maqsad funksiyasining ekstremumi bo'lgani uchun

$$z_{\max} = z_1^*(s_0) \qquad (10.9)$$

(10.2) tenglik va shartli optimal yechimlardan foydalanib, ketma-ket optimal yechim va optimal holatlarni topamiz.

$$u_1^* = u_1^*(s_0), s_1^* = \varphi_1(s_0, u_1^*); \; u_2^*, s_2^*; \; u_3^*, s_3^*, \ldots, s_{n-1}^*, u_n^*$$

Dinamik dasturlash usuli bilan yechiladigan masalalarning ba'zilari bilan tanishamiz.

10.2. Resurslarni optimal taqsimlash

Bu mavzuda dinamik dasturlash masalalaridan biri bo'lgan resurslarni optimal taqsimlash masalasi oid misollar keltiriladi.

1-masala. 60 mln. miqdordagi shartli pul birligi to'rtta (K1, K2, K3, K4) korxonalarga taqsimlanishi kerak. Korxonaga taqsimlanadigan pul miqdorlari 20 mln.ga karrali bo'lishi kerak. Pul miqdorlaridan keladigan foyda jadval ko'rinishda berilgan (10.1-jadval)

10.1-jadval

Ajratilgan mablag' (mln. p.b.) (x)	Korxona foydasi (mln. p.b.) $f_k(x)$			
	K1	K2	K3	K4
0	0	0	0	0
20	9	10	6	12
40	16	18	12	17
60	22	20	25	20

Pul miqdorlarini shunday taqsimlash lozimki, to'rtta korxonadan keladigan umumiy foyda maksimal bo'lsin.

Bu masalada qadam sifatida korxonalarga ajratiladigan mablag'ni tushunamiz: 1-qadam K1 korxonaga ajratiladigan mablag', 2-qadam — K2 korxonaga ajratiladigan mablag' va h.k. (qadamlar soni 4 ga teng n=4). Bu masalada holat sifatida mablag'ni taqsimlash tushuniladi. Boshlang'ich holat $s_0=60$ ga teng. Har bosqichdagi boshqaruv u_k (*k=1, 2, 3, 4*) mablag'ni taqsimlashdan iborat. Maqsad funksiyasi korxonalarning olgan foydasi 10.1-jadvalda berilgan.

Har bir qadamdagi holat s_k (taqsimlashga lozim bo'lgan mablag') qadam boshidagi s_{k-1} mablag' va shu qadamdagi yechim u_k ga bog'liq: $s_k=s_{k-1}-u_k$.

Masala additivlik xossasiga ega: umumiy samaradorlik har bir qadamdagi korxona foydalarining yig'indisiga teng.

Yechish. Shartli optimallashtirish.

4-qadam (K4 korxonaga mablag' ajratish). 4-qadam boshida mumkin bo'ladigan barcha s_3 holatlarni aniqlaymiz, ya'ni K1, K2, K3 korxonalarga ajratishdan qolgan mablag'ni aniqlaymiz. Bu mablag' 0 ga (agar bacha mablag' K1, K2, K3 korxonalarga tarqatib bo'lingan bo'lsa), 20 mln. p.b.ga (agar K1, K2, K3 korxonalarga 40 mln. p.b. tarqatilgan bo'lsa), 40 mln. p.b. ga (agar K1, K2, K3 korxonalarning barchasiga 20 mln. p.b. tarqatilgan bo'lsa) yoki 60 mln. p.b. ga teng (agar K1, K2, K3 korxonalarga mablag' ajratilmagan bo'lsa) bo'ladi.

Har bir mumkin bo'lgan holatlarga mos kelgan shartli optimal yechim aniqlanadi. K4 korxona oxirgi korxona bo'lgani uchun qolgan mablag'ning barchasi K4 korxonaga taqsimlanadi. 10.2-jadvalda s_3 holatlari, unga mos kelgan optimal yechim u_4^* va samaradorlik mezoni – K4 korxonaning foydasi z_4^* keltirilgan.

10.2-jadval

s_3	u_4^*	$z_4^*=f_4(s_3,u_4^*)$
0	0	0
20	20	12
40	40	17
60	60	20

Shuni nazarda tutish lozimki, 4-qadamda K4 korxonaga qancha mablag' ajratilganligi ko'rsatilmagan. Buning iloji ham yo'q s_3 aniq nechaga tengligi ma'lum emas.

3-qadam. Barcha hisoblash ishlari 10.3-jadvalda keltirilgan.

10.3-jadval

s_2	u_3	$f_3(s_2,u_3)$	s_3	z_4^*	z_3	u_3^*	z_3^*
0	0	0	0	0	0	0	0
20	0	0	20	12	12	0	12
	20	6	0	0	6		

	0	0	40	17	17		
40	20	6	20	12	18	20	18
	40	12	0	0	12		
	0	0	60	20	20		
	20	6	40	17	23		
60	40	12	20	12	24	60	25
	60	25	0	0	25		

Jadvaldagi belgilashlarga izoh beramiz. s_2 – K3 va K4 korxonalarga ajratilishi mumkin bo'lgan mablag' miqdori; u_3 – K3 korxonaga ajratilishi mumkin bo'lgan mablag'; $f_3(s_2,u_2)$ K3 korxonaning foydasi; s_3 – K4 korxonaga ajratiladigan mablag'; z_4^* – K4 korxonaning s_3 miqdorda ajratilgan mablag'dan kelgan foyda; z_3 – K3 va K4 korxonalarning umumiy foydasi (f_3 va z_4^* ustunlar yig'indisi); u_3^* – s_2 holatdagi shartli optimal yechim; z_3^* – K3 va K4 korxanalarning shartli optimal samaradorligi.

3-qadamdagi hisoblash tartibi quyidagicha. 3-qadam boshidagi barcha s_2 holatlar aniqlanadi, ya'ni K3 va K4 korxonalarga ajratishi mumkin bo'lgan mablag'lar aniqlanadi. Bu mablag' 0 mln. p.b. ga, 20 mln. p.b. ga, 40 mln. p.b. ga yoki 60 mln. p.b. ga teng bo'lishi mumkin. Har holat uchun shartli optimal yechim aniqlanadi. K3 korxonaga shunday mablag' ajratish lozimki, K3 va K4 korxonalardan olinadigan umumiy foyda eng yuqori bo'lsin.

Faraz qilaylik, K3 va K4 korxonalarga ajratilgan mablag' 20 mln. p.b. ga teng (s_2=20). Bu mablag'ni K4 korxonaga ajratish mumkin (u holda K3 korxonaga mablag' ajratilmaydi, $u_3=0$) yoki K3 korxonaga ajratiladi ($u_3=20$). Agar u_3=0 bo'lsa, K3 foyda olmaydi va $s_3=20$ bo'lib, mablag' K4 ga taqsimlanadi va uning foydasi $z_4^*=12$ mln. p.b. ga teng bo'ladi. K3 va K4 korxonalarning umumiy foydasi $z_3=0+12=12$ mln. p.b. ga teng bo'ladi. Agar $u_3=20$ bo'lsa, K3 6 mln. p.b. ga teng foyda oladi. Unda uchinchi qadam oxiridagi holat $s_3=0$ bo'ladi va K4 foyda olmaydi $z_4^*=0$. K3 va K4 korxonalarning umumiy foydasi $z_3=6+0=6$ mln. p.b. ga teng bo'ladi. Shunday qilib, K3 va K4 korxonalarga 20 mln. p.b. miqdorida mablag' ajratilsa, K3 korxonaga mablag' ajratmaslik lozim bo'ladi. Mablag'ni K4 ga ajratish maqsadga muvofiq bo'lib, undagi foyda eng yuqori bo'ladi. Boshqacha aytganda, s_2=20 holatida shartli optimal yechim $u_3^*=0$, $z_3^*=12$ bo'ladi.

Xuddi shunday mulohazalar yuritib, $s_2=40$ bolganda $u_3^*=20$, $z_3^*=18$ ekanligini topish qiyin emas (10.3-jadvalga qarang).

Xuddi shu yo'l bilan $s_2=60$ bo'lganda $u_3^*=60$, $z_3^*=25$ ekanligiga ishonch hosil qilish mumkin.

2-qadam. 10.4-jadvalda 2-qadamga tegishli bo'lgan hisoblashlarning jadvali keltirilgan.

10.4-jadval

s_1	u_2	$f_2(s_1,u_2)$	s_2	z_3^*	z_2	u_2^*	z_2^*
0	0	0	0	0	0	0	0
20	0	0	20	12	12	0	12
	20	10	0	0	10		
	0	0	40	18	18		
40	20	10	20	12	22	20	22
	40	18	0	0	18		
	0	0	60	25	25		
	20	10	40	18	28		
60	40	18	20	12	30	40	30
	60	20	0	0	20		

Jadvaldagi belgilashlarga izoh beraylik. s_1-K2, K3 va K4 korxonalarga ajratilishi mumkin bo'lgan mablag' miqdori; u_2-K2 korxonaga ajratilishi mumkin bo'lgan mablag'; $f_2(s_1,u_2)$ K2 korxonaning foydasi; s_2-K3 va K4 korxonaga ajratiladigan mablag'; z_3^*-K3 va K4 korxonalarga s_2 miqdorda ajratilgan mablag'dan kelgan umumiy foyda(10.3-jadvaldan aniqlanadi); z_2-K2, K3 va K4 korxonalarning umumiy foydasi (f_2 va z_3^* ustunlar yig'indisi); u_2^*-s_1 holatdagi shartli optimal yechim; z_2^*-K2, K3 va K4 korxonalarning shartli optimal samaradorligi.

2-qadamdagi hisoblash tartibi quyidagicha. 2-qadam boshidagi barcha s_1 holatlar aniqlanadi, ya'ni K2, K3 va K4 korxonalarga ajratishi mumkin bo'lgan mablag'lar aniqlanadi. Bu mablag' K1 korxonaga ajratilgan mablag'ga bog'liq ravishda 0 mln. p.b. ga, 20 mln. p.b. ga, 40 mln. p.b. ga yoki 60 mln. p.b. ga teng bo'lishi mumkin. Har holat uchun shartli optimal yechim aniqlanadi. K2 korxonaga shunday mablag' ajratish lozimki, K2, K3 va K4 korxonalardan olinadigan umumiy foyda eng yuqori bo'lishi lozim.

Faraz qilaylik, K2, K3 va K4 korxonalarga ajratilgan mablag‘ 20 mln. p.b.ga teng bo‘lsin ($s_1=20$). K2 korxonaga 0 yoki 20 mln.p.b.ajratish mumkin ($u_2=0$ yoki $u_2=20$). Agar $u_2=0$ bo‘lsa, K2 foyda olmaydi va $s_2=20$ bo‘lib, mablag‘ K3 va K4 ga taqsimlanadi va bu mablag‘ korxonalarga optimal taqsimlanganda 3-jadvalga ko‘ra uning foydasi $z_3^*=12$ mln. p.b. ga teng bo‘ladi. K2, K3 va K4 korxonaning umumiy foydasi $z_2=0+12=12$ mln. p.b. ga teng bo‘ladi. Agar $u_2=20$ bo‘lsa, K2 10 mln. p.b. ga teng foyda oladi. Unda 2-qadam oxiridagi holat $s_2=0$ bo‘ladi va K3 va K4 foyda olmaydi $z_3^*=0$. K2, K3 va K4 korxonalarning umumiy foydasi $z_2=10+0=10$ mln. p.b. ga teng bo‘ladi. Shunday qilib, K2, K3 va K4 korxonalarga 20 mln.p.b. miqdorida mablag‘ ajratilsa, K2 korxonaga mablag‘ ajratmaslik lozim bo‘ladi, mablag‘ni K3 va K4 ga ajratish maqsadga muvofiq bo‘lib, undagi foyda eng yuqori bo‘ladi. Boshqacha qilib aytganda, $s_1=20$ holatida shartli optimal yechim $u_2^*=0$, $z_2^*=12$ bo‘ladi.

