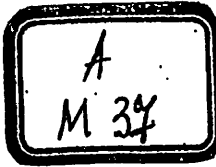


TOSHKENT AXBOROT TEXNOLOGIYALARI UNIVERSITETI
HUZURIDAGI ILMIY DARAJALAR BERUVCHI
DSc.13/30.12.2019.T.07.01 RAQAMLI ILMIY KENGASH

TOSHKENT AXBOROT TEXNOLOGIYALARI UNIVERSITETI



MAHMUDOVA MOHINISO MIZROF QIZI

BEVOSITA VA O'ZARO DINAMIK BOG'LANGAN G'OVAK
MUHITLARDA GAZLAR FILTRATSIYA JARAYONLARINI
MATEMATIK MODELLASHTIRISH

05.01.07 – Matematik modellashtirish. Sonli usullar va
dasturlar majmui

TEXNIKA FANLARI BO'YICHA FALSAFA DOKTORI (PHD)
DISSERTATSIYASI AVTOREFERATI

Toshkent – 2024

**Texnika fanlari bo'yicha falsafa doktori (PhD) dissertatsiyasi
avtoreferati mundarijasi**

**Оглавление автореферата диссертации доктора философии (PhD)
потехническимнаукам**

**Contents of dissertation abstract of doctor of philosophy (PhD)
on technical sciences**

Mahmudova Mohiniso Mizrof qizi

Bevosita va o'zaro dinamik bog'langan g'ovak muhitlarda
gazlar filtratsiya jarayonlarini matematik modellashtirish 3

Махмудова Мохинисо Мизроф кизи

Математическое моделирование процессов фильтрации газа
в прямо и динамически связанных пористых средах 21

TOSHKENT AXBOROT TEXNOLOGIYALARI UNIVERSITETI
HUZURIDAGI ILMY DARAJALAR BERUVCHI
DSc.13/30.12.2019.T.07.01 RAQAMLI ILMY KENGASH

TOSHKENT AXBOROT TEXNOLOGIYALARI UNIVERSITETI

MAHMUDOVA MOHINISO MIZROF QIZI

BEVOSITA VA O'ZARO DINAMIK BOG'LANGAN G'OVAK
MUHITLARDAGI GAZLAR FILTRATSIYA JARAYONLARINI
MATEMATIK MODELLASHTIRISH

05.01.07 – Matematik modellashtirish. Sonli usullar va
dasturlar majmui

TEXNIKA FANLARI BO'YICHA FALSAFA DOKTORI (PHD)
DISSERTATSIYASI AVTOREFERATI

Toshkent – 2024

Texnika fanlari bo'yicha falsafa doktori (PhD) dissertatsiyasi mavzusi O'zbekiston Respublikasi Oliy ta'lim, fan va innovatsiyalar vazirligi huzuridagi Oliy ta'lim fan va innovatsiyalar vazirligi huzuridagi Oliy attestatsiya komissiyasida №B2023.1.PhD/T3464 raqam bilan ro'yxatga olingan.

Dissertatsiya Toshkent axborot texnologiyalari universitetida bajarilgan.

Dissertatsiya avtoreferati uch tilda (o'zbek, rus, ingliz (rezyume)) Ilmiy kengashning veb sahifasida (www.tuit.uz) va "Ziyonet" Axborot ta'lim portalida (www.ziyonet.uz) joylashtirilgan.

Ilmiy rahbar: Ne'matov Abdug'ani
fizika-matematika fanlari nomzodi, dotsent

Rasmiy opponentlar: Djumanov Jamoljon Xudaykulovich
texnika fanlari doktori, professor

Normurodov Chori Begaliyevich
texnika fanlari doktori, professor

Yetakchi tashkilot: Qarshi davlat universiteti

Dissertatsiya himoyasi Toshkent axborot texnologiyalari universiteti huzuridagi DSc.13/30.12.2019.T.07.01 raqamli Ilmiy kengashning 2024-yil "___" _____ da soat ___ dagi majlisida bo'lib o'tadi. (Manzil: 100084, Toshkent shahri, Amir Temur ko'chasi, 108-uy. Tel.: (99871) 238-64-43, e-mail: iktuit@tuit.uz).

Dissertatsiya bilan Toshkent axborot texnologiyalari universiteti Axborot-ressurs markazida tanishish mumkin (___ raqam bilan ro'yxatga olingan). (Manzil: 100084, Toshkent shahri, Amir Temur ko'chasi, 108-uy. Tel.: (99871) 238-64-70.)

Dissertatsiya avtoreferati 2024-yil "___" _____ kuni tarqatildi.
(2024-yil "___" _____ dagi ___ raqamli ryestr bayonnomasi.)

M.M. Musayev
Ilmiy darajalar beruvchi
Ilmiy kengash raisi,
texnika fanlari doktori, professor

E.Sh. Nazirova
Ilmiy darajalar beruvchi
Ilmiy kengash ilmiy kotibi,
texnika fanlari doktori, professor

F.M. Nuraliyev
Ilmiy darajalar beruvchi
Ilmiy kengash qoshidagi ilmiy seminar raisi,
texnika fanlari doktori, professor

KIRISH (falsafa doktori (PhD) dissertatsiyasi annotatsiyasi)

Dissertatsiya mavzusining dolzarbligi va zarurati. Jahon iqtisodiyotining intensiv rivojlanishining asosini neft va gaz sanoati tashkil etadi. Shu sababli, neft va gaz filtratsiya jarayonlarini matematik modellashtirishning ilmiy asoslangan usullarini ishlab chiqish hamda suyuqlik va gazlarning g'ovakli muhitda harakatlanishining stasionar bo'lmagan jarayonlarini o'rganish uchun muammoli avtomatlashtirilgan tizimlar asosida hisoblash tajribalarini o'tkazishga katta e'tibor berilmoqda. Bu turdagi masalalarning matematik modellari, hisoblash algoritmlari va dasturiy majmuasini ishlab chiqish muammosiga Kanada, AQSh, Fransiya, BAA, Eron, Xitoy, Rossiya Federatsiyasi, Ukraina, Qozog'iston, Ozarbayjon va boshqa shu kabi rivojlangan mamlakatlarda ham katta e'tibor qaratilmoqda.

Butun dunyoda g'ovakli muhitda neft va gaz filtratsiya jarayonlarining matematik modelini yaratish, neft va gaz konlarining asosiy ko'rsatkichlarini hisoblash algoritmlari va dasturiy tizimlarini ishlab chiqish, neft va gazning geologik, gidrodinamik 3D modellarini yaratishga qaratilgan ilmiy tadqiqotlar olib borilmoqda. Gaz konlari obyektlari va filtratsiya jarayonlarini o'rganish, shuningdek olingan natijalarni o'rganish uchun hisoblash tajribalarini o'tkazish maqsadli ilmiy tadqiqotlardan hisoblanadi.

Respublikamizda ham neft va gaz sanoatini rivojlantirishda yuqori malakali kadrlar tayyorlash, mazkur sohada ta'lim, ilm-fan va ishlab chiqarish o'rtasida o'zaro integratsiyani yo'lga qo'yish, kadrlarni o'qitishning usul va shakllarini takomillashtirish orqali ta'lim sifatini hamda mehnat resurslaridan foydalanish samaradorligini oshirishga katta e'tibor qaratilmoqda. 2022 yil 7 iyuldagi PQ-309-son "Neft va gaz sohasida ta'lim-ishlab chiqarish klasterini tashkil etish chora-tadbirlari" to'g'risida qaroriga asosan "...neft va gaz sohasi uchun ishlab chiqarish korxonalari ehtiyojlaridan kelib chiqib, zamonaviy talablar asosida xalqaro ta'lim standartlariga muvofiq mutaxassislar va ilmiy kadrlarni tayyorlash, ...ilm-fan yutuqlarini ishlab chiqarishga to'g'ridan-to'g'ri tatbiq qilish orqali neft va gaz sohasi mahsulotlari ishlab chiqarishni diversifikatsiya qilish hamda sohaning eksport salohiyatini oshirish..." vazifalari belgilangan. Ushbu vazifalarni amalga oshirishda matematik modellashtirish, hisoblash tajribalarini o'tkazishning samarali algoritmi va zamonaviy axborot texnologiyalar foydalangan holda dasturiy majmualarini yaratish muhim ahamiyatga ega.

Respublikamizda ushbu sohani rivojlantirishga katta e'tibor qaratilmoqda. Xususan, Prezidentimiz tomonidan neft-gaz sohasini rivojlantirish uchun bir qancha qaror va farmonlar qabul qilinib sohaga tadbir etilmoqda. Jumladan "Neft-gaz sohasida transformatsiya jarayonlarini jadallashtirish" to'g'risidagi 28.01.2022 yil PF-60-sonli Farmoni, "Neft-gaz tarmog'ining moliyaviy barqarorligini oshirish bo'yicha birinchi navbatdagi chora-tadbirlar to'g'risida" gi 04.04.2020 yil PQ-4664-sonli Qarori ushbu sohaning ilmiy asoslarini yaratish, yetuk mutaxassislarni tayyorlash va ularni ishlab chiqarish, joriy etish tarmoqlariga yo'naltirish hamda mazkur sohaga tegishli boshqa me'yoriy-huquqiy hujjatlarda belgilangan vazifalarni amalga oshirishda muhim ahamiyat kasb etadi. Qarorlarda va mazkur sohaga tegishli boshqa me'yoriy-huquqiy hujjatlarda belgilangan

vazifalarni amalga oshirishda ushbu dissertatsiya tadqiqoti muayyan darajada xizmat qiladi.

Tadqiqotning respublika fan va texnologiyalar rivojlanishining ustuvor yo'nalishlariga mosligi. Mazkur tadqiqot Respublika fan va texnologiyalar rivojlanishining IV. "Axborotlashtirish va axborot-kommunikatsiya texnologiyalarini rivojlantirish" ustuvor yo'nalishi doirasida bajarilgan.

Muammoning o'rganilganlik darajasi. Suyuqlik va gazlar filtratsiya jarayonlarining matematik modellarini ishlab chiqish va takomillashtirish, shuningdek ularni yechishning sonli usullarini, sust o'tkazuvchan qatlarga ega gaz qatlamlarida stasionar va nostasionar filtratsiya masalalarini yechish A.Monteiro, M.Sharma, S.Banerjee, X.Aziz, E.Settari, G.I.Barenblatt, M.Chraibi, S.Minjeaud, V.F.Piven, F.Boer, N.B.Lopuh, C.Lapuerta, A.X.Mirzadjanzade, M.M.Xasanov, B.B.Lapuk, K.S.Basniev, V.Y.Buligin, D.J.Axmed-Zaki, S.N.Zakirov, A.V.Axmetyanov, A.Nikiforov, A.V.Sepaev, O.R.Abbasov va boshqa xorijiy olimlarning ilmiy ishlarida tadqiq qilingan.

O'zbekiston Respublikasida g'ovak muhitlarda suyuqlik va gazlar filtratsiyasi jarayonlarining matematik modellari, hisoblash usullari va shu kabi tadqiqotlarga F.B.Abutaliyev, D.F.Fayzullayev N.M.Muxidinov, R.Sadullayev, A.Begmatov, B.X.Xo'jayorov, M.Aripov, N.Ravshanov, U.S.Nazarov, Sh.Qayumov, Y.Yarbekov, A.Mirzayev, A.Ne'matov, E.Sh.Nazirova va boshqa olimlar o'zlarining katta xissalarini qo'shganlar. Parabolik tipdagi differensial tenglamalar ko'rinishida ifodalanuvchi chegaraviy masalalarning filtratsiya jarayonlari D.F.Fayzullayev va F.B.Abutaliyev kitoblarida va boshqa adabiyotlarda keltirilgan.

Bu sohadagi tadqiqotlar tahlili shuni ko'rsatadiki, sust o'tkazuvchan qatlarga ega bir – biri bilan o'zaro dinamik aloqadagi bir jinsli bo'lmagan ko'p qatlamli gaz konlarining nostasionar filtratsiya jarayonlari hozirgi kunda yetarli darajada o'rganilmagan.

Dissertatsiya tadqiqotining dissertatsiya bajarilgan oliy ta'lim yoki ilmiy-tadqiqot muassasasining ilmiy-tadqiqot ishlari rejalarini bilan bog'liqligi. Dissertatsiya ishi Muhammad al-Xorazmiy nomidagi Toshkent axborot texnologiyalari universiteti hamda Raqamli texnologiyalar va sun'iy intellektni rivojlantirish ilmiy-tadqiqot instituti (RTSIR ITI) ilmiy-tadqiqot ishlari rejasining 31222444 IC « NGK-EkoLoyiha» № E02.01-01 "Neft va gaz konlarini loyihalashtirish uchun algoritm va dasturiy mahsulot yaratish" (2022-2024) mavzusidagi loyihasi doirasida bajarilgan.

Tadqiqotning maqsadi. O'zaro dinamik va bevosita bog'langan aloqaga ega ko'p qatlamli gaz konlarida nostasionar filtratsiya jarayonlarining matematik modellari, yechishning sonli usullari va samarali hisoblash algoritmlarini ishlab chiqish, shu bilan birga hisoblash tajribalari sonli natijalarini taqdim etishning dasturiy majmuasini yaratish.

Tadqiqotning vazifalari:

o'zaro dinamik va bevosita bog'langan bir jinsli bo'lmagan ko'p qatlamli g'ovak muhitda gazlar nostasionar filtratsiya jarayonlari matematik modellarini qurishda foydalaniladigan axborot modellarini shakllantirish hamda qatlam

o'tkazuvchanlik koeffitsienti va gaz filtratsiya sohasining axborot massivini yaratish;

sust o'tkazuvchan qatlamlarga ega o'zaro dinamik aloqadagi gaz konlari tizimi uchun bosim o'zgarishini hisobga olgan holda nostatsionar filtratsiya jarayonining bir va ikki o'lchovli matematik modeli ishlab chiqish;

ko'p qatlamli sust o'tkazuvchan qatlamlarga ega gaz filtratsiya chegaraviy masalasini o'zgaruvchan yo'nalishlar sxemasi asosida yechishning hisoblash algoritmini ishlab chiqish;

bevosita bog'langan uch qatlamli g'ovak muhitda gazning nostatsionar filtratsiya jarayonining uch o'lchovli matematik modelini ishlab chiqish, sonli modellashtirish va chekli ayirmalar sxemasi yordamida yechishning hisoblash algoritmini ishlab chiqish;

g'ovak muhitda uch qatlamli bevosita va o'zaro dinamik aloqaga ega gaz konlari asosiy ko'rsatkichlarini aniqlovchi va bashorat qiluvchi dasturiy majmua funksional tuzilmasi ishlab chiqish.

Tadqiqotning obykti sifatida bevosita va dinamik bog'langan uch qatlamli g'ovak muhitda gaz konlarining filtratsiya jarayoni qaralgan.

Tadqiqotning predmetini bevosita va dinamik bog'langan qatlamlarda gaz filtratsiya jarayoni matematik modellari, yechish algoritmlari va dasturiy majmuasi tashkil etadi.

Tadqiqotning usullari. Dissertatsiya ishida hisoblash matematikasining sonli usullari, yechishning samarali algoritmlarini qurish hamda dasturlash texnologiyalari uslublaridan foydalanilgan.

Tadqiqotning ilmiy yangiligi quyidagilardan iborat:

sust o'tkazuvchan qatlamlarga ega o'zaro dinamik aloqadagi gaz konlari tizimi uchun bosim o'zgarishini hisobga olgan holda nostatsionar filtratsiya jarayonining bir va ikki o'lchovli matematik modeli ishlab chiqilgan;

ko'p qatlamli sust o'tkazuvchan qatlamlarga ega gaz filtratsiya chegaraviy masalasini o'zgaruvchan yo'nalishlar sxemasi asosida yechishning hisoblash algoritmi ishlab chiqilgan;

bevosita bog'langan uch qatlamli g'ovak muhitda gazning nostatsionar filtratsiya jarayonining uch o'lchovli matematik modeli ishlab chiqilgan va sonli modellashtirilgan hamda chekli ayirmalar sxemasi yordamida yechishning hisoblash algoritmi ishlab chiqilgan;

g'ovak muhitda uch qatlamli bevosita va o'zaro dinamik aloqaga ega gaz konlari asosiy ko'rsatkichlarini aniqlovchi va bashorat qiluvchi dasturiy majmua funksional tuzilmasi ishlab chiqilgan.

Tadqiqotning amaliy natijalari quyidagilardan iborat:

dinamik bog'langan uch qatlamli gaz konlarini o'zlashtirishning asosiy ko'rsatkichlarini hisoblash algoritmi asosida dasturi ishlab chiqildi va kompyuterda hisoblash tajribalari o'tkazildi;

bevosita bog'langan uch qatlamli gaz konlarini o'zlashtirishning asosiy ko'rsatkichlarini hisoblash algoritmi asosida dasturi ishlab chiqildi va kompyuterda hisoblash tajribalari o'tkazildi;

hisoblash tajribalarini o'tkazishda sonli natijalarni vizual formada taqdim etishning monitoring va bashorat qilish dasturiy majmuasi ishlab chiqildi.

Tadqiqot natijalarining ishonchliligi. Massa va impulsning saqlanish qonunlari, suyuqliklar mexanikasi qonunlari, Darsi qonuni, hisoblash matematikasining tasdiqlangan usullari, shuningdek, olingan natijalarni sifat va miqdoriy baholanganligi bilan asoslanadi. Ko'rib chiqilayotgan jarayonlar uchun ishlab chiqilgan matematik ta'minotning adekvatligi hisoblash tajribalarini o'tkazishda moddiy balans tenglamasi yordamida tekshirilganligi bilan izohlanadi.

Tadqiqot natijalarining ilmiy va amaliy ahamiyati.

Tadqiqot natijalarining ilmiy ahamiyati o'zaro dinamik va bevosita bog'langan ko'p qatlamli g'ovak muhitlarda gaz filtratsiya chegaraviy masalalari, sust o'tkazuvchan qatlamga ega bir-biri bilan o'zaro va bevosita bog'langan bir jinsli bo'lmagan gaz konlari nostatsionar filtratsiya jarayonlarining ikki va uch o'lchamli chegaraviy masalalarini chekli-ayirmalar usullarining afzalligidan foydalangan holda sonli modellashtirish hamda yechishning aniq va samarali algoritmlarini ishlab chiqish bilan izohlanadi.

Tadqiqot natijalarining amaliy ahamiyati ishlab chiqilgan matematik modellar va algoritmlar hamda dasturiy majmua O'zbekneftgaz sanoatida qo'llanilishi mumkinligi, shuningdek suyuqlik va gaz filtratsiyasi murakkab nostatsionar jarayonlarining matematik modellarini, ikki va uch o'lchovli filtratsiya masalalarini yechishning samarali hisoblash algoritmlarini amaliyotga tadbiqu bilan izohlanadi.

Tadqiqot natijalarining joriy qilinishi. Bevosita va o'zaro dinamik aloqadagi ko'p qatlamli g'ovak muhitda gaz filtratsiya jarayonining ikki va uch o'lchovli matematik modellari, yechish algoritmlari hamda yaratilgan dasturiy majmua asosida:

“Ko'p o'lchovli g'ovak muhitlarda neft-gaz filtratsiya jarayonlarining asosiy ko'rsatkichlarini hisoblashda samarali algoritmlarni qo'llash va sonli natijalarni vizuallashtirish” dasturiy ta'minotini “Geo Interpretation Group” MChJ ga joriy etilgan(Raqamli texnologiyalar vazirligining 2023 yil 4 dekabrda 33-8/8673-sonli ma'lumotnomasi). Natijada, asosiy ko'rsatkichlarni hisoblashdagi o'zgarishlarni real vaqtda 3D grafik ko'rinishlarda kuzatish imkoniyati yaratilgan, olingan natijalarining aniqligi va ishonchliligi oshgan hamda hisoblashga ketgan vaqtning kamayishi hisobiga 32% gacha mehnat samaradorligiga erishilgan.

