ТОШКЕНТ АХБОРОТ ТЕХНОЛОГИЯЛАРИ УНИВЕРСИТЕТИ ва ЎЗБЕКИСТОН МИЛЛИЙ УНИВЕРСИТЕТИ ҲУЗУРИДАГИ ФАН ДОКТОРИ ИЛМИЙ ДАРАЖАСИНИ БЕРИШ БЎЙИЧА 14.07.2016.Т.29.01 РАҚАМЛИ ИЛМИЙ КЕНГАШ

ЎЗБЕКИСТОН МИЛЛИЙ УНИВЕРСИТЕТИ

РАХМОНОВ ЗАФАР РАВШАНОВИЧ

ИККИ КАРРА НОЧИЗИҚЛИ МУҲИТДА ИССИҚЛИК ТАРҚАЛИШ ЖАРАЁНИНИ МАТЕМАТИК МОДЕЛЛАШТИРИШ

05.01.07– Математик моделлаштириш. Сонли усуллар
ва дастурлар мажмуи
(физика-математика фанлари)

ДОКТОРЛИК ДИССЕРТАЦИЯСИ АВТОРЕФЕРАТИ

Тошкент – 2016

Докторлик диссертацияси мавзуси Ўзбекистон Республикаси Вазирлар Маҳкамаси хузуридаги Олий аттестация комиссиясида №30.06.2015/В2015.2.FM226 рақам билан рўйхатга олинган.

Докторлик диссертацияси Ўзбекистон Миллий университетида бажарилган.

Диссертация автореферати уч тилда (ўзбек, рус, инглиз) Илмий кенгашнинг веб саҳифаси (www.tuit.uz) ва «ZIYONET» таълим ахборот тармагида (www.ziyonet.uz) жойлаштирилган.

Илмий маслахатчи:	**Арипов Мерсаид** физика-математика фанлари доктори, профессор
Расмий оппонентлар:	**Керимбеков Акылбек Керимбекович** (Қирғизистон республикаси) физика-математика фанлари доктори, профессор
	Музафаров Хафиз Азизович физика-математика фанлари доктори, профессор
	Хужаёров Бахтиёр Хужаёрович физика-математика фанлари доктори, профессор
Етакчи ташкилот:	**ЎзФА Иншоотлар сейсмик мустаҳкамлиги институти**

Диссертация ҳимояси «29» ноябр 20.16 йил, соат 14 да Тошкент ахборот технологиялари университети ва Ўзбекистон миллий университети қошидаги 14.07.2016.Т.29.01 илмий кенгаш йиғилишида бўлиб ўтади.(Манзил: 100202, Ташкент, Амир Темур кўчаси, 108. Тел.:(99871) 238-64-43; факс:(99871) 238-65-52; e-mail: tuit@tuit.uz).

Докторлик диссертацияси билан Тошкент ахборот технологиялари университети Ахборот-ресурс марказида танишиш мумкин(Рўйхатга олинган рақам 25)Манзил: 100202, Ташкент, Амир Темур кўчаси, 108. Тел.: (99871) 238-64-43.

Диссертация автореферати 2016 йил "14" ноябр куни тарқатилди.

(2016 йил "14" ноябр даги 1 рақамли реестр баённомаси)

Р.Х.Хамдамов
Фан доктори илмий даражасини бериш бўйича
илмий кенгаш раиси, т.ф.д.

М.С.Якубов
Фан доктори илмий даражасини бериш
бўйича илмий кенгаш илмий котиби,
т.ф.д., профессор

Н.Равшанов
Фан доктори илмий даражасини бериш бўйича
илмий кенгаш қошидаги
илмий семинар раиси, т.ф.д.

КИРИШ (докторлик диссертацияси аннотацияси)

Диссертация мавзусининг долзарблиги ва зарурати. Жаҳон миқёсида фаннинг механика, физика, технология, биофизика, биология, экология, тиббиёт ва бошқа турли соҳаларида учрайдиган, ночизиқли дифференциал тенгламалар орқали ифодаланувчи ходиса ва жараёнларнинг математик моделларини ўрганишга катта қизиқиш борлиги кузатилмоқда. Бундай моделларнинг асосини параболик типдаги хусусий ҳосилали чизиқсиз дифференциал тенгламалар ташкил этиб, улар учун қўйиладиган Коши масаласи ҳамда чегаравий масалаларнинг ечимлари хоссаларини ўрганиш ва сонли ечиш тақрибий ечиш усуллари асосида амалга оширилади. Бунда асосий ўринни табиатшуносликда учрайдиган турли чизиқсиз жараёнларни моделлаштирувчи параболик типдаги бузилувчи тенгламалар ва уларнинг системалари эгаллаб келмоқда.

Мустақиллик йилларида мамлакатимизда амалий математиканинг долзарб йўналишларидан бири бўлган турли физик, биологик, технологик ҳамда кимёвий жараёнларнинг чизиқсиз математик моделларини тадқиқ этишга ва уларни амалиётга татбиқ этишга бўлган эътибор кучайтирилди. Шу нуқтаи назардан, энергетика, тиббиёт ҳамда нефть ва газ соҳаларида амалий татбиққа эга бўлган иссиклик ўтказувчанлик, фильтрация, биологик популяция жараёнларини ифодаловчи қатор математик моделлар устида салмоқли илмий-тадқиқот ишлари олиб борилмоқда.

Ҳозирги кунда жаҳонда квазичизиқли параболик типдаги бузилувчи тенламалар ва уларнинг системалари орқали ифодаланувчи жараёнлар математик моделларининг кенг тарқалиши, уларнинг фундаментал сақланиш қонуниятларидан келиб чиқиши билан изоҳланади. Шу сабабли ҳам бир қаращда ҳеч қандай умумийликка эга бўлмаган икки физик жараёнларнинг математик моделлари турлича сонли параметрлар билан бериладиган айнан бир хил чизиқсиз диффузия тенгламаси орқали тасвирланади. Ҳозирги кунда бундай тенгламаларни ўрганиш ва амалиётга татбиқ этиш юзасидан қуйидаги йўналишлардаги илмий-тадқиқот изланишларини амалга ошириш муҳим вазифалардан бири хисобланади: чизиқсиз математик моделларнинг сифат хоссаларини ўрганиш усулларини ишлаб чиқиш; ечимларнинг вақт бўйича аниқ баҳоларини топиш; чизиқсиз эффектларни аниқлаш; тежамкор сонли схемалар ишлаб чиқиш; чизиқсиз жараёнларнинг математик моделларини ўрганишга ёрдам берувчи амалий дастурлар мажмуини яратиш ва жараёнларни вақт бўйича кечишини назорат қилиш. Юқорида келтирилган илмий-тадқиқотлар йўналишида бажарилаётган илмий изланишлар мазкур диссертация мавзусининг долзарблигини изоҳлайди.

Ўзбекистон Республикаси Президентининг 2012 йил 21 мартдаги ПҚ-1730-сон «Замонавий ахборот-коммуникация технологияларини жорий этиш ва янада ривожлантириш чора-тадбирлари тўғрисида»ги, 2010 йил 15 декабрдаги ПҚ-1442-сон «Ўзбекистон Республикасининг саноатини 2011-2015 йилларда ривожлантиришнинг устувор йўналишлари ҳақида»ги Қарорлари, Ўзбекистон Республикаси Вазирлар Маҳкамасининг 2012 йил 1 февралидаги 24-сонли «Жойларда компьютерлаштириш ва ахборот коммуникация технологияларини бундан кейинги ривожлантиришга шароитлар яратиш учун чора-тадбирлар тўғрисида»ги қарори ҳамда мазкур фаолиятга тегишли барча меъёрий-ҳуқуқий ҳужжатларда белгиланган вазифаларни амалга оширишга ушбу диссертация тадқиқоти муайян даражада хизмат қилади.

Тадқиқотнинг республика фан ва технологиялари ривожланишининг устувор йўналишларига боғлиқлиги. Мазкур диссертация иши республика фан ва технологиялар ривожланишининг IV. «Математика, механика ва информатика» устивор йўналишига мувофиқ бажарилган.

Диссертация мавзуси бўйича хорижий илмий-тадқиқотлар шарҳи[1].

Чизиқсиз математик моделларнинг сифат хоссаларини тадқиқ этиш бўйича илмий изланишлар жаҳоннинг етакчи олий таълим муассасалари ва илмий марказлари, жумладан, North Carolina State University, Iowa State University of Science and Technology, University of Central Florida, Louisiana State University, California State University (АҚШ), Universidad de Buenos Aires (Аргентине), Chile University (Чили), Sapienza Università di Roma, Università degli Studi di Catania (Италия), Osaka, Nagoya, Hiroshima University (Япония), National University of Singapore (Сингапур), Universidad Autónoma de Madrid, Universidad Complutense de Madrid (Испания), Paderborn University, Aachen University (Германия), University of Nottingham, University of Sussex (Буюк Британия), Комен университети (Словакия), Тель-Авив университети (Исроил), Jilin, Chongqing, Changchun University (Хитой), Paris Mathematics Center, Université Paris-Dauphine (Франция), Россия ФА нинг Амалий математика институти, Москва давлат университетида (Россия), Венгрия фанлар академиясига қарашли Ҳисоблаш техникаси ва автоматика институти (Венгрия), Қозоғистон миллий университети, Математика ва математик моделлаштириш институти (Қозоғистон), Т.Шевченко номидаги Луган миллий университети (Украина), Математика ва информатика институти, София университети (Болгария), Ўзбекистон Миллий университети, Самарқанд давлат университет, Урганч давлат университети (Ўзбекистон) да олиб борилмоқда.