Xuddi shunday mulohazalar yuritib, $s_2=40$ bo‘lganda $u_2^*=20$, $z_2^*=22$ ekanligini, $s_2=60$ bo‘lganda $u_2^*=40$, $z_2^*=30$ ekanligini topish qiyin emas (10.4-jadvalga qarang).

1-qadam. (K1,K2,K3 va K4 korxonalarga mablag‘ ajratish). Barcha hisoblashlar 10.5-jadvalda keltirilgan.

10.5-jadval

s_0	u_1	$f_1(s_0.u_1)$	s_1	z_2^*	z_1	u_1^*	z_1^*
	0	0	60	30	30		
	20	9	40	22	31		
60	40	16	20	12	28	20	31
	60	22	0	0	22		

Bu qadamda boshlang‘ich holat aniq $s_0=60$.

Demak, agar K1 ga 20 mln. p.b. ajratilsa to‘rtta korxonaning umumiy foydasi eng yuqori bo‘lib, bu foyda 31 mln. p.b. ga teng bo‘ladi.

Shartsiz optimallashtirish. Endi topilgan ma’lumotlardan foydalanib, 1-qadamdan boshlab korxonalarga optimal taqsimlanadigan mablag‘larni aniqlaymiz. Birinchi korxonaga $u_1^*=20$ mln. p.b. ajratiladi. K2, K3 va K4 korxonalar uchun 40 mln. p.b. qoladi $s_1=40$. 4-jadvalga ko‘ra ikkinchi korxonaga $u_2^*=20$

mln. p.b. ajratiladi. K3 va K4 korxonalarga 20 mln. p.b. qoladi. 10.3-jadvalga asosan uchinchi korxonaga mablag‘ ajratilmaydi: $u_3^*=0$. To‘rtinchi korxonaga 20 mln. p.b. qoladi ($s_3=20$). Shuning uchun $u_4^*=20$.

Shunday qilib, masalaning optimal yechimi quyidagicha. Birinchi korxonaga 20 mln. p.b., ikkinchi korxonaga 20 mln. p. b., uchinchi korxonaga mablag‘ ajratmaslik va nihoyat to‘rtinchi korxonaga 20 mln. p.b. ajratish lozim. Mablag‘lar shunday ajratilganda umumiy foyda eng yuqori bo‘lib u 31 mln. p.b ga teng, va korxonalardan keladigan foydalar K1 dan 9 mln.p.b., K2 dan 10 mln.p.b., K3 dan 0 mln.p.b. va K4 dan 12 mln. p.b. ga teng.

2-masala. Firmaning ikki (K1, K2) korxonasi bor. Korxonalarning ishlab chiqaradigan mahsulotlari mavsumiy xarakterga ega bo‘lgani uchun olinadigan foyda ham mavsumga qarab o‘zgarib turadi. 10.6-jadvalda firma korxonalarining kvartallardagi foydalari ko‘rsatilgan.

10.6-jadval

Korxonalar	Foyda %			
	1-kvartal	2-kvartal	3-kvartal	4-kvartal
K1	80	50	50	70
K2	40	120	80	40

Har bir kvartal oxirida firma daromadining 20%i aksiyalarga beriladi, 80%i esa korxonalar orasida qayta taqsimlanadi.

Yil boshida ishlab chiqarishga 5 mln. p.b. ajratilgan. Mablag‘ni korxonalarga shunday taqsimlash kerakki, yil davomida aksiyadorlarga beriladigan mablag‘ eng yuqori bo‘lsin.

Bu masalani dinamik dasturlash usuli bilan yechish jarayonida qadam sifatida kvartalni olamiz: birinchi kvartal birinchi qadam, ikkinchi kvartal ikkinchi qadam va h.k. Boshlang‘ich holat $s_0=5$. k-qadamdagi holatni s_{k-1} bilan belgilaymiz. u_k k-qadamda K1ga ajratilgan mablag‘, K2 ga ajratilgan mablag‘ $s_{k-1}-u_k$, $k=1,2,3,4$ ga teng. Maqsad funksiyasi har kvartal oxirida aksiyadorlarga beriladigan mablag‘. Mablag‘ni shunday taqsimlash lozimki, aksiyadorlarga taqsimlanadigan mablag‘ eng yuqori bo‘lsin.

Yechish. Shartli optimallashtirish.

4-qadam. 3-kvartal oxirida s_3 miqdordagi mablag‘ taqsimlanadigan bo‘lsin. Korxonalarga taqsimlanadigan mablag‘ miqdorlari mos ravishda u_4 va s_3-u_4 bo‘lsin. U holda 4-kvartal oxirida korxonalardan keladigan daromad $1,7\,u_4+1,4\,(s_3-u_4)$ bo‘ladi. Bu mablag‘ning 20% aksiyadorlarga to‘lanadi. Shuning uchun 4-kvartal oxirida aksiyadorlarga to‘lanadigan mablag‘ quyidagicha hisoblanadi

$$z_4=0,2(1,7\,u_4+1,4(s_3-u_4))=0,06u_4+0,28s_3.$$

Ravshanki, aksiyadorlarga to‘lanadigan mablag‘ eng yuqori bo‘lishi uchun barcha mablag‘ni K1 korxonaga ajratish lozim: $u_4^*=s_3$. Aksiyadorlarga to‘lanadigan optimal mablag‘ $z_4^*=0,06s_3+0,28s_3=0,34s_3$ ga teng bo‘ladi.

3-qadam (3 va 4-kvartallarda mablag‘ni taqsimlash). 2-kvartal oxirida korxonalar orasida s_2 miqdordagi mablag‘ taqsimlanadigan bo‘lsin. Korxonalarga taqsimlanadigan mablag‘ miqdorlari mos ravishda u_3 va s_2-u_3 bo‘lsin. U holda 3-kvartal oxirida korxonalardan keladigan daromad $1,5\,u_3+1,8\,(s_2-u_3)$ bo‘ladi. Bu mablag‘ning 20% aksiyadorlarga to‘lanadi. Shuning uchun 3 va 4-kvartallar uchun aksiyadorlarga to‘lanadigan mablag‘ quyidagicha aniqlanadi:

$$z_3=0,2(1,5u_3+1,8(s_2-u_3))+z_4^*.$$

$s_3=0,8(1,5u_3+1,8(s_2-u_3))$ bo‘lgani uchun $z_4^*=0,34s_3$ ekanligini inobatga olsak, $z_4^*=0,49s_2-0,08u_3$ kelib chiqadi. Demak,

$$z_3=0,2(1,5u_3+1,8(s_2-u_3))+0,49s_2-0,08u_3=0,85s_2-0,14u_3$$

hosil bo‘ladi. z_3 maksimal bo‘lishi uchun u_3 eng kichik bo‘lishi kerak. Shunday qilib, uchinchi kvartaldagi shartli optimal yechim shundan iboratki, K1 korxonaga mablag‘ ajratmaslik kerak: $u_3^*=0$. Uchinchi va to‘rtinchi qadamdagi shartli optimal samaradorlik $z_3^*=0,85s_2$ bo‘ladi.

2-qadam (2-4 kvartallarda mablag‘ni taqsimlash). 1-kvartal oxirida korxonalar orasida s_1 miqdordagi mablag‘ taqsimlanadigan bo‘lsin. Korxonalarga taqsimlanadigan mablag‘ miqdorlari mos ravishda u_2 va s_1-u_2 bo‘lsin. U holda 2-kvartal oxirida korxonalardan keladigan daromad $1,5\,u_2+2,2\,(s_1-u_2)$ bo‘ladi. Bu mablag‘ning 20% aksiyadorlarga to‘lanadi. Shuning uchun 2-4-

kvartallar uchun aksiyadorlarga to'lanadigan mablag' quyidagicha aniqlanadi:

$$z_2=0,2(1,5u_2+2,2(s_1-u_2))+z_3^*=0,2(1,5u_2+2,2(s_1-u_2))+0,85s_2.$$

$s_2=0,8(1,5u_2+2,2(s_1-u_2)$ bo'lganligi uchun $z_2=1,94s_1-0,62u_2$ bo'ladi. z_2 (aksiyadorlarga to'lanadigan mablag') maksimal bo'lishi uchun u_2 eng kichik bo'lishi kerak. Shunday qilib, ikkinci kvartaldagi shartli optimal yechim shundan iboratki, K1 korxonaga mablag' ajratmaslik kerak: $u_2^*=0$. 2-4 qadamdagi shartli optimal samaradorlik: $z_2^*=1,94s_1$ bo'ladi

1-qadam (1-4 kvartallarda mablag'ni taqsimlash). 1-kvartal boshida korxonalar orasida $s_0=5$ miqdordagi mablag' taqsimlanadi. Korxonalarga taqsimlanadigan mablag' miqdorlari mos ravishda u_1 va s_0-u_1 bo'lsin. U holda 1-kvartal oxirida korxonalardan keladigan daromad $1,8\ u_1+1,4\ (s_0-u_1)$ bo'ladi. Bu mablag'ning 20% aksiyadorlarga to'lanadi. Shuning uchun 1-4-kvartallar uchun aksiyadorlarga to'lanadigan mablag' quyidagicha aniqlanadi:

$$z_1=0,2(1,8u_1+1,4(s_0-u_1))+z_2^*=0,2(1,5u_2+2,2(s_1-u_2))+1,94s_1.$$

$s_1=0,8(1,8u_1+1,4(s_0-u_1)$ bo'lganligi uchun $z_1=2,45s_0+0,7u_1$ bo'ladi. Yil davomida aksiyadorlarga to'lanadigan mablag' (z_1) eng yuqori bo'lishi uchun u_1 mumkin qadar eng yuqori bo'lishi kerak, ya'ni $u_1^*=s_0$ bo'ladi. $s_0=5$ mln. p.b. ga teng bo'lgani uchun 1-kvartalda 1-korxonaga 5 mln.p.b. ajratiladi.

Shu bilan hisoblashning birinchi qismi tugallanadi.

Ikkinchi qism (shartsiz optimallashtirish sikli).

1-qadam. Birinchi kvartal uchun optimal yechim topildi: $u_1^*=5$ (barcha mablag' birinchi korxonaga ajratiladi).

1-kvartal oxirida K1 ning daromadi 1,8x5=9 mln. p.b. ga teng bo'ladi. 1-kvartalda aksiyadorlarga to'lanadigan mablag'ni aniqlaymiz: 0,2x9=1,8 mln. p.b.. 2-kvartal boshida korxonalarga ajratiladigan mablag' miqdori $s_1=0,8x9=7,2$ mln. p.b. ga teng bo'ladi.