“Ikki qatlamli g'ovak muhitlarda gaz filtratsiya jarayonini kompyuterli modellashtirish” dasturiy ta'minoti “Epsilon Development Company” MChJ obyektida joriy qilingan(Raqamli texnologiyalar vazirligining 2023 yil 4 dekabrda 33-8/8673-sonli ma'lumotnomasi). Ishlab chiqilgan matematik modellar, hisoblash algoritmlari va dasturiy ta'minotni joriy etish orqali sonli natijalarining o'zgarishini real vaqtda 2D va 3D grafik ko'rinishlarida kuzatish va olingan natijalarni aniqligi, ishonchliligi va xatoliklarning kamayishiga erishilgan. Unda hisoblashga ketgan vaqt 8-10 % qisqargan va ishlab chiqarish samaradorligi 7 % ga oshgan.

“Ko'p qatlamli g'ovak muhitda gaz filtratsiya jarayonini sonli modellashtirish” ishlab chiqilgan dasturiy ta'minot “Gissarnetgaz” MChJ obyektlariga joriy qilingan(Raqamli texnologiyalar vazirligining 2023 yil 4 dekabrda 33-8/8673-sonli ma'lumotnomasi). Olingan natijalar o'zaro dinamik aloqadagi ko'p

qatlamli gaz konlarini o'zlashtirish va tahlil qilish uchun foydali bo'lib, gaz konlarining ishlash samaradorligini 5-6 % ga oshirishga erishish imkonini bergan.

Tadqiqot natijalarining aprobatsiyasi. Mazkur tadqiqot natijalari 9 ta xalqaro (1 tasi scopus) va 5 ta respublika ilmiy-amaliy anjumanlarida muhokamadan o'tkazilgan.

Tadqiqot natijalarining e'lon qilinganligi. Tadqiqot mavzusi bo'yicha jami 27 ta ilmiy ish chop etilgan, shulardan, O'zbekiston Respublikasi Oliy attestatsiya komissiyasining doktorlik dissertatsiyalari asosiy ilmiy natijalarini chop etishga tavsiya etilgan ilmiy nashrlarda 7 ta maqola, shulardan, 3 ta xorijiy va 4 ta respublika jumllarida nashr qilingan, 9 ta xalqaro ilmiy-amaliy konferensiyalarda, 5 ta respublika ilmiy-amaliy konferensiyalarida shuningdek, EHM uchun dasturiy mahsulot qayd etilganligi haqida 6 ta guvohnoma olingan.

Dissertatsiyaning tuzilishi va hajmi. Dissertatsiya ishi kirish, to'rtta bob, xulosa, foydalanilgan adabiyotlar ro'yxati va ilovalardan iborat bo'lib, dissertatsiya hajmi 107 bet, 43 ta rasmni o'z ichiga olgan.

DISSERTATSIYANING ASOSIY MAZMUNI

Kirish qismida dissertatsiya mavzusining dolzarbligi va zarurati asoslangan, tadqiqotning maqsadi va vazifalari, obyekt va predmeti tavsiflangan, respublika fan va texnologiyalari rivojlanishining ustuvor yo'nalishlariga mosligi ko'rsatilgan, tadqiqotning ilmiy yangiligi va amaliy natijalari bayon qilingan, olingan natijalarning ishonchliligi, ilmiy va amaliy ahamiyati ochib berilgan, tadqiqot natijalarini amaliyotga joriy qilish, ishning aprobatsiyasi, nashr etilgan ishlar va dissertatsiya tuzilishi bo'yicha ma'lumotlar keltirilgan.

Dissertatsiya ishining "Ko'p qatlamli g'ovak muhitlarda gaz filtratsiya jarayonini matematik modellashtirish va tadqiq qilish muammolari" deb nomlangan birinchi bobida tadqiqot usullari tahlili va dissertatsiya mavzularga oid mavjud ishlar tahlili, hamda ko'p qatlamli gaz konlarida filtratsiya jarayonlarini matematik modellashtirish ahamiyati, roli va muammolari haqida fikrlar bayon etilgan. Shu bilan birga dinamik va bevosita bog'langan ko'p qatlamli g'ovak muhitlarda gazlarning filtratsiya jarayonini matematik modellashtirish muammolari, modellashtirishda sonli usullar tahlili va hisoblash tajribalari asosida jarayonni tadqiq qilish muammolari, hamda gaz konlarini o'zlashtirishda asosiy ko'rsatkichlarni aniqlashning o'ziga xos xususiyatlari va tahlili keltirilib o'tilgan. Bir jinsli bo'lmagan o'zaro dinamik va bevosita aloqadagi qatlamlarda kechadigan filtratsion jarayonning matematik modeli, tadqiqot maqsad va vazifalari ko'rib chiqilgan.

Dissertatsiyaning "Dinamik aloqadagi ko'p qatlamli g'ovak muhitlarda gaz nostatsionar filtratsiya jarayonini matematik modellashtirish" deb nomlangan ikkinchi bobida uch qatlamli o'zaro dinamik aloqadagi gaz konlari filtratsiya jarayoni chegaraviy masalasining bir va ikki o'lchovli matematik modeli, sonli yechish usuli hamda yechish algoritmi keltirilgan.

O'zaro dinamik aloqadagi uch qatlamli g'ovak muhitda gaz filtratsiya jarayonining ikki o'lchamli matematik modelini qaraymiz.

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x} \left[K_1 h_1 \frac{\partial P_1^2}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[K_1 h_1 \frac{\partial P_1^2}{\partial y} \right] = 2\alpha \mu m h_1 \frac{\partial P_1}{\partial t} - \frac{K_{n1}}{h_{n1}} (P_2^2 - P_1^2) \\ \frac{\partial}{\partial x} \left[K_2 h_2 \frac{\partial P_2^2}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[K_2 h_2 \frac{\partial P_2^2}{\partial y} \right] = 2\alpha \mu m h_2 \frac{\partial P_2}{\partial t} + \frac{K_{n1}}{h_{n1}} (P_2^2 - P_1^2) - \frac{K_{n2}}{h_{n2}} (P_3^2 - P_2^2) + Q \\ \frac{\partial}{\partial x} \left[K_3 h_3 \frac{\partial P_3^2}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[K_3 h_3 \frac{\partial P_3^2}{\partial y} \right] = 2\alpha \mu m h_3 \frac{\partial P_3}{\partial t} + \frac{K_{n2}}{h_{n2}} (P_3^2 - P_2^2) \end{cases} \quad (1)$$

$$t > 0; \quad 0 < x < L; \quad 0 < y < L.$$

(1) matematik model quyidagi boshlang'ich va chegaraviy shartlarda yechiladi:

$$P_1(x, y, t_0) = P_{1H}(x, y), \quad P_2(x, y, t_0) = P_{2H}(x, y), \quad P_3(x, y, t_0) = P_{3H}(x, y). \quad (2)$$

$$\begin{cases} -K_1 h_1 \frac{\partial P_1}{\partial x} \Big|_{x=0} = \alpha (P_A - P_1); \\ -K_1 h_1 \frac{\partial P_1}{\partial y} \Big|_{y=0} = \alpha (P_A - P_1); \end{cases} \quad \begin{cases} K_1 h_1 \frac{\partial P_1}{\partial x} \Big|_{x=L} = \alpha (P_A - P_1); \\ K_1 h_1 \frac{\partial P_1}{\partial y} \Big|_{y=L} = \alpha (P_A - P_1); \end{cases} \quad (3)$$

$$\begin{cases} -K_2 h_2 \frac{\partial P_2}{\partial x} \Big|_{x=0} = \alpha (P_A - P_2); \\ -K_2 h_2 \frac{\partial P_2}{\partial y} \Big|_{y=0} = \alpha (P_A - P_2); \end{cases} \quad \begin{cases} K_2 h_2 \frac{\partial P_2}{\partial x} \Big|_{x=L} = \alpha (P_A - P_2); \\ K_2 h_2 \frac{\partial P_2}{\partial y} \Big|_{y=L} = \alpha (P_A - P_2); \end{cases} \quad (4)$$

$$\begin{cases} -K_3 h_3 \frac{\partial P_3}{\partial x} \Big|_{x=0} = \alpha (P_A - P_3); \\ -K_3 h_3 \frac{\partial P_3}{\partial y} \Big|_{y=0} = \alpha (P_A - P_3); \end{cases} \quad \begin{cases} K_3 h_3 \frac{\partial P_3}{\partial x} \Big|_{x=L} = \alpha (P_A - P_3); \\ K_3 h_3 \frac{\partial P_3}{\partial y} \Big|_{y=L} = \alpha (P_A - P_3); \end{cases} \quad (5)$$

$$Q = \sum_{i_q=1}^{N_q} q_i \delta(x - x_i)(y - y_i); \quad i_q = 1, \dots, N_q. \quad (6)$$

Bu yerda:

P_1, P_2, P_3 - qatlamlardagi bosim, P_A - chegaradagi bosim, μ - gaz qovushqoqligi, P_{1H}, P_{2H}, P_{3H} - qatlamlar boshlang'ich bosimi, K_1, K_2, K_3 - qatlamlar o'tkazuvchanlik koeffitsientlari, K_{n1}, K_{n2} - sust o'tkazuvchanlik qatlam koeffitsientlari, h_1, h_2, h_3 - qatlamlar quvvati, m - qatlamlar g'ovaklik koeffitsienti, $q_{i_q} - i_q$ - chi quduq debiti, a - gaz to'yinganligi koeffitsienti, L - qatlam uzunligi, N_q - quduqlar soni, n - chegara sohasidagi normal, δ - Dirak delta funksiyasi, α - o'lchamga keltiruvchi parametr.

(1)-(5) chegaraviy masalani chekli ayirma usulida yechish uchun quyidagi o'lchovsiz o'zgaruvchilarni kiritamiz:

$$x^* = \frac{x}{L}; \quad y^* = \frac{y}{L}; \quad \tau = \frac{K_x t P_x}{2\alpha m \mu L^2}; \quad K_1^* = \frac{K_1}{K_x}; \quad K_2^* = \frac{K_2}{K_x}; \quad K_3^* = \frac{K_3}{K_x}; \quad h_1^* = \frac{h_1}{h_x}; \quad h_2^* = \frac{h_2}{h_x};$$

$$h_3^* = \frac{h_3}{h_x}; \quad K_{n1}^* = \frac{K_{n1}}{K_x}; \quad K_{n2}^* = \frac{K_{n2}}{K_x}; \quad h_{n1}^* = \frac{h_{n1}}{h_x}; \quad h_{n2}^* = \frac{h_{n2}}{h_x}; \quad P_1^* = \frac{P_1}{P_x}; \quad P_2^* = \frac{P_2}{P_x}; \quad P_3^* = \frac{P_3}{P_x};$$

$$q^* = \frac{\mu L^2}{K_x h_x P_x} Q; \quad \alpha^* = \frac{L}{K_x h_x} \alpha.$$

Bunda K_x, h_x, P_x mos ravishda qatlam o'tkazuvchanligi, quvvati va bosimning ma'lum kattalikdagi qiymatlari:

$$K_x = \max(K_1, K_2, K_3, K_{H1}, K_{H2}), \quad h_x = \max(h_1, h_2, h_3, h_{H2}, h_{H3}), \quad P_x = \max(P_1, P_2, P_3).$$

Soddalashtirish uchun tenglamalardagi "*" ni qo'ymaslik orqali o'lchovsiz o'zgaruvchilardagi (1)-(5) masala quyidagicha yoziladi:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x} \left[K_1 h_1 \frac{\partial P_1^2}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[K_1 h_1 \frac{\partial P_1^2}{\partial y} \right] = \frac{h_1 \partial P_1}{\partial \tau} - \frac{K_{H1} L^2}{h_{H1} h_x^2 K_x} (P_2^2 - P_1^2), \\ \frac{\partial}{\partial x} \left[K_2 h_2 \frac{\partial P_2^2}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[K_2 h_2 \frac{\partial P_2^2}{\partial y} \right] = \frac{h_2 \partial P_2}{\partial \tau} + \frac{K_{H1} L^2}{h_{H1} h_x^2 K_x} (P_2^2 - P_1^2) - \frac{K_{H2} L^2}{h_{H2} h_x^2 K_x} (P_3^2 - P_2^2) + q, \\ \frac{\partial}{\partial x} \left[K_3 h_3 \frac{\partial P_3^2}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[K_3 h_3 \frac{\partial P_3^2}{\partial y} \right] = \frac{h_3 \partial P_3}{\partial \tau} + \frac{K_{H2} L^2}{h_{H2} h_x^2 K_x} (P_3^2 - P_2^2). \end{cases} \quad (7)$$

$$0 < x < 1; \quad 0 < y < 1; \quad \tau > 0$$

Masalaning boshlang'ich va chegaraviy shartlari quyidagicha:

$$P_1(x, y, t_0) = P_{1H}(x, y), \quad P_2(x, y, t_0) = P_{2H}(x, y), \quad P_3(x, y, t_0) = P_{3H}(x, y). \quad (8)$$

$$\begin{cases} -K_1 h_1 \frac{\partial P_1}{\partial x} \Big|_{x=0} = \alpha (P_A - P_1); \\ -K_1 h_1 \frac{\partial P_1}{\partial y} \Big|_{y=0} = \alpha (P_A - P_1); \end{cases} \quad \begin{cases} K_1 h_1 \frac{\partial P_1}{\partial x} \Big|_{x=1} = \alpha (P_A - P_1); \\ K_1 h_1 \frac{\partial P_1}{\partial y} \Big|_{y=1} = \alpha (P_A - P_1); \end{cases} \quad (9)$$

$$\begin{cases} -K_2 h_2 \frac{\partial P_2}{\partial x} \Big|_{x=0} = \alpha (P_A - P_2); \\ -K_2 h_2 \frac{\partial P_2}{\partial y} \Big|_{y=0} = \alpha (P_A - P_2); \end{cases} \quad \begin{cases} K_2 h_2 \frac{\partial P_2}{\partial x} \Big|_{x=1} = \alpha (P_A - P_2); \\ K_2 h_2 \frac{\partial P_2}{\partial y} \Big|_{y=1} = \alpha (P_A - P_2); \end{cases} \quad (10)$$

$$\begin{cases} -K_3 h_3 \frac{\partial P_3}{\partial x} \Big|_{x=0} = \alpha (P_A - P_3); \\ -K_3 h_3 \frac{\partial P_3}{\partial y} \Big|_{y=0} = \alpha (P_A - P_3); \end{cases} \quad \begin{cases} K_3 h_3 \frac{\partial P_3}{\partial x} \Big|_{x=1} = \alpha (P_A - P_3); \\ K_3 h_3 \frac{\partial P_3}{\partial y} \Big|_{y=1} = \alpha (P_A - P_3); \end{cases} \quad (11)$$

Tenglamalar tizimida qulaylik uchun $T_1 = K_1 h_1, T_2 = K_2 h_2, T_3 = K_3 h_3$.

$$R_1 = \frac{K_{H1} L^2}{h_{H1} h_x^2 K_x}, \quad R_2 = \frac{K_{H2} L^2}{h_{H2} h_x^2 K_x} \text{ belgilashlarni kiritamiz.}$$

Chegaraviy (8), (11) shartlar bilan (7) differensial tenglamani tavsiflovchi g'ovak muhida gaz filtratsiyasining o'lchovsiz chegaraviy masalasi (7)-(11) ko'ndalang-kesim oshkormas sxemasining chekli-ayirmali usulida yechiladi.

Diskret modelni qurish. (7)-(11) chegaraviy masalani sonli yechish uchun x, y o'qida $0 < t < T_0$ vaqt oraliqlarida quyidagi to'rti quramiz

$$\omega_{x,y,\tau} = \{x = i\Delta x; y = j\Delta y; i = \overline{1, n}; j = \overline{1, n}; \tau_l = l\Delta \tau; l = \overline{0, 1, 2, \dots, N_\tau}; \Delta \tau = \frac{T_0}{N_\tau}\}.$$

Ushbu sohada chekli ayirmali masalani qurish uchun oshkormas o'zgaruvchilar yo'nalishi sxemasining (ko'ndalang-kesim sxemas) algoritmik g'oyasi qo'llaniladi. l -chi vaqt qatlamidan $l+1$ qatlamiga o'tish $0.5\Delta \tau$ qadam bilan ikki bosqichda amalga oshiriladi. Natijada yuqoridagi (7) tenglama ikkita chekli ayirmali tenglamalar tizimini ketma-ket yechishga keladi. U holda bu tenglamalarni ichki tugunlar uchun $l+0,5$ va $l+1$ vaqt qatlamida quyidagi shaklda yozish mumkin:

$$\begin{aligned}
& \frac{T_{1i-0.5,j} P_{1i-1,j}^{2(i+1,2)} - (T_{1i-0.5,j} + T_{1i+0.5,j}) P_{1i,j}^{2(i+1,2)} + T_{1i+0.5,j} P_{1i+1,j}^{2(i+1,2)}}{\Delta x^2} + \\
& + \frac{T_{1i,j-0.5} P_{1i,j-1}^{2(i)} - (T_{1i,j-0.5} + T_{1i,j+0.5}) P_{1i,j}^{2(i)} + T_{1i,j+0.5} P_{1i,j+1}^{2(i)}}{\Delta y^2} = \\
& = h_{1i,j} \frac{P_{1i,j}^{(i+1/2)} - P_{1i,j}^i}{\Delta \tau / 2} - R_1 P_{2i,j}^{2(i+1/2)} + R_1 P_{1i,j}^{2(i+1/2)} + R_3 P_{3i,j}^{2(i+1/2)}, \\
& \frac{T_{1i-0.5,j} P_{1i-1,j}^{2(i+1/2)} - (T_{1i-0.5,j} + T_{1i+0.5,j}) P_{1i,j}^{2(i+1/2)} + T_{1i+0.5,j} P_{1i+1,j}^{2(i+1/2)}}{\Delta x^2} + \\
& + \frac{T_{1i,j-0.5} P_{1i,j-1}^{2(i+1)} - (T_{1i,j-0.5} + T_{1i,j+0.5}) P_{1i,j}^{2(i+1)} + T_{1i,j+0.5} P_{1i,j+1}^{2(i+1)}}{\Delta y^2} = \\
& = h_{1i,j} \frac{P_{1i,j}^{(i+1/2)} - P_{1i,j}^{(i+1)}}{\Delta \tau / 2} - R_1 P_{2i,j}^{2(i+1)} + R_1 P_{1i,j}^{2(i+1)} + R_3 P_{3i,j}^{2(i+1)}, \\
& \frac{T_{2i-0.5,j} P_{2i-1,j}^{2(i+1/2)} - (T_{2i-0.5,j} + T_{2i+0.5,j}) P_{2i,j}^{2(i+1/2)} + T_{2i+0.5,j} P_{2i+1,j}^{2(i+1/2)}}{\Delta x^2} + \\
& + \frac{T_{2i,j-0.5} P_{2i,j-1}^{2(i)} - (T_{2i,j-0.5} + T_{2i,j+0.5}) P_{2i,j}^{2(i)} + T_{2i,j+0.5} P_{2i,j+1}^{2(i)}}{\Delta y^2} = \\
& = h_{2i,j} \frac{P_{2i,j}^{(i+1/2)} - P_{2i,j}^i}{\Delta \tau / 2} + R_1 P_{2i,j}^{2(i+1/2)} - R_1 P_{1i,j}^{2(i+1/2)} - R_2 P_{3i,j}^{2(i+1/2)} + R_2 P_{2i,j}^{2(i+1/2)} + \delta_{i,j} q_{i,j}, \\
& \frac{T_{2i-0.5,j} P_{2i-1,j}^{2(i+1/2)} - (T_{2i-0.5,j} + T_{2i+0.5,j}) P_{2i,j}^{2(i+1/2)} + T_{2i+0.5,j} P_{2i+1,j}^{2(i+1/2)}}{\Delta x^2} + \\
& + \frac{T_{2i,j-0.5} P_{2i,j-1}^{2(i+1)} - (T_{2i,j-0.5} + T_{2i,j+0.5}) P_{2i,j}^{2(i+1)} + T_{2i,j+0.5} P_{2i,j+1}^{2(i+1)}}{\Delta y^2} = \\
& = h_{2i,j} \frac{P_{2i,j}^{(i+1/2)} - P_{2i,j}^{(i+1)}}{\Delta \tau / 2} + R_1 P_{2i,j}^{2(i+1)} - R_1 P_{1i,j}^{2(i+1)} - R_2 P_{3i,j}^{2(i+1)} + R_2 P_{2i,j}^{2(i+1)} + \delta_{i,j} q_{i,j}, \\
& \frac{T_{3i-0.5,j} P_{3i-1,j}^{2(i+1/2)} - (T_{3i-0.5,j} + T_{3i+0.5,j}) P_{3i,j}^{2(i+1/2)} + T_{3i+0.5,j} P_{3i+1,j}^{2(i+1/2)}}{\Delta x^2} + \\
& + \frac{T_{3i,j-0.5} P_{3i,j-1}^{2(i)} - (T_{3i,j-0.5} + T_{3i,j+0.5}) P_{3i,j}^{2(i)} + T_{3i,j+0.5} P_{3i,j+1}^{2(i)}}{\Delta y^2} = \\
& = h_{3i,j} \frac{P_{3i,j}^{(i+1/2)} - P_{3i,j}^i}{\Delta \tau / 2} + R_2 P_{3i,j}^{2(i+1/2)} - R_2 P_{2i,j}^{2(i+1/2)} + R_3 P_{1i,j}^{2(i+1/2)}, \\
& \frac{T_{3i-0.5,j} P_{3i-1,j}^{2(i+1/2)} - (T_{3i-0.5,j} + T_{3i+0.5,j}) P_{3i,j}^{2(i+1/2)} + T_{3i+0.5,j} P_{3i+1,j}^{2(i+1/2)}}{\Delta x^2} + \\
& + \frac{T_{3i,j-0.5} P_{3i,j-1}^{2(i+1)} - (T_{3i,j-0.5} + T_{3i,j+0.5}) P_{3i,j}^{2(i+1)} + T_{3i,j+0.5} P_{3i,j+1}^{2(i+1)}}{\Delta y^2} = \\
& = h_{3i,j} \frac{P_{3i,j}^{(i+1/2)} - P_{3i,j}^{(i+1)}}{\Delta \tau / 2} + R_2 P_{3i,j}^{2(i+1)} - R_2 P_{2i,j}^{2(i+1)} + R_3 P_{1i,j}^{2(i+1)}.
\end{aligned}$$