Чизиқсиз математик моделларни тадқиқ этишда чизиқли моделлар хоссаларидан фарқли уларок фақат ночизиқли моделларга хос янги сифат хоссаларни аниқлаш, сонли ечиш усулларини ишлаб чиқиш ва визуаллаштиришга оид жаҳонда олиб борилган тадқиқотлар натижасида қатор, жумладан, қуйидаги илмий натижалар олинган: параболик типдаги ночизиқли тенгламалари орқали ифодаланувчи иссиқлик тарқалиши жараёни моделлари учун Коши ва Нейман масаласининг вақт бўйича глобал ечимга эга бўлиш ва эга бўлмаслик шартлари топилган (Universidad Autónoma de Madrid, Osaka, Nagoya University), ночизиқли параболик тенгламалар учун

[1] Диссертация мавзуси бўйича хорижий илмий тадқиқотлар шарҳи: Журнал вычислительной математики и математической физики, Математическое моделирование, Communications on Pure and Applied Analysis, Journal of the Korean Mathematical Society, http://www.sciencedirect.com/science/jrnlallbooks/sub/mathematics; http://www.springer.com/mathematics манбалар асосида ишлаб чиқилган

Фуджита типидаги ва ечимнинг глобал мавжудлик критик экспоненталари қийматлари топилган (Universidad Complutense de Madrid, Paderborn, Jilin, Chongqing, Changchun University), ғовак муҳит тенгламаси ва градиент чизиқсизликка эга тенгламалар учун масаласини ечишда бошланғич берилганлар учун чегарани аниқлаб берувчи иккинчи тур критик экспоненталарни аниқлаш усуллари ишлаб чиқилган (Sapienza Università di Roma, Chongqing, Osaka University).

Дунёда турли математик моделларни асосини ташкил этувчи, параболик типдаги чизиқсиз тенгламалар учун қўйилган Коши, ҳамда чегаравий масалаларни ечиш ва амалиётга татбиқ этиш усуллари, воситаларини ишлаб чиқиш бўйича бир қатор устувор йўналишларда илмий тадқиқот ишлари олиб борилмоқда, жумладан: чизиқсиз масалаларда вақт бўйича глобал ечимларнинг мавжуд бўлиш шартларини топиш; Фуджита типидаги ва глобал ечимнинг мавжудлик критик экспоненталари қийматларини топиш; чегараланмаган ечимларнинг локаллашув шартларини аниқлаш; сонли ечиш усулларининг самарадорлигини ошириш; чизиқсиз жараёнларни сонли ўрганишга имкон берувчи дастурий воситалар мажмуини ишлаб чиқиш.

Муаммонинг ўрганилганлик даражаси. Манба ёки ютилишга эга чизиқсиз муҳитларда иссиқлик ўтказувчанлик жараёнини математик моделлаштириш назариясида дунё олимлари томонидан қатор муҳим натижалар олинди. Энергия узатиш назариясида иссиқлик узатишнинг чизиқли моделларига хос бўлмаган ўзгача сифат хоссалар борлиги аниқланди. Жумладан, J.L.Vazquez, H.A.Levine А.А.Самарский, А.С.Калашников, В.А.Галактионов, А.Ф.Тедеевлар томонидан ечимнинг чегараланмаганлиги, чекли тезликда тарқалиш эффекти ва иссиқлик тарқалишининг фазовий локаллашиши, изоляцияланган иссиқлик структуралари, манба ёки ютилишга эга чизиқсиз муҳитларда таъсирланиш жараёнининг чекли вақт мавжуд бўлиши кабилар аниқланди.

Чизиқсиз муҳитларда иссиқлик тарқалиш тезлигининг чеклилик (ИТТЧ) эффекти дастлаб Я.Б.Зельдович, А.С.Компанейц лар, кейинчалик эса Г.И.Баренблатт, R.Pattle лар томонидан аниқланган. Ғовак муҳит ва градиент чизиқсиз иссиқлик ўтказувчанлик тенгламалари учун Коши масаласида ИТТЧ эффектининг юзага келиш шартлари ва компакт юритувчили ечимларнинг баҳоларини топиш бўйича J.L.Vazquez, M.A.Herrero, M.Fila, F.Quirós, R.Guillermo, Keng Deng, Julio D. Rossi, P.Groisman, D.Andreucci, A.Tesei, R.Ferreira, A.D.Pablo, H.Fujita; вақтга кўра ечимларнинг асимптотик турғунлиги аниқлаш бўйича X.Y. Chen, H. Matano, M.Sugimoto, John King, А.П.Михайлов, В.А. Галактионов, Е.Куркина; квазичизиқли бузилувчи параболик типдаги политропик фильтрация тенгламалари учун Нейман чегаравий масаласи орқали ифодаланувчи математик моделларнинг хоссаларини аниқлаш бўйича H.A.Levine, M.Chunlai, W.Du, J.Yin, Y.Wang, M.X.Wang, Z.Xiang, M.Yongsheng, S.N.Zheng, X.F.Song, Z.X.Jiang, Michael Winkler; ўзгарувчан зичликли чизиқсиз иссиқлик ўтказувчанлик, реакция-диффузия ва фильтрация тенгламалари учун Коши масаласи ечимларининг вақт кўра глобаллик ва глобал бўлмаслик шартларини тадқиқ бўйича Z.Li, M.Chunlai, W.Du, Guirong Liu, Yuan-Wei Qi, А.Ф.Тедеев, А.В. Мартыненко, Н.В. Афанасьева, С.П. Дегтяревлар илмий изланишлар олиб боришган.

Чизиқсиз фильтрация масалалари ҳамда уларнинг системалари билан Н.М.Мухитдинов, А.Б.Бегматов, Б.М.Хўжаяров, И.Хўжаев, Н.Равшанов ва уларнинг шогирдлари шуғулланишган. Уларнинг ишлари нефт ва газ масалаларига қўллаш мумкин бўлган ночизиқли фильтрация масалалари хоссаларини сонли тадқиқ этишга ва сонли ечишга бағишланган. М.Арипов ва унинг шогирдларининг (Т.Каюмов, Д.Эшматов, А.Хайдаров, Ж.Мухаммадиев, Ф.Кабилжонова, Ш.Сеттиев, Ш.Садуллаева, А.Матякубов, Д.Мухаммадиева ва бошқалар) илмий ишларида автомодель таҳлил асосида табиатшуносликнинг турли соҳаларида учрайдиган жараёнларни ифодаловчи чизиқсиз масалалар ечимларининг янги сифат хоссалари аниқланди ва умумлаштирилди.

Диссертация мавзусининг диссертация бажарилган олий таълим муассасасининг илмий-тадқиқот ишлари билан боғлиқлиги. Мазкур диссертация тадқиқоти Ўзбекистон Миллий университетининг илмий-тадқиқот ишлари режасига мувофиқ ЁФ-4-10 «Колмогоров-Фишер типидаги биологик популяция системаларини сонли моделлаштириш» (2012-2014), А-5-44 «Колмогоров-Фишер типидаги чизиқсиз биологик популяция системаларини сонли моделлаштириш» (2015-2017) мавзуларидаги илмий тадқиқот лойиҳалари доирасида бажарилган.

Тадқиқотнинг мақсади квазичизикли параболик типдаги тенгламалар ва уларнинг системалари билан ифодаланувчи нолокал чегаравий шартга эга бир жинсли ва бир жинсли бўлмаган муҳитларда иссиқлик тарқалиши жараёнларини чизиқсиз математик моделларининг сифат хоссаларини сонли ва аналитик тадқиқ этиш, чизиқсиз чегаравий масалаларни сонли ечиш учун дастурий воситалар мажмуини яратишдан иборат.

Тадқиқотнинг вазифалари:

нолокал чегаравий масалалар орқали ифодаланувчи бир жинсли бўлмаган муҳитда иссиқлик тарқалишининг чизиқсиз математик моделлари учун Фуджита типидаги критик экспоненталар қийматини ҳосил қилиш;

нолокал чегаравий шарт билан берилган бир жинсли бўлмаган муҳитда иссиқлик тарқалиши жараёни чизиқсиз модели ечимларининг вақт бўйича глобаллик ва глобал бўлмаслик шартларини топиш;

икки карра чизиқсиз ва ўзгарувчан зичликка эга политропик фильтрация жараёни математик моделининг секин диффузияли ҳоли учун тарқалиш тезлигининг чеклилиги ва фазовий локаллашув шартларини топиш;

манба ва ўзгарувчан зичликка эга икки карра чизиқсиз бузилувчи иссиқлик тарқалиши тенгламаси учун Коши ва чегаравий масалаларнинг компакт юритувчили умумлашган ечимларининг асимптотик ифодаларини ҳосил қилиш;

чизиқсиз чегаравий шарт ва ўзгарувчан зичликка эга политропик фильтрация системаси чизиқсиз математик модели ечимларининг вақт бўйича глобал бўлиш ва бўлмаслик шартларини топиш;

ўзгарувчан зичлик ва нолокал чегаравий шарт билан берилган иссиқлик ўтказавчанлик жараёнлари математик моделларининг сифат хоссаларини ўрганиш учун ночизиқли масалаларни сонли ҳисоблаш схемаларини, алгоритмини ва дастурий воситалар мажмуини ишлаб чиқиш, ҳамда ечимларни визуаллаштириш;

Тадқиқотнинг объекти нолокал чегаравий шартларга эга параболик типдаги бузилувчи тенгламалар ва тенгламалар системаси билан ифодаланувчи чизиқсиз иссиқлик тарқалиш (фильтрация, диффузия) жараёнларидан иборат.