2-qadam (2-kvartalda mablag'ni taqsimlash). Masalani shartli optimallashtirish qismida shu narsa aniqlandiki barcha mablag'ni K2 ga ajratish maqsadga muvofiqligi ko'rsatilgan edi: $u_2^*=0$.

2-kvartal oxirida K2 ning daromadi 2,2x7,2=15,84 mln. p.b. ga teng bo'ladi. 2-kvartalda aksiyadorlarga ajratiladigan mablag' miqdori 0,2x15,84=3,17 mln. p.b. ga teng bo'ladi. 3-kvartal boshidagi taqsimlanadigan mablag' miqdori s_2=0,8x15,84=12,67 mln. p.b. ga teng bo'ladi.

3-qadam (3-kvartalda mablag'ni taqsimlash). Masalani shartli optimallashtirish qismida shu narsa aniqlandiki, barcha mablag'ni K2 ga ajratish maqsadga muvofiqligi ko'rsatilgan edi: $u_3^*=0$.

3-kvartal oxirida K2 ning daromadi 1,8x12,67=22,81 mln. p.b. ga teng bo'ladi. 3-kvartalda aksiyadorlarga ajratiladigan mablag' miqdori 0,2x22,81=4,56 mln. p.b. ga teng bo'ladi. 4-kvartal boshidagi taqsimlanadigan mablag' miqdori s_3=0,8x22,81=18,25 mln. p.b. ga teng bo'ladi.

4-qadam (4-kvartalda mablag'ni taqsimlash). Masalani shartli optimallashtirish qismida shu narsa aniqlandiki, barcha mablag'ni K1 ga ajratish maqsadga muvofiqligi ko'rsatilgan edi: u_4^*=18,25.

4-kvartal oxirida K1 ning daromadi 1,7x18,25=31,03 mln. p.b. ga teng bo'ladi. 4-kvartalda aksiyadorlarga ajratiladigan mablag' miqdori 0,2x31,03=6,21 mln. p.b. ga teng bo'ladi.

Shunday qilib masalaning yechimi quyidagicha. 1-kvartalda 1-korxonaga 5 mln. p.b., 2-kvartalda 2-korxonaga 7,2 mln. p.b., 3-kvartalda 2-korxonaga 12,67 mln. p.b., 4-kvartalda 1-korxonaga 18,25 mln. p.b. ajratiladi. Kvartallar bo'yicha aksiyadorlarga ajratiladigan mablag' miqdorlari mos ravishda 1,8; 3,17; 4,56 va 6,21 mln. p.b. ga teng. Yil davomida aksiyadorlarga beriladigan mablag' 15,74 mln. p.b. ga teng.

3-masala. Yuqorida keltirilgan masalalarda maqsad funksiyasining qiymatlari jadval ko'rinishida keltirilgan edi. Endi funksiya analitik ko'rinishda berilgan holni ko'raylik. Ikki ishlab chiqarish tarmoqlarining faoliyati n yilga rejalashtirilmoqda. Boshlang'ich mablag' s_0. 1-tarmoqqa yil boshida x miqdorda ajratilgan mablag' yil oxirida $f_1(x)$ foyda keltirib, $q_1(x)$ $<x$ miqdorda qaytadi. 2-tarmoq uchun mos ravishda $f_2(x)$ va $q_2(x)$ $(q_2(x)<x)$ ga teng. Yil oxirida barcha qaytgan mablag' 1-, 2- tarmoqlar orasida qayta taqsimlanadi. Yangi mablag' kiritilmaydi va foyda taqsimlanmaydi.

s_0 miqdordagi mablag'ni n yilga shunday taqsimlash kerakki ikki tarmoqning n yilda keladigan umumiy foydasi eng yuqori bo‘lsin. Masalaning *a*) dinamik dasturlash modelini qurishni va b) masalani $s_0=10000$, $n=4$, $f_1(x)=0{,}6x$, $q_1(x)=0{,}7x$, $f_2(x)=0{,}5x$, $q_2(x)=0{,}8x$ bo‘lganda yechishni ko‘raylik.

Yechish. a) Masalani qadamlarga bo‘lamiz. Har qadam bir yilga teng deb olamiz. *k*-yil boshidagi mablag‘ miqdorini s_{k-1} $(k=1,2,\dots,n)$ bilan belgilaymiz. u_k 1-tarmoqqa ajratilgan mablag‘ bo‘lsa, $s_{k-1}-u_k$ 2-tarmoqqa ajratilgan mablag‘ bo‘ladi. *k*-yil oxiridagi holat tenglamasi

$$s_k=q_1(u_k)+q_2(s_{k-1}-u_k) \tag{10.9}$$

ko‘rinishda bo‘lib, k-yil oxiridagi qaytgan mablag‘ni ifodalaydi. k-yil oxiridagi 2 tarmoqdan keladigan foyda

$$f_1(u_k)+f_2(s_{k-1}-u_k) \tag{10.10}$$

ko‘rinishda bo‘ladi. n yil davomidagi umumiy foyda

$$z=\sum_{k=1}^{n}\{f_1(u_k)+f_2(s_{k-1}-u_k)\}$$

ko‘rinishda ifodalanadi.

$z_k^*(s_{k-1})$ orqali k-yildan n-yillardagi optimal foydani belgilaymiz. U holda $z_{max}=z_1^*(s_0)$ bo‘ladi.

Bellman tenglamalari quyidagi ko‘rinishda bo‘ladi:

$$z_n^*(s_{n-1})=\max_{0\le u_n\le s_{n-1}}\{f_1(u_n)+f_2(s_{n-1}-u_n)\} \tag{10.11}$$

$$z_k^*(s_{k-1})=\max_{0\le u_k\le s_{k-1}}\{f_1(u_k)+f_2(s_{k-1}-u_n)+z_{k+1}^*(s_k)\} \tag{10.12}$$

$(k=n-1,n-2,\dots,1).$

b) Bellman tenglamalaridan foydalanib, konkret masalaning yechishni ko‘ramiz.

(10.9) holat tenglamasi berilganlarga ko‘ra quyidagicha bo‘ladi:

$$s_k=0{,}7u_k+0{,}8(s_{k-1}-u_k)=0{,}8s_{k-1}-0{,}1u_k \tag{10.13}$$

k-qadamdagi maqsad funksiyasi (10.10) ko‘rinishi quyidagicha bo‘ladi:

$$0{,}6u_k+0{,}5(s_{k-1}-u_k)=0{,}1u_k+0{,}5s_{k-1}.$$

Masalaning maqsad funksiyasi

$$z=\sum_{k=1}^{4} \{0,5s_{k-1}+0,1u_k\} \qquad (10.14)$$

ko'rinishda bo'ladi.

Bellman tenglamalarining ko'rinishi:

$$Z_4^*(s_3)=\max_{0\le u_4\le s_3} \{0,5s_3-+0,1u_4)\} \qquad (10.15)$$

$$z_k^*(s_{k-1})=\max_{0\le u_k\le s_{k-1}} \{0,1u_k+0,5s_{k-1}+z_{k+1}^*(s_k)\} \qquad (10.16)$$

1-qism (shartli optimallashtirish)

4-qadam. (10.15) tenglamadan foydalanamiz. $z=0,5s_3+0,1u_4$ chiziqli funksiya $[0;s_3]$ oraliqda eng katta qiymatga $u_4=s_3$ bo'lganda erishadi. Shuning uchun $z_4^*(s_3)=0,6s_3$, $x_4^*=s_3$ bo'ladi.

3-qadam. (10.16) tenglama

$$z_3^*(s_2)=\max_{0\le u_3\le s_2} \{0,1u_3+0,5s_2+0,6s_3\}$$

ko'rinishga keladi.

(10.13) holat tenglamasidan kelib chiqadigan $s_3=0,8s_2-0,1u_3$ ifodani oxirgi tenglamaga qo'ysak,

$$z_3^*(s_2)=\max_{0\le u_3\le s_2} \{0,1u_3+0,5s_2+0,6(0,8s_2-0,1u_3\}$$

yoki

$$z_3^*(s_2)=\max_{0\le u_3\le s_2} \{0,04u_3+0,98s_2\}$$

tenglamaga kelamiz. Bu funksiya maksimumga $u_3=s_2$ bo'lganda erishadi, ya'ni $z_3^*(s_2)=1,02s_2$, $u_3^*=s_2$ bo'ladi.

2-qadam. Holat tenglamasidan $s_2=0,8s_1-0,1u_2$ kelib chiqadi. (10.16) tenglama k=2 uchun

$$z_2^*(s_1)=\max_{0\le u_2\le s_1} \{1,316s_1-0,002u_2\}$$

ko'rinishda bo'ladi. Bu funksiya maksimumga $u_2=0$ bo'lganda erishadi. Shuning uchun $z_2^*(s_2)=1,316s_1$, $u_2^*=0$ bo'ladi.

1-qadam. Holat tenglamasidan $s_1=0,8s_0-0,1u_1$ ekanligi e'tiborga olib, (10.16) tenglamani $k=1$ uchun yozsak,

$$z_1^*(s_0)=\max_{0\le u_1\le s_0} \{1,55286s_0-0,0316u_1\}$$

tenglamaga ega bo'lamiz. Bundan $z_1^*(s_0)=1,5528s_0$, $u_1^*=0$ ekanligini topish qiyin emas.

Shunday qilib, masalaning shartli optimallik qismi tugallanadi.

Ikkinchi qism (*shartsiz optimallashtirish sikli*). $s_0=10000$ bo'lgani uchun $z_1^*(s_0)=1,5528s_0$, dan $z_{max}=15528$ ga teng bo'ladi va $u_1^*=0$, (barcha mablag' 2-tarmoqqa ajratiladi). Birinchi yil oxiridagi holat $s_1^*=0,8x10000-0,1x0=8000$ bo'ladi. Shartli optimallashtirishning 2-qadamidagi xulosaga ko'ra, $u_2^*=0$ bo'ladi. Barcha mablag' 2-tarmoqqa ajratiladi.

2-yil oxiridagi holat $s_2^*=0,8x8000-0,1x0=6400$ bo'ladi. Shartli optimallashtirishning 3-qadamidagi xulosaga ko'ra, $u_3^*=6400$ bo'ladi. Barcha mablag' 1-tarmoqqa ajratiladi.

3-yil oxiridagi holat $s_3^*=0,8x6400-0,1x6400=4480$ bo'ladi. Shartli optimallashtirishning 4-qadamidagi xulosaga ko'ra, $u_4^*=4480$ bo'ladi. Barcha mablag' 1-tarmoqqa ajratiladi.

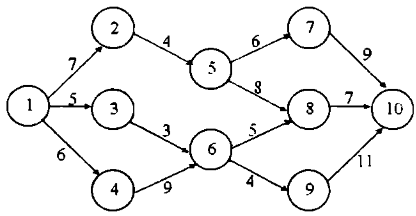
Shunday qilib, 4 yil davomidagi tarmoqlardan keladigan optimal foyda 15528 p.b. ga teng, shu bilan birga 1-taqrmoqqa yillar bo'yicha mos ravishda 0; 0; 6400 va 4480 p.b. miqdorda mablag' ajratiladi. Bu ko'rsatkich 2-tarmoq uchun esa mos ravishda 10000; 8000; 0; va 0 p.b. ga teng.