Bu chekli ayirmali tenglamalar tizimidan ko‘rinib turibdiki, qo‘yilgan masala bosim funksiyasiga nisbatan chiziqsizdir. Shu sabab masalani yechishda har bir vaqt

oralig'ida iteratsion usulni ham qo'llashga to'g'ri keladi. Buning uchun chekli ayirmali tenglamalarning nohiziq hadlarini kvazichiziqi holga olib kelish metodikasidan foydalanamiz. Bu metodikaga asoslanib uning nohiziq qismlarini quyidagi ko'rinishda ifodalaymiz:

$$\varphi(P) \equiv \varphi(\bar{P}) + (P - \bar{P}) \frac{\partial \varphi(\bar{P})}{\partial P}. \quad (12)$$

Bu yerda:

\bar{P} - qatlam bosimi funksiyasining yaqinlashuvchi qiymati. U iteratsion jarayondan aniqlanadi $\bar{P} = P_{i,j}^{(s)}$, boshlang'ich holatda $P_{i,j}^{(0)} = \hat{P}_{i,j}$. Agar (7) formulani bosim funksiyasiga nisbatan yozadigan bo'lsak, u holda quyidagi formulaga ega bo'lamiz.

$$P^{2(i+1)} = 2\bar{P}^{(i+1)} P^{(i+1)} - \bar{P}^{2(i+1)}$$

Bosim funksiyasiga nisbatan iteratsion jarayon quyidagi shart bajarilmaguncha davom etadi

$$\left| P_{ij}^{(s)} - P_{ij}^{(s-1)} \right| < \varepsilon, \quad \left| P_{ij}^{(s)} - P_{ij}^{(s-1)} \right| < \varepsilon, \quad \left| P_{3j}^{(s)} - P_{3j}^{(s-1)} \right| < \varepsilon. \quad (13)$$

Bu yerda:

ε - iteratsiya aniqligi, oldindan beriladigan kichik son;

s - iteratsiya nomeri.

Shunday qilib, chiziqi bo'lmagan tenglamaning chiziqsiz hadlarini kvazichiziqi holga keltirish usulidan foydalanib, yuqoridagi tenglamalar tizimini kvazichiziqi tenglamalar tizimiga almashtiramiz va uni chekli ayirmali tenglamalar ko'rinishida quyidagicha yozamiz:

1- qatlam

$$\begin{aligned} & \frac{\Delta \tau}{2\Delta x^2} T_{i-0.5,j} (2\bar{P}_{i-1,j}^{(i+1/2)} P_{i-1,j}^{(i+1/2)} - \bar{P}_{i-1,j}^{2(i+1/2)}) - \frac{\Delta \tau}{2\Delta x^2} (T_{i-0.5,j} + T_{i+0.5,j}) (2\bar{P}_{i,j}^{(i+1/2)} P_{i,j}^{(i+1/2)} + \bar{P}_{i,j}^{2(i+1/2)}) + \\ & + \frac{\Delta \tau}{2\Delta x^2} T_{i+0.5,j} (2\bar{P}_{i+1,j}^{(i+1/2)} P_{i+1,j}^{(i+1/2)} - \bar{P}_{i+1,j}^{2(i+1/2)}) + \frac{\Delta \tau}{2\Delta y^2} T_{i,j-0.5} P_{i,j-1}^{2(i)} - \frac{\Delta \tau}{2\Delta y^2} (T_{i,j-0.5} + T_{i,j+0.5}) P_{i,j}^{2(i)} + \\ & + \frac{\Delta \tau}{2\Delta y^2} T_{i,j+0.5} P_{i,j+1}^{2(i)} = h_{i,j} P_{i,j}^{(i+1)} - h_{i,j} P_{i,j}^{(i)} - \frac{\Delta \tau}{2} R_1 (2\bar{P}_{2i,j}^{(i+1/2)} P_{2i,j}^{(i+1/2)} - \bar{P}_{2i,j}^{2(i+1/2)}) + \\ & + \frac{\Delta \tau}{2} R_1 (2\bar{P}_{i,j}^{(i+1/2)} P_{i,j}^{(i+1/2)} - \bar{P}_{i,j}^{2(i+1/2)}) + \frac{\Delta \tau}{2} R_3 (2\bar{P}_{3i,j}^{(i+1)} P_{3i,j}^{(i+1)} - \bar{P}_{3i,j}^{2(i+1)}); \\ & \frac{\Delta \tau}{2\Delta x^2} T_{i-0.5,j} P_{i-1,j}^{2(i+1/2)} - \frac{\Delta \tau}{2\Delta x^2} (T_{i-0.5,j} + T_{i+0.5,j}) P_{i,j}^{2(i+1/2)} + \frac{\Delta \tau}{2\Delta x^2} T_{i+0.5,j} P_{i+1,j}^{2(i+1/2)} + \\ & + \frac{\Delta \tau}{2\Delta y^2} T_{i,j-0.5} (2\bar{P}_{i,j-1}^{(i+1)} P_{i,j-1}^{(i+1)} - \bar{P}_{i,j-1}^{2(i+1)}) - \frac{\Delta \tau}{2\Delta y^2} (T_{i,j-0.5} + T_{i,j+0.5}) (2\bar{P}_{i,j}^{(i+1)} P_{i,j}^{(i+1)} + \bar{P}_{i,j}^{2(i+1)}) + \\ & + \frac{\Delta \tau}{2\Delta y^2} T_{i,j+0.5} (2\bar{P}_{i,j+1}^{(i+1)} P_{i,j+1}^{(i+1)} - \bar{P}_{i,j+1}^{2(i+1)}) = h_{i,j} P_{i,j}^{(i+1/2)} - h_{i,j} P_{i,j}^{(i+1)} - \frac{\Delta \tau}{2} R_1 (2\bar{P}_{2i,j}^{(i+1/2)} P_{2i,j}^{(i+1/2)} - \bar{P}_{2i,j}^{2(i+1/2)}) + \\ & + \frac{\Delta \tau}{2} R_1 (2\bar{P}_{i,j}^{(i+1/2)} P_{i,j}^{(i+1/2)} - \bar{P}_{i,j}^{2(i+1/2)}) + \frac{\Delta \tau}{2} R_3 (2\bar{P}_{3i,j}^{(i+1)} P_{3i,j}^{(i+1)} - \bar{P}_{3i,j}^{2(i+1)}). \end{aligned}$$

$$\text{Bu yerda } R_1 = \frac{K_{\Pi 1} L^2}{h_{\Pi 1} h_x^2 K_x}; \quad R_2 = \frac{K_{\Pi 2} L^2}{h_{\Pi 2} h_x^2 K_x}, \quad R_{33} = 0.$$

Xuddi shunday qatlamning ikkinchi va uchinchi tenglamasini ham $l+1/2$ vaqt qatlami uchun yuqoridagi kabi yozish mumkin.

Har bir $x=x_i$ nuqtada bosim $P_{i,j}^{l+1/2}$ qiymatini $l+1/2$ - vaqt qatlamida quyidagi uchta bir-biriga bog'liq chekli ayirmali tenglamalar tizimiga ega bo'lamiz ($l+1/2$ yuqori indeksni qulaylik uchun tushirib qoldiramiz):

$$\begin{cases} a_i P_{i-1,j} - b_i P_{i,j} + c_i P_{i+1,j} + d_i P_{2i,j} + e_i P_{3i,j} = -f_i; \\ a'_i P_{2i-1,j} - b'_i P_{2i,j} + c'_i P_{2i+1,j} + d'_i P_{i,j} + e'_i P_{3i,j} = -f'_i; \\ a''_i P_{3i-1,j} - b''_i P_{3i,j} + c''_i P_{3i+1,j} + d''_i P_{2i,j} + e''_i P_{i,j} = -f''_i; \quad i = \overline{1, n-1}. \end{cases} \quad (14)$$

Bu yerda $e_i = 0$, $e'_i = 0$, $e''_i = 0$. Bunda birinchi, ikkinchi va uchinchi tenglamalar koeffitsientlari quyidagicha bo'ladi:

$$\begin{aligned} a_i &= \frac{\Delta \tau}{2\Delta x^2} T_{i-0.5,j} 2\bar{P}_{i-1,j}^{(l+1/2)}; \quad b_i = h_{i,j} - \frac{\Delta \tau}{2\Delta x^2} (T_{i-0.5,j} + T_{i+0.5,j} - \frac{\Delta \tau}{2} R_1) 2\bar{P}_{i,j}^{(l+1/2)} \\ c_i &= \frac{\Delta \tau}{2\Delta x^2} T_{i+0.5,j} 2\bar{P}_{i+1,j}^{(l+1/2)}; \quad d_i = \frac{\Delta \tau}{2} R_1 2\bar{P}_{2i,j}^{(l+1/2)}; \quad e_i = \frac{\Delta \tau}{2} R_2 2\bar{P}_{3i,j}^{(l+1/2)} \\ f_i &= \frac{\Delta \tau}{2\Delta x^2} T_{i-0.5,j} \bar{P}_{i-1,j}^{2(l+1/2)} - \frac{\Delta \tau}{2\Delta x^2} (T_{i-0.5,j} + T_{i+0.5,j}) \bar{P}_{i,j}^{2(l+1/2)} + \frac{\Delta \tau}{2\Delta y^2} T_{i,j+0.5} P_{i,j+1}^{2(l)} - \\ &- h_{i,j} P_{i,j}^{l+1/2} + \frac{\Delta \tau}{2} R_1 \bar{P}_{2i,j}^{2(l+1/2)} - \frac{\Delta \tau}{2} R_1 \bar{P}_{i,j}^{2(l+1/2)} + \frac{\Delta \tau}{2\Delta x^2} T_{i+0.5,j} \bar{P}_{i+1,j}^{2(l+1/2)} - \frac{\Delta \tau}{2\Delta y^2} T_{i,j-0.5} P_{i,j-1}^{2(l)} - \\ &- \frac{\Delta \tau}{2\Delta y^2} (T_{i,j-0.5} + T_{i,j+0.5}) P_{i,j}^{2(l)} - \frac{\Delta \tau}{2} R_3 \bar{P}_{3i,j}^{2(l+1/2)}; \quad i = \overline{1, n-1}; \quad j = \overline{1, n-1}. \\ a'_i &= T \frac{\Delta \tau}{2\Delta x^2} T_{2i-0.5,j} 2\bar{P}_{2i-1,j}^{(l+1/2)}; \quad c'_i = \frac{\Delta \tau}{2\Delta x^2} T_{2i+0.5,j} 2\bar{P}_{2i+1,j}^{(l+1/2)}; \quad d'_i = \frac{\Delta \tau}{2} R_1 2\bar{P}_{i,j}^{(l+1/2)} \\ b'_i &= \left(\frac{\Delta \tau}{2\Delta x^2} (T_{2i-0.5,j} + T_{2i+0.5,j}) + \frac{\Delta \tau}{2} R_1 + \frac{\Delta \tau}{2} R_2 \right) 2\bar{P}_{2i,j}^{(l+1/2)} + h_{2i,j}; \quad e'_i = R_2 \Delta x^2; \\ f'_i &= \frac{\Delta \tau}{2\Delta x^2} T_{2i-0.5,j} \bar{P}_{2i-1,j}^{2(l+1/2)} - \frac{\Delta \tau}{2\Delta y^2} T_{2i,j-0.5} P_{2i,j-1}^{2(l)} + \frac{\Delta \tau}{2\Delta y^2} (T_{2i,j-0.5} + T_{2i,j+0.5}) P_{2i,j}^{2(l)} - \\ &- \frac{\Delta \tau}{2\Delta x^2} T_{2i+0.5,j} \bar{P}_{2i+1,j}^{2(l+1/2)} - \frac{\Delta \tau}{2\Delta y^2} T_{2i,j+0.5} P_{2i,j+1}^{2(l)} - \frac{\Delta \tau}{2\Delta x^2} (T_{2i-0.5,j} + T_{2i+0.5,j}) \bar{P}_{2i,j}^{2(l+1/2)} - h_{2i,j} P_{2i,j}^{l+1/2} - \\ &- \frac{\Delta \tau}{2} R_1 \bar{P}_{2i,j}^{2(l+1/2)} + \frac{\Delta \tau}{2} R_1 \bar{P}_{i,j}^{2(l+1/2)} + \frac{\Delta \tau}{2} R_2 \bar{P}_{3i,j}^{2(l+1/2)} - \frac{\Delta \tau}{2} R_2 \bar{P}_{2i,j}^{2(l+1/2)} + \frac{\Delta \tau}{2} \delta_{i,j} q_{i,j}, \\ a''_i &= \frac{\Delta \tau}{2\Delta x^2} T_{3i-0.5,j} 2\bar{P}_{3i-1,j}^{(l+1/2)}; \quad c''_i = \frac{\Delta \tau}{2\Delta x^2} T_{3i+0.5,j} 2\bar{P}_{3i+1,j}^{(l+1/2)}; \quad d''_i = \frac{\Delta \tau}{2} R_2 2\bar{P}_{2i,j}^{(l+1/2)}; \\ b''_i &= \left(\frac{\Delta \tau}{2\Delta x^2} (T_{3i-0.5,j} + T_{3i+0.5,j}) + \frac{\Delta \tau}{2} R_2 \right) 2\bar{P}_{3i,j}^{(l+1/2)} + h_{3i,j}; \quad e''_i = \frac{\Delta \tau}{2} R_3 2\bar{P}_{i,j}^{(l+1/2)}; \\ f''_i &= \frac{\Delta \tau}{2\Delta x^2} T_{3i-0.5,j} \bar{P}_{3i-1,j}^{2(l+1/2)} - \frac{\Delta \tau}{2\Delta x^2} (T_{3i-0.5,j} + T_{3i+0.5,j}) \bar{P}_{3i,j}^{2(l+1/2)} + \frac{\Delta \tau}{2\Delta x^2} T_{3i+0.5,j} \bar{P}_{3i+1,j}^{2(l+1/2)} - \\ &- \frac{\Delta \tau}{2\Delta y^2} T_{3i,j-0.5} P_{3i,j-1}^{2(l)} + \frac{\Delta \tau}{2\Delta y^2} (T_{3i,j-0.5} + T_{3i,j+0.5}) P_{3i,j}^{2(l)} - \frac{\Delta \tau}{2\Delta y^2} T_{3i,j+0.5} P_{3i,j+1}^{2(l)} - h_{3i,j} P_{3i,j}^{l+1/2} - \\ &- \frac{\Delta \tau}{2} R_2 \bar{P}_{3i,j}^{2(l+1/2)} + \frac{\Delta \tau}{2} R_2 \bar{P}_{2i,j}^{2(l+1/2)} - \frac{\Delta \tau}{2} R_3 \bar{P}_{i,j}^{2(l+1/2)}. \end{aligned}$$

Chekli ayirmalar tizimini yechish uchun haydash usulini qo'llaymiz. Haydash usuli qoidasiga ko'ra yechimlarni quyidagicha yozish mumkin:

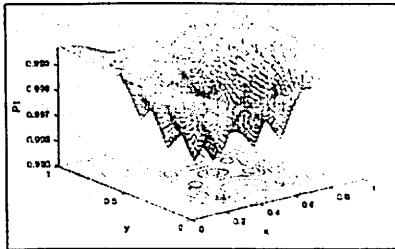
$$\begin{cases} P_{1i,j} = A_i P_{1i+1,j} + B_i P_{2i+1,j} + C_i P_{3i+1,j} + D_i; \\ P_{2i,j} = A'_i P_{2i+1,j} + B'_i P_{1i+1,j} + C'_i P_{3i+1,j} + D'_i; \\ P_{3i,j} = A''_i P_{3i+1,j} + B''_i P_{2i+1,j} + C''_i P_{1i+1,j} + D''_i; \end{cases} \quad i = \overline{N-1,0}. \quad (15)$$

Haydash usuli koefitsentlarini aniqlash uchun (6)-(7)dan foydalanib quydagi tenglamalar tizimini yozamiz.

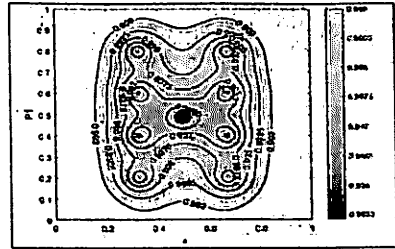
$$\begin{cases} a_i P_{1i-1,j} - b_i P_{1i,j} + c_i P_{1i+1,j} + d_i P_{2i,j} + e_i P_{3i,j} = -f_i, \\ P_{1i-1,j} = A_{i-1} P_{1i,j} + B_{i-1} P_{2i,j} + C_{i-1} P_{3i,j} + D_{i-1}, \\ a'_i P_{2i-1,j} - b'_i P_{2i,j} + c'_i P_{2i+1,j} + d'_i P_{1i,j} + e'_i P_{3i,j} = -f'_i, \\ P_{2i-1,j} = A'_{i-1} P_{2i,j} + B'_{i-1} P_{1i,j} + C'_{i-1} P_{3i,j} + D'_{i-1}, \\ a''_i P_{3i-1,j} - b''_i P_{3i,j} + c''_i P_{3i+1,j} + d''_i P_{2i,j} + e''_i P_{1i,j} = -f''_i, \\ P_{3i-1,j} = A''_{i-1} P_{3i,j} + B''_{i-1} P_{2i,j} + C''_{i-1} P_{1i,j} + D''_{i-1}. \end{cases} \quad (16)$$

Bu tenglamalar tizimidan $A_i, B_i, C_i, D_i; A'_i, B'_i, C'_i, D'_i; A''_i, B''_i, C''_i, D''_i$ haydash koefitsentlari topiladi. Haydash koefitsentlarining boshlang'ich qiymatlari chegaraviy shartlardan aniqlanadi. Xuddi shunday tizimning ikkinchi tenglamalar sistemasi ham $l+1$ vaqt qatlami uchun yuqoridagi (14) chekli ayirmali tenglama kabi yoziladi.