Тадқиқотнинг предмети – муҳитнинг бир жинслилиги ва бир жинсли эмаслигини ҳисобга олган ҳолда икки ва уч карра чизиқсиз масалаларни сонли-аналитик жиҳатдан тадқиқ этиш усуллари ва амалиёти ташкил этади.

Тадқиқот усуллари. Тадқиқот ишида автомодель ва тақрибий автомодель усулларидан, солиштириш теоремалари, оддий бузилувчи чизиқсиз дифференциал тенгламалар ва уларнинг системаларини ечиш учун эталон тенгламалар методи, ечимларни баҳолаш усуллари, сонли схемаларни қуриш учун айирмали схемалар, итерация, ҳайдаш, ўзгарувчан йўналишлар усулларидан фойдаланилган.

Тадқиқотнинг илмий янгилиги қуйидагилардан иборат:

чизиқсиз чегаравий шарт билан берилган манбага эга бўлмаган бир жинсли муҳитда иссиқлик тарқалиши модели учун вақт бўйича глобал ва глобал бўлмаган ечимларга эга бўлиш шартлари аниқланган;

ўзгарувчан зичликнинг чизиқсиз масаларнинг вақтга кўра глобал ечимга эга бўлишлик ва эга бўлмаслик шартларига таъсири аниқланган;

Нейман масаласи шаклида ифодаланувчи математик моделларнинг секин ва тез кечувчи диффузия ҳоллари учун Фуджита типидаги критик экспонента қиймати топилган;

иккинчи тур чегаравий масала билан тасвирланувчи математик моделлар учун тез ва секин диффузия ҳолларида ечимнинг глобал мавжудлик критик экспонентаси топилган.

бир жинсли ва бир жинсли бўлмаган муҳитда секин кечувчи иссиқлик ўтказувчанлик масаласининг умумлашган ечимлари учун қуйи ва юқори баҳолар қурилган;

эталон тенгламалар усули ёрдамида икки ва уч карра чизиқсиз иссиқлик ўтказувчанлик масалаларининг турли автомодель ечимлар асимптотикаларининг бош ҳадлари олинган.

ўзгарувчан зичликли иссиқлик ўтказувчанлик моделларининг сифат хоссаларини ўрганиш учун сонли ҳисоблаш схемалари таклиф этилган, алгоритмлар, дастурий воситалар комплекси ишлаб чиқилган, ҳамда чизиқсиз масалаларнинг ечимлари Visual Studio (C#) муҳитида визуаллаштирилган.

Тадқиқотнинг амалий натижаси турли соҳаларда вужудга келадиган чизиқсиз масалаларни сонли ечишга татбиқ этиш учун қурилган асимптотик формулалар, консерватив сонли схемалар, итерацион жараён қурилган, ҳамда дастурлар мажмуи яратилган.

Тадқиқот натижаларининг ишончлилиги. Олинган натижалар ва тасдиқлар катъий исботланган ва сонли тадқикотлар натижалари билан тасдиқланган. Ечимлар учун олинган баҳолардан фойдаланган ҳолда ечимларнинг сонли таҳлили келтирилган бўлиб, улар диссертация ишида таклиф этилган усулларини ҳамда эталон тенгламалар методи ва автомодель таҳлилга асосланган ҳисоблаш методларининг тўғрилигини ва самарадорлигини тасдиқлаганлиги билан изоҳланади.

Тадқиқот натижаларининг илмий ва амалий аҳамияти. Тадқиқот натижаларнинг илмий аҳамияти параболик типдаги тенгламалар учун қўйиладиган Коши масаласи ва чизиқсиз чегаравий масалалар орқали ифодаланувчи математик моделлар учун Фуджита типидаги критик экспонента ҳамда ечимларнинг глобал мавжудлиги критик экспоненталари назариясини асослаш билан изоҳланади.

Тадқиқот ишининг амалий аҳамияти қурилган итерацион жараёнлар, ишлаб чиқилган сонли схемалар ва дастурий воситалар комплекси турли чизиқсиз муҳитларда чизиқсиз фильтрация, реакция-диффузия, иссиқлик ўтказувчанлик масалаларининг секин ва тез кечувчи диффузия ҳолларида сонли ҳисоблаш экспериментларини ўтказишга имкон беради ҳамда ўрганилаётган чизиқсиз масалалар синфи учун янги эффектлар – ечимнинг локаллашуви ва чекли тарқалиш ҳодисаларини аниқлашга хизмат қилади.

Тадқиқот натижаларининг жорий қилиниши. Диссертация тадқиқоти жараёнида олинган натижалар қуйидаги йўналишларда амалиётга жорий қилинган:

бир жинсли ва бир жинсли бўлмаган муҳитда секин кечувчи иссиқлик ўтказувчанлик масаласининг умумлашган ечимлари учун олинган қуйи ва юқори баҳолар Ф-4-30 «Оператор тип коэффициентли дифференциал-оператор тенгламалар учун ички ва чегаравий масалалар» грант лойиҳасида математик физиканинг ноклассик тенгламалари учун ички чегаравий масалаларнинг корректлигини исботлащда қўлланилган (Фан ва технологияларни ривожлантиришни мувофиқлаштириш қўмитасининг 2016 йил 3 ноябрдаги ФТК-03-13/743-сон маълумотномаси). Илмий натижаларнинг қўлланилиши Колмогоров-Фишер типидаги биологик популяция тенгламалари ва системаларини сонли ечиш имконини берган;

бир жинсли бўлмаган муҳитда иссиқлик тарқалиш жараёни математик моделини ифодаловчи параболик типдаги икки карра чизиқсиз тенгламалар учун қўйилган нолокал чегаравий масалаларнинг автомодель ечимлари асимптотикалари Ф-4-30 «Оператор тип коэффициентли дифференциал-оператор тенгламалар учун ички ва чегаравий масалалар» грант лойиҳасида ички чегаравий масалаларнинг ечимлари хоссаларини аниқлашда қўлланилган (Фан ва технологияларни ривожлантиришни мувофиқлаштириш қўмитасининг 2016 йил 3 ноябрдаги ФТК-03-13/743-сон маълумотномаси). Илмий натижаларнинг қўлланилиши ички чегарвий масалаларни корректлигини асослашга имкон берган;

ўзгарувчан зичликли муҳитда иссиқлик тарқалишини тасвирловчи математик моделларнинг сифат хоссаларини сонли ўрганиш учун таклиф этилган ҳисоблаш схемалари, ишлаб чиқилган алгоритмлар ва дастурий воситалар комплекси Ф-4-30 «Оператор тип коэффициентли дифференциал-оператор тенгламалар учун ички ва чегаравий масалалар» грант лойиҳасида математик физиканинг ноклассик тенгламалари учун ички чегаравий масалаларни сонли моделлаштиришда қўлланилган (Фан ва технологияларни ривожлантиришни мувофиқлаштириш қўмитасининг 2016 йил 3 ноябрдаги ФТК-03-13/743-сон маълумотномаси). Илмий натижаларнинг қўлланилиши чизиқсиз чегаравий масалаларнинг сонли ечимларини визуаллаштиришга хизмат қилган.

Тадқиқот натижаларининг апробацияси. Тадқиқот натижалари 14 та халқаро анжуманларда: «Актуальные проблемы прикладной математики и информационных технологий – аль Хорезми 2012» (Тошкент, 2012); «Вычислительные и информационные технологии в науке, технике и образовании – 2013» (Россия, 2013); «Актуальные проблемы прикладной математики и информационных технологий – аль Хорезми 2014» (Самарқанд, 2014); «Analysis and Applied Mathematics» (Қозоғистон, 2014); 5-турк дунёси математиклари конгресси (Қирғизистон, 2014); «Mathematical Methods, Mathematical Models and Simulation in Science and Engineering (Швейцария, 2014); «Applied Mathematics and Computational Methods» (Греция, 2014); «Mathematical, Computational and Statistical Sciences» (БАА, 2015); «Pure Mathematics, Applied Mathematics and Computational Methods» (Греция, 2015); «Heat Transfer, Thermal Engineering and Environment» (Италия, 2015); «Applied Mathematics and Informatics» (Испания, 2015); «Computational and Informational Technologies in Science, Engineering and Education» (Қозоғистон, 2015); «Дифференциальные уравнения и математическое моделирование» (Россия, 2015); «Nonlinear Analysis and Applications» (Самарқанд 2016); 7 та республика илмий-техник анжуманларида: «Актуальные вопросы математики, математического моделирования и информационных технологий» (Термез, 2012); «Новые теоремы молодых математиков» (Наманган, 2013); «Современные проблемы дифференциальных уравнений и их приложения» (Тошкент, 2013); «Прикладная математика и информационная безопасность» (Тошкент, 2014); «Математическая физика и родственные проблемы современного анализа» (Бухоро, 2015); «Современные методы математической физики и их приложения» (Тошкент, 2015); «Проблемы современной топологии и её приложения» (Тошкент, 2016) каби анжуманларда маъруза кўринишида баён этилган ҳамда апробациядан ўтказилган. Тадқиқотнинг натижалари Ўзбекистон Миллий университетининг «Математик физиканинг замонавий усуллари» (Тошкент, 2016), «Амалий математика ва ахборот технологияларининг замонавий муаммолари» (Тошкент, 2012-2016) ва «Ночизиқли ва нокоррект масалаларнинг долзарб муаммолари» (Тошкент, 2012-2016), Тошкент темир йўл муҳандислари институтининг «Ҳисоблаш математикаси ва информатиканинг замонавий муаммолари» ва Тошкент ахборот технологиялари университети хузуридаги Дастурий маҳсулотлар ва аппарат-дастурий мажмуалар яратиш маркази «Мураккаб тизимларни моделлаштириш» илмий семинарларида (Тошкент, 2016) муҳокама қилинган.