10.3. Yuklarni eltishning optimal marshrutini aniqlash

Bu mavzuda dinamik dasturlash masalalarida biri bo'lgan optimal marshrutni aniqlash bilan tanishamiz.

Dinamik dasturlashni eng optimal masofani aniqlashda uchun ham qo'llash mumkin. Bunday masalalarning yechimi transport masalasi uchun boshlang'ich ma'lumotni beradi.

Transport tarmog'i 10 ta tugundan iborat bo'lib, ularning ba'zilari o'zaro bog'langan bo'lsin. 10.2-rasmda yo'llar tarmog'i va birlik tovarni eltishdagi xarajat keltirilgan.



10.2-rasm

Maqsad eng kam transport xarajatlariga olib keladigan marshrutni aniqlashdan iborat. Albatta masalani barcha marshrutlarni hisoblash yordamida amalga oshirsa ham bo'ladi. Agar tarmoqdagi tugun nuqtalar ko'p bo'lganda bu usul samarali bo'lmaydi.

Masalani dinamik dasturlash usuli bilan yechish uchun masalani bosqichlarga bo'lamiz: 1-tugun nuqta birinchi, 2,3,4 tugun nuqtalar ikkinchi, 5,6 –uchunchi, 7,8,9 –to'rtinchi.

Quyidagi belgilashlar kiritamiz.

k – bosqich raqami ($k=1,2,3,4$)

i – tovarni jo'natadigan tugun nuqta ($i=1,2,...,9$);

j – tovarni qabul qiladigan tugun nuqta ($j=2,3,4...10$);

c_{ij} – i-dan j-ga o'tishdagi xarajat.

$F_k(i)$ – k-bosqichda i-tugundan oxirgi tugungacha tovarni eltishdagi minimal xarajat.

K – qadamdagi i-tugun raqami tizim holatini ifodalaydi. $k+1$ bosqichdagi j tugun nuqta raqami k-bosqichning boshqaruv o'zgaruvchisi bo'ladi.

4-bosqichda Bellman funksiyasi to'rtinchi bosqichdagi tugun nuqtalardan 10-tugun nuqtaga tovarni eltishdagi xarajat bo'ladi: $F_4(i)=c_{i,10}$. Keyingi bosqichlar uchun Bellman tenglamasi quyidagi ko'rinishda bo'ladi:

$$F_k(i)=\min_j \{c_{ij}+F_{k+1}(j)\} \qquad (10.17)$$

(10.17) ni minimumga olib keluvchi $j=j^*$ raqam i dan oxirgi tugunga keluvchi optimal tugunni bildiradi. $F_1(1)$ funksiyaning qiymati 1-tugundan 10-tugunga o'tishdagi minimal xarajatni ifodalaydi.

10.2-rasmda keltirilgan masalani yechamiz.

1-bosqich. *Shartli optimallashtirish.*

4-qadam. $k=4$, $F_4(i)=c_{i,10}$.

4-qadamda 10 tugunga tovarlar 7,8 va 9 tugunlardan kelishi mumkin (10.7-jadval).

10.7-jadval

i / j	10	$F_4(i)$	J^*
7	9	9	10
8	7	7	10
9	11	11	10

3-qadam. $k=3$. Bellman tenglamasi 3-qadamda quyidagicha bo'ladi:

$$F_3(i)=\min_j \{c_{ij}+F_4(j)\}$$

3-qadamdagi hisoblash ishlari 10.8-jadvalda berilgan.

10.8-jadval

$j \backslash i$	7	8	9	$F_3(i)$	J^*
5	6 + 9	8 + 7	–	15	7; 8
6	–	5+7	4 + 11	12	8

2-qadam. $k=2$. $F_2(i)=\min_j \{c_{ij}+F_3(j)\}$. 2-qadamdagi hisoblash ishlari 10.9-jadvalda berilgan.

10.9-jadval

$j \backslash i$	5	6	$F_2(i)$	j^*
2	4 +15	–	19	5
3	–	3 +12	15	6
4	–	9 +12	21	6

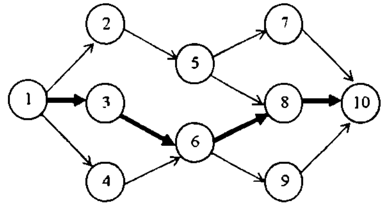
1-qadam. $k=1$. $F_1(i)=\min_j \{c_{ij}+F_2(j)\}$. Hisoblash ishlari 10.10-jadvalda aks etgan.

10.10-jadval

$j \backslash i$	2	3	4	$F_1(i)$	j^*
1	7 + 19	5 + 15	6 + 21	20	3

2-bosqich. *Shartsiz optimallashtirish.*

Shunday qilib, 1-tugundan 10-tugungacha bo'lgan eng kam xarajat $F_4(1)=20$ ga teng. Bunday natijaga 1 tugundan 3-tugunga o'tishda erishiladi. 10.9-jadvaldagi natijaga ko'ra, 3-tugundan 6-tugunga, so'ng 8-tugunga (10.8-jadval) va nihoyat 10-tugunga o'tiladi. Shunday qilib, optimal yo'l $1 \to 3 \to 6 \to 8 \to 10$ bo'ladi (10.3-rasmda optimal yo'l ajratib ko'rsatilgan).



10.3-rasm

10.4. Optimal yuklash masalasi

Transport vositalarini optimal yuklash masalasi ham dinamik dasturlash masalalari turkumiga kiradi. Bu mavzu shu turdagi masalalarga bag'ishlangan.

Biror samolyot (avtoulov, kema va h.k.) ga yuklarni optimal yuklash masalasini ko'raylik. Samolyotning maksimal og'irlikdagi yuklarni ko'tarishi chegaralangan. Har bir ortilgan yuk muayyan foyda keltiradi. Yuklarni samolyotga shunday joylashtirish lozimki, unda umumiy foyda eng yuqori bo'lsin.

Quyidagi belgilashlarni kiritamiz. Samolyotning maksimal yuk ko'tara olishi W bo'lsin. Samolyotga n-turdagi tovarlarni joylash lozim. m_i – i-nav tovar soni, r_i – i-nav tovarning birligidan keladigan foyda, w_i – uning og'irligi bo'lsin. Natijada biz butun sonli chiziqli dasturlash masalasiga kelamiz.

$$w_1m_1+w_2m_2+\ldots+w_nm_n \le W$$
$$m_1,m_2,\ldots,m_n \ge 0 \text{ va butun}$$

shartlarni qanoatlantiruvchi $z=r_1m_1+r_2m_2+\ldots+r_nm_n$ funksiyaga maksimal qiymat beradigan $m_1,m_2,\ldots,m_n$ larni topish kerak.

Bu masalani dinamik dasturlash usuli bilan yechishni ko'ramiz.

Har bir i-bosqich i-nav tovarga mos qo'yiladi. i-bosqichdagi variantlar tovarlar soni m_i bilan bog'lanadi. i-nav tovarni yuklashdan keladigan foyda r_im_i bo'ladi. m_i 0 dan $[W/w_i]$ gacha o'zgaradi (bu yerda [...] belgi sonning butun qismi).

i-bosqichdagi x_i holat $i,\ i+1,\ldots,n$ bosqichlarda yuklangan tovarlarning umumiy og'irligi. Barcha bosqichlarni o'zaro bog'lovchi omil yuk miqdorlarining chegaralanganidir.

x_i holatdagi $i,\ i+1,\ldots,n$ bosqichlardagi umumiy maksimal foyda $f_i(x_i)$ bo'lsin. Bellman tenglamasini keltiramiz.

$$f_i(x_i)=max\{r_i m_i+f_{i+1}(x_{i+1})\},\ i=1,2,...,n.$$

Bu yerda maksimum $m_i=0,1,2,...,[W/w_i]$; $x_i=0,1,2,...\ W$ lar bo‘yicha olinadi.

Belgilashga ko‘ra x_i-x_{i+1} i-bosqichda yuklangan tovar og‘irligiga teng, ya’ni x_i-$x_{i+1}=w_i m_i$ yoki $x_{i+1}=x_i-w_i m_i$. demak, yuqoridagi formula quyidagi ko‘rinishga keladi.

$$f_i(x_i)=max\{r_i m_i+f_{i+1}(x_i-w_i m_i)\},\ i=1,2,...,n.$$

Bu yerda ham maksimum $m_i=0,1,2,...,[W/w_i]$; $x_i=0,1,2,...\ W$ lar bo‘yicha olinadi.

Misol. 4 tonna yuk ko‘tara oladigan samolyotga uch turdagi tovarlar yuklanadi. Ularning tavsiflari 10.11-jadvalda keltirilgan. Yuqori foyda olish uchun samolyotni qanday tovarlar bilan yuklash kerak?

10.11-jadval

Tovar raqami	w_i (tonna)	r_i (ming dollar)
1	2	31
2	3	47
3	1	14

1-qadam. 3-turdagi birlik yukning og‘irligi 1 tonna bo‘lgani uchun bu turdagi yuklardan oshig‘i bilan [4/1]=4 birlik yuklash mumkin. Ya’ni x_3 ning qiymatlari 0, 1, 2, 3, 4 bo‘lishi mumkin. m_3 ning qiymati $w_3 m_3 \leq x_3$ shartni qanoatlantirishi kerak. Quyidagi tenglamalar 3-qadamning asosiy tenglamalaridir.

$$f_3(x_3)=max\{14m_3\},\qquad max\{m_3\}=[4/1]=4.$$

1-qadamga tegishli bo‘lgan barcha hisoblashlar 10.12-jadvalda keltirilgan

10.12-jadval

	$14m_3$					Optimal yechim	
x_3	$m_3=0$	$m_3=1$	$m_3=2$	$m_3=3$	$m_3=4$	$f_3(x_3)$	m_3^*
0	0	-	-	-	-	0	0
1	0	14	-	-	-	14	1
2	0	14	28	-	-	28	2
3	0	14	28	42	-	42	3
4	0	14	28	42	56	56	4

2-qadam. 2-qadamdagi hisoblash formulalari:

$f_2(x_2)=max\{47m_2+f_3(x_2-3m_2)\}, \quad max\{m_2\}=[4/3]=1.$

Hisoblash natijalari 10.13-jadvalda berilgan.

10.13-jadval

	$47m_2+f_3(x_2-3m_2)$		Optimal yechim	
x_2	$m_2=0$	$m_2=1$	$f_2(x_2)$	m_2^*
0	0+0=0	-	0	0
1	0+14=14	-	14	0
2	0+28=28	-	28	0
3	0+42=42	47+0=47	47	1
4	0+56=56	47+14=61	61	1

3-qadam. 3-qadamdagi hisoblash formulalari:

$f_1(x_1)=max\{31m_1+f_2(x_1-2m_1)\}, \quad max\{m_1\}=[4/2]=2.$

Hisoblash natijalari 10.14-jadvalda berilgan.