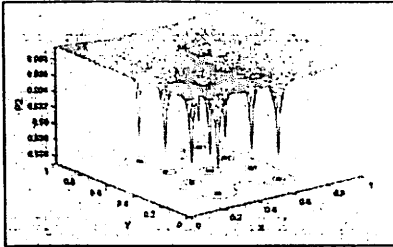
Hisoblash tajribalari 5, 9 va 10 ta markazda joylashgan quduqlarning va qatlam o'tkazuvchanlik koefitsentlari hamda sust o'tkazuvchan qatlam koefitsentlarining turli qiymatlarida o'tkazilgan ($Q_{1,y}=1000000 \text{ m}^3/\text{sutka}$, $K_1=0.2$; $K_2=0.2$; $K_3=0.1$; $K_{\Pi 1}=0.0003$; $K_{\Pi 2}=0.0002$).



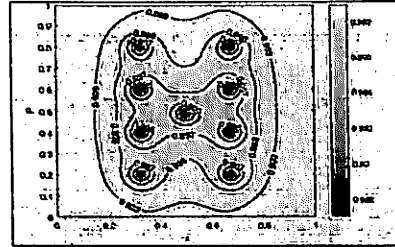
1-rasm. 1-qatlamda bosim o'zgarishi grafigi



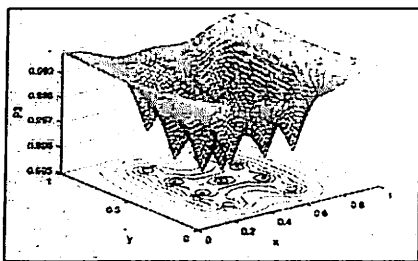
2-rasm. 1-qatlamda bosim o'zgarishning kontur grafigi



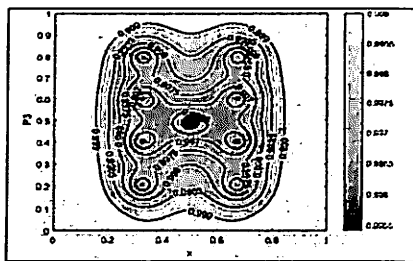
3-rasm. 2-qatlamda bosim o'zgarishi grafigi



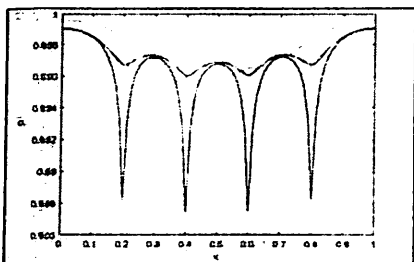
4-rasm. 2-qatlamda bosim o'zgarishning kontur grafigi



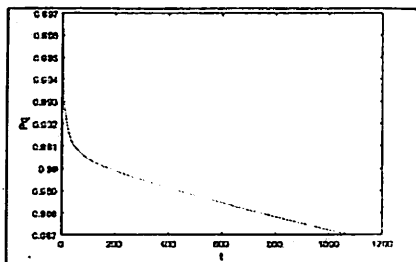
5-rasm. 3-qatlamda bosim o'zgarish grafigi



6-rasm. 3-qatlamda bosim o'zgarishning kontur grafigi



7-rasm. Kesimda bosim o'zgarish grafigi



8-rasm. Quduqda bosim tushish grafigi

Barcha o'tkazilgan hisoblash tajribalari tahlillari shuni ko'rsatadiki, bir jinsli bo'lmagan uch qatlamli g'ovak muhitli tizimda gazning filtratsiya jarayonida qatlamlarning o'tkazuvchanlik koeffitsienti muhim rol o'ynaydi, ya'ni asosiy qatlam o'tkazuvchanlik koeffitsientlarining katta qiymatlari qatlamlarda bosim tarqalishini tezlashtiradi, quduqlarda esa bosim tushishini sekinlashtiradi.

Xuddi shunday, sust o'tkazuvchan qatlam koeffitsientlari qiymatlarining oshishi asosiy qatlamlarda gazning bir-biriga oqib o'tish jarayonini tezlashtiradi. Bu jarayonda qaysi qatlamda bosim past bo'lsa, oqimning shu qatlamga o'tishini tezlashishiga olib keladi.

Dissertatsiya ishining "Bevosita bog'langan gaz qatlamlarida ko'p o'lchovli filtratsiya jarayonini matematik modellashtirish" deb nomlangan uchinchi bobida bevosita aloqadagi uch qatlamli g'ovak muhitlarda gazlar filtratsiya jarayonining uch o'lchamli matematik modeli, chegaraviy masalani chekli ayirmali va differensial ayirmali usullar hamda iteratsiya usuli kombinatsiyasidan foydalanib sonli modellashtirish va yechish algoritmlarini ishlab chiqish masalalari qaralgan. Hisoblash tajribalari natijasida olingan sonli natijalar grafiklarda tahlil qilingan.

Uch o'lchovli bir jinsli bo'lmagan g'ovak muhitda gaz filtratsiya jarayonining matematik modeli quyidagi differensial tenglama orqali tavsiflanadi.

$$\begin{cases} 2a_1mh_1\mu \frac{\partial P_1}{\partial t} = \frac{\partial P_1^2}{\partial x^2} + \frac{\partial P_1^2}{\partial y^2} + \frac{\partial}{\partial z} \left(k_1(z) \frac{\partial P_1^2}{\partial z} \right) \\ 2a_2mh_2\mu \frac{\partial P_2}{\partial t} = \frac{\partial P_2^2}{\partial x^2} + \frac{\partial P_2^2}{\partial y^2} + \frac{\partial}{\partial z} \left(k_2(z) \frac{\partial P_2^2}{\partial z} \right) - Q \\ 2a_3mh_3\mu \frac{\partial P_3}{\partial t} = \frac{\partial P_3^2}{\partial x^2} + \frac{\partial P_3^2}{\partial y^2} + \frac{\partial}{\partial z} \left(k_3(z) \frac{\partial P_3^2}{\partial z} \right) \end{cases} \quad (17)$$

Gaz konlarini o'zlashtirishning asosiy ko'rsatkichlarini aniqlashda biz (17) differensial tenglamalar tizimini quyidagi boshlang'ich, chegaraviy va ichki shartlar asosida yechamiz:

$$P_i(x, y, z, t) = P_{i0}(x, y, z), \quad t = 0, \quad (18) \quad -\frac{kh}{\mu} \frac{\partial P_i^2}{\partial n} = \alpha(P_A - P_i), \quad i = 1, 2, 3 \quad (19)$$

$$\oint_{\gamma_i} \frac{kh}{\mu} \frac{\partial P_i^2}{\partial n_i} ds = -q_{i0}(t), \quad i_i = \overline{1, N_{q_i}}, \quad (20) \quad Q = \sum_{i=1}^{N_q} \delta_{i,j,r} q_{i,j,r}, \quad i_i = \overline{1, N_{q_i}}, \quad (21)$$

Shubhasiz, qatlamlar orasidagi har bir chegarada bosim funksiyalari tengligi va uzluksizlik shartlari bajarilishi kerak:

$$\begin{aligned} P_1|_{z=L_1} &= P_2|_{z=L_1}; \quad P_2|_{z=L_2} = P_3|_{z=L_2}; \\ k_1 \frac{\partial P_1}{\partial z} \Big|_{z=L_1} &= k_2 \frac{\partial P_2}{\partial z} \Big|_{z=L_1}; \quad k_2 \frac{\partial P_2}{\partial z} \Big|_{z=L_2} = k_3 \frac{\partial P_3}{\partial z} \Big|_{z=L_2} \end{aligned} \quad (22)$$

Qo'yilgan chegaraviy masalani (17)-(22) sonli usulda yechish uchun uni o'lichamsiz holga keltiramiz. Buning uchun quyidagi belgilashlarni kiritamiz.

O'lichamsiz chegaraviy masalani chegara shartlari asosida differensial tenglamalarni tavsiflovchi g'ovak muhitda gaz filtratsiyasi jarayoni masalasini x va y o'zgaruvchilari yo'nalishida har bir $l+1/3$ va $l+2/3$ vaqt qatlamida ko'ndalang-kesim sxemasidan foydalanib chekli ayirmalar usuli yordamida va differensial-ayirma usulni qo'llab $l+1$ vaqt qatlamida yechamiz. Demak, z o'qi yo'nalishida har bir vaqt qatlamida $1/3$ qadam bilan yechiladi.

Qo'yilgan o'lichamsiz chegaraviy masalani sonli yechish uchun filtratsiya sohasi G va tashqi chegarasi Γ bilan bir tekis $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ qadamga ega bo'lgan quyidagi to'rni quramiz:

$$\Omega_{n\tau} = \left\{ x_i = i\Delta x, y_j = j\Delta y, z_r = r\Delta z, \tau = l\Delta\tau; \quad i, j, r = \overline{1, N}; \quad l = \overline{0, N_l}, \Delta\tau = \frac{1}{N_\tau} \right\}.$$

Masalani diskretlashtirish uchun o'zgaruvchan yo'nalishlar (ko'ndalang-kesim sxema) oshkormas sxemasining algoritmik g'oyasi qo'llaniladi. l -vaqt qatlamidan $l+1$ qatlamiga o'tish uch bosqichda $0.3\Delta\tau$ qadam bilan amalga oshiriladi. Natijada uchta chekli ayirmali tenglamalar tizimini ketma-ket yechish masalasiga kelinadi.

Bosim qiymatini $P_{i,j,r}^{l+1/3}$ hisoblash uchun har bir to'g'ri chiziqda $l+1/3$ vaqt qatlamida yetarli aniqlik bilan $x = x_i$ nuqtalarda quyidagi uch o'lovli tenglamalar tizimini yechamiz:

Handwritten signature and stamp: "A/2867" and "17".

$$\begin{cases} (3-2\Delta x L \alpha) P_{10,j,r}^{(l+1/3)} - 4P_{11,j,r}^{(l+1/3)} + P_{12,j,r}^{(l+1/3)} = -2\Delta x L \alpha P_{1,j,r}, \\ a_i P_{1i-1,j,r}^{(l+1/3)} - b_i P_{1i,j,r}^{(l+1/3)} + c_i P_{1i+1,j,r}^{(l+1/3)} = -d_i, \quad i, j, r = 1, 2, \dots, N-1, \\ (3-2\Delta x L \alpha) P_{1N,j,r}^{(l+1/3)} - 4P_{1N-1,j,r}^{(l+1/3)} + P_{1N-2,j,r}^{(l+1/3)} = 2\Delta x L \alpha P_{1,j,r}. \end{cases} \quad (23)$$

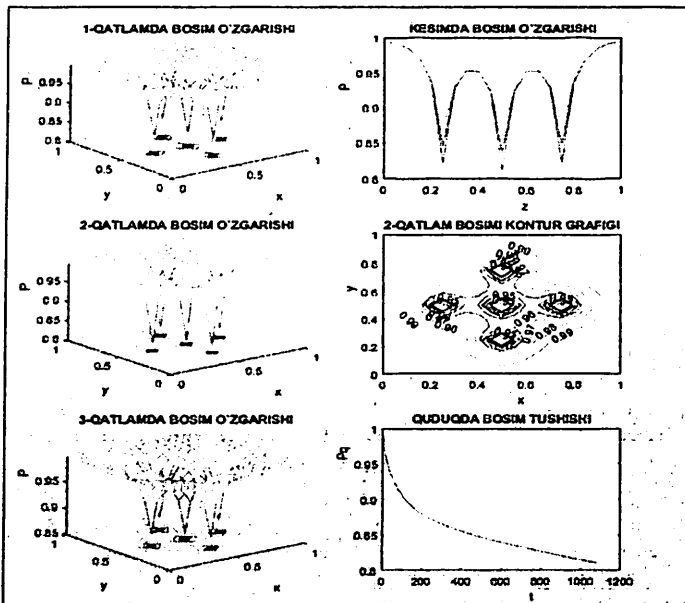
Bu yerda

$$\begin{aligned} a_i &= 2\bar{P}_{1i-1,j,r}, \quad b_i = 4\bar{P}_{1i,j,r} + \lambda_{xy}, \quad c_i = 2\bar{P}_{1i+1,j,r}, \\ d_i &= (2\bar{P}_{1i,j,r}^2 - \bar{P}_{1i-1,j,r}^2 - \bar{P}_{1i+1,j,r}^2) + \lambda_{xy} (P_{1i,j-1,r}^{2(l)} - 2P_{1i,j,r}^{2(l)} + P_{1i,j+1,r}^{2(l)}) + \\ &+ \frac{L^2}{h_0^2} \lambda_x (k_L P_{1i,j,r-1}^{2(l)} - (k_L + k_p) P_{1i,j,r}^{2(l)} + k_p P_{1i,j,r+1}^{2(l)}) + \lambda_x P_{1i,j,r}^{(l)} - \Delta x^2 \delta_{i,j,r} q_{1i,j,r}. \end{aligned}$$

Xuddi shu tarzda $l+2/3$ va $l+1$ vaqt qatlami uchun ham chekli ayirmali tenglamalar tizimi yozib olinadi.

Uch qatlamli gaz konlarining asosiy ko'rsatkichlarini o'rganish, aniqlash va kompyuterda hisoblash tajribalarini o'tkazish uchun quyidagi dastlabki ma'lumotlar kerak bo'ladi:

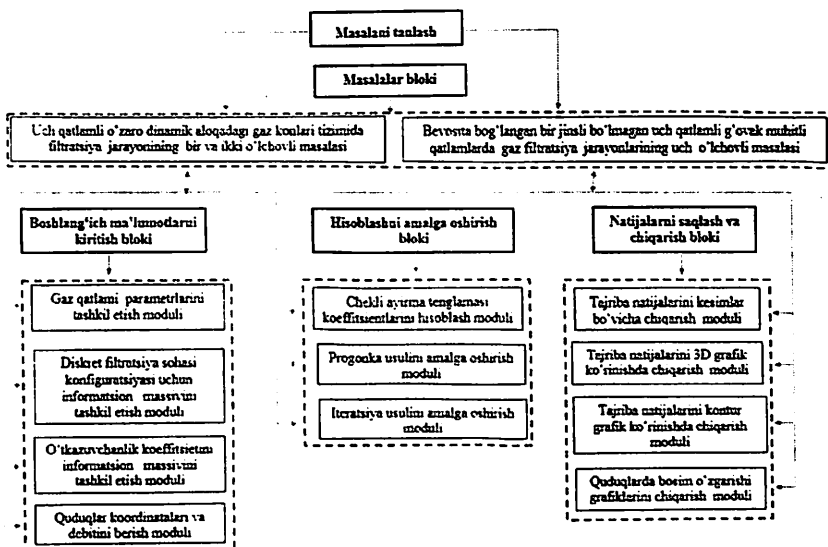
qatlam uzunligi $L = 10000 m$; qatlam quvvati $h = 10 m$; qatlamning dastlabki bosimi $P_H = 300 atm$; qatlam o'tkazuvchanligi $k = 0.1 Darsi$; gazning qovushqoqligi $\mu = 0.03 sPz$.



9-rasm. Uch o'lchovli masalani sonli yechish natijalari grafigi

Bevosita bog'langan uch qatlamli gaz konlarini o'zlashtirishning asosiy ko'rsatkichlarini hisoblash uchun ishlab chiqilgan sonli modellashtirish usullari va dasturiy ta'minotidagi tahlil qilish va bashoratlashda, shuningdek, ko'p qatlamli neft va gaz konlarini o'zlashtirishda foydalanish mumkin.

Dissertatsiya ishining "Hisoblash tajribalarini o'tkazishda olingan natijalarni vizual formada taqdim etishning dasturiy majmui" deb nomlangan to'rtinchi bobida gaz konlarini o'zlashtirishning asosiy ko'rsatkichlarini hisoblashda universal chekli ayirmali usullarga asoslangan algoritmlar yordamida dasturiy ta'minotlarni ishlab chiqishda dastur uchun zarur bo'lgan boshlang'ich ma'lumotlarni shakllantirish, diskret sohaning axborot massivini, dasturiy ta'minot paketining modullari funksional sxemasi va dasturdan foydalanish uchun foydalanuvchi interfeysni yaratish masalalari qaralgan. Bu masalalarni hal etish gaz konlarini o'zlashtirishda asosiy ko'rsatkichlarni hisoblash qulayliklarini ta'minlaydi va olingan natijalarning ishonchiligidini yanada oshiradi, sonli natijalarni grafik shaklda turli xildagi 3D formatlarda vizual formada taqdim etish imkoniyatini yaratadi.



10-rasm. "Ko'p qatlamli gaz konlarini o'zlashtirishda uning asosiy ko'rsatkichlarini hisoblash" dasturiy majmua modullarining funksional sxemasi

O'zaro sust o'tkazuvchan qatlamlarga ega va bevosita bog'langan uch qatlamli gaz konlarini o'zlashtirishning asosiy ko'rsatkichlarini hisoblash uchun dasturiy majmua ishlab chiqilgan. Sonli modellashtirish usullari va dasturiy majmuadan ko'p

qatlamli neft va gaz konlarini o'zlashtirish bilan bir qatorda tahlil qilish hamda loyihalashda foydalanish mumkin.

XULOSA

Dissertatsiya ishi bo'yicha olib borilgan tadqiqotlar asosida quyidagi natijalarga erishildi:

1. Ko'p qatlamli g'ovak muhitda gaz konlarini o'zlashtirishning asosiy ko'rsatkichlarini aniqlashning o'ziga xos xususiyatlari va matematik modellashtirish muammolari tahlili qilinishi, qo'yilgan muammolarni hal etishda kerak bo'ladigan axborot modeli shakllantirildi. Qo'yilgan chegaraviy masalalarni yechish bo'yicha ma'lumotlar olindi. Ushbu axborot modeli filtratsiya jarayonini matematik modellashtirish uchun xizmat qiladi.

2. Sust o'tkazuvchan qatlamlarga ega o'zaro dinamik aloqadagi gaz nostatsionar filtratsiya jarayoni masalasining matematik modeli ishlab chiqildi va chegaraviy masala shakllantirildi. Dinamik aloqadagi uch qatlamli g'ovak muhitda gazning nostatsionar filtratsiya chegaraviy masalasi chekli ayirmalar usuli asosida yechildi va hisoblash algoritmlari ishlab chiqildi, hamda kompyuterda hisoblash tajribalari o'tkazilib, natijalar olindi.

3. Bevosita bog'langan ko'p qatlamli uch o'lchovli gaz filtratsiya chegaraviy masalasi shakllantirildi va sonli modelashtirishda o'zgaruvchilar yo'nalishi sxemasi yordamida masalaning diskret modeli, algoritmi ishlab chiqildi. Ishlab chiqilgan algoritm asosida dastur yaratilib, hisoblash tajribalari o'tkazildi va tahlil qilindi.

4. G'ovak muhitda uch qatlamli bevosita va o'zaro dinamik aloqaga ega gaz konlarining asosiy ko'rsatkichlarini aniqlovchi va bashorat qiluvchi "Ko'p qatlamli gaz konlarini o'zlashtirishda uning asosiy ko'rsatkichlarini hisoblash" dasturiy majmuasi yaratildi. Natijada olingan sonli natijalarni grafiklarda tasvirlash imkoniga ega bo'lindi.

5. Ko'p qatlamli gaz konlari asosiy ko'rsatkichlarini hisoblash dasturiy majmui "Geo Interpretation Group" MChJ, "Epsilon Development Company" MChJ, "GISSARNETGAZ" MChJ larga joriy qilindi. Olingan natijalar asosida hisoblashga ketgan vaqt 32% ga kamayib, ish unumdorligi 7% gacha oshishiga erishildi.