Тадқиқот натижаларининг эълон қилиниши. Диссертация мавзуси бўйича жами 37 та илмий иш чоп этилган бўлиб, шулардан, Ўзбекистон Республикаси Олий аттестация комиссиясининг докторлик диссертациялари асосий натижаларини чоп этиш тавсия этилган илмий нашрларда 13 та мақола, жумладан 8 таси республика ва 5 таси хорижий журналларда нашр этилган.

Диссертациянинг ҳажми ва тузилиши. Диссертация таркиби кириш, тўртта боб, хулоса, фойдаланилган адабиётлар рўйхати ва иловалардан иборат. Диссертациянинг ҳажми 170 бетни ташкил этган.

ДИССЕРТАЦИЯНИНГ АСОСИЙ МАЗМУНИ

Кириш қисмида диссертация мавзусининг долзарблиги ва зарурияти асосланган, тадқиқотнинг Ўзбекистон Республикаси фан ва технологиялари тараққиётининг устувор йўналишларига мослиги кўрсатилган, тадқиқотнинг мақсад ва вазифалари белгилаб олинган ҳамда тадқиқот объекти ва предмети аниқланган, тадқиқотнинг илмий янгилиги ва амалий натижалари баён қилинган, олинган натижаларнинг ишончлилиги асослаб берилган, уларнинг назарий ва амалий аҳамияти очиб берилган, тадқиқот натижаларини амалда жорий қилиш ҳолати, нашр этилган ишлар ва диссертация тузилиши бўйича маълумотлар келтирилган.

Диссертациянинг **«Икки карра ночизиқли муҳитда иссиқлик ўтказувчанлик жараёнини математик моделлаштириш»** деб номланган биринчи боби манбага эга бир жинсли бўлмаган муҳитда иссиқлик тарқалиши тенгламаси учун Коши масаласи ва нолокал чегаравий масалаларнинг автомодель ечимлари асимптотикаларини топишга бағишланган.

Биринчи параграфда манбага эга ночизиқли иссиқлик тарқалиши жараёни математик моделининг хоссалари ва бу соҳада олинган халқаро илмий тадқиқотлар натижалари баёни келтирилган.

Ушбу бобнинг иккинчи параграфида асосий таърифлар ва ёрдамчи тасдиқлар келтирилган.

3-параграфда бир жинсли бўлмаган муҳитда иссиқлик тарқалиши жараёнини моделлаштирувчи параболик типдаги тенглама учун қуйидаги Коши масаласи

$$\rho_1(x)\frac{\partial u}{\partial t} = div\left(\left|\nabla u^l\right|^{p-2}\nabla u^l\right) + \rho_2(x)u^q,\ x\in R^N,\ t>0,, \qquad (1)$$

$$u(x,0)=u_0(x),\ \ x\in R^N, \qquad (2)$$

автомодель ечимларининг асимптотикаларини тадқиқ этишга бағишланган.

Бу ерда $\nabla(\cdot)=grad_x(\cdot)\equiv\left(\frac{\partial}{\partial x_1},\frac{\partial}{\partial x_2},\dots,\frac{\partial}{\partial x_N}\right)(\cdot)$, $\rho_1(x)=|x|^m$, $\rho_2(x)=|x|^n$ бўлиб,

$n=m=0$ да иссиқлик ажралиш қуввати $u^q \geq 0$ ҳарорат $u=u(t,x)\geq 0$ га боғлиқ ҳамда иссиқлик ўтказувчанлик коэффициенти $u^{l-1}\left|\nabla u^l\right|^{p-2} \geq 0$ бўлган муҳитда ёниш жараёнининг модели сифатида қаралади.

(1) тенглама $p>1+1/l$ да бузилувчи бўлиб, шу сабабли унинг ечими $Q=\{(x,t):x\in R^N, 0<t<T\}$ соҳада $0\leq u(x,t)$, $u^{l-1}\left|\nabla u^l\right|^{p-2} \in C(Q)$ синфга тегишли бўлган ва (1) тенгламани тақсимот маъносида қаноатлантирувчи умумлашган ечим сифатида тушунилади.

(1) тенглама $p>1+1/l$ шарт бажарилганда секин иссиқлик тарқалиш ҳолини, $1<p<1+1/l$ да эса тез кечувчи ҳолини ифодалайди.

(1) тенглама учун қуйидаги автомодель ечим хоссалари ўрганилган

$$u=(T+t)^{-\alpha} f(\xi),\ \xi=|x|(T+t)^{-\beta},$$

бу ерда $\alpha=\dfrac{p+n}{(q-1)(p+m)-(m-n)(l(p-1)-1)}$, $\beta=\dfrac{q-l(p-1)}{p+n}\alpha$, $f(\xi)$ функция эса қуйидаги автомодель масаланинг ечими

$$\xi^{1-N}\frac{d}{d\xi}\left(\xi^{N-1}\left|\frac{df^l}{d\xi}\right|^{p-2}\frac{df^l}{d\xi}\right)+\beta\xi^{m+1}\frac{df}{d\xi}+\alpha\xi^m f+\xi^n f^q=0, \qquad (3)$$

$$f(0)=C>0, f(d)=0,\ d<+\infty. \qquad (4)$$

Секин диффузия ҳоли $(p>1+1/l)$. Қуйидаги функцияни қараймиз:

$$\bar{f}(\xi)=\left(a-b|\xi|^{\frac{p+m}{p-1}}\right)_+^{\frac{p-1}{l(p-1)-1}},$$

бу ерда $a=C^{\frac{l(p-1)-1}{p-1}}$, $b=\dfrac{l(p-1)-1}{l(p+m)}\beta^{\frac{1}{p-1}}$, $(i)_+=\max(0,i)$.

Теорема 1. (3), (4) масаланинг компакт юритувчили ечимлари $\xi\to(a/b)^{(p-1)/(p+m)}$ да $f(\xi)=A\bar{f}(\xi)(1+o(1))$ асимптотикага эга, бу ерда A

$$\left(\frac{1}{y}\right)^{p-1} w^{l(p-1)-1}+\frac{l(b/a)^{\frac{p(1-n)+m+n}{p+m}}}{(bl(p+m))^p}w^{q-1}-\frac{\beta}{(lb(p+m))^{p-1}}=0$$

алгебраик тенгламанинг ечими, агар $q=\dfrac{(p-1)(1-l)+1}{p-1}$ бўлса ва $A=1$, агар $q>\dfrac{(p-1)(1-l)+1}{p-1}$ бўлса.

Тез диффузия ҳоли $(1<p<1+1/l)$. Фараз қилайлик

$$\tilde{f}(\xi)=\left(a+k|\xi|^{\frac{p+m}{p-1}}\right)^{-\frac{p-1}{1-l(p-1)}},$$

бу ерда $k=\frac{1-l(p-1)}{l(p+m)}\beta^{\frac{1}{p-1}}$, $a=C^{\frac{l(p-1)-1}{p-1}}$.

Теорема 2. Фараз қилайлик $-p<m<0$, $\frac{l(N+m)+N}{l(N+m)+1}<p<1+1/l$ бўлсин, у ҳолда (3) тенгламанинг чексизликда сўнувчи ечимлари қуйидаги асимптотик ифодага эга $f(\xi)=M\tilde{f}(\xi)(1+o(1))$, бу ерда M қуйидаги алгебраик тенгламанинг ечими

$$\left(1-l(p-1)\right)^{1-p}w^{l(p-1)-1}+\frac{lb^{1-n(p-1)/(p+m)}}{\left(bl(p+m)\right)^{p}}w^{q-1}-\frac{\beta}{\left(lb(p+m)\right)^{p-1}}=0,$$

агар $n=\frac{(q-1)(p+m)}{1-l(p-1)}$ бўлса, $M=1$, агар $n<\frac{(q-1)(p+m)}{1-l(p-1)}$ бўлса.

Шунингдек, ушбу параграфда қуйидаги кўринишдаги

$$u(t,x)=(T-t)^{-\alpha}g(\xi),\ \xi=|x|(T-t)^{-\beta},$$

чегараланмаган автомодель ечим қаралган ва унинг асимптотикаси олинган, бу ерда $g(\xi)$ қуйидаги масаланинг ечими

$$\xi^{1-N}\frac{d}{d\xi}\left(\xi^{1-N}\left|\frac{dg^{l}}{d\xi}\right|^{p-2}\frac{dg^{l}}{d\xi}\right)-\beta\xi^{m+1}\frac{dg}{d\xi}-\alpha\xi^{m}g-\xi^{n}g^{q}=0, \tag{5}$$

$$g(0)=C>0,\ g(d)=0,\ d<+\infty. \tag{6}$$

Теорема 3. Фараз қилайлик $q>l(p-1)$ бўлсин. У ҳолда (5), (6) масаланинг компакт юритувчили ечими қуйидаги асимптотикага эга

$$g(\xi)=C\bar{g}(\xi)(1+o(1)),$$

бу ерда $C=\left(\left(\frac{l(p-1)-1}{bl(p+m)}\right)^{p-1}\beta\right)^{\frac{1}{l(p-1)-1}}$, $\bar{g}(\xi)=\left(D-B|\xi|^{\frac{p+m}{p-1}}\right)^{\frac{p-1}{l(p-1)-1}}$, $D>0,\ B>0$.