10.14-jadval

	$31m_1+f_2(x_1-2m_1)$			Optimal yechim	
x_1	$m_1=0$	$m_1=1$	$m_1=2$	$f_1(x_1)$	m_1^*
0	0+0=0	-	-	0	0
1	0+14=14	-	-	14	0
2	0+28=28	31+0=31	-	31	1
3	0+47=47	31+14=45	-	47	0
4	0+61=61	31+28=59	62+0=62	62	2

2-bosqich. *Shartsiz optimallashtirish.* 7-jadvalga ko'ra optimal yechim $m_1^*=2$ bo'ladi. Birinchi turdagi yuklardan 2 birligi yuklanadi. U holda

$$x_2=x_1-2m_1^*=4-2*2=0$$

bo'ladi. 10.13-jadvalga ko'ra $x_2=0$ da $m_2^*=0$ bo'ladi. Bundan $x_3=x_2-3m_2^*=0-2*0=0$. 5-jadvalga ko'ra $x_3=0$ da $m_3^*=0$ ekanligi kelib chiqadi. Shunday qilib, optimal yechim $m_1^*=2$, $m_2^*=0$ va $m_3^*=0$ bo'lib, umumiy foyda 62000 dollardan iborat.

10.5. Dastgohlarni yangilash masalasi

Korxonadagi dastgohlarni o'z vaqtida almashtirish masalasi ham dinamik dasturlash masalaridan biridir. Bu yerda shu tarzdagi masalalarning yechish bilan shug'ullanamiz.

Eskirgan dastgohlarni (avtoulov, dastgoh, televizor va b.) o'z vaqtida yangilash asosiy iqtisodiy masalalardan biridir. Dastgohlarning eskirishi natijasida ularning ta'mir va foydalanishdagi xarajatlari yuqori bo'lib ishlab chiqarish samaradorligi kamayib ketadi. Asosiy masala eskirgan dastgohlarni optimal almashtirishdan iborat. Optimallik mezonlariga dastgohlarni ishlatilishda maksimal daromad yoki ularning ishlatilishidagi minimal xarajat tushuniladi.

Faraz qilaylik, dastgohlarni n yil davrida ishlatish ko'zda tutilgan bo'lsin. Dastgohlarning eskirishi oqibatida ulardan keladigan daromad $r(t)$ (t – dastgohning yoshi) kamayib boradi. Har bir yangi yil boshida eskirgan dastgohlarni $s(t)$ narxda sotib yangisini p pul birligidagi narxga sotib olish imkoniyati bor bo'lsin. Dastgohning yoshi deb uning yillar hisobidagi foydalanish davriga aytiladi. Foydalanish boshida dastgohning yoshi t_0 ga teng. n yil mobaynida umumiy daromad eng yuqori bo'lishi uchun dastgohni almashtirishning optimal rejasi qanday bo'lishi kerak?

Masalani yechishdagi boshlang'ich ma'lumotlar: $r(t)$, $s(t)$, p va t_0 bo'ladi. Demak, bizga quyidagi 10.15-jadval ma'lum.

10.15-jadval

t	0	1	...	n
r	r(0)	r(1)		r(n)
s	s(0)	s(1)		s(n)

Dastgohlarni almashtirishning optimal strategiyasini topishning dinamik modelini qurishda har yilni qadamga mos qo'yamiz. Dinamik jarayon n qadamdan iborat bo'ladi.

Jarayonni ifodalovchi sistemaning k-qadamdagi holati dastgohning yoshiga teng: t. k-qadamda t ga quyidagi chegaralar qo'yiladi.

$$1 \le t \le t_0+k-1 \qquad (10.18)$$

(10.18) tengsizlik shuni ko'rsatadiki, agar dastgohni almashtirish $k-1$ yilda amalga oshirilgan bo'lsa, uning yoshi 1 dan kichik bo'lmaydi va k-1 yil davomidagi foydalanish va dastgohning foydalanishdan oldingi yoshi t_0 yig'indisidan katta bo'lmaydi.

k-qadamdagi boshqaruvni ifodalovchi o'zgaruvchi mantiqiy o'zgaruvchidan iborat:

$x_k(t)=S$ (agar dastgoh saqlansa), $x_k(t)=A$ (agar dastgoh almashtirilsa).

Agar t dastgohning yoshi t bo'lsa, $F_k(t)$ Bellman funksiyasi $k, k+1, \ldots, n$ yillardagi dastgohning maksimal daromadini bildiradi. Boshqaruv mazmuniga qarab sistema yangi holatga o'tadi. Masalan, k-qadamda dastgoh saqlansa, uning yoshi $t+1$ ga teng, sistema holati $t+1$ bo'ladi. Dastgoh almashtirilganda esa sistemaning $k+1$ qadam boshida holati $t=1$ yilga teng bo'ladi.

Har bir yil boshida dastgoh saqlansa, bu yil uchun daromad $r(t)$ bo'ladi. $k+1$- yil boshidan n yil oxirigacha bo'lgan maksimal daromad $F_{k+1}(t+1)$ bo'ladi. Agar k-yil boshida dastgoh almashtirilsa, eskisi $s(t)$ narxda sotilib, yangisi p narxda xarid qilinadi va uning k-yildagi daromadi $r(0)$ bo'ladi. Keyingi yilning boshigacha dastgohning yoshi 1 yilga teng bo'ladi va $k+1$ yildan n-yilga qadar davr mobaynidagi mumkin bo'lgan maksimal daromad $F_{k+1}(1)$ ga teng bo'ladi. Shunday qilib, Bellman tenglamasi

$$F_k(t) = \max\begin{cases} r(t) + F_{k+1}(t+1) & (S) \\ s(t) - p + r(0) + F_{k+1}(1) & (A) \end{cases} \tag{10.19}$$

$F_k(t)$ funksiyani (10.19) formula bo'yicha hisoblash $1 \le t \le t_0+k-1$ shartni qanoatlantiruvchi t lar uchun amalga oshiriladi.

Oxirgi qadam uchun (10.19) formula quyidagicha bo'ladi:

$$F_n(t) = \max\begin{cases} r(t) & (S) \\ s(t) - p + r(0) & (A) \end{cases} \tag{10.20}$$

$F_n(t), F_{n-1}(t), F_{n-2}(t), \ldots, F_1(t)$ funksiyaning qiymatlari barcha yillardagi mumkin bo'lgan daromadni beradi. Shartsiz optimallashtirish bosqichida qaysi yilda dastgohni almashtirish lozimligini aniqlaymiz.

Misol. Agar yangi dastgoh narxi $p=13$ birlik bo'lib, 10.16-jadvaldagi ma'lumotlarga ko'ra 6 yil mobaynidagi dastgohdan foydalanishning optimal strategiyasini aniqlang (foydalanish boshidagi dastgohning yoshi 1 yil: $t_0=1$).

10.16-jadval

t	0	1	2	3	4	5	6
r(t)	8	7	7	6	6	5	5
s(t)	12	10	8	8	7	6	4

Yechish.
1-bosqich. *Shartli optimallashtirish.*
6-qadam. Bu hol uchun sistemaning holatlari $t=1,2,...,6$ bo'ladi.
(11) –funksional tenglama quyidagi ko'rinishda bo'ladi.

$$F_6(t)=\max\begin{cases} r(t) & (S) \\ s(t)-p+r(0) & (A) \end{cases}$$

Bu formulaga ko'ra hisoblashlarni amalga oshiramiz.

$$F_6(1)=\max\begin{cases} 7 \\ 10-13+8 \end{cases} =7\ (S)$$

$$F_6(2)=\max\begin{cases} 7 \\ 8-13+8 \end{cases} =7\ (S)$$

$$F_6(3)=\max\begin{cases} 6 \\ 8-13+8 \end{cases} =6\ (S)$$

$$F_6(4)=\max\begin{cases} 6 \\ 7-13+8 \end{cases} =6\ (S)$$

$$F_6(5)=\max\begin{cases} 5 \\ 6-13+8 \end{cases} =5\ (S)$$

$$F_6(6)=\max\begin{cases} 5 \\ 4-13+8 \end{cases} =5\ (S)$$

5-qadam. Bu qadamdagi sistemaning holatlari $t=1,2,...,5$ bo'ladi.
Hisoblash formulasining ko'rinishi quyidagicha bo'ladi:

$$F_5(t)=\max\begin{cases} r(t)+F_6(t+1) & (S) \\ s(t)-p+r(0)+F_6(1) & (A) \end{cases}$$

Bu formulaga ko‘ra hisoblashlarni amalga oshiramiz:

$$F_5(1)=\max\begin{cases}7+7\\10-13+8+7\end{cases}=14\ (S)$$

$$F_5(2)=\max\begin{cases}7+6\\8-13+8+7\end{cases}=13\ (S)$$

$$F_5(3)=\max\begin{cases}6+6\\8-13+8+7\end{cases}=12\ (S)$$

$$F_5(4)=\max\begin{cases}6+5\\7-13+8+7\end{cases}=11\ (S)$$

$$F_5(5)=\max\begin{cases}5+5\\6-13+8+7\end{cases}=11\ (S)$$

4-qadam. Bu qadamdagi hisoblashlar *(t=1,2,3,4)*:

$$F_4(t)=\max\begin{cases}r(t)+F_5(t+1) & (S)\\ s(t)-p+r(0)+F_5(1) & (A)\end{cases}$$

$$F_4(1)=\max\begin{cases}7+13\\10-13+8+14\end{cases}=20\ (S)$$

$$F_4(2)=\max\begin{cases}7+12\\8-13+8+14\end{cases}=19\ (S)$$

$$F_4(3)=\max\begin{cases}6+11\\8-13+8+14\end{cases}=17\ (S\ yoki\ A)$$

$$F_4(4)=\max\begin{cases}6+10\\7-13+8+14\end{cases}=16\ (S\ yoki\ A)$$

3-qadam.

$$F_3(t)=\max\begin{cases}r(t)+F_4(t+1) & (S)\\ s(t)-p+r(0)+F_4(1) & (A)\end{cases}$$

$$F_3(1)=\max\begin{cases}7+19\\10-13+8+20\end{cases}=26\ (S)$$

$$F_3(2)=\max\begin{cases}7+17\\8-13+8+20\end{cases}=24\ (S)$$

$$F_3(3)=\max\begin{cases}6+16\\8-13+8+20\end{cases}=23\ (A)$$

2-qadam.

$$F_2(t)=\max\begin{cases}r(t)+F_3(t+1) & (S)\\ s(t)-p+r(0)+F_3(1) & (A)\end{cases}$$

$$F_2(1) = \max\begin{cases} 7+24 \\ 10-13+8+26 \end{cases} = 31\ (S\ yoki\ A)$$

$$F_2(2) = \max\begin{cases} 7+23 \\ 8-13+8+26 \end{cases} = 30\ (S)$$

1-qadam.

$$F_1(t) = \max\begin{cases} r(t)+F_2(t+1) & (S) \\ s(t)-p+r(0)+F_2(1) & (A) \end{cases}$$

$$F_1(1) = \max\begin{cases} 7+30 \\ 10-13+8+31 \end{cases} = 30\ (S)$$

$F_k(t)$ funksiyasining qiymatlari 10.17-jadvalda keltirilgan *(k –* ishlatilish yili, *t* – dastgohning yoshi).