**НАУЧНЫЙ СОВЕТ DSc.13/30.12.2019.Т.07.01
ПО ПРИСУЖДЕНИЮ УЧЕНЫХ СТЕПЕНЕЙ ПРИ ТАШКЕНТСКОМ
УНИВЕРСИТЕТЕ ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ**

**ТАШКЕНТСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ИНФОРМАЦИОННЫХ
ТЕХНОЛОГИЙ**

МАХМУДОВА МОХИНИСО МИЗРОФ КИЗИ

**МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ
ФИЛЬТРАЦИИ ГАЗА В НЕПОСРЕДСТВЕННО И ДИНАМИЧЕСКИ
СВЯЗАННЫХ ПОРИСТЫХ СРЕДАХ**

05.01.07 – Математическое моделирование. Численные методы и комплекс программ

**АВТОРЕФЕРАТ ДИССЕРТАЦИИ
ДОКТОРА ФИЛОСОФИИ (PhD) ПО ТЕХНИЧЕСКИМ НАУКАМ**

Ташкент – 2024

Тема диссертации доктора философии (PhD) по техническим наукам зарегистрирована в Высшей аттестационной комиссии при Кабинете Министров в Министерстве высшего образования, науки и инноваций Республики Узбекистан за номером В2023.1.PhD/Т3464

Диссертация выполнена в Ташкентском университете информационных технологий. Автореферат диссертации на трех языках (узбекский, русский, английский (резюме)) размещен на веб-странице научного совета (www.tuit.uz) и на Информационно-образовательном портале "ZiyoNet" (www.ziyo.net).

Научный руководитель: **Нетьматов Абдугани**
кандидат физико-математических наук, доцент

Официальные оппоненты: **Джуманов Жамолжон Худайкулович**
доктор технических наук, профессор
Нормурадов Чори Бегалиевич
доктор технических наук, профессор

Ведущая организация: **Каршинский государственный университет**

Защита диссертации состоится "___" _____ 2024 г. в ___ часов на заседании Научного совета DSc.13/30.12.2019.T.07.01 при Ташкентском университете информационных технологий. (Адрес: 100084, г. Ташкент, ул. Амира Темура, 108. Тел.: (99871) 238-64-43; e-mail: iktuit@tuit.uz).

С диссертацией можно ознакомиться в Ташкентского университета информационных технологий (регистрационный номер № _____). (Адрес: 100084, г. Ташкент, ул. Амира Темура, 108. Тел.: (99871) 238-64-70).

Автореферат диссертации разослан "___" _____ 2024 года.
(протокол рассылки № ___ от "___" _____ 2024 г.).

М.М. Мусаев
Председатель научного совета по
присуждению учёных степеней, д.т.н., профессор

Э.Ш. Назирова
Ученый секретарь научного совета по
присуждению учёных степеней, д.т.н. профессор

Ф.М. Нуралиев
Председатель научного семинара при
научном совете по присуждению учёных
степеней, д.т.н. профессор

Введение (аннотация к диссертации доктора философии (PhD))

Актуальность и востребованность темы диссертации. Основой интенсивного развития мировой экономики является нефтегазовая отрасль. Поэтому большое внимание уделяется на развитие научно обоснованных методов математического моделирования процессов фильтрации нефти и газа, проведению вычислительных экспериментов на базе проблемных автоматизированных систем по исследованию нестационарных процессов движения жидкостей и газов в пористых средах. Большое внимание уделяется проблеме задач разработки математических моделей, алгоритмов расчета и программного комплекса в таких развитых странах как Канаде, США, Франции, ОАЭ, Иране, Китае, Российской Федерации, Украине, Казахстане, Азербайджане и других странах.

Во всем мире проводятся научные исследования по разработке математических моделей процессов фильтрации нефти и газа в пористых средах, созданию геологических и гидродинамических 3D-моделей нефти и газа, алгоритмов и систем основных показателей газовых месторождений. Одним из целевых научных исследований является изучение объектов газовых месторождений и процессов фильтрации, а также проведение вычислительных экспериментов для изучения полученных результатов.

В нашей республике также уделяется большое внимание на подготовку высококвалифицированных кадров в целях развития нефтегазовой отрасли налаживание взаимной интеграции образования, науки и производства в этой сфере, совершенствование методов и форм подготовки кадров. Большое внимание уделяется повышению качества и эффективности использования трудовых ресурсов. Согласно решению от 7 июля 2022 года УП-309 «Меры по созданию образовательно-производственного кластера в нефтегазовой сфере» на основании решения определены задачи «...исходя из потребностей производственных предприятий нефтегазовой отрасли, современных требований на основе подготовки специалистов и научных кадров в соответствии с международными образовательными стандартами,... путем непосредственного применения научных достижений в производстве, диверсификации производства нефтегазовой продукции и повышения экспортного потенциала отрасли. При реализации этих задач важно создание программных комплексов с использованием математического моделирования, эффективного алгоритма вычислительных экспериментов и современных информационных технологий.

В республике на развитие нефтегазовой отрасли уделяется большое внимание. В частности, Президентом принят и реализуется ряд решений и указов. В том числе Указ №УП-60 от 28.01.2022 «Об ускорении трансформационных процессов в нефтегазовом секторе», Постановление президента ПП-4664 от 04.04.2020 «О первоочередных мерах по повышению финансовой устойчивости нефтегазового комплекса» имеет большое значение в создании научных основ этой области, подготовке квалифицированных специалистов и направлении их в производственные и реализующие отрасли,

а также в реализации задач, определенных в других нормативно-правовых документах, связанных с этой областью. Настоящее диссертационное исследование служит в определенной степени реализации задач, определенных в решениях и других нормативных правовых документах, относящихся к данной области.

Соответствие исследований приоритетным направлениям развития науки и техники республики. Данное исследование является частью IV республиканского проекта развития науки и технологий. Оно выполнено в рамках приоритетного направления “Информатизация и развитие информационно-коммуникационных технологий”.

Степень изученности проблемы. В научных работах зарубежных учёных таких как А.Монтейро, М.Шарма, С.Банерджээ, Х.Азиз, Э.Сеттари, Г.И.Баренблатт, М.Чрайби, С.Минжо, В.Ф.Пивен, Ф.Бозр, Н.Б.Лопух, К.Лапуэрта, А.Х.Мирзаджанзаде, М.М.Хасанов, Б.Б.Лапук, К.С.Басниев, В.Ю.Булигин, Д.Я.Ахмед-Заки, С.Н.Закиров, А.В.Ахметзянова, А.Никифорова, А.В.Севаева, О.Р.Аббасова исследованы разработка и совершенствование математических моделей процессов фильтрации жидкости и газа, а также численные методы их решения, решение стационарных и нестационарных задач фильтрации в газовых слоях со слабопроницаемым слоем.

В Республики Узбекистан внесли свой большой вклад такие учёные как Ф.Б.Абуталиев, Д.Ф.Файзуллаев, Н.М.Мухиддинов, Р.Садуллаев, А.Бугматов, Б.Х.Хужаёров, М.Арипов, Н.Равшанов, У.С. Назаров, Ш.Каюмов, Ю. Ярбеков, А. Мирзаев, А.Нематов, Э.Ш.Назирова на методы расчёта и исследование математических модели процессов фильтрации жидкости и газа в пористых средах. Процессы фильтрации краевых задач, выраженные в виде дифференциальных уравнений параболического типа, представлены в книгах Д.Ф.Файзуллаева и Ф.Б.Абуталиева и в других источниках.

Анализ исследований в этой области показывает, что нестационарные фильтрационные процессы неоднородных многопластовых газовых месторождений, находящихся в динамическом сообщении друг с другом с плохопроницаемым слоем, в настоящее время недостаточно изучены.

Связь диссертационного исследования с научными планами высшего или научно-исследовательского учреждения, в котором выполнена диссертация. Диссертационная работа выполнена в рамках плана Ташкентского университета информационных технологий имени Мухаммада ал-Хорезми и Научно-исследовательского института развития цифровых технологий и искусственного интеллекта (НИИ РЦТИИ) 31222444 ИС «NGK-EkoLoyiha» № Б02.01-01 осуществляется в рамках проекта на тему «Создание алгоритма и программного продукта для проектирования месторождений нефти и газа» (2022-2024).

Цель исследования. Разработка математических моделей нестационарных процессов фильтрации на многопластовых газовых месторождениях с взаимной динамической и непосредственной связью, разработка численных методов решения и эффективных алгоритмов расчета,

а также создание программного комплекса для представления численных результатов расчетных экспериментов.

Задачи исследования:

формирование информационных моделей, используемых при построении математических моделей нестационарных процессов фильтрации газов в неоднородной многослойной пористой среде, взаимно динамичной и непосредственно связанной, а также создание информационного массива коэффициента проницаемости слоев и площади фильтрации газа;

разработка одно- и двумерной математической модели процесса нестационарной фильтрации с учетом изменения давления для системы газовых месторождений, находящихся во взаимной динамической связи с плохопроницаемыми слоями;

разработка алгоритма расчета решения краевой задачи фильтрации газа многослойными слабопроницаемыми слоями на основе схемы изменения направлений;

разработка трехмерной математической модели процесса нестационарной фильтрации газа в непосредственно связанной трехслойной пористой среде, разработка расчетного алгоритма решения с использованием численного моделирования и конечно-разностной схемы;

разработка функциональной структуры программного комплекса, определяющего и прогнозирующего основные показатели газовых месторождений с тремя слоями прямой и взаимной динамической связи в пористой среде.

Объект исследования рассмотрен процесс фильтрации газовых залежей в непосредственно и динамически связанной в трехслойной пористой среде.

Предметом исследования являются математические модели процесса фильтрации газа в непосредственно и динамически связанных слоях, алгоритмы решения и программный комплекс.

Методы исследования. В диссертационной работе использованы численные методы вычислительной математики, построения эффективных алгоритмов решения и методы технологий программирования.

Научная новизна исследования заключается в следующем:

разработана одномерная и двумерная математическая модель процесса нестационарной фильтрации с учетом изменения давления для системы газовых месторождений, находящихся во взаимной динамической связи с плохопроницаемыми пластами;

разработан вычислительный алгоритм решения краевой задачи фильтрации газа многослойными слабопроницаемыми слоями на основе схемы переменных направлений;

разработана и численно смоделирована трехмерная математическая модель процесса нестационарной фильтрации газа в непосредственно связанной трехслойной пористой среде и разработан вычислительный алгоритм решения с использованием конечно-разностной схемы;

разработана функциональная структура программного комплекса, определяющего и прогнозирующего основные показатели разработки газовых

месторождений с тремя слоями прямой и взаимной динамической связи в пористой среде.

Практическими результатами исследования являются:

на основе алгоритма расчета основных показателей разработки динамически связанных трехпластовых газовых месторождений разработано программное обеспечение и проведены вычислительные эксперименты;

на основе алгоритма расчета основных показателей разработки непосредственно связанных трехпластовых газовых месторождений разработано программное обеспечение и проведены вычислительные эксперименты;

разработан программный комплекс мониторинга и прогнозирования для представления численных результатов в визуальном виде.

Достоверность результатов исследования. Обосновывается законами сохранения массы и импульса, законами механики жидкостей, законом Дарси, проверенными методами вычислительной математики, а также качественной и количественной оценкой полученных результатов. Адекватность математической модели, разработанной для рассматриваемых процессов, объясняется тем, что при проведении вычислительных экспериментов материал проверяется с помощью уравнения баланса.

Научно-практическая значимость результатов исследования.

Научная значимость результатов исследования заключается в краевых задачах фильтрации газа во взаимосвязанных динамических и непосредственно связанных многослойных пористых средах, взаимосвязанных и непосредственно связанных неоднородном газовых месторождениях со слабопроницаемым слоем и трехмерные краевые задачи нестационарных процессов фильтрации газа с использованием конечно-разностных методов и эффективных алгоритмов, и их решения.

Практическая значимость результатов исследования заключается в применимости разработанных математических моделей, алгоритмов и комплекса программ в отрасли «Узбекнефтегаз», а также в применении математических моделей сложных нестационарных процессов фильтрации жидкости и газа, эффективных алгоритмов расчета объяснено решение двух- и трехмерных задач фильтрации.

Внедрение результатов исследования. На основе двух- и трехмерных математических моделей процесса фильтрации газа в многослойной пористой среде в непосредственно взаимно динамической связи разработаны алгоритмы решения и создан программный комплекс:

В ООО «Geo Interpretation Group» (справка Министерства цифровых технологий № 33-8/8673 от 4 декабря 2023 г.) внедрено программное обеспечение «Использование эффективных алгоритмов расчета основных показателей процессов фильтрации нефти и газа в многомерных пористых средах и визуализации численных результатов». В результате появилась возможность отслеживать изменения в расчете основных показателей в режиме реального времени в 3D графическом представлении, повысилась точность и достоверность полученных результатов, а производительность

труда была достигнута до 32% за счет сокращения время, потраченное на расчет.

На предприятии ООО «Epsilon Development Company» (справка Министерства цифровых технологий № 33-8/8673 от 4 декабря 2023 г.) внедрено программное обеспечение «Компьютерное моделирование процесса фильтрации газа в двухслойных пористых средах». За счет внедрения разработанных математических моделей, алгоритмов расчета и программного обеспечения можно отслеживать изменение численных результатов в реальном времени в 2D и 3D графических представлениях, достигнута точность, достоверность и снижение погрешности полученных результатов. В нем время, затрачиваемое на расчет, сократилось на 8-10% и повысилась эффективность производства на 7%.

Разработанное программное обеспечение «Численное моделирование процесса фильтрации газа в многослойной пористой среде» внедрено на объекте ООО «Гиссарнефтьгаз» (справка Министерства цифровых технологий № 33-8/8673 от 4 декабря 2023 г.). Полученные результаты полезны при разработке и анализе многопластовых газовых месторождений во взаимно динамической связи, а также позволили повысить эффективность газовых месторождений на 5-6%.

Апробация результатов исследования. Результаты исследования обсуждались на 9 международных (1 Scopus) и 5 республиканских научно-практических конференциях.

Публикация результатов исследования. Всего по теме исследования опубликовано 27 научных работ, из них 7 статей опубликованы в научных изданиях, рекомендованных к публикации основных научных результатов докторских диссертаций ВАК Республики Узбекистан, из них 3 опубликовано в зарубежных и 4 республиканских журналах. 9 на международных научно-практических конференциях, 5 республиканских научно-практических конференциях, а также получено 6 свидетельств о регистрации программного продукта для ЭВМ.

Структура и объем диссертации. Диссертационная работа состоит из введения, четырех глав, заключения, списка использованной литературы и приложений, объем диссертации составляет из 107 страниц, 43 рисунков.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Во введение обосновывается актуальность и востребованность темы диссертации, описываются цель и задачи исследования, объект и предмет, указывается ее соответствие приоритетным направлениям развития науки и техники республики, излагается научная новизна и практические результаты исследования, раскрывается достоверность, научно-практическая значимость полученных результатов, описываются внедрение результатов исследования в практику, апробация работы, публикации и приведены данные по структуре диссертации.

В первой главе диссертационной работы под названием «Проблемы математического моделирования и исследования процесса фильтрации газа в многослойных пористых средах» проведен анализ методов исследования и анализ существующих работ, связанных с темой диссертации, роль и значение математического моделирования фильтрации, также описаны процессы и проблемы в многопластовых газовых месторождениях. При этом решаются проблемы математического моделирования процесса фильтрации газа в динамических и непосредственно связанных многослойных пористых средах, задачи исследования процесса на основе анализа численных методов моделирования и вычислительных экспериментов, представлены особенности и анализ определения основных показателей при разработке газовых месторождений.

Рассмотрены математическая модель фильтрационного процесса, протекающего в неоднородных взаимно динамических и непосредственно связанных слоях, цели и задачи исследования.

Во второй главе диссертации на тему «Математическое моделирование процесса нестационарной фильтрации газа в многослойных пористых средах в динамической связи» представлены одно- и двумерная математическая модель краевой задачи процесса фильтрации газовых залежей в трехслойной взаимно динамической связи, представлены численный метод решения и алгоритм решения.

Рассматривается двумерная математическая модель процесса фильтрации газа в трехслойной пористой среде, находящейся в динамической связи друг с другом.

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x} \left[K_1 h_1 \frac{\partial P_1^2}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[K_1 h_1 \frac{\partial P_1^2}{\partial y} \right] = 2a\mu m h_1 \frac{\partial P_1}{\partial t} - \frac{K_{m1}}{h_{m1}} (P_2^2 - P_1^2) \\ \frac{\partial}{\partial x} \left[K_2 h_2 \frac{\partial P_2^2}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[K_2 h_2 \frac{\partial P_2^2}{\partial y} \right] = 2a\mu m h_2 \frac{\partial P_2}{\partial t} + \frac{K_{m1}}{h_{m1}} (P_2^2 - P_1^2) - \frac{K_{m2}}{h_{m2}} (P_3^2 - P_2^2) + Q \\ \frac{\partial}{\partial x} \left[K_3 h_3 \frac{\partial P_3^2}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[K_3 h_3 \frac{\partial P_3^2}{\partial y} \right] = 2a\mu m h_3 \frac{\partial P_3}{\partial t} + \frac{K_{m2}}{h_{m2}} (P_3^2 - P_2^2) \end{cases} \quad (1)$$

$t > 0; 0 < x < L; 0 < y < L.$

Математическая модель (1) решается при следующих начальных и граничных условиях:

$$P_1(x, y, t_0) = P_{1n}(x, y), \quad P_2(x, y, t_0) = P_{2n}(x, y), \quad P_3(x, y, t_0) = P_{3n}(x, y). \quad (2)$$

$$\begin{cases} -K_1 h_1 \frac{\partial P_1}{\partial x} \Big|_{x=0} = \alpha (P_A - P_1); & K_1 h_1 \frac{\partial P_1}{\partial x} \Big|_{x=L} = \alpha (P_A - P_1); \\ -K_1 h_1 \frac{\partial P_1}{\partial y} \Big|_{y=0} = \alpha (P_A - P_1); & K_1 h_1 \frac{\partial P_1}{\partial y} \Big|_{y=L} = \alpha (P_A - P_1); \end{cases} \quad (3)$$

$$\begin{cases} -K_2 h_2 \frac{\partial P_2}{\partial x} \Big|_{x=0} = \alpha (P_A - P_2); & K_2 h_2 \frac{\partial P_2}{\partial x} \Big|_{x=L} = \alpha (P_A - P_2); \\ -K_2 h_2 \frac{\partial P_2}{\partial y} \Big|_{y=0} = \alpha (P_A - P_2); & K_2 h_2 \frac{\partial P_2}{\partial y} \Big|_{y=L} = \alpha (P_A - P_2); \end{cases} \quad (4)$$

$$\begin{cases} -K_3 h_3 \frac{\partial P_3}{\partial x} \Big|_{x=0} = \alpha (P_A - P_3); \\ -K_3 h_3 \frac{\partial P_3}{\partial y} \Big|_{y=0} = \alpha (P_A - P_3); \end{cases} \quad \begin{cases} K_3 h_3 \frac{\partial P_3}{\partial x} \Big|_{x=L} = \alpha (P_A - P_3); \\ K_3 h_3 \frac{\partial P_3}{\partial y} \Big|_{y=L} = \alpha (P_A - P_3); \end{cases} \quad (5)$$

$$Q = \sum_{i_q=1}^{N_q} q_i \delta(x-x_i)(y-y_i); \quad i_q = 1, \dots, N_q. \quad (6)$$

Здесь:

P_1, P_2, P_3 - пластовое давление, P_A - граничное давление, μ - вязкости газа, P_{1H}, P_{2H}, P_{3H} - начальное давление пластов, K_1, K_2, K_3 - коэффициенты проницаемости пластов, K_{n1}, K_{n2} - коэффициенты плохопроницаемости пласта, h_1, h_2, h_3 - мощность пластов, m - пластовые коэффициенты пористости, Дебет q_i - i_q -й скважины, a - коэффициент газонасыщенности, L - длина пласта, N_q - количество скважин, n - нормаль в граничной зоне, δ - дельта-функция Дирака, α - параметр приведящий к размерность.