Натижа 1. (1), (2) Коши масаласининг чегараланмаган ечимлари $l(p-1)<q<l(p-1)+\frac{p+m}{N+m}$ да фазовий локаллашган бўлиб, эркин чегара учун $t\to T^{-}$ да қуйидаги асимптотика ўринли бўлади

$$x_c(t)\sim(D/B)^{(p-1)/(p+m)}(T-t)^{\beta}\to 0,$$

яъни фазовий локализация ҳодисаси содир бўлади.

4-параграфда нолокал чегаравий шарт билан берилган ва манбага эга қуйидаги иссиқлик ўтказувчанликнинг математик модели ўрганилиб, унда

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial x}\right)+u^{\beta},\quad (x,t)\in R_{+}\times(0,+\infty), \tag{7}$$

$$-\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial x}(0,t)=u^{q}(0,t),\quad t>0, \tag{8}$$

$$u(x,0)=u_0(x)\geq 0,\quad x\in R_+. \tag{9}$$

ечимларининг асимптотикалари олинади.

(7)-(9) чегаравий масалага чизиқсиз муҳитдаги диффузия жараёнини математик моделлаштиришда, ғовак муҳитлардаги суюқликлар оқими, биологик популяция динамикаси, политропик фильтрация, синергетика масалаларини ва бошқа қатор соҳалардаги масалаларни ечишда муҳим рол ўйнайди.

Маълумки, (7)-(9) масала ечими сонли параметрларнинг аниқ бир шартларида глобал ёки чегараланмаган бўлади. (7)-(9) масалага нисбатан айнан шу савол билан Wanjuan Du ва Zhongping Li лар шуғулланишган. Улар (7)-(9) масала ечимларининг вақт бўйича глобал ва глобал бўлмаслик шартларини аниқлашган. Ғовак муҳит тенгламаси учун нолокал чегаравий масала ечимларининг вақт бўйича глобал бўлиш ва бўлмаслик шартлари эса Arturo de Pablo, Fernando Li Quiros ва Julio D. Rossi ларнинг ишларида ўрнатилган.

Қуйида Wanjuan Du ва Zhongping Li изланишларидан келиб чиққан ҳолда глобал ва чегараланмаган автомодель ечимлар асимптотикалари топилди.

$\beta\leq 1,\quad q>2(p-1)$ ҳол. (7)-(9) масаланинг қуйидаги кўринишдаги автомодель ечимини қарайлик:

$$u_1(x,t)=t^{\alpha}\varphi(\xi),\ \xi=xt^{-\gamma}, \tag{10}$$

бу ерда $\alpha=\dfrac{1}{1-\beta}$, $\gamma=\dfrac{p-1-\beta}{p(1-\beta)}$, $\varphi(\xi)$ эса қуйидаги масаланинг ечими

$$\frac{d}{d\xi}\left(\left|\frac{d\varphi}{d\xi}\right|^{p-2}\frac{d\varphi}{d\xi}\right)+\gamma\xi\frac{d\varphi}{d\xi}-\alpha\varphi+\varphi^{\beta}=0, \tag{11}$$

$$-\left|\frac{d\varphi}{d\xi}\right|^{p-2}\frac{d\varphi}{d\xi}\bigg|_{\xi=0}=0. \tag{12}$$

Қуйидаги теорема ўринли.

Теорема 4. (11), (12) масаланинг компакт юритувчили ечими $\xi\to(ap/(p-2))^{\frac{p-1}{p}}\gamma^{\frac{1}{p}}$ да қуйидаги асимптотик кўринишга эга

$$\varphi(\xi)=\left(a-\frac{p-2}{p}\gamma^{\frac{1}{p-1}}\xi^{\frac{p}{p-1}}\right)_+^{\frac{p-1}{p-2}},(1+o(1)),\ a>0.$$

$\beta>2p-1,\quad q<2(p-1)/p$ ҳол. Бу ҳолда (7)-(9) масаланинг чегараланмаган автомодель ечими қуйидаги кўринишда қидирилади

$$u_2(x,t)=t^{\alpha}\varphi(\xi),\ \xi=xt^{-\gamma},$$

бу ерда $\alpha=\dfrac{p-1}{2(p-1)-pq}$, $\gamma=\dfrac{p-1-q}{2(p-1)-pq}$, $\varphi(\xi)$ функция эса қуйидаги масаланинг ечими

$$\frac{d}{d\xi}\left(\left|\frac{d\varphi}{d\xi}\right|^{p-2}\frac{d\varphi}{d\xi}\right)+\gamma\xi\frac{d\varphi}{d\xi}-\alpha\varphi=0, \tag{13}$$

$$-\left|\frac{d\varphi}{d\xi}\right|^{p-2}\frac{d\varphi}{d\xi}\Bigg|_{\xi=0}=\varphi^{q}(0). \tag{14}$$

Теорема 5. (13), (14) масаланинг компакт юритувчили ечими учун $\xi\to a$ да қуйидаги асимптотика ўринлидир

$$\varphi(\xi)=C(a-\xi)_{+}^{\frac{p-1}{p-2}}(1+o(1)),\quad a>0,$$

бу ерда $C=\left(\frac{p-2}{p-1}a\gamma\right)^{1/(p-2)}\frac{p-2}{p-1}$.

Критик ҳол $pq=2(p-1)$. Бу ҳол юқоридаги иккинчи ҳолнинг $pq=2(p-1)$ бўлгандаги мантиқий давоми ҳисобланади. Ушбу ҳолда (7)-(9) масаланинг ечими қуйидаги экспоненциал кўринишда қидирилади

$$u_4(x,t)=e^{\alpha(t-\tau)}\varphi(\xi),\ \xi=xe^{-\gamma(t-\tau)},$$

бу ерда $\alpha=\frac{p}{2p-1}$, $\gamma=\frac{p-2}{2p-1}$, τ - мусбат сон, $\varphi(\xi)$ функция эса қуйидаги масаланинг ечими бўлсин

$$\frac{d}{d\xi}\left(\left|\frac{d\varphi}{d\xi}\right|^{p-2}\frac{d\varphi}{d\xi}\right)+\gamma\xi\frac{d\varphi}{d\xi}-\alpha\varphi=0, \tag{15}$$

$$-\left|\frac{d\varphi}{d\xi}\right|^{p-2}\frac{d\varphi}{d\xi}\Bigg|_{\xi=0}=\varphi^{q}(0). \tag{16}$$

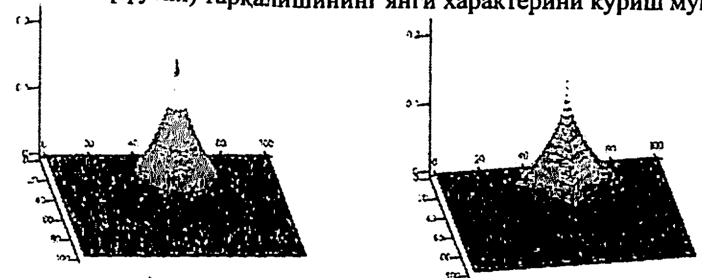
Теорема 6. (15), (16) масаланинг компакт юритувчили ечими $\xi\to D^{p-2}((p-1)/(p-2))^{p}$ да қуйидаги асимптотик ифодага эга

$$\varphi(\xi)=C\left(D^{p-2}\left(\frac{p-1}{p-2}\right)^{p}-\xi\right)^{\frac{p-1}{p-2}}(1+o(1)),\quad D>0,$$

бу ерда $C=\left(\frac{p-1}{p-2}\gamma\right)^{1/(p-2)}D$.

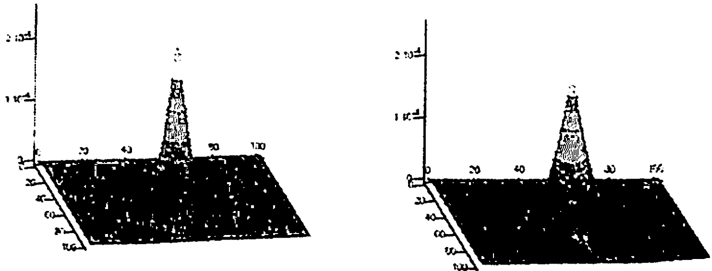
5-параграфда (1), (2) Коши масаласини ҳамда (7)-(9) нолокал масалани сонли ечиш учун сонли схемалар келтирилган. Шунингдек, итерация жараёни қурилган. Маълумки, чизиқсиз масалаларни сонли ечишда итерация жараёнлари аниқ ечимга тез яқинлашишни таъминлайдиган ҳамда ночизиқли жараёнларнинг сифат хоссаларини сақлайдиган бошланғич яқинлашишни танлаш – асосий муаммолардан бири ҳисобланади. Бу муаммо сонли параметрларнинг қийматларига мувофиқ бошланғич яқинлашиш сифатида юқорида қурилган асимптотик формулаларни олиш орқали ҳал қилинган. Қуйида айрим ҳисоблаш экспериментлари натижалари, олинган графиклар, ҳамда сонли ечимларнинг таҳлили келтирилган. Ҳисоблаш экспериментлари натижалари таклиф этилган усулларнинг самарадорлигини кўрсатди, сонли ечимлар эса ўзида ночизиқли ҳусусиятларни акс эттирган.