10.17-jadval

	t=1	t=2	t=3	t=4	t=5	t=6
k=1	37					
k=2	31	30				
k=3	26	24	23			
k=4	20	19	17			
k=5	14	13	12	11	10	
k=6	7	7	6	6	5	5

10.17-jadvalda dastgohni almashtirishga mos kelgan qiymat ajratib ko‘rsatilgan.

2-bosqich. Shartsiz optimallashtirish.

Shartsiz optimallashtirish 1-qadamdan ($k=1$) boshlanadi. 1 va 6-yillar mobaynidagi eng katta daromad $F_1(1)=37$ birlikka teng. Bu qiymatga 1-yili dastgoh almashtirilmaganda erishiladi. Ikkinchi yil boshida dastgohning yoshi bir birlikka oshadi: $t_2=t_1+1=2$ ga teng bo‘ladi. $k=2$ da optimal variant $x_2(2)=S$ bo‘ladi, ya’ni 2 va 6- yillar mobaynidagi maksimal daromad dastgohni saqlaganda amalga oshadi. 3-yil boshida dastgohning yoshi birga ko‘payadi: $t_3=t_2+1=3$. Optimal boshqaruv $x_3(3)=A$ bo‘lib, qolgan yillar uchun eng yuqori daromad olish uchun dastgohni almashtirish lozim bo‘ladi. 4-yil boshida ($k=4$) dastgohning yoshi $t_4=1$ bo‘ladi. Optimal boshqaruv $x_4(1)=S$ bo‘ladi. Keyingi yillar uchun natijalar quyidagicha bo‘ladi:

$$k=5, \quad t_5=t_4+1=2, \qquad x_5(2)=S.$$
$$k=6, \quad t_6=t_5+1=3, \qquad x_6(3)=S.$$

Shunday qilib, 6 yil mobaynida dastgohni bir marta 3-yil boshida almashtirish maqsadga muvofiq.

Tayanch iboralar

Dinamik dasturlash, Bellman tenglamasi, mablag'ni optimal taqsimlash, optimal marshrutni aniqlash, optimal yuklash masalasi, dastgohlarni yangilash.

Savollar

1. Qanday masalalar dinamik dasturlash masalalari turkumiga kiradi?
2. Bellman tenglamasi qanday tenglama?
3. Mablag'ni optimal taqsimlash qanday hal qilinadi?
4. Dinamik dasturlash yordamida optimal marshrutni aniqlash qanday hal qilinadi?
5. Optimal yuklash masalasi qanday masala?
6. Optimal yuklash masalasi qanday yechiladi?
7. Dasgohlarni almashtirish qanday qo'yiladi?
8. Dastgohlarni almashtirish masalasini yechish jarayoni qanday hal qilinadi?

Mashqlar

10.1. Uch korxonaga $5 mln. mablag' ajratilgan. Korxonalarga ajratiladigan mablag'lar $1 mln. ga karrali. Korxonalarga ajratilgan mablag'lardan keladigan daromad 10.18-jadvalda berilgan.

10.18-jadval

x(mln.dollar)	K1	K2	K3
0	0	0	0
1	2.2	2	2,8
2	3	3,2	5,4
3	4,1	4,8	6,4
4	5,2	6,2	6,6
5	5,9	6,4	6,9

Mablag‘ korxonalar orasida qanday taqsimlanganda umumiy daromad eng yuqori bo‘ladi?

10.2.7 ta paxta terish mashinasini 5 ta paxta terish xo‘jaligiga tarqatish lozim. Har bir xo‘jalikning paxta terish mashinalari bilan ta’minlanganda paxta terish mavsumiga tayyorgarlik darajasi $f_i(u)$ funksiya orqali berilgan (u – paxta terish mashinalar soni) va 10.19-jadvalda keltirilgan.

10.19-jadval

u	$f_1(u)$	$f_1(u)$	$f_1(u)$	$f_1(u)$	$f_1(u)$
0	0,74	0,85	0,90	0,88	0,70
1	0,81	0,90	0,92	0,91	0,76
2	0,85	0,93	0,93	0,92	0,80
3	0,90	0,94	0,94	0,93	0,85
4	0,92	0,95	0,95	0,94	0,88
5	0,93	0,96	0,96	0,95	0,91
6	0,94	0,97	0,96	0,95	0,93
7	0,95	0,97	0,96	0,95	0,94

Paxta terish mavsumidagi umumiy tayyorgarlik eng yuqori bo‘lishi uchun paxta terish mashinalarini qaysi xo‘jaliklarga tarqatish kerak?

10.3. Ikki ishlab chiqarish tarmog‘iga 1400 p.b. ajratilgan.To‘rt yil davomida daromad eng yuqori bo‘lishi uchun bu mablag‘ni tarmoqlar orasida qanday taqsimlash lozim? 1-tarmoqqa yil boshida x miqdorda ajratilgan mablag‘ yil oxirida $f_1(x)=3x$ daromad keltirib $q_1(x)=0,5x$ miqdorda qaytadi. 2-tarmoq uchun mos ravishda $f_2(x)=4x$ va $q_2(x)=0,3x$ ga teng. Yil oxirida barcha qaytgan mablag‘ 1, 2-tarmoqlar orasida qayta taqsimlanadi. Yangi mablag‘ kiritilmaydi va foyda taqsimlanmaydi.

10.4. To‘rning tugun nuqtalari orasidagi masofalar berilgan: $r_{01}=9$, $r_{02}=10$, $r_{03}=14$, $r_{14}=8$, $r_{16}=25$, $r_{25}=7$, $r_{35}=7$, $r_{46}=6$, : $r_{47}=5$, $r_{56}=14$, : $r_{58}=9$, $r_{67}=12$, $r_{78}=6$, $r_{79}=10$, $r_{89}=7$. 0 va 9-tugun nuqtalar orasidagi eng qisqa masofa va marshrutni aniqlang.

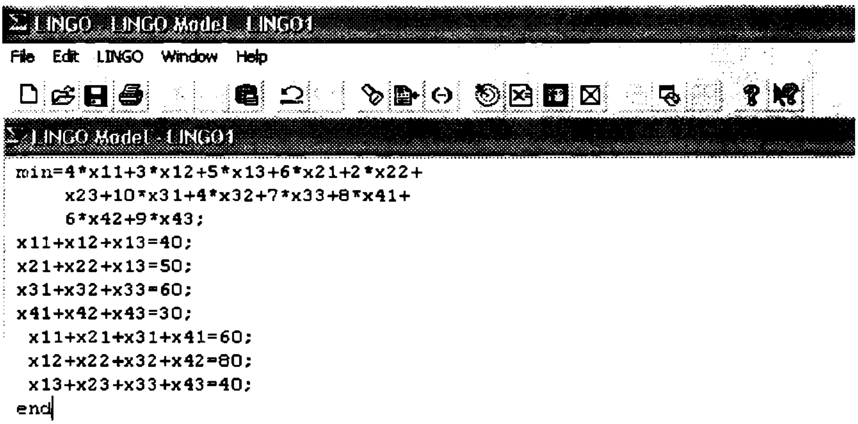
XI bob. TRANSPORT VA CHIZIQSIZ DASTURLASH MASALALARINI KOMPYUTERDA YECHISH

11.1. Transport masalalari

Biz IV bobda chiziqli va butun sonli chiziqli dasturlash masalalarini kompyuter yordamida yechishning ba'zi vositalarini bayon qilgan edik. IV bobda bayon qilingan hisoblash paketlarining aksariyati transport masalalarini yechishni ham o'z ichiga oladi.

LINGO paketidan foydalanib, transport masalasini yechishni ko'rib chiqamiz.

Masalan, (5.1)-(5.4) misolni **LINGO** paketida yechish uchun **LINGO** paketi ishga tushirilgandan so'ng, uning darchasiga matematik modelini kiritamiz.



Masalaning yechimini aniqlash uchun menyudagi LINGO>solve bo'limini faollashtirib, yoki tugmacha boilgandan so'ng yangi darcha ochilib, darchada masalaning yechimi qayd qilinadi.

Keltirilgan natijalardan quyidagilarni aniqlash mumkin: birinchi ombordan 1-do'konga 20 birlik, 3-do'konga 20 birlik; ikkinchi ombordan 1-do‘konga 10 birlik, 2-do‘konga 20 birlik va 3-do‘konga 20 birlik; uchinchi ombordan 2-do‘konga 60 birlik; to‘rtinchi ombordan 1-do‘konga 30 birlik mahsulot jo‘natilganda transport xarajatlari minimal bo‘lib, u 780 pul birligiga teng bo‘ladi.

Solution Report - LINGO1

```
Global optimal solution found.
Objective value:                              780.0000
Total solver iterations:                             6

                      Variable           Value        Reduced Cost
                           X11        20.00000            0.000000
                           X12        0.000000            3.000000
                           X13        20.00000            0.000000
                           X21        10.00000            0.000000
                           X22        20.00000            0.000000
                           X23        20.00000            0.000000
                           X31        0.000000            2.000000
                           X32        60.00000            0.000000
                           X33        0.000000            1.000000
                           X41        30.00000            0.000000
                           X42        0.000000            2.000000
                           X43        0.000000            3.000000

                           Row    Slack or Surplus      Dual Price
                             1        780.0000           -1.000000
                             2        0.000000           -1.000000
                             3        0.000000           -3.000000
                             4        0.000000           -5.000000
                             5        0.000000           -5.000000
                             6        0.000000           -3.000000
                             7        0.000000            1.000000
                             8        0.000000           -1.000000
```

Transport masalalarini **PER, TORA, LP88, LINDO, Lp_solve, LP-Optimizer, SoPlex, SPLP** paketlaridan foydalaib yechish imkoniyati ham bor.

11.2. Chiziqsiz dasturlash masalalari

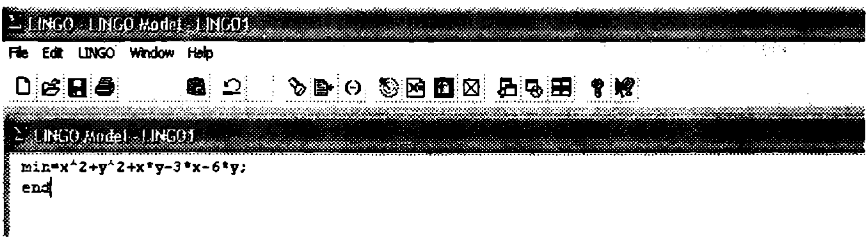
Chiziqsiz dasturlash masalalarini kompyuterda yechishning yetarli algoritmlari ishlab chiqilgan. Internet tizimidan foydalanib, hisoblash paketlarini olish imkoniyati ko‘p. Biz bu yerda chiziqsiz *dasturlash masalalarini paketlar yordamida yechish imkoniyatlari bilan tanishamiz.*

Chiziqsiz dasturlash masalalarini yechishni algoritmlari quyidagi saytlarda mavjud: AMPL (http://www.ampl.om/TRYAMPL), BARON (http: //archimedes.scs. uiuc.edu/cgi/run.pl), NEOS (http://www-neos.mcs.anl.gov), UniCalc (http: //www.rriai.org.ru/UniCalc/calculate.html) WNLIB (http://www.willnaylor.com /wnlib.html), IPORT (http://www-124.ibm.com/developerworks/opensource/coin/Ipopt), GALAHAD (http://galahad.rl.ac.uk/galahad-www).