Для решения краевой задачи (1)-(5) методом конечных разностей введем следующие безразмерные переменные:

$$\begin{aligned} x^* &= \frac{x}{L}; \quad y^* = \frac{y}{L}; \quad \tau = \frac{K_x t P_x}{2am\mu L^2}; \quad K_1^* = \frac{K_1}{K_x}; \quad K_2^* = \frac{K_2}{K_x}; \quad K_3^* = \frac{K_3}{K_x}; \quad h_1^* = \frac{h_1}{h_x}; \quad h_2^* = \frac{h_2}{h_x}; \\ h_3^* &= \frac{h_3}{h_x}; \quad K_{n1}^* = \frac{K_{n1}}{K_x}; \quad K_{n2}^* = \frac{K_{n2}}{K_x}; \quad h_{n1}^* = \frac{h_{n1}}{h_x}; \quad h_{n2}^* = \frac{h_{n2}}{h_x}; \quad P_1^* = \frac{P_1}{P_x}; \quad P_2^* = \frac{P_2}{P_x}; \quad P_3^* = \frac{P_3}{P_x}; \\ q^* &= \frac{\mu L^2}{K_x h_x P_x} Q; \quad \alpha^* = \frac{L}{K_x h_x} \alpha. \end{aligned}$$

В данном случае K_x, h_x, P_x - значения проницаемости, мощности и давления пласта соответственно определенных величин:

$$K_x = \max(K_1, K_2, K_3, K_{n1}, K_{n2}), \quad h_x = \max(h_1, h_2, h_3, h_{n1}, h_{n2}), \quad P_x = \max(P_1, P_2, P_3).$$

Опустив «*» в уравнениях для упрощения, задачу (1)-(5) в безразмерных переменных запишем следующим образом:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x} \left[K_1 h_1 \frac{\partial P_1^2}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[K_1 h_1 \frac{\partial P_1^2}{\partial y} \right] = \frac{h_1 \partial P_1}{\partial \tau} - \frac{K_{n1} L^2}{h_{n1} h_x^2 K_x} (P_2^2 - P_1^2), \\ \frac{\partial}{\partial x} \left[K_2 h_2 \frac{\partial P_2^2}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[K_2 h_2 \frac{\partial P_2^2}{\partial y} \right] = \frac{h_2 \partial P_2}{\partial \tau} + \frac{K_{n1} L^2}{h_{n1} h_x^2 K_x} (P_2^2 - P_1^2) - \frac{K_{n2} L^2}{h_{n2} h_x^2 K_x} (P_3^2 - P_2^2) + q, \\ \frac{\partial}{\partial x} \left[K_3 h_3 \frac{\partial P_3^2}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[K_3 h_3 \frac{\partial P_3^2}{\partial y} \right] = \frac{h_3 \partial P_3}{\partial \tau} + \frac{K_{n2} L^2}{h_{n2} h_x^2 K_x} (P_3^2 - P_2^2). \end{cases} \quad (7)$$

$$0 < x < 1; \quad 0 < y < 1; \quad \tau > 0$$

Начальные и граничные условия задачи следующие:

$$P_1(x, y, t_0) = P_{1H}(x, y), \quad P_2(x, y, t_0) = P_{2H}(x, y), \quad P_3(x, y, t_0) = P_{3H}(x, y). \quad (8)$$

$$\begin{cases} -K_1 h_1 \frac{\partial P_1}{\partial x} \Big|_{x=0} = \alpha (P_A - P_1); \\ -K_1 h_1 \frac{\partial P_1}{\partial y} \Big|_{y=0} = \alpha (P_A - P_1); \end{cases} \quad \begin{cases} K_1 h_1 \frac{\partial P_1}{\partial x} \Big|_{x=1} = \alpha (P_A - P_1); \\ K_1 h_1 \frac{\partial P_1}{\partial y} \Big|_{y=1} = \alpha (P_A - P_1); \end{cases} \quad (9)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} -K_2 h_2 \frac{\partial P_2}{\partial x} \Big|_{x=0} = \alpha(P_A - P_2); \\ -K_2 h_2 \frac{\partial P_2}{\partial y} \Big|_{y=0} = \alpha(P_A - P_2); \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} K_2 h_2 \frac{\partial P_2}{\partial x} \Big|_{x=1} = \alpha(P_A - P_2); \\ K_2 h_2 \frac{\partial P_2}{\partial y} \Big|_{y=1} = \alpha(P_A - P_2); \end{array} \right. \quad (10)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} -K_3 h_3 \frac{\partial P_3}{\partial x} \Big|_{x=0} = \alpha(P_A - P_3); \\ -K_3 h_3 \frac{\partial P_3}{\partial y} \Big|_{y=0} = \alpha(P_A - P_3); \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} K_3 h_3 \frac{\partial P_3}{\partial x} \Big|_{x=1} = \alpha(P_A - P_3); \\ K_3 h_3 \frac{\partial P_3}{\partial y} \Big|_{y=1} = \alpha(P_A - P_3); \end{array} \right. \quad (11)$$

Для удобства в систему уравнений введем обозначения

$$T_1 = K_1 h_1, \quad T_2 = K_2 h_2, \quad T_3 = K_3 h_3, \quad R_1 = \frac{K_{n1} L^2}{h_{n1} h_x^2 K_x}, \quad R_2 = \frac{K_{n2} L^2}{h_{n2} h_y^2 K_x}.$$

Безразмерная краевая задача фильтрации газа в пористой среде, описывающая дифференциальное уравнение (7) с граничными условиями (8), (11), решается методом конечных разностей поперечной неявной схемы (7)-(11).

Для численного решения краевой задачи (7)-(11) построим следующую сетку через $0 < t < T_0$ интервала времени по оси x, y

$$\omega_{i,j,\tau} = \{x_i = i\Delta x; y_j = j\Delta y; i = \overline{1, n}; j = \overline{1, n}; \tau_l = l\Delta \tau; l = 0, 1, 2, \dots, N_\tau; \Delta \tau = \frac{T_0}{N_\tau}\}.$$

В этой области применяется алгоритмическая идея схемы направления неявных переменных (схема поперечного сечения) используется метод конечно-разностных уравнений для решения задачи. Переход с l -го временного слоя на $l+1$ -слой осуществляется в два этапа по $0.5\Delta \tau$ шага. В результате приведенное выше уравнение (7) сводится к последовательному решению двух систем конечно-разностных уравнений. Тогда эти уравнения можно записать в следующем виде для внутренних узлов временного слоя $l+0.5$ и $l+1$:

$$\begin{aligned} & \frac{T_{l+0.5,j} P_{l+1,j}^{2(l+1/2)} - (T_{l+0.5,j} + T_{l+0.5,j}) P_{l,j}^{2(l+1/2)} + T_{l+0.5,j} P_{l+1,j}^{2(l+1/2)}}{\Delta x^2} + \\ & + \frac{T_{l,j+0.5} P_{l,j-1}^{2(l)} - (T_{l,j+0.5} + T_{l,j+0.5}) P_{l,j}^{2(l)} + T_{l,j+0.5} P_{l,j+1}^{2(l)}}{\Delta y^2} = \\ & = h_{l,j} \frac{P_{l,j}^{(l+1/2)} - P_{l,j}^{(l)}}{\Delta \tau / 2} - R_1 P_{2,j}^{2(l+1/2)} + R_1 P_{1,j}^{2(l+1/2)} + R_3 P_{3,j}^{2(l+1/2)}. \\ & \frac{T_{l+0.5,j} P_{l+1,j}^{2(l+1/2)} - (T_{l+0.5,j} + T_{l+0.5,j}) P_{l,j}^{2(l+1/2)} + T_{l+0.5,j} P_{l+1,j}^{2(l+1/2)}}{\Delta x^2} + \\ & + \frac{T_{l,j+0.5} P_{l,j-1}^{2(l+1)} - (T_{l,j+0.5} + T_{l,j+0.5}) P_{l,j}^{2(l+1)} + T_{l,j+0.5} P_{l,j+1}^{2(l+1)}}{\Delta y^2} = \\ & = h_{l,j} \frac{P_{l,j}^{(l+1/2)} - P_{l,j}^{(l+1)}}{\Delta \tau / 2} - R_1 P_{2,j}^{2(l+1)} + R_1 P_{1,j}^{2(l+1)} + R_3 P_{3,j}^{2(l+1)}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{T_{2i-0.5,j} P_{2i-1,j}^{2(i+1/2)} - (T_{2i-0.5,j} + T_{2i+0.5,j}) P_{2i,j}^{2(i+1/2)} + T_{2i+0.5,j} P_{2i+1,j}^{2(i+1/2)}}{\Delta x^2} + \\
& + \frac{T_{2i,j-0.5} P_{2i,j-1}^{2(i)} - (T_{2i,j-0.5} + T_{2i,j+0.5}) P_{2i,j}^{2(i)} + T_{2i,j+0.5} P_{2i,j+1}^{2(i)}}{\Delta y^2} = \\
& = h_{2i,j} \frac{P_{2i,j}^{(i+1/2)} - P_{2i,j}^i}{\Delta \tau / 2} + R_1 P_{2i,j}^{2(i+1/2)} - R_1 P_{1i,j}^{2(i+1/2)} - R_2 P_{3i,j}^{2(i+1/2)} + R_2 P_{2i,j}^{2(i+1/2)} + \delta_{i,j} q_{i,j}, \\
& \frac{T_{2i-0.5,j} P_{2i-1,j}^{2(i+1/2)} - (T_{2i-0.5,j} + T_{2i+0.5,j}) P_{2i,j}^{2(i+1/2)} + T_{2i+0.5,j} P_{2i+1,j}^{2(i+1/2)}}{\Delta x^2} + \\
& + \frac{T_{2i,j-0.5} P_{2i,j-1}^{2(i+1)} - (T_{2i,j-0.5} + T_{2i,j+0.5}) P_{2i,j}^{2(i+1)} + T_{2i,j+0.5} P_{2i,j+1}^{2(i+1)}}{\Delta y^2} = \\
& = h_{2i,j} \frac{P_{2i,j}^{(i+1/2)} - P_{2i,j}^{(i+1)}}{\Delta \tau / 2} + R_1 P_{2i,j}^{2(i+1)} - R_1 P_{1i,j}^{2(i+1)} - R_2 P_{3i,j}^{2(i+1)} + R_2 P_{2i,j}^{2(i+1)} + \delta_{i,j} q_{i,j}, \\
& \frac{T_{3i-0.5,j} P_{3i-1,j}^{2(i+1/2)} - (T_{3i-0.5,j} + T_{3i+0.5,j}) P_{3i,j}^{2(i+1/2)} + T_{3i+0.5,j} P_{3i+1,j}^{2(i+1/2)}}{\Delta x^2} + \\
& + \frac{T_{3i,j-0.5} P_{3i,j-1}^{2(i)} - (T_{3i,j-0.5} + T_{3i,j+0.5}) P_{3i,j}^{2(i)} + T_{3i,j+0.5} P_{3i,j+1}^{2(i)}}{\Delta y^2} = \\
& = h_{3i,j} \frac{P_{3i,j}^{(i+1/2)} - P_{3i,j}^i}{\Delta \tau / 2} + R_2 P_{3i,j}^{2(i+1/2)} - R_2 P_{2i,j}^{2(i+1/2)} + R_3 P_{1i,j}^{2(i+1/2)}, \\
& \frac{T_{3i-0.5,j} P_{3i-1,j}^{2(i+1/2)} - (T_{3i-0.5,j} + T_{3i+0.5,j}) P_{3i,j}^{2(i+1/2)} + T_{3i+0.5,j} P_{3i+1,j}^{2(i+1/2)}}{\Delta x^2} + \\
& + \frac{T_{3i,j-0.5} P_{3i,j-1}^{2(i+1)} - (T_{3i,j-0.5} + T_{3i,j+0.5}) P_{3i,j}^{2(i+1)} + T_{3i,j+0.5} P_{3i,j+1}^{2(i+1)}}{\Delta y^2} = \\
& = h_{3i,j} \frac{P_{3i,j}^{(i+1/2)} - P_{3i,j}^{(i+1)}}{\Delta \tau / 2} + R_2 P_{3i,j}^{2(i+1)} - R_2 P_{2i,j}^{2(i+1)} + R_3 P_{1i,j}^{2(i+1)}.
\end{aligned}$$

Как видно из этой системы конечно-разностных уравнений, данная задача нелинейна относительно функции. По этой причине при решении задачи необходимо использовать итерационный метод на каждом временном интервале. Для этого воспользуемся методом приведения нелинейных членов конечно-разностных уравнений к квазилинейному состоянию. На основе этой методики приведем ее нелинейные части в следующем виде:

$$\varphi(P) \equiv \varphi(\bar{P}) + (P - \bar{P}) \frac{\partial \varphi(\bar{P})}{\partial P}. \quad (12)$$

Здесь: \bar{P} — приближенное значение функции пластового давления. Оно определяется из итерационного процесса $\bar{P} = P_{i,j}^{(s)}$ в начальном состоянии $P_{i,j}^{(0)} = \hat{P}_{i,j}$. Если записать формулу (7) относительно функции давления, то мы имеем следующую формулу.

$$P^{2(i+1)} = 2\bar{P}^{(i+1)} P^{(i+1)} - \bar{P}^{2(i+1)}$$

Итерационный процесс по функции давления продолжается до тех пор, пока не будет выполнено следующее условие

$$\left| P_{1j}^{(s)} - P_{1j}^{(s-1)} \right| < \varepsilon, \quad \left| P_{1j}^{(s)} - P_{1j}^{(s-1)} \right| < \varepsilon, \quad \left| P_{3j}^{(s)} - P_{3j}^{(s-1)} \right| < \varepsilon. \quad (13)$$

Здесь:

ε – точность итерации, небольшое число, заданное заранее;

s – номер итерации.

Таким образом, используя метод преобразования нелинейных членов нелинейного уравнения в квазилинейное, заменим приведенную выше систему уравнений на систему квазилинейных уравнений и запишем ее в виде конечно-разностных уравнений следующим образом:

1-й слой

$$\begin{aligned} & \frac{\Delta \tau}{2\Delta x^2} T_{i-0.5,j} (2\bar{P}_{i-1,j}^{(l+1/2)} P_{i-1,j}^{(l+1/2)} - \bar{P}_{i-1,j}^{2(l+1/2)}) - \frac{\Delta \tau}{2\Delta x^2} (T_{i-0.5,j} + T_{i+0.5,j}) (2\bar{P}_{i,j}^{(l+1/2)} P_{i,j}^{(l+1/2)} + \bar{P}_{i,j}^{2(l+1/2)}) + \\ & + \frac{\Delta \tau}{2\Delta x^2} T_{i+0.5,j} (2\bar{P}_{i+1,j}^{(l+1/2)} P_{i+1,j}^{(l+1/2)} - \bar{P}_{i+1,j}^{2(l+1/2)}) + \frac{\Delta \tau}{2\Delta y^2} T_{i,j-0.5} P_{i,j-1}^{2(l)} - \frac{\Delta \tau}{2\Delta y^2} (T_{i,j-0.5} + T_{i,j+0.5}) P_{i,j}^{2(l)} + \\ & + \frac{\Delta \tau}{2\Delta y^2} T_{i,j+0.5} P_{i,j+1}^{2(l)} = h_{i,j} P_{i,j}^{(l+1/2)} - h_{i,j} P_{i,j}^{(l)} - \frac{\Delta \tau}{2} R_1 (2\bar{P}_{2i,j}^{(l+1/2)} P_{2i,j}^{(l+1/2)} - \bar{P}_{2i,j}^{2(l+1/2)}) + \\ & + \frac{\Delta \tau}{2} R_1 (2\bar{P}_{1i,j}^{(l+1/2)} P_{1i,j}^{(l+1/2)} - \bar{P}_{1i,j}^{2(l+1/2)}) + \frac{\Delta \tau}{2} R_3 (2\bar{P}_{3i,j}^{(l+1/2)} P_{3i,j}^{(l+1/2)} - \bar{P}_{3i,j}^{2(l+1/2)}); \\ & \frac{\Delta \tau}{2\Delta x^2} T_{i-0.5,j} P_{i-1,j}^{2(l+1/2)} - \frac{\Delta \tau}{2\Delta x^2} (T_{i-0.5,j} + T_{i+0.5,j}) P_{i,j}^{2(l+1/2)} + \frac{\Delta \tau}{2\Delta x^2} T_{i+0.5,j} P_{i+1,j}^{2(l+1/2)} + \\ & + \frac{\Delta \tau}{2\Delta y^2} T_{i,j-0.5} (2\bar{P}_{i,j}^{(l+1/2)} P_{i,j}^{(l+1/2)} - \bar{P}_{i,j}^{2(l+1/2)}) - \frac{\Delta \tau}{2\Delta y^2} (T_{i,j-0.5} + T_{i,j+0.5}) (2\bar{P}_{i,j}^{(l+1/2)} P_{i,j}^{(l+1/2)} + \bar{P}_{i,j}^{2(l+1/2)}) + \\ & + \frac{\Delta \tau}{2\Delta y^2} T_{i,j+0.5} (2\bar{P}_{i,j+1}^{(l+1/2)} P_{i,j+1}^{(l+1/2)} - \bar{P}_{i,j+1}^{2(l+1/2)}) = h_{i,j} P_{i,j}^{(l+1/2)} - h_{i,j} P_{i,j}^{(l)} - \frac{\Delta \tau}{2} R_1 (2\bar{P}_{2i,j}^{(l+1/2)} P_{2i,j}^{(l+1/2)} - \bar{P}_{2i,j}^{2(l+1/2)}) + \\ & + \frac{\Delta \tau}{2} R_1 (2\bar{P}_{1i,j}^{(l+1/2)} P_{1i,j}^{(l+1/2)} - \bar{P}_{1i,j}^{2(l+1/2)}) + \frac{\Delta \tau}{2} R_3 (2\bar{P}_{3i,j}^{(l+1/2)} P_{3i,j}^{(l+1/2)} - \bar{P}_{3i,j}^{2(l+1/2)}). \end{aligned}$$

Здесь

$$R_1 = \frac{K_{H1} L^2}{h_{H1} h_x^2 K_x}; \quad R_2 = \frac{K_{H2} L^2}{h_{H2} h_x^2 K_x}, \quad R_{33} = 0.$$

Аналогичным образом, уравнения второго и третьего слоев могут быть записаны, как указано выше, для временного слоя $l+1/2$.