Қуйида сонли параметрларнинг алоҳида қийматларида (1), (2) масаланинг сонли ечимлари графиклари келтирилган бўлиб, уларда иссиқлик (фильтрация, диффузия) тарқалишининг янги характерини кўриш мумкин.



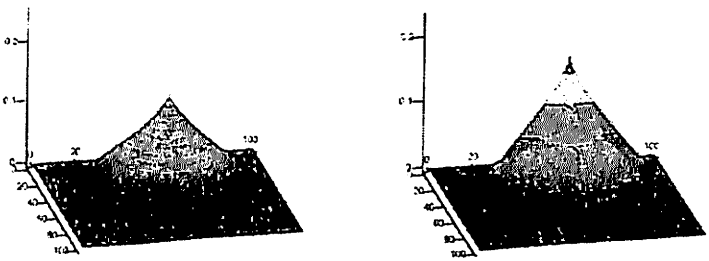
a) t=0.4 b) t=8.4

1-расм. (1), (2) масаланинг $p=2.7$, $q=4.2$, $l=1,5$, $m=0.5$, $n=2$ **даги сонли ечими.**



a) t=0.4 b) t=8.6

2-расм. (1), (2) масаланинг $p=2.1$, $q=4$, $l=1$, $m=1.5$, $n=2$ **даги сонли ечими** $\left(l(p-1)-1\to 0\right)$.



a) t=0.2 b) t=5

3-расм. (1), (2) масаланинг $p=3$, $q=3$, $l=1,5$, $m=0.5$, $n=2$ **даги сонли ечими** $\left(q=l(p-1)\right)$.

1-расмда (1), (2) масаланинг чекли тезликда тарқалиш хусусиятига эга бўлган глобал ечими, 2-расмда эса критик нуқта атрофидаги глобал ечими графиги тасвирланган. 3-расм эса ўзида локаллашган чегараланмаган ечим графигини мужассамлаштирган. Бу ҳолда ҳарорат чекли $T<\infty$ вақт давомида муҳитнинг чегараланган соҳасида чексиз суратда ўсади.

Диссертациянинг **«Нолокал чегаравий шартга эга бир ўлчовли иссиқлик ўтказувчанлик жараёнини математик моделлаштириш»** деб номланган иккинчи боби бир жинсли бўлмаган муҳитда нолокал чегаравий шартга эга бўлган иссиқлик тарқалиши жараёни ночизиқли математик модели ечимларининг вақт бўйича глобаллик ва глобал бўлмаслик шартларини ўрганишга, автомодель ечимларнинг асимптотикаларини олишга ва чизиқсиз иссиқлик ўтказувчанлик жараёнини сонли моделлаштиришга бағишланган.

1-параграфда қуйидаги иссиқлик ўтказувчанлик тенгламаси учун

$$\rho(x)\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\left|\frac{\partial u^m}{\partial x}\right|^{p-2}\frac{\partial u^m}{\partial x}\right),\ (x,t)\in R_+\times(0,+\infty),\qquad(17)$$

ночизиқли чегаравий

$$-\left|\frac{\partial u^m}{\partial x}\right|^{p-2}\frac{\partial u^m}{\partial x}(0,t)=u^q(0,t),\ t>0,\qquad(18)$$

ва бошланғич шартга эга

$$u(x,0)=u_0(x)\geq 0,\ x\in R_+,\qquad(19)$$

масала қаралган, бу ерда $\rho(x)=(1+x)^n$, $n>-p$ (секин диффузия ҳоли).

(17) тенгламани $m>1$, $1<p\neq 2$ да ўзгарувчи $\rho(x)$ зичлик мавжуд бўлган ҳолда ноньютон политропик фильтрация, $m>1$, $p=2$ да эса Ньютон типидаги диффузия тенгламаси сифатида қараш мумкин ва ҳ.к.

(17) тенглама $p>1+1/m$ бўлган ҳолда секин диффузия тенгламаси, $1<p<1+1/m$ да эса тез диффузия тенгламаси дейилади. Секин кечувчи диффузия ҳолида (17)-(19) масала классик ечимга эга эмас. Шу сабабли унинг

$$0\leq u(x,t),\left|\frac{\partial u^m}{\partial x}\right|^{p-2}\frac{\partial u^m}{\partial x}\in C(R_+\times(0,+\infty))$$

синфга тегишли умумлашган ечими қаралади.

Z.Li, Ch.Mu, L.Xie ишларида тез диффузия ҳолида $\rho(x)=1$ бўлганда (17)-(19) масала ечимининг глобал мавжудлик ва мавжуд бўлмаслик шартлари ўрнатилган. Улар ечимнинг глобал мавжудлик ва Фуджита типидаги критик экспоненталарини аниқлашган. Шу каби натижалар секин диффузия ҳоли учун Z.Wang, J.Yin, C.Wang ишларида, $\rho(x)=1$, $m=1$ бўлганда эса В.А.Галактионов ва Х.А.Левин ишларида олинган.

Бу параграфда қуйидаги теоремалар исботланган.

Теорема 7. Агар $0 \le q \le \dfrac{(m(n+1)+1)(p-1)}{p+n}$ бўлса, у ҳолда (17)-(19) масаланинг ҳар қандай ечими глобал бўлади.

Теорема 8. Агар $q > m(p-1) + \dfrac{p-1}{p+n}$ ва бошланғич функция $u_0(x)$ етарлича кичик бўлса, (17)-(19) масаланинг ҳар қандай ечими глобал бўлади.

Теорема 9. Фараз қилайлик $q > \dfrac{(m(n+1)+1)(p-1)}{p+n}$ ва бошланғич шарт етарлича катта бўлсин, у ҳолда (17)-(19) масаланинг ҳар қандай ечими blow-up хоссасига эга бўлади.

Теорема 10. Агар $\dfrac{(m(n+1)+1)(p-1)}{p+n} < q < m(p-1) + \dfrac{p-1}{p+n}$ бўлса, у ҳолда (17)-(19) масаланинг нолдан фарқли ҳар қандай ечими чегараланмаган бўлади.

2-параграф тез диффузияли ҳолда (17)-(19) масала ечимларининг глобаллик ва глобал бўлмаслик шартларини ўрганишга бағишланган. Бу ҳолда ҳам юқоридаги 1-4 теоремалар ўринли эканлиги исботланган.

3-параграфда (17)-(19) масала автомодель ечимларининг асимптотикалари ўрганилган.

Ечим асимптотикаси қуйидаги автомодель ечим ёрдамида топилди

$$u_+(t,x) = (T+t)^{-\gamma} f(\xi),\ \ \xi = (1+x)(T+t)^{-\sigma}, \tag{20}$$

бу ерда $\gamma = \dfrac{p-1}{q(p+n)-(p-1)(m(n+1)+1)}$, $\sigma = \dfrac{q-m(p-1)}{q(p+n)-(p-1)(m(n+1)+1)}$,

$f(\xi)$ функция қуйидаги ночизиқли масаланинг ечими сифатида қаралади:

$$\frac{d}{d\xi}\left(\left|\frac{df^m}{d\xi}\right|^{p-2}\frac{df^m}{d\xi}\right) + \sigma\xi^{n+1}\frac{df}{d\xi} + \gamma\xi^n f = 0, \tag{21}$$

$$-\left|(f^m)'\right|^{p-2}(f^m)'(1) = f^q(1). \tag{22}$$

Секин диффузияли ҳол $p > 1 + 1/m$.

Теорема 11. (21), (22) масаланинг компакт юритувчили ечими $\xi \to (a/b)_-^{(p-1)/(p+n)}$ да қуйидаги асимптотик ифодага эга:

$$f(\xi) = \left(a - b\xi^{\frac{p+n}{p-1}}\right)_+^{\frac{p-1}{m(p-1)-1}}(1+o(1)),\ a > 0,\ \ b = \frac{m(p-1)-1}{m(p+n)}\sigma^{1/(p-1)}.$$

Тез диффузияли ҳол $1 < p < 1 + 1/m$.

Теорема 12. (21), (22) масаланинг $\xi \to +\infty$ да чексизликда сўнувчи ечими қуйидаги асимптотикага эга

$$f(\xi)=C\left(a+b\xi^{\frac{p+n}{p-1}}\right)^{-\frac{p-1}{1-m(p-1)}}\left(1+o(1)\right),\quad b=\frac{1-m(p-1)}{m(p+n)}\sigma^{1/(p-1)},$$

бу ерда $C=\left(\sigma\left((n+1)\left(m(p-1)-1\right)+p+n\right)\right)^{1/[1-m(p-1)]}$.

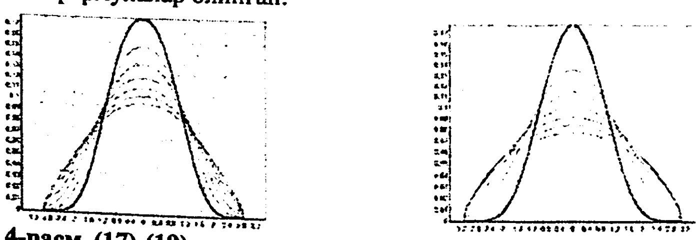
Критик ҳол $m(p-1)-1=0$.