MATLAB (http://www.mathworks.com/) tizimida ishlaydigan quyidagi dastur ta'minotlari chiziqsiz dasturlash masalalarini yechishga qaratilgan: Optimization Toolbox (http://www.mathworks.com/products/optimization), TOMLAB (http://tomlab.biz), MCS (http://www.mat.univie.ac.at/~neum/software/mcs).

Matematika (http://www.mathematica.com) tizimida esa MathOptimizer (http://www.wolfram.com/products/applications/mathoptimizer) va Global Optimization (http://www.wolfram.com/products/applications/globalopt) paketlari bor.

Chiziqsiz dasturlash masalalarini LINGO paketida yechish. **LINGO** paketidan foydalanib, $f=x^2+y^2+xy-3x-6y$ funksiyanig minimum nuqtasini topishni ko'ramiz. LINGO paketi ishga tushirilgandan so'ng misol quyidagicha kiritiladi.



Misolni yechishni ta'minlaganimizdan so'ng (tugmachasini bosish orqali) qo'shimcha darchada quyidagi ma'lumot aks etadi.

```
Local optimal solution found.
Objective value:                              -9.000000
Extended solver steps:                                5
Total solver iterations:                             62


                       Variable           Value        Reduced Cost
                              X        0.000000            0.000000
                              Y        3.000000            0.000000

                            Row    Slack or Surplus      Dual Price
                              1       -9.000000           -1.000000
```

Bundan funksiya x=0, y=3 nuqtada minimumga erishishini ko'rsatadi.

Endi $f=xy^2+x^2y-3x^2-3y^2$ funksiyaning $1\le x+y$, $x+y\le 16$ shartlarni qanoatlantiruvchi maksimumini topishni ko'ramiz. LINGO paketiga misolni quyidagicha kiritamiz:

```
File  Edit  LINGO  Window  Help

max=x*y^2+x^2*y-3*x^2-3*y^2;
    1<=x+y;
    x+y<=16;
end
```

tugmachani bosib misolning yechimini yangi darchada olamiz:

```
Local optimal solution found.
Objective value:                              640.0000
Extended solver steps:                               5
Total solver iterations:                            68


                       Variable           Value        Reduced Cost
                              X        8.000000            0.000000
                              Y        8.000000            0.000000

                            Row    Slack or Surplus      Dual Price
                              1        640.0000            1.000000
                              2        15.00000            0.000000
                              3        0.000000            144.0000
```

Demak, funksiya $x=8$, $y=8$ nuqtada minimumga erishadi va uning maksimal qiymati 640 ga teng bo'ladi.

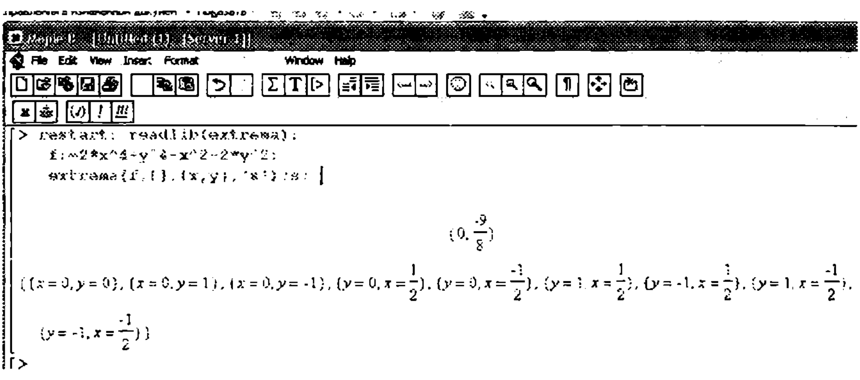
*Chiziqsiz dasturlash masalalarini **Mapleda** yechish.* Endi **Maple** tizimida chiziqsiz dasturlash masalalari qanday yechilishiga to'xtalamiz.

Ko'p argumentli funksiyalarning lokal va shartli ekstremumlarini topish uchun **extrema (f,{cond},{x,y,...},'s')** buyrug'idan foydalaniladi. Bu yerda **f** ekstremumi aniqlanishi lozim bo'lgan funksiya, **cond** shartli ekstremumni masalasining tengliklar orqali ifodalangan shartlari, **{x,y,...}** funksiyaning barcha argumentlari. **s** funksiya ekstremum nuqtalarini ifodalovchi o'zgaruvchi. Agar shart keltirilmasa lokal ekstremum aniqlanadi.

Afsuski, **extrema** buyrug'i barcha kritik nuqtalarni beradi. Ya'ni ekstremumga erishmaydigan nuqtalar ham qayd qilinadi. Qaysi kritik nuqta ekstremumligini qiymatni funksiyaga qo'yib aniqlash mumkin, masalan, **subs** buyrug'i yordamida.

Funksiyaning eng katta va eng kichik qiymatini topish uchun **maximize(f,{x1,...,xn},range)**, va **minimize(f,{x1,...,xn}, range)** buyruqlaridan foydalaniladi. Funksiyadan keyinda joylashgan figurali qavs ichida funksiyaning barcha argumentlari, so'ng argumentlarning o'zgarish chegarasi keltiriladi.

Misol. $f(x,y)=2x^4+y^4-x^2-2y^2$ funksiyaning ekstemumlarini topishni ko'rib chiqamiz. Maple paketi ishga tushgandan so'ng quyidagi buyruqlar ketma-ketligi terilib, "enter" bosilganda ekranda quyidagi natijalar qayd qilinadi.



Ravshanki, $f_{max}=0$, $f_{min}=-9/8$ bo'ladi. Shu bilan birga, max (0,0) nuqtadadir. Qolgan kritik nuqtalarni tekshirish kerak.

Funksiya ikki argument bo'yicha ham juft bo'lganligi uchun faqat birinchi chorakda joylashgan nuqtalarni tekshirish kifoya. Subs buyrug'idan foydalanib, quyidagi natijalarni olish mumkin:

> **subs([x=1/2,y=1],f);**

$$\frac{-9}{8}$$

> **subs([x=1/2,y=0],f);**

$$\frac{-1}{8}$$

> **subs([x=0,y=1],f);**

$$-1$$

Shunday qilib, funksiyaning lokal ekstremumlari:

$$f_{max} = f(0,0) = 0,\ f_{min} = f\left(\pm\frac{1}{2},\pm1\right) = f\left(\pm\frac{1}{2},\mp1\right) = -\frac{9}{8}$$

Misol. $f(x,y)=x^2+2xy-4x+8y$ funksiyaning $x=0$, $x=1$, $y=0$ va $y=2$ chiziqlar bilan chegaralangan to'rtburchakdagi eng kichik va eng katta qiymatini toping. Maple paketida quyidagi buyruqlar yordamida natijaga kelamiz:

> **restart: readlib(maximize):readlib(minimize):**
> **f:=x^2+2*x*y-4*x+8*y:**
> **maximize(f,{x,y},{x=0..1,y=0..2});**

$$17$$

> **minimize(f,{x,y},{x=0..1,y=0..2});**

$$-4$$

Shunday qilib, $\inf f(x,y)=-4$, $\sup f(x,y)=17$ bo'ladi.

Misol. $f(x,y)=xy+yz$ funksiyaning $x^2+y^2=2$, $y+z=2$, $x>0$, $y>0,z>0$ shartlarni qanoatlantiruvchi shartli ekstremumlarini aniqlang.

Mapl da quyidagi buyruqlar ketma-ketligini teramiz:

> **restart: readlib(extrema): f:=x*y+y*z:**
> **assume(x>0);assume(y>0);assume(z>0);**
> **extrema(f,{x^2+y^2=2,y+z=2},{x,y,z},'s');**

Bu buyruqlar ishga tushirilganda keyingi satrda quyidagi natija chiqadi:

$$\{\min\left(\frac{3}{2}\operatorname{RootOf}(\_Z^2+4\_Z+1, label=\_L1)+\frac{1}{2}, 0\right),$$
$$\max\left(\frac{3}{2}\operatorname{RootOf}(\_Z^2+4\_Z+1, label=\_L1)+\frac{1}{2}, 2\right)\}$$

convert buyrug'idan foydalanib soddalashtiramiz:

¬ **convert(%,radical);**

$$\{\max\left(-\frac{5}{2}+\frac{3\sqrt{3}}{2}, 2\right), \min\left(-\frac{5}{2}+\frac{3\sqrt{3}}{2}, 0\right)\}$$

\>**convert(s,radical);**

$$\{\{x\sim=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}, y\sim=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}, z\sim=\frac{5}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\}, \{x\sim=-1, y\sim=1, z\sim=1\},$$
$$\{x\sim=1, y\sim=1, z\sim=1\}\}$$

Qaysi nuqta ekstremumligini aniqlash uchun shu nuqtalardagi funksiya qiymatlarini topamiz:

\> **subs(s[1],f);**

$$0$$

\> **subs(s[2],f);**

$$2$$

¬ **subs(s[3],f):convert(%,radical):simplify(%);**

$$-\frac{5}{2}+\frac{3\sqrt{3}}{2}$$

Shunday qilib, funksiya quyidagi shartli ekstremumlarga ega: $f_{max}=f(1,1,1)=2$ va $f_{min}=f(-1,1,1)=0;$ uchinchi kritik nuqta egar nuqtadir.

Tayanch iboralar

PER, TORA, LP88, LINDO, LINGO, Lp_solve, LP-Optimizer, SoPlex, SPLP, Maple paketlari

Savollar

1. Transport masalalarini PER va TORA da yechish mumkinmi?
2. Chiziqsiz dasturlash masalalarini LINGO paketida yechish mumkinmi?
3. Chiziqsiz dasturlash masalasini Mapleda yechish qanday amalga oshiriladi?

Mashqlar

11.1. To'rtta qurilish obyektlariga har kuni $D_1=75$, $D_2=80$, $D_3=60$ va $D_4=85$ shartli birlikdagi g'ishtlar kerak bo'ladi. Qurilish obyektlariga g'ishtlar uchta g'isht zavodidan keladi. Zavodlarning kunlik g'isht tayyorlash imkoniyatlari mos ravishda $S_1=100$, $S_2=150$ va $S_3=50$ shartli birliklarga teng. Zavodlardan obyektlarga shartli birlikdagi g'ishtni eltishdagi transport xarajatlari jadvalda keltirilgan.

	D_1	D_2	D_3	D_4
S_1	6	7	3	5
S_2	1	2	5	6
S_3	8	10	20	1

Transport xarajatlarini minimallashtirishning optimal rejasini aniqlovchi matematik modelini quring va kompyuter paketlaridan foydalanib yeching.

11.2. Uchta avtomobil zavodi 4 ta iste'molchiga avtomobil yetkazib beradi. Zavodlar mos ravishda 90, 30 va 40 ta avtomobil ishlab chiqarish imkoniyatiga ega. Iste'molchilarning talabi mos ravishda 70, 30, 20 va 40 dona avtomobilga teng. Bir dona avtomobilni eltishdagi transport xarajati jadvalda keltirilgan.