В каждой точке $x=x_i$, значении давления $P_{i,j}^{l+1/2}$ в слое $l+1/2$ - времени, имеем следующую систему трех взаимосвязанных конечно-разностных уравнений (для удобства верхний индекс $l+1/2$ опускаем):

$$\begin{cases} a_i P_{i-1,j} - b_i P_{i,j} + c_i P_{i+1,j} + d_i P_{2i,j} + e_i P_{3i,j} = -f_i; \\ a'_i P_{2i-1,j} - b'_i P_{2i,j} + c'_i P_{2i+1,j} + d'_i P_{i,j} + e'_i P_{3i,j} = -f'_i; \\ a''_i P_{3i-1,j} - b''_i P_{3i,j} + c''_i P_{3i+1,j} + d''_i P_{2i,j} + e''_i P_{i,j} = -f''_i; \quad i = \overline{1, n-1}. \end{cases} \quad (14)$$

Здесь $e_i = 0$, $e'_i = 0$, $e''_i = 0$. В этом случае коэффициенты первого, второго и третьего уравнений будут следующими:

$$\begin{aligned}
a_i &= \frac{\Delta\tau}{2\Delta x^2} T_{1i-0,5,j} 2\bar{P}_{1i-1,j}^{(i+1/2)}; \quad b_i = h_{1,j} - \frac{\Delta\tau}{2\Delta x^2} \left(T_{1i-0,5,j} + T_{1i+0,5,j} - \frac{\Delta\tau}{2} R_1 \right) 2\bar{P}_{1i,j}^{(i+1/2)} \\
c_i &= \frac{\Delta\tau}{2\Delta x^2} T_{1i+0,5,j} 2\bar{P}_{1i+1,j}^{(i+1/2)}; \quad d_i = \frac{\Delta\tau}{2} R_1 2\bar{P}_{2i,j}^{(i+1/2)}; \quad e_i = \frac{\Delta\tau}{2} R_3 2\bar{P}_{3i,j}^{(i+1/2)} \\
f_i &= \frac{\Delta\tau}{2\Delta x^2} T_{1i-0,5,j} \bar{P}_{1i-1,j}^{2(i+1/2)} - \frac{\Delta\tau}{2\Delta x^2} (T_{1i-0,5,j} + T_{1i+0,5,j}) \bar{P}_{1i,j}^{2(i+1/2)} + \frac{\Delta\tau}{2\Delta y^2} T_{1i,j+0,5} P_{1i,j+1}^{2(i)} - \\
&- h_{1,j} P_{1i,j}' + \frac{\Delta\tau}{2} R_1 \bar{P}_{2i,j}^{2(i+1/2)} - \frac{\Delta\tau}{2} R_1 \bar{P}_{1i,j}^{2(i+1/2)} + \frac{\Delta\tau}{2\Delta x^2} T_{1i+0,5,j} \bar{P}_{1i+1,j}^{2(i+1/2)} - \frac{\Delta\tau}{2\Delta y^2} T_{1i,j-0,5} P_{1i,j-1}^{2(i)} - \\
&- \frac{\Delta\tau}{2\Delta y^2} (T_{1i,j-0,5} + T_{1i,j+0,5}) P_{1i,j}^{2(i)} - \frac{\Delta\tau}{2} R_3 \bar{P}_{3i,j}^{2(i+1/2)}; \quad i = \overline{1, n-1}. \quad j = \overline{1, n-1}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_i' &= T \frac{\Delta\tau}{2\Delta x^2} T_{2i-0,5,j} 2\bar{P}_{2i-1,j}^{(i+1/2)}; \quad c_i' = \frac{\Delta\tau}{2\Delta x^2} T_{2i+0,5,j} 2\bar{P}_{2i+1,j}^{(i+1/2)}; \quad d_i' = \frac{\Delta\tau}{2} R_2 2\bar{P}_{1i,j}^{(i+1/2)} \\
b_i' &= \left(\frac{\Delta\tau}{2\Delta x^2} (T_{2i-0,5,j} + T_{2i+0,5,j}) + \frac{\Delta\tau}{2} R_1 + \frac{\Delta\tau}{2} R_2 \right) 2\bar{P}_{2i,j}^{(i+1/2)} + h_{2,j}; \quad e_i' = R_2 \Delta x^2; \\
f_i' &= \frac{\Delta\tau}{2\Delta x^2} T_{2i-0,5,j} \bar{P}_{2i-1,j}^{2(i+1/2)} - \frac{\Delta\tau}{2\Delta y^2} T_{2i,j-0,5} P_{2i,j-1}^{2(i)} + \frac{\Delta\tau}{2\Delta y^2} (T_{2i,j-0,5} + T_{2i,j+0,5}) P_{2i,j}^{2(i)} - \\
&- \frac{\Delta\tau}{2\Delta x^2} T_{2i+0,5,j} \bar{P}_{2i+1,j}^{2(i+1/2)} - \frac{\Delta\tau}{2\Delta y^2} T_{2i,j+0,5} P_{2i,j+1}^{2(i)} - \frac{\Delta\tau}{2\Delta x^2} (T_{2i-0,5,j} + T_{2i+0,5,j}) \bar{P}_{2i,j}^{2(i+1/2)} - h_{2,j} P_{2i,j}^{2(i)} - \\
&- \frac{\Delta\tau}{2} R_1 \bar{P}_{3i,j}^{2(i+1/2)} + \frac{\Delta\tau}{2} R_1 \bar{P}_{1i,j}^{2(i+1/2)} + \frac{\Delta\tau}{2} R_2 \bar{P}_{3i,j}^{2(i+1/2)} - \frac{\Delta\tau}{2} R_2 \bar{P}_{2i,j}^{2(i+1/2)} + \frac{\Delta\tau}{2} \delta_{i,j} q_{i,j}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_i'' &= \frac{\Delta\tau}{2\Delta x^2} T_{3i-0,5,j} 2\bar{P}_{3i-1,j}^{(i+1/2)}; \quad c_i'' = \frac{\Delta\tau}{2\Delta x^2} T_{3i+0,5,j} 2\bar{P}_{3i+1,j}^{(i+1/2)}; \quad d_i'' = \frac{\Delta\tau}{2} R_2 2\bar{P}_{2i,j}^{(i+1/2)}; \\
b_i'' &= \left(\frac{\Delta\tau}{2\Delta x^2} (T_{3i-0,5,j} + T_{3i+0,5,j}) + \frac{\Delta\tau}{2} R_2 \right) 2\bar{P}_{3i,j}^{(i+1/2)} + h_{3,j}; \quad e_i'' = \frac{\Delta\tau}{2} R_3 2\bar{P}_{1i,j}^{(i+1/2)}; \\
f_i'' &= \frac{\Delta\tau}{2\Delta x^2} T_{3i-0,5,j} \bar{P}_{3i-1,j}^{2(i+1/2)} - \frac{\Delta\tau}{2\Delta x^2} (T_{3i-0,5,j} + T_{3i+0,5,j}) \bar{P}_{3i,j}^{2(i+1/2)} + \frac{\Delta\tau}{2\Delta x^2} T_{3i+0,5,j} \bar{P}_{3i+1,j}^{2(i+1/2)} - \\
&- \frac{\Delta\tau}{2\Delta y^2} T_{3i,j-0,5} P_{3i,j-1}^{2(i)} + \frac{\Delta\tau}{2\Delta y^2} (T_{3i,j-0,5} + T_{3i,j+0,5}) P_{3i,j}^{2(i)} - \frac{\Delta\tau}{2\Delta y^2} T_{3i,j+0,5} P_{3i,j+1}^{2(i)} - h_{3,j} P_{3i,j}' - \\
&- \frac{\Delta\tau}{2} R_2 \bar{P}_{3i,j}^{2(i+1/2)} + \frac{\Delta\tau}{2} R_2 \bar{P}_{2i,j}^{2(i+1/2)} - \frac{\Delta\tau}{2} R_3 \bar{P}_{1i,j}^{2(i+1/2)}.
\end{aligned}$$

Мы используем метод прогонки для решения системы конечных разностей. По правилу метода прогонки решения можно записать следующим образом:

$$\begin{cases} P_{1i,j} = A_i P_{1i+1,j} + B_i P_{2i+1,j} + C_i P_{3i+1,j} + D_i; \\ P_{2i,j} = A_i' P_{2i+1,j} + B_i' P_{1i+1,j} + C_i' P_{3i+1,j} + D_i'; \\ P_{3i,j} = A_i'' P_{3i+1,j} + B_i'' P_{2i+1,j} + C_i'' P_{1i+1,j} + D_i''; \end{cases} \quad i = \overline{N-1, 0}. \quad (15)$$

Для определения коэффициентов метода прогонки запишем следующую систему уравнений с использованием (6)-(7).

$$\begin{cases} a_i P_{1i-1,j} - b_i P_{1i,j} + c_i P_{1i+1,j} + d_i P_{2i,j} + e_i P_{3i,j} = -f_i, \\ P_{1i-1,j} = A_{i-1} P_{1i,j} + B_{i-1} P_{2i,j} + C_{i-1} P_{3i,j} + D_{i-1}, \\ a'_i P_{2i-1,j} - b'_i P_{2i,j} + c'_i P_{2i+1,j} + d'_i P_{1i,j} + e'_i P_{3i,j} = -f'_i, \\ P_{2i-1,j} = A'_{i-1} P_{2i,j} + B'_{i-1} P_{1i,j} + C'_{i-1} P_{3i,j} + D'_{i-1}, \\ a''_i P_{3i-1,j} - b''_i P_{3i,j} + c''_i P_{3i+1,j} + d''_i P_{2i,j} + e''_i P_{1i,j} = -f''_i, \\ P_{3i-1,j} = A''_{i-1} P_{3i,j} + B''_{i-1} P_{2i,j} + C''_{i-1} P_{1i,j} + D''_{i-1}. \end{cases} \quad (16)$$

Из этой системы уравнений A_i, B_i, C_i, D_i ; A'_i, B'_i, C'_i, D'_i ; $A''_i, B''_i, C''_i, D''_i$ находятся коэффициенты прогонки. Начальные значения коэффициентов прогонки определяются из граничных условий.

Аналогично вторая система уравнений системы записывается как приведенное выше конечно-разностное уравнение (14) для временного слоя $l+1$.

Вычислительные эксперименты проводились на 5, 9 и 10 центральных скважинах и при различных значениях коэффициентов проницаемости пласта и коэффициентов слабопроницаемого пласта ($Q_{1,9}=1000000 \text{ м}^3/\text{сутка}$, $K_1=0.2$; $K_2=0.2$; $K_3=0.1$; $K_{П1}=0.0003$; $K_{П2}=0.0002$).

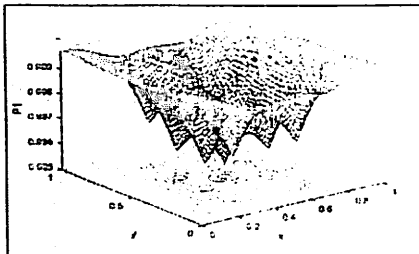


Рисунок 1. График изменения давления в слое 1

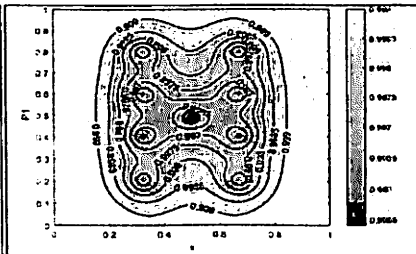


Рисунок 2. Контурный график изменения давления в слое 1

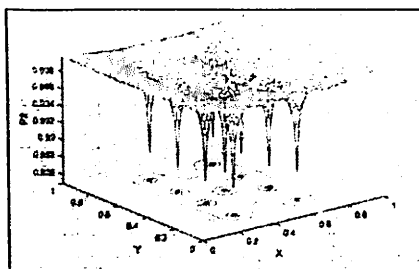


Рисунок 3. График изменения давления в слое 2

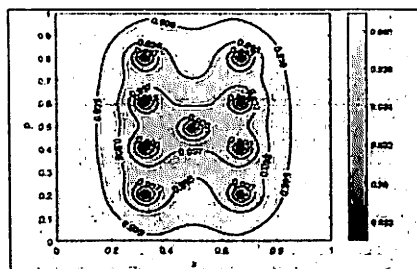


Рисунок 4. Контурный график изменения давления в слое 2

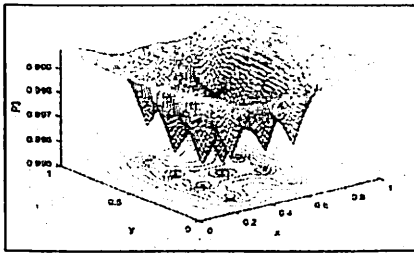


Рисунок 5. График изменения давления в слое 3

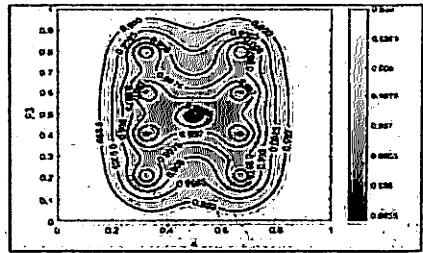


Рисунок 6. Контурный график изменения давления в слое 3

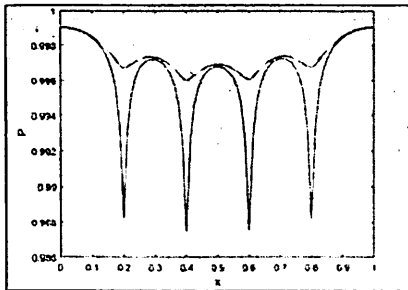


Рисунок 7. График изменения давления на разрезе

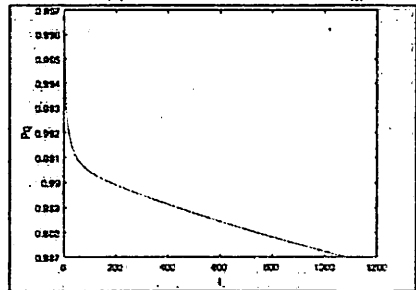


Рисунок 8. График падения давления в скважине

Анализ всех проведенных вычислительных экспериментов показывает, что в процессе фильтрации газа в системе с неоднородной трехслойной пористой средой играет важную роль коэффициент проницаемости слоев, то есть большие значения коэффициентов проницаемости основного пласта находятся в пластах, это ускоряет распространение давления и замедляет падение давления в скважинах.

Аналогично увеличение значений коэффициентов слабопроницаемого слоя ускоряет процесс перетекания газов друг в друга в основных слоях. В этом процессе какой бы слой ни имел более низкое давление, поток ускорится к этому слою.

В третьей главе диссертации под названием “Математическое моделирование процесса многомерной фильтрации в непосредственно связанных слоях газа” представлены трехмерная математическая модель процесса фильтрации газа в трехслойных пористых средах, рассмотрены вопросы численного моделирования и разработки алгоритмов решения краевых задач с использованием комбинации конечно-разностных, дифференциально-разностных и итерационных методов. Численные результаты, полученные в результате вычислительных экспериментов, проанализированы на графиках.

Математическая модель процесса фильтрации газа в трехмерно-неоднородной пористой среде описывается следующим дифференциальным уравнением.

$$\begin{cases} 2a_1 m h_1 \mu \frac{\partial P_1}{\partial t} = \frac{\partial P_1^2}{\partial x^2} + \frac{\partial P_1^2}{\partial y^2} + \frac{\partial}{\partial z} \left(k_1(z) \frac{\partial P_1^2}{\partial z} \right) \\ 2a_2 m h_2 \mu \frac{\partial P_2}{\partial t} = \frac{\partial P_2^2}{\partial x^2} + \frac{\partial P_2^2}{\partial y^2} + \frac{\partial}{\partial z} \left(k_2(z) \frac{\partial P_2^2}{\partial z} \right) - Q \\ 2a_3 m h_3 \mu \frac{\partial P_3}{\partial t} = \frac{\partial P_3^2}{\partial x^2} + \frac{\partial P_3^2}{\partial y^2} + \frac{\partial}{\partial z} \left(k_3(z) \frac{\partial P_3^2}{\partial z} \right) \end{cases} \quad (17)$$

При определении основных показателей разработки газовых месторождений решаем систему дифференциальных уравнений (17) исходя из следующих начальных, граничных и внутренних условий:

$$P_i(x, y, z, t) = P_{i0}(x, y, z), \quad t = 0, \quad (18) \quad -\frac{k h \partial P_i^2}{\mu \partial n} = \alpha(P_A - P_i), \quad i = 1, 2, 3 \quad (19)$$

$$\oint_{\gamma_q} \frac{k h \partial P_i^2}{\mu \partial n} ds = -q_{i,q}(t), \quad i_q = \overline{1, N_q}, \quad (20) \quad Q = \sum_{q=1}^{N_q} \delta_{i,q} q_i, \quad i_q = \overline{1, N_q}, \quad (21)$$

Очевидно, что на каждой границе между слоями должны выполняться условия равенства и непрерывности функций давления:

$$\begin{aligned} P_1|_{z=l_1} &= P_2|_{z=l_1}; \quad P_2|_{z=l_2} = P_3|_{z=l_2}; \\ k_1 \frac{\partial P_1}{\partial z} \Big|_{z=l_1} &= k_2 \frac{\partial P_2}{\partial z} \Big|_{z=l_1}; \quad k_2 \frac{\partial P_2}{\partial z} \Big|_{z=l_2} = k_3 \frac{\partial P_3}{\partial z} \Big|_{z=l_2} \end{aligned} \quad (22)$$

Для решения данной краевой задачи численным методом (17)-(22) сделаем ее безразмерной. Для этого введем следующие определения.

Безразмерная краевая задача процесса фильтрации газа в пористой среде, описывающая дифференциальные уравнения на основе граничных условий, по направлению переменных x и y в каждом временном слое $l+1/3$ и $l+2/3$, является конечной с помощью схему сечения решаем методом разностей и дифференциально-разностным методом во временном слое $l+1$. Следовательно, она решается с шагом $1/3$ в каждом временном слое в направлении оси z .

Для численного решения данной безразмерной краевой задачи построим следующую сетку с равномерным шагом Δx , Δy , Δz с областью фильтрации G и внешней границей Γ :

$$\Omega_{\text{сет}} = \left\{ x_i = i\Delta x, y_j = j\Delta y, z_r = r\Delta z, \tau = l\Delta\tau; i, j, r = \overline{1, N}; l = \overline{0, N_r}, \Delta\tau = \frac{1}{N_r} \right\}.$$

Для дискретизации задачи используется алгоритмическая идея неявной схемы переменных направлений (схема поперечного сечения). Переход от шага l -времени к слою $l+1$ осуществляется в три этапа с шагом $0.3\Delta\tau$. В результате речь идет о задаче последовательного решения трех конечно-разностных уравнений.

Для расчета значения давления $P_{i,j,r}^{l+1/3}$ на каждой прямой в $x = x_i$ точках с достаточной точностью во временном слое $l+1/3$ решаем следующую систему трехмерных уравнений:

$$\begin{cases} (3-2\Delta x L\alpha) P_{10,j,r}^{(i+1/3)} - 4P_{11,j,r}^{(i+1/3)} + P_{12,j,r}^{(i+1/3)} = -2\Delta x L\alpha P_A, \\ a_i P_{1i-1,j,r}^{(i+1/3)} - b_i P_{1i,j,r}^{(i+1/3)} + c_i P_{1i+1,j,r}^{(i+1/3)} = -d_i, \quad i, j, r = 1, 2, \dots, N-1, \\ (3-2\Delta x L\alpha) P_{1N,j,r}^{(i+1/3)} - 4P_{1N-1,j,r}^{(i+1/3)} + P_{1N-2,j,r}^{(i+1/3)} = 2\Delta x L\alpha P_A. \end{cases} \quad (23)$$

Здесь

$$\begin{aligned} a_i &= 2\bar{P}_{1i-1,j,r}, \quad b_i = 4\bar{P}_{1i,j,r} + \lambda_{xy}, \quad c_i = 2\bar{P}_{1i+1,j,r}, \\ d_i &= (2\bar{P}_{1i,j,r}^2 - \bar{P}_{1i-1,j,r}^2 - \bar{P}_{1i+1,j,r}^2) + \lambda_{xy} (P_{1i,j-1,r}^{2(i)} - 2P_{1i,j,r}^{2(i)} + P_{1i,j+1,r}^{2(i)}) + \\ &+ \frac{L^2}{h_0^2} \lambda_{xz} (k_L P_{1i,j,r-1}^{2(i)} - (k_L + k_P) P_{1i,j,r}^{2(i)} + k_P P_{1i,j,r+1}^{2(i)}) + \lambda_{xz} P_{1i,j,r}^{(i)} - \Delta x^2 \delta_{i,j,r} q_{1i,j,r}. \end{aligned}$$

Аналогично записывается система конечно-разностных уравнений для временного слоя $l+2/3$ и $l+1$.

Для изучения, определения и проведения компьютерных расчетных экспериментов по основным показателям трехпластовых газовых месторождений необходимы следующие предварительные данные:

длина слоя $L=10000$ м; мощность слоя $h=10$ м; начальное давление пласта $P_H=300$ атм; проницаемость слоя $k=0.1$ Дарси; вязкость газа $\mu=0.03$ сПз.

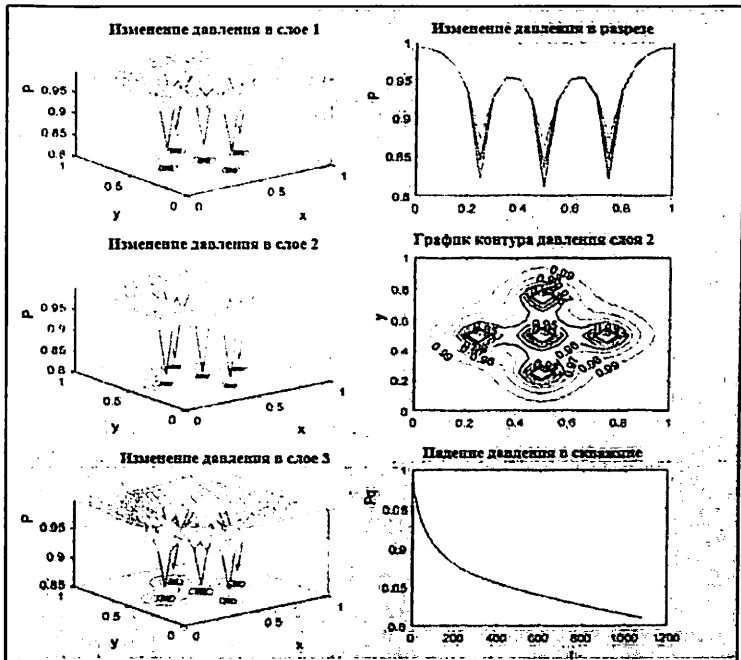


Рисунок 9. График результатов численного решения трехмерной задачи

Ряд методов численного моделирования и программного обеспечения, разработанного для расчета ключевых показателей эффективности непосредственно связанных трехпластовых газовых месторождений, могут быть использованы для анализа и прогнозирования, а также при разработке многопластовых месторождений нефти и газа.