Теорема 13. Фараз қилайлик $\sigma>0$, $q>1$ бўлсин. У ҳолда (21), (22) масаланинг ечими $\xi\to+\infty$ да қуйидаги асимптотик ифодага эга бўлади:

$$f(\xi)=C_1e^{-d\xi^{\frac{p+n}{p-1}}}\left(1+o(1)\right),\quad d=\frac{p-1}{m(p+n)}\sigma^{1/(p-1)},$$

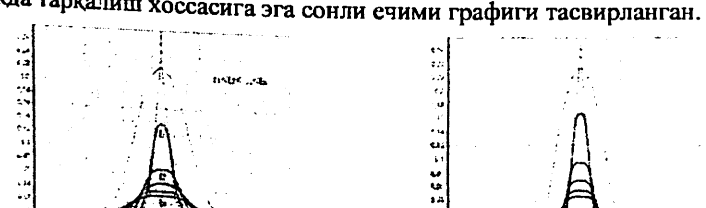
бу ерда C_1 - ихтиёрий мусбат сон.

Бу бобда қурилган математик моделларнинг янги хоссаларини ўрганишда сонли схемалар такиф этилган ва асосланган. Бунинг учун (17) тенглама фазовий координата бўйича иккинчи тартибли аниқликда ва вақт бўйича биринчи тартибли аниқликда аппроксимация қилинди. Сонли моделлаштиришда итерация жараёни қурилиб, итерациянинг ички қадамларида узеллардаги функция қийматлари ҳайдаш усули ёрдамида ҳисобланган. Қуйида сонли тажрибаларнинг баъзи натижалари келтирилган бўлиб, уларда бошланғич яқинлашиш сифатида 11-13 теоремалардаги асимптотик формулалар олинган.



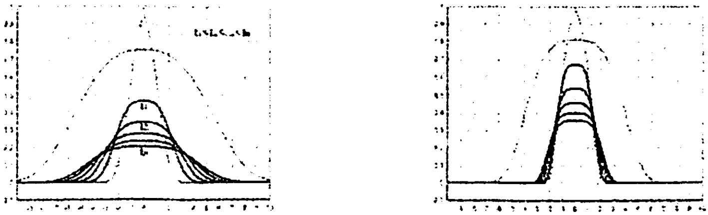
4-расм. (17)-(19) масаланинг сонли ечими. ***m=1.5, p=1.75, q=2.85,*** **1)** ***n=0,*** **2)** ***n=-0.25.***

4-расмда секин диффузияли ҳолда (17)-(19) чегаравий масаланинг чекли тезликда тарқалиш хоссасига эга сонли ечими графиги тасвирланган.



5-расм. (17)-(19) масаланинг сонли ечими ***m=1.5, p=1.55, q=2.85, a=1.5,*** **1)** ***n=0.5,*** **2)** ***n=1.***

5-расм ўзида тез диффузияли ҳолда (17)-(19) масаланинг сонли ечими графигини мужассамлаштирган. Жараён чегараланмаган иссиқлик ўтказувчанлик коэффициенти эвазига чексиз тезликда тарқалиш хоссасига эга бўлган. Бу ҳолда тарқалиш тезлиги чекли тезликли тарқалиш хусусиятига эга бўлган секин диффузияли ҳолдагига нисбатан анча юқоридир. Диффузия жараёни бутун соҳани эгаллаб, чексизликда сўнади.



6-расм. (17)-(19) масаланинг сонли ечими *m=2, p=1.5, q=3*, 1) *n=0.25*, 2) *n=0.85*.

6-расмда (17)-(19) масаланинг критик ҳолдаги сонли ечимлари ифодаланган. Бу ҳолда тарқалиш чексиз тезликда содир бўлиш хоссасига эга.

Диссертациянинг **«Нолокал чегаравий шартга эга иссиқлик ўтказувчанлик жараёнини математик моделлаштириш. Кўп ўлчовли ҳол»** деб номланган учинчи боби бир жинсли бўлмаган муҳитда чизиқсиз чегаравий шарт билан берилган кўп ўлчамли иссиқлик ўтказувчанлик жараёни чизиқсиз моделининг сифат хоссаларини ўрганишга бағишланган.

1-параграфда қуйидаги нолокал масала қаралган:

$$\rho(x)u_t = \nabla\left(\left|\nabla u^m\right|^{p-2}\nabla u^m\right), \quad (x,t)\in R_+^N\times(0,+\infty), \tag{23}$$

$$-\left|\nabla u^m\right|^{p-2}\frac{\partial u^m}{\partial x_1}(0,t) = u^q(0,t), \quad t>0, \tag{24}$$

$$u(x,0) = u_0(x), \quad x\in R_+^N, \tag{25}$$

бу ерда $R_+^N = \left\{(x_1,x')\,|\,x'\in R^{N-1}, x_1>0\right\}$, $\rho(x) = (1+|x|)^n$, $n>-p$.

(23) тенглама турли чизиқсиз жараёнларни тасвирлайди. Хусусан, (23) тенглама берилган босим даражасига ва политропик шарт остидаги кўчиш тезлигига боғлиқ равишда ностационар суюқлик оқимининг ғовак муҳитдаги ҳаракатини ифодалайди. Бу ҳолда (23) тенглама политропик фильтрациянинг ноньютон типидаги тенгламаси деб аталиб, кўпгина муаллифлар томонидан ўтган асрдан бошлаб интенсив равишда ўрганилган. (24) ночизиқли чегаравий шарт $x=0$ чегара орқали киритилаётган энергия оқимини тасвирлаш учун қўлланилади. Масалан, иссиқлик тарқалиши жараёнида (24) шарт иссиқлик оқимини ифодалайди, шунингдек у чегарадаги нурланишнинг чизиқсиз қонуниятини тасвирлайди. Бундай кўринишдаги чегаравий шарт реакция фақат контейнер чегарасида содир бўладиган ёниш масалаларида ҳам вужудга келади.

(23) тенглама $p>1+1/m$ шарт остида секин диффузия тенгламасига мос келади ҳамда бузилувчи тенглама ҳисобланади. Шу сабабли унинг ечими умумлашган ечим маъносида тушунилади.

(23)-(25) масала ечимларининг глобал бўлиш ва глобал бўлмаслик шартлари $p=2$, $n=0$ да W.Huang, J.Yin ва Y.Wang лар томонидан, $m=1$, $n=0$ да эса W.Du ва Z.Li лар томонидан ўрганилган ва Фуджита типидаги критик экспонента ва ечимнинг глобал мавжудлиги учун критик экспонента қийматлари топилган.

Қуйидагича белгилашларни киритамиз

$$q_0=\frac{(m(n+1)+1)(p-1)}{p+n},\ q_c=m(p-1)+\frac{p-1}{N+n}.$$

(23)-(25) масаланинг глобал ечимлари учун қуйидаги теоремалар ўринли.

Теорема 14. Агар $0\le q\le q_0$ бўлса, (23)-(25) масаланинг ҳар қандай ечими глобал бўлади.

Теорема 15. Агар $q>q_c$ ва бошланғич функция $u_0(x)$ етарлича кичик бўлса, (23)-(25) масаланинг ҳар қандай ечими глобал бўлади.

Теорема 16. Фараз қилайлик $q>q_0$ бўлсин, у ҳолда бошланғич берилганлар етарлича катта бўлганда (23)-(25) масаланинг ҳар қандай ечими чегараланмаган бўлади.

Теорема 17. Агар $q_0<q<q_c$ бўлса, (23)-(25) масаланинг нолдан фарқли ҳар қандай ечими чегараланмаган бўлади.

2-параграфда (23)-(25) масаланинг тез диффузия ҳоли тадқиқ этилган. Бу ҳолда классик ечимларнинг хоссалари ўрганилган. Ечимларнинг вақт бўйича глобал мавжудлик ва чегараланмаган (blow-up) ечимларнинг мавжуд бўлиш шартлари олинган бўлиб, улар учун юқоридаги 14-17 теоремаларнинг ўринли бўлиши исботланган.

3-параграф эса (23)-(25) масаланинг секин ва тез диффузия ҳоллари учун автомодель ечимларнинг асимптотикалари ўрганилган. Автомодель ечим қуйидаги кўринишда қидирилган:

$$u_+(t,x)=(T+t)^{-\gamma}f(\xi),$$

бу ерда $\xi=|\zeta|$, $\zeta_i=(1+x_i)(T+t)^{-\sigma}$, $i=1,\dots,N$, $\gamma=\dfrac{p-1}{q(p+n)-(p-1)(m(n+1)+1)}$, $\sigma=\dfrac{q-m(p-1)}{q(p+n)-(p-1)(m(n+1)+1)}$, $f(\xi)$ функция эса қуйидаги масаланинг ечими:

$$\xi^{1-N}\frac{d}{d\xi}\left(\xi^{N-1}\left|\frac{df^m}{d\xi}\right|^{p-2}\frac{df^m}{d\xi}\right)+\sigma\xi^{n+1}\frac{df}{d\xi}+\gamma\xi^n f=0, \qquad (26)$$

$$-\left|(f^m)'\right|^{p-2}(f^m)'(1)=f^q(1). \qquad (27)$$

Секин диффузия ҳоли $p>1+1/m$.

Теорема 18. (26), (27) масаланинг компакт юритувчили ечими $\xi \to (a/b)_{-}^{(p+n)/(p-1)}$ да қуйидаги асимптотик ифодага эга

$$f(\xi)=\left(a-b\xi^{\frac{p+n}{p-1}}\right)_{+}^{-\frac{p-1}{m(p-1)-1}}(1+o(1)),\ \ b=\frac{m(p-1)-1}{m(p+n)}\sigma^{1/(p-1)},\ \ a>0.$$

Тез диффузия ҳоли $1<p<1+1/m$.

Теорема 19. Фараз қилайлик $\dfrac{(N+n)(m+1)-n}{(N+n)m+1}<p<1+\dfrac{1}{m}$ бўлсин. У ҳолда (26), (27) масаланинг ечими $\xi \to +\infty$ да қуйидаги асимптотик ифодага эга

$$f(\xi)=C\left(a+b\xi^{\frac{p+n}{p-1}}\right)^{-\frac{p-1}{1-m(p-1)}}(1+o(1)),\ \ b=-\frac{m(p-1)-1}{m(p+n)}\sigma^{1/(p-1)},$$

бу ерда $C=\left[\sigma\left((N+n)(m(p-1)-1)+p+n\right)\right]^{\frac{1}{1-m(p-1)}}$.

Диссертациянинг **«Чизиқсиз чегаравий шарт билан боғланган иссиқлик ўтказувчанлик тенгламалари системаси хоссаларини ўрганиш»** деб номланган тўртинчи боби автомодель таҳлил ва эталон тенгламалар усули асосида икки компонентали муҳитда чизиқсиз иссиқлик ўтказувчанлик моделининг хоссаларини ўрганишга, ҳамда солиштириш теоремаларидан фойдаланган ҳолда глобал ечимларнинг юқори баҳолари ва чегараланмаган ечимларнинг қуйи баҳоларини олишга бағишланган.

Ушбу бобнинг биринчи параграфида чизиқсиз чегаравий шарт орқали боғланган қуйидаги бир жинсли бўлмаган муҳитда иссиқлик ўтказувчанлик тенгламалари системаси қаралган

$$\rho_1(x)\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\left|\frac{\partial u^{m_1}}{\partial x}\right|^{p_1-2}\frac{\partial u^{m_1}}{\partial x}\right),\ \ \rho_2(x)\frac{\partial \upsilon}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\left|\frac{\partial \upsilon^{m_2}}{\partial x}\right|^{p_2-2}\frac{\partial \upsilon^{m_2}}{\partial x}\right),\ x>0,\ t>0,\quad (28)$$

$$-\left|\frac{\partial u^{m_1}}{\partial x}\right|^{p_1-2}\frac{\partial u^{m_1}}{\partial x}\Bigg|_{x=0}=\upsilon^{q_1}(0,t),\ \ -\left|\frac{\partial \upsilon^{m_2}}{\partial x}\right|^{p_2-2}\frac{\partial \upsilon^{m_2}}{\partial x}\Bigg|_{x=0}=u^{q_2}(0,t)\quad (29)$$

$$u(x,0)=u_0(x)\ge 0,\ \ \upsilon(x,0)=\upsilon_0(x)\ge 0,\ x>0,\quad (30)$$

бу ерда $m_i \ge 1$, $p_i>1+1/m_i$, $q_i>0$, $(i=1,2)$, $\rho_1(x)=(1+x)^n$, $\rho_2(x)=(1+x)^k$, $n>-p_1$, $k>-p_2$, $u_0(x)$ ва $\upsilon_0(x)$ лар R_+ да манфий бўлмаган компакт юритувчили узлуксиз функциялар.

(28) ночизиқли параболик тенгламалар системаси турли соҳаларда биологик популяция, кимёвий реакциялар, иссиқлик тарқалиши, диффузия ва бошқа жараёнларнинг модели сифатида қаралади. Масалан, $u(x,t)$ ва $\upsilon(x,t)$ функциялар ўзида миграция жараёнидаги иккита биологик популяциянинг зичлигини ёки иссиқлик тарқалиши жараёнида икки ғовак жисмнинг ҳароратини ифодалайди.

(28)-(30) масала ўзгармас зичлик $\rho_1(x)=\rho_2(x)=1$ ҳолида Z.Xiang, Ch.Mu ва Y.Wang ларнинг ишларида ўрганилган. F.Quiros ва J. D.Rossi ларнинг ишларида эса $p_1=p_2=2$, $\rho_1(x)=\rho_2(x)=1$ ҳоли тадқиқ этилган. Аммо уларнинг ишларида ечим асимптотикалари ва сонли ечимлар қаралмаган.

Ушбу параграфнинг асосий теоремалари қуйидагилар.

Теорема 20. Агар $q_1q_2 \le \dfrac{(p_1-1)(p_2-1)(m_1(n+1)+1)(m_2(k+1)+1)}{(p_1+n)(p_2+k)}$ бўлса, (28)-(30) масаланинг ҳар қандай ечими глобал бўлади.

Теорема 21. Агар $q_1q_2 > \dfrac{(p_1-1)(p_2-1)(m_1(n+1)+1)(m_2(k+1)+1)}{(p_1+n)(p_2+k)}$ бўлса, етарлича катта бошланғич шартда (28)-(30) масаланинг ҳар қандай ечими чегараланмаган бўлади.

$q_1q_2 = \dfrac{(p_1-1)(p_2-1)(m_1(n+1)+1)(m_2(k+1)+1)}{(p_1+n)(p_2+k)}$ ечимнинг глобал мавжудлик критик экспонентаси қиймати ҳисобланади.

Қуйидаги белгилашларни киритамиз:

$$\alpha_1 = \frac{q_1(p_1+n)(p_2-1)+(p_1-1)(p_2-1)(m_2(k+1)+1)}{q_1q_2(p_1+n)(p_2+k)-(p_1-1)(p_2-1)(m_1(n+1)+1)(m_2(k+1)+1)},$$

$$\alpha_2 = \frac{q_2(p_2+k)(p_1-1)+(p_1-1)(p_2-1)(m_1(n+1)+1)}{q_1q_2(p_1+n)(p_2+k)-(p_1-1)(p_2-1)(m_1(n+1)+1)(m_2(k+1)+1)},$$

$$\beta_1 = \frac{q_1\alpha_2 - m_1\alpha_1(p_1-1)}{p_1-1},\quad \beta_2 = \frac{q_2\alpha_1 - m_2\alpha_1(p_2-1)}{p_2-1}.$$

Теорема 22. Фараз қилайлик

$$q_1q_2 > \frac{(p_1-1)(p_2-1)(m_1(n+1)+1)(m_2(k+1)+1)}{(p_1+n)(p_2+k)},$$

$\min\{(n+1)\beta_1-\alpha_1,(k+1)\beta_2-\alpha_2\}>0$ ва бошланғич берилганлар етарлича кичик бўлсин, у ҳолда (28)-(30) масаланинг ҳар қандай ечими глобал бўлади.

Теорема 23. Фараз қилайлик

$$q_1q_2 > \frac{(p_1-1)(p_2-1)(m_1(n+1)+1)(m_2(k+1)+1)}{(p_1+n)(p_2+k)},$$

$\max\{(n+1)\beta_1-\alpha_1,(k+1)\beta_2-\alpha_2\}<0$ бўлсин, у ҳолда (28)-(30) масаланинг нолдан фарқли ҳар қандай ечими чегараланмаган бўлади.

$\min\{(n+1)\beta_1-\alpha_1,(k+1)\beta_2-\alpha_2\}=0$ қиймат Фуджита типидаги критик экспонента ҳисобланади.

2-параграфда икки компонентли муҳитда иссиқлик тарқалиши жараёнини ифодаловчи (28), (30) системанинг қуйидаги

$$-\left|\frac{\partial u^{m_1}}{\partial x}\right|^{p_1-2}\frac{\partial u^{m_1}}{\partial x}\Bigg|_{x=0}=u^{\gamma_1}(0,t)\upsilon^{q_1}(0,t),\ -\left|\frac{\partial \upsilon^{m_2}}{\partial x}\right|^{p_2-2}\frac{\partial \upsilon^{m_2}}{\partial x}\Bigg|_{x=0}=u^{\gamma_2}(0,t)\upsilon^{q_2}(0,t),\quad (31)$$

нолокал чегаравий шарт остидаги ечимлари хоссалари ўрганилган, бу ерда $m_i \geq 1$, $p_i > 1 + 1/m_i$, $q_i > 0$, $\gamma_i > 0$, $\rho_i(x) = (1+x)^{n_i}$, $n_i > -p_i, (i = 1,2)$. Сонли параметрлар учун шартлар олинган бўлиб, унда (28), (30), (31) масаланинг ечимлари вақт бўйича глобал бўлади ёки аксинча. Шунингдек, Фуджита типадаги критик экспонента ва ечимнинг глобал мавжуд критик экспонентаси қийматлари топилган.

3-параграфда (28)-(30) ва (28), (30), (31) масалалар автомодель ечимларининг асимптотикалари ўрнатилди.

(28)-(30) масаланинг қуйидаги кўринишдаги автомодель ечими қурилган:

$$\begin{cases} u_+(x,t) = (T+t)^{-\alpha_1}\varphi(\xi),\ \xi = (1+x)(T+t)^{-\beta_1}, \\ \upsilon_+(x,t) = (T+t)^{-\alpha_2}\phi(\eta),\ \eta = (1+x)(T+t)^{-\beta_2}, \end{cases}$$

бу ерда α_i, β_i $(i=1,2)$ - 4.1 да аниқланган константалар, $T > 0$, $(\varphi(\xi),\phi(\eta))$ функциялар эса қуйидаги масаланинг ечими:

$$\begin{cases} \dfrac{d}{d\xi}\left(\left|\dfrac{d\varphi^{m_1}}{d\xi}\right|^{p_1-2}\dfrac{d\varphi^{m_1}}{d\xi}\right) + \beta_1\xi^{n+1}\dfrac{d\varphi}{d\xi} + \alpha_1\xi^n\varphi = 0