Zavodlar	Iste'molchilar			
	1	2	3	4
I	18	20	14	10
II	10	20	40	30
III	16	22	10	20

Avtomobillarni yetkazishning optimal rejasini topishni kompyuterda yeching.

11.3. A, B va C omborlarda mos ravishda 100, 150 va 250 tonna urug' bor. Bu urug'larni 4 ta punktga jo'natish kerak. Punkt talablari mos ravishda 50 t, 100 t, 200 t va 150 t ga teng. A ombordan 1 t urug'ni punktlarga jo'natishdagi transport xarajatlari mos ravishda 80, 30, 20 va 20 pul birligiga, B ombordan esa 40, 10, 60 va 70 ga, C ombordan esa 10, 90, 40 va 30 ga teng. Transport xarajatlarini minimallashtiruvchi optimal rejani kompyuter paketlaridan foydalanib aniqlang.

11.4. Kunlik ishlab chiqarish quvvati 10, 8 va 6 mln. gallon benzinga teng bo‘lgan uchta neftni qayta ishlash zavodi uchta benzin omborini ta’minlaydi. Benzin omborlarining talabi mos ravishda 6, 11 va 7 mln. gallonga teng. Benzin omborlarga quvur orgali yetkaziladi. 100 gallonli benzin miqdorini quvur bo‘ylab jo‘natish 5 pul birligiga teng. 1-zavod 3-ombor bilan quvur orgali bog‘lanmagan. Zavodlardan omborlargacha masofa jadvalda aks etgan.

Zavodlar	Benzin omborlari		
	1	2	3
1	100	150	-
2	420	180	60
3	200	280	120

Transport xarajatlarini minimallashtiruvchi rejani kompyuter paketlaridan foydalanib aniqlang.

11.5. Korxonada 4 turdagi dastgohlar bo‘lib, ularning har biri 5 turdagi amallarni bajaradi. Har bir turdagi dastgohlarning maksimal ishlash vaqtlari mos ravishda 270, 350, 190 va 350 soatga teng. Har bir amallar mos ravishda 350, 291, 184, 184, 248 va 248 soatda bajarilishi lozim. Dastgohlarni qancha vaqt qaysi amallarga bog‘laganda umumiy samaradorlik eng yuqori bo‘ladi?

Har dastgoh turlarining amallarni bajarishdagi unumdorlik jadvalda keltirilgan.

Dastgoh turlari	Amallar				
	1	2	3	4	5
1	6	5	8	4	7
2	5	6	5	7	4
3	4	7	6	5	6
4	5	6	2	6	5

Masalani kompyuter paketlaridan foydalanib yeching.

11.6. Harbiy o‘yin. 1-oyinchi polkovnik, 2- o‘yinchi general. Polkovnikda 4 ta polk, generalda 3 ta polk mavjud. Har birining maqsadi ikki qishloqni egallashi kerak. Qishloqni egallashi 1 bilan baholanadi. Qarama-qarshi tomonlar qishloqlarga butun sondagi polklarni jo'natishi yoki umuman jo'natmasligi mumkin. Biror qishloqqa jo'natilgan polklarning soni qaysi tomonda ko'p bo'lsa, shu tomon qishloqni egallagan bo'ladi. Yutuq qishloqni egallaganligi va qishloqni egallamagan tomonning polklar sonining yig'indilari bilan baholanadi.

Agar qishloqdagi polkovnik va general yuborgan polklar soni teng bo'lsa, hech qaysi tomon yutmaydi va 0 bilan baholanadi. Har bir tomonning yutug'i har bir qishloqdan baholar yig'indisiga teng. Qarshi tomonlar birortasining yutug'i ikkinchi tomonning mag'lubiyatiga teng. Masalaning matematik modelini tuzib, kompyuterda yeching.

11.7. Korxona uch turdagi mahsulot ishlab chiqaradi (A_1,A_2 va A_3). Bu mahsulotlarga bo'lgan talab holatlari B_1, B_2 va B_3. Quyidagi jadvalda korxonaning i-mahsulotni ishlab chiqarishda j-talabga qarab oladigan foydasi keltirilgan.

	B_1	B_2	B_3
A_1	3	6	8
A_2	9	4	2
A_3	7	5	4

Tashqi holat talabi qanday bo'lganda ham mahsulot ishlab chiqarishning optimal variantini aniqlang.

11.8. $f=-x_1^3-x_2^2-3x_3^2+3x_1x_3+2x_2$ funksiyaning ekstremum nuqtalarini kompyuter paketlaridan foydalanib hisoblang.

12.9. Firma mahsulotini uchta bozorda sotadi. Tekshirishlar shuni ko'rsatdiki, har bir bozorning mahsulotga bo'lgan talab funksiyalari o'zgacha: 1-bozorda $p_1=63-4x$, 2-bozorda $p_2=105-5y$; 3-bozorda $p_3=75-6z$. x,y va z mos ravishda har bir bozorda sotiladigan mahsulot miqdorlari. Agar xarajat funksiyasi $C=20+15q$ $(q=x+y+z)$ bo'lsa, foyda eng yuqori bo'lishi uchun mahsulotlarni bozorlarga qanday taqsimlash lozim? Masalani kompyuter paketidan foydalanib yeching.

12.10. Quyidagi funksiyalarning shartli ekstremumlarini kompyuter paketlaridan foydalanib toping.

1) $3x^2+2x+2y^2+4yz \to extr$ 2) $xyz \to extr$;

$x^2+2y^2=19 \quad x+2yz=11$ $\qquad x+y+z=5, \quad xy+yz-xz=8$

12.11. Tadbirkor yangi mahsulotni \$150 dan sotish niyatida. Agar ishlab chiqarishga x ming dollar, reklamaga y ming dollar sarf qilinsa, *320y/(y+2)+160x/(x+4)* ta mahsulot sotilishi tahlil qilingan. Mahsulot birligini ishlab chiqarish \$50 ga aylanadi. Tadbirkor ishlab chiqarish va reklama uchun \$8000 sarf qilmoqchi. Tadbirkor yuqori foyda olishi uchun mablag'ni qanday taqsimlash kerak? Masalani kompyuter paketlaridan foydalanib yeching.

Adabiyotlar

1. Акулич И.Л., Математическое пригмерах и задачах, Изд. Высшая школа. 1986
2. Ашманов С.А., Линейное программирование. Москва, Наука, 1981.
3. Банди Б. Основы линейного программирования. – М.: Радио и связь, 1989.
4. Bhatti M. Asghar. Practical optimization methods. – Springer-Verlag New York, Inc, 2000.
5. Bakoev M.T. Quantitative methods for Business. Linear programming and its applications. UWED PRESS, 1998.
6. Васин А.А. Морозов В.В. Введение в теорию игр с приложениями к экономике. – М.: 2003.
7. Вентцель Е.С. Исследование операций. – М.: Сов. Радио, 1972.
8. Вентцель Е.С. Элементы теории игр. – М.: Государственное изд-во физ-мат литературы, 1961.
9. Высшая математика для экономистов. Под ред. Н.Ш. Кремера. – М.: Банки и биржи, ЮНИТИ, 1997.
10. Галеев Э.М., Тихомиров В.М. Оптимизация. – М.: Эдитория УРСС, 2000.
11. Гасс С., Линейное программирование. Издательство физматгиз, 1961.
12. Гасс С., Путешествие в страну линейного программирования, Издательство Мир, 1973.
13. Гейл А., Теория линейных экономических моделей. Издательство Иностранной литературы. Москва, 1963.
14. Гольдштейн Е.Г., Юдин Д.Б., Линейное программирование: теория, методы и приложения., Москва, Наука, 1969.
15. David R. Anderson. Quantitative methods for Business. 1992. Textbook.
16. Dalaboyev U. Ibragimov F. Iqtisodda miqdoriy usullar (1-qism). JIDU, Toshkent, 2005.
17. Данилов В.И. Лекции по теории игр. – М.: Российская экономическая школа, 2002.
18. Jumayev H.N., Otoniyozov B., Yugay L.P., Jalilov A. Matematik programmalashtirish. Darslik. – Toshkent, O'zbekiston Yozuvchilar uyushmasi, Adabiyot jamg'armasi nashriyoti, 2005.
19. Замков О.О., Толстопятенко А.В., Черемных Ю.Н. Математические методы в экономике. – М.: ДИС, 2000.

20. Ibragimov G.I., Iqtisodda miqdoriy usullar. JIDU. 2001.

21. Ибрагимов Г.И., Рахимов А.А. Методы принятия решений, УМЭД, Ташкент 1998.

22. Ibragimov F., Dalaboyev U. Iqtisodda miqdoriy usullar (2-qism). JIDU, Toshkent, 2006.

23. Интрилигатор М. Математические методы оптимизации экономическая теория. – М.: Айси-пресс, 2002.

24. Карасев А.Н., Аксютина З.М., Савельева Т.И., Курс высшей математики для экономических вузов, т.2, Минск, Издательство Высшая школа, 1982.

25. Конюховский П.В. Математические методы исследования операций в экономике. – СПб: Питер, 2000.

26. Костюкова О.И. Исследование операций. – Минск, БГУИР, 2003.

27. Кремер Н.Ш., Путко Б.А., Тришин И.М., Фридман М.Н. Исследование операций в экономике. Учебное пособие для вузов. М.: ЮНИТИ, 2003.

28. Кузнецов А.В., Кубузов В.И., Волощенко А.Б. Математическое программирование. – М.: ВШ, 1980.

29. Кузнецов А.В., Сакович В.А., Холод Н.И. Высшая математика. Математическое программирование. – Минск: Высшая школа, 1994.

30. Логов А.В., Ведения в экономико математическое моделирование. М., Наука, 1984.

31. Мухечева Э.А., Рубинштейн Г.Ш., Математическое программирование, Наука, 1977.

32. Padlo Pedregal. Introduction to Optimization. –Springer-Verlag New-York, 2004.

33. Сдвижков О.А. Математика на компьютере: Maple 8. – М.: СОЛОН-Пресс, 2003.

34. Шикин Е.В., Чхартишвили А.Г. Математические методы и модели в управлении. Учебное пособие. М.: Дело, 2000.

35. Химмельблау Д. Прикладное нелинейное программирование. М.: Мир. 1975.

36. Холод Н.И., Пособия решению задач по линейной алгебры и линейного программированию, Издательства Б.Г.У., Минск, 1971.

Mundarija

Rasulov Abdujabbor Sattorovich
Dalaboyev Umriddin

IQTISODIYOTDA MIQDORIY USULLAR

O'quv qo'llanma

Muharrir: *H. Teshaboyev*
Texnik muharrir: *M. Alimov*
Kompyuterda sahifalovchi: *A. Shafiulina*

Bosishga ruxsat etildi 04.08.2010. Qog'oz bichimi $60x84^1/_{16}$.
Hisob-nashr tabog'i 19,0. Adadi 500.
Buyurtma № 40.

"IQTISOD-MOLIYA" nashriyotida tayyorlandi.
100084, Toshkent, Kichik halqa yo'li ko'chasi. 7-uy.

"HUMOYUNBEK-ISTIQLOL MO'JIZASI" bosmaxonasi
100000, Toshkent, Qori-Niyoziy ko'chasi, 39-uy.