В четвертой главе диссертации под названием “Программный комплекс для представления результатов, полученных в ходе расчетных экспериментов, в визуальном виде” при расчете основных показателей разработки газовых месторождений необходимо разработать программное обеспечение с использованием алгоритмов на основе универсальных методов конечных разностей. Рассмотрены вопросы формирования исходных данных, информационного массива дискретного поля, функциональной схемы модулей программного комплекса и пользовательского интерфейса программы. Решение этих вопросов обеспечивает удобство расчета основных показателей при разработке газовых месторождений и повышает достоверность получаемых результатов, создает возможность представления численных результатов в графическом виде в различных форматах 3D визуальном виде.

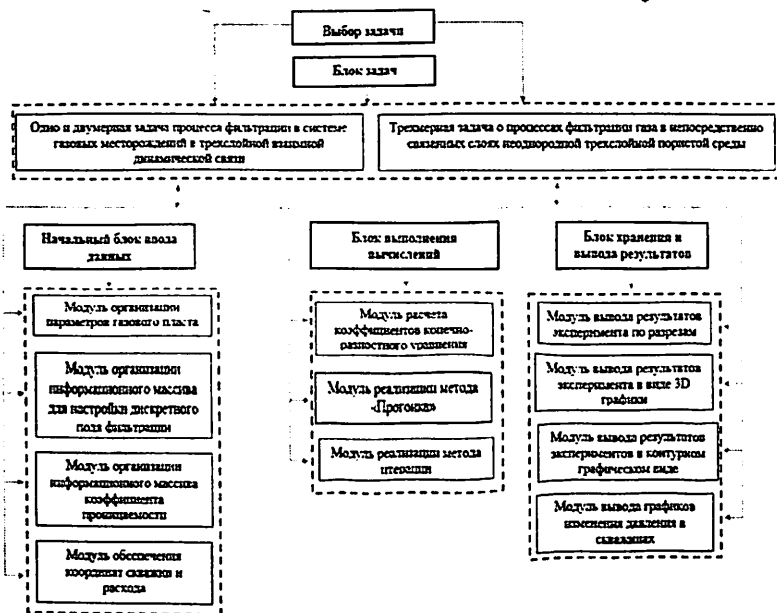


Рисунок 10. Функциональная схема модулей программного комплекса «Расчет основных показателей при разработке многопластовых газовых месторождений»

Разработан комплекс программ для расчета основных показателей разработки трехпластовых газовых месторождений со взаимослабопроницаемыми и непосредственно связанными пластами. Методы численного моделирования и программное обеспечение могут быть использованы при анализе и проектировании многопластовых месторождений нефти и газа.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

На основе исследований, проведенных в диссертационной работе, были достигнуты следующие результаты:

1. Проанализированы особенности определения основных показателей разработки газовых залежей в многослойной пористой среде, проблемы математического моделирования и сформированы информационные модели, необходимые для решения поставленных задач. Была получена информация по решению граничных задач. Данные информационные модели и методы позволяют осуществлять быстрый анализ и прогнозирование при проведении вычислительных экспериментов по основным показателям фильтрационного процесса.

2. Разработана математическая модель задачи процесса нестационарной фильтрации газа при взаимной динамической связи со слабопроводящими слоями и сформулирована краевая задача. На основе метода конечных разностей решена краевая задача нестационарной фильтрации газа в трехслойной пористой среде в динамической связи, разработаны алгоритмы расчета, проведены вычислительные эксперименты на компьютере и получены результаты.

3. Сформулирована краевая задача трехмерной фильтрации газа непосредственно связанных многослойных слоев, разработаны дискретная модель и алгоритм задачи с использованием схемы направления переменных при численном моделировании. На основе разработанного алгоритма была создана программа, проведены и проанализированы вычислительные эксперименты.

4. Создан программный комплекс «Расчет его основных показателей при разработке многослойных газовых месторождений», позволяющий определять и прогнозировать основные показатели газовых месторождений с тремя слоями прямой и взаимно динамической связи в пористой среде. В результате удалось отобразить полученные числовые результаты в виде графиков.

5. Внедрен программный комплекс для расчета основных показателей многопластовых газовых месторождений была реализована в ООО «Geo Interpretation Group», ООО «Epsilon Development Company», ООО «ГИССАРНЕТГАЗ» и появилась возможность отслеживать полученные

результаты в 3D-графике в реальном времени, при этом время расчета сократилось на 32%, а производительность увеличилась на 7%.

**SCIENTIFIC COUNCIL AWARDING SCIENTIFIC DEGREES
DSc.13/30.12.2019.T.07.01 AT TASHKENT UNIVERSITY OF
INFORMATION TECHNOLOGIES**

TASHKENT UNIVERSITY OF INFORMATION TECHNOLOGIES

MAHMUDOVA MOHINISO MIZROF KIZI

**MATHEMATICAL MODELING OF GAS FILTRATION
PROCESSES IN DIRECTLY AND DYNAMICALLY CONNECTED
POROUS MEDIA**

05.01.07 – Mathematical Modeling. Numerical methods and set of applications

**DISSERTATION ABSTRACT OF THE DOCTOR OF PHILOSOPHY (PHD)
ON TECHNICAL SCIENCES**

The theme of doctor of philosophy (PhD) on technical sciences was registered at the Supreme Attestation Commission at the Cabinet of Ministers of Higher education, Science and Innovation of the Republic of Uzbekistan under number B2023.1.PhD/T3464

The dissertation has been prepared at Tashkent University of Information Technologies.

The abstract of the dissertation is posted in three languages (Uzbek, Russian, English (resume)) on the website (www.tuit.uz) and on the website of "Ziyonet" Information and educational portal (www.ziyonet.uz)

Scientific adviser: **Nematov Abdugani**
Candidate of Physical and Mathematical Sciences, docent

Official opponents: **Djumanov Jamoljon Khudaykulovich**
Doctor of Technical Sciences, professor
Normurodov Chori Begalievich
Doctor of Technical Sciences, professor

Leading organization: **Karshi State University**

The defense of dissertation will take place "___" _____ 2024 at _____ at the meeting of Scientific Council No. DSc.13/30.12.2019.T.07.01 at Tashkent University of Information Technologies (Address: 100084, Tashkent city, Amir Temur street, 108. Ph.: (+99871) 238-64-43, e-mail: iktuit@tuit.uz).

The dissertation can be reviewed at the Information Resource Centre of Tashkent University of Information Technologies (is registered under No. _____). (Address: 100084, Tashkent city, Amir Temur street, 108. Ph.: (+99871) 238-64-70, e-mail: iktuit@tuit.uz).

Abstract of the dissertation sent out on "___" _____ 2024 y.
(mailing report No. ___ on "___" _____ 2024 y.).

M.M. Musaev
Chairman of the scientific council
awarding scientific degrees,
Doctor of Technical Sciences, professor

E.Sh. Nazirova
Scientific secretary of scientific council
awarding scientific degrees,
Doctor of Technical Sciences, professor

F.M. Nurallyev
Chairman of the academic
seminar under the scientific council
awarding scientific degrees,
Doctor of Technical Sciences, professor

INTRODUCTION (abstract of PhD dissertation)

The aim of the research work. Development of mathematical models of non-stationary filtration processes in multi-layer gas fields with mutual dynamic and direct connection, development of numerical methods of solving and effective calculation algorithms, as well as creation of a software complex for presenting numerical results of calculation experiments.

The filtration process of gas fields in a three-layer porous medium with which the object of research is directly and dynamically connected is considered.

The scientific novelty of the research work is as follows:

a one- and two-dimensional mathematical model of the non-stationary filtration process was developed taking into account the pressure change for the system of gas fields in mutual dynamic communication with poorly permeable layers;

a computational algorithm for solving the limit problem of gas filtration with multilayered weakly permeable layers based on the scheme of changing directions has been developed;

a three-dimensional mathematical model of the non-stationary filtration process of gas in a directly connected three-layer porous medium was developed and numerically modeled and a computational algorithm for solving using a finite difference scheme was developed;

the functional structure of the software complex that determines and predicts the main indicators of gas fields with three layers of direct and mutual dynamic communication in the porous medium has been developed.

Implementation of the research results. Based on two- and three-dimensional mathematical models of the gas filtration process in a multilayer porous medium in a directly mutually dynamic connection, solution algorithms have been developed and a software package has been created:

Geo Interpretation Group LLC (reference of the Ministry of Digital Technologies No. 33-8/8673 dated December 4, 2023) has implemented software "Using effective algorithms for calculating the main indicators of oil and gas filtration processes in multidimensional porous media and visualization of numerical results". As a result, it became possible to track changes in the calculation of key indicators in real time in a 3D graphical representation, the accuracy and reliability of the results increased, and labor productivity was achieved by up to 32% by reducing the time spent on calculation.

Epsilon Development Company LLC (reference of the Ministry of Digital Technologies No. 33-8/8673 dated December 4, 2023) has implemented the software "Computer modeling of the gas filtration process in two-layer porous media". By implementing the developed mathematical models, calculation algorithms and software, it is possible to track changes in numerical results in real time in 2D and 3D graphical representations, accuracy, reliability and reduction of the error of the results obtained are achieved. In it, the time spent on calculation was reduced by 8-10% and production efficiency increased by 7%.

The developed software "Numerical simulation of the gas filtration process in a multilayer porous medium" was implemented at the Gissarneftgaz LLC facility

(reference of the Ministry of Digital Technologies No. 33-8/8673 dated December 4, 2023). The results obtained are useful in the development and analysis of multilayer gas fields in a mutually dynamic relationship, and also allowed to increase the efficiency of gas fields at 5-6%.

Structure and volume of the dissertation: The dissertation work consists of an introduction, four chapters, a conclusion, a list of references and applications, the volume of the dissertation was 107 pages, 43 figures.

E'LON QILINGAN ISHLAR RO'YXATI
СПИСОК ОПУБЛИКОВАННЫХ РАБОТ
LIST OF PUBLISHED WORKS

I bo'lim (I часть; I part)

1. Nazirova E.Sh., Mahmudova M.M., Ne'matov A.X. Ikkinchi tartibli parabolik tipli tenglamalarga qo'yilgan chegaraviy masalani yechish algoritmi va sonli natijani vizuallashtirish dasturi// "Muhammad al-Xorazmiy avlodlari" jurnali. №3(17)/2021. -B. 21-25. (05.00.00; №10).
2. Ne'matov A., Mahmudova M.M., Artikbaeva G.K. Uch o'lchovli parabolik tipdagi differensial tenglamaga qo'yilgan chegaraviy masalani yechish algoritmi va sonli natijani vizuallashtiri// "TATU xabarlari" jurnali. № 4(60)/2021. - B. 64-76(05.00.00; №31).
3. Nazirova E.Sh., Nematov A., Mahmudova M.M. "Algorithm for solving boundary value problems of parabolic equations and 3D visualization of results// in 2021 International Conference on Information Science and Communications Technologies (ICISCT), Nov. 2021, Tashkent. -P. 01-05, DOI: 10.1109/ICISCT52966.2021.9670368 (05.00.00; OAK rayosat qarori 30.10.2021. №525- son).
4. Sadikov R.T., Mahmudova M.M., Ochilova A.B. Uch qatlamli o'zaro dinamik bog'langan gaz konlari filtratsiya jarayonini matematik modellashtirish // "Hisoblash va amaliy matematika muammolari" jurnali. Maxsus nashr, № 2/1(40), 2022. - B. 226-238. (05.00.00; № 4)
5. Назирова Э.Ш., Махмудова М.М., Курбанова М.М. Двухмерное моделирование процессов фильтрации в пористой среде // "Проблемы вычислительной и прикладной математики" журнал. Спецвыпуск, № 2/1(40), 2022. - С. 118-124. (05.00.00; № 4)
6. Nazirova E.Sh., Ne'matov A., Mahmudova M.M., Artikbayeva G. K. "Numerical simulation of the problem of gas filtration in a piecewise inhomogeneous porous medium" // Harvard Educational and Scientific Review Journal. Vol.2. 2022. Issue 3. -P. 14-24. (05.00.00; Yevropa ilmiy jurnallari № 4)
7. Nazirova E.Sh., Ne'matov A., Mahmudova M.M., Karabayeva X.A. "Algorithm and program for solving the gas filtration problem in dynamically interconnected porous media. // Bulletin of TUIT: Management and Communication Technologies Journal. 2022. Vol-3(13). -P. 01-05. (05.00.00; OAK rayosat qarori 30.07.2020. № 01-10/1103)
8. Mahmudova M.M. Mathematical and informational model of calculation of key indicators in development of gas fields with complex configuration. // Bulletin of TUIT: Management and Communication Technologies Journal. 2023. Vol-3(14). -P:01-08. (05.00.00; OAK rayosat qarori 30.07.2020. № 01-10/1103)

II bo'lim (II часть; II part)

9. Назирова Э.Ш., Неъматов А., Махмудова М.М., Бобонова Ш.Т. "Параболик типли тенгламалар chegaraviy masalalarini yechish algoritmi va

натижани 3D графикда бериш дастури” Сборник докладов республиканской научно-технической конференции “Современное состояние и перспективы применения цифровых технологий и искусственного интеллекта в управлении”. Том 2. Ташкент-2021.-Б. 106-111

10. Э. Назирова, А. Неъматов, М.М. Махмудова “Уч ўлчовли параболик тенгламага кўйилган чегаравий масалани сонли ечиш алгоритми” I-Международная научная конференция «Научные основы использования информационных технологий нового уровня и современные проблемы автоматизации». Ташкент -2022. – Б. 237-240

11. Nazirova E.Sh., Ne'matov A. Mahmudova M.M. “Algorithm for numerical solution of a boundary value problem in a three-dimensional parabolic equation” Proceedings of the 12th International Scientific and Practical Conference “Science and practice: implementation to modern society”. Manchester, Great Britain - 6-8.05.2022. –P. 488-495

12. Неъматов А., Назирова Э.Ш., Махмудова М.М. “Кўп қатламли ғовак мухитларда газ ностационар фильтрация жараёнини математик моделлаштириш” Сборник докладов республиканской научно-технической конференции «Современное состояние и перспективы применения цифровых технологий и искусственного интеллекта» Часть 2. Ташкент-2022. – Б. 272-279

13. Назирова Э.Ш., Махмудова М.М., Курбанова М.М. “Алгоритм решения краевой задачи, поставленной в линейном уравнении первого порядка, и программа визуализации конечного результата” «Рақамли ҳаёт ва ижтимоий фанларнинг баркамол авлодни вояга етказишдаги ўрни ва аҳамияти: долзарб муаммолар ва истиқбол» халқаро илмий-амалий анжуман илмий мақола ва тезислар тўплами. Андижон-2022. – С. 664-669

14. Садиков Р.Т., Махмудова М.М., Карабаева Х.А. “Математическая модель и численный метод процессов фильтрации газа в пористых средах” «Рақамли ҳаёт ва ижтимоий фанларнинг баркамол авлодни вояга етказишдаги ўрни ва аҳамияти: долзарб муаммолар ва истиқбол» халқаро илмий-амалий анжуман илмий мақола ва тезислар тўплами. Андижон-2022. – С. 390-394

15. Nazirova E.Sh., Ne'matov A., Mahmudova M.M. “O'zaro dinamik bog'langan ko'p qatlamli gaz konlaridagi filtratsion jarayonni matematik modellash tirish” “Ta’lim-ishlab chiqarish klasterida yoshlarning o’rni” Respublika ilmiy-texnikaviy anjumani to’plami. Qashqadaryo, G’uzor – 2022.– B. 341-345

16. A. Ne'matov, Sh.R. Ismailov, M.M. Mahmudova, Sh.A.Boxidjonov “Ikki fazali neft-gaz filtratsiya jarayonlarining asosiy ko'rsatkichlarini hisoblashda samarali algoritmlarni qo'llash va sonli natijalarni vizuallashtirish” “Ta’lim-ishlab chiqarish klasterida yoshlarning o’rni” Respublika ilmiy-texnikaviy anjumani to’plami. Qashqadaryo, G’uzor – 2022.– B. 346-347

17. Ne'matov A., Mahmudova M.M. “Murakkab konfiguratsiyali gaz konlarini o'zlashtirishning asosiy ko'rsatkichlarini hisoblashda filtratsiya sohasining axborot modelini ishlab chiqish” Proceedings of the multi-disciplinary scientific-practical conference “International Scientific Forum”. Tashkent -2023. –P. 589-593

18. Ismailov Sh.R., Mahmudova M.M., Karabayeva X.A. “Method and algorithm for numerical solution of boundary value problem for one-dimensional

linear differential equation” Proceedings of the multi-disciplinary scientific-practical conference “International Scientific Forum”. Tashkent-2023. –P. 220-224

19. Ne’matov A., Sadikov R.T., Mahmudova M.M., Artikbaeva G.K. “Uch qatlamli g’ovak muhitlarda neft nostatsionar filtratsiya jarayonining ikki o’lchamli chegaraviy masalasini yechishning sonli modeli va algoritmi” “Matematik modellashtirish, algoritmlash va dasturlashning dolzarb muammolari” mavzusidagi Respublika ilmiy-texnik konferensiyasi to’plami. Toshkent-2023. – B. 195-200

20. Nazirova E.Sh., Shukurova M.E., Ne’matov A.R., Mahmudova M.M. “Numerical solution of the problem of two-phase filtration in the oil-water system in dynamically coupled two-layer porous media” International Conference on Advance Research in Humanities, Sciences and Education. Hosted from Berlin, Germany-2023. –P. 107-110

21. Nazirova E.Sh., Ne’matov A., Mahmudova M.M. “Mathematical modeling of the gas filtration process in directly connected three-layer porous medium layers” Conference –Virtual International Conferences. Hosted online from Dubai, U.A.E.-2023. –P. 12-17

22. Nazirova E.Sh., Ne’matov A., Sadikov R.T., Mahmudova M.M. O’zaro dinamik aloqadagi uch qatlamli neft konlarida filtratsiya jarayonini kompyuter modellashtirish // EHM uchun yaratilgan dastur guvohnomasi № DGU 12579. 07.10.2021

23. Nazirova E. Sh., Ne’matov A., Mahmudova M.M., Bobojonova Sh.T. Uch o’lchamli filtratsiya chegaraviy masalasini yechishda kompyuter modellashtirish // EHM uchun yaratilgan dastur guvohnomasi № DGU 15006. 17.03.2022

24. Nazirova E.Sh., Mahmudova M.M., Ne’matov A.R., Kurbanova M.M. Ko’p qatlamli g’ovak muhitlarda gazning filtratsiya masalasini yechish dasturiy ta’minoti // EHM uchun yaratilgan dastur guvohnomasi № DGU 15529. 13.04.2022

25. Mahmudova M.M., Karabaeva X.A., Boxidjonov Sh.A. Uch qatlamli g’ovak muhitlarda bir o’lchovli gazning filtratsiya masalasini yechishning dasturiy ta’minoti // EHM uchun yaratilgan dastur guvohnomasi № DGU 19217. 11.11.2022

26. Mahmudova M.M., Karabayeva X.A., Xolmo’minov Y.X., Tursunaliyeva N.T. Ko’p qatlamli gaz konlarini filtratsiya masalalarini yechishning vizuallashtiruvchi dasturiy ta’minoti // EHM uchun yaratilgan dastur guvohnomasi № DGU 21505. 09.01.2023

27. Shukurova M.E., Mahmudova M.M., Karabayeva X.A. G’ovak muhitli qatlamlarda ko’p fazali suyuqliklar filtratsiya masalasining sonli natijalarini vizuallashtiruvchi dasturiy ta’minoti // EHM uchun yaratilgan dastur guvohnomasi № DGU 21728. 25.01.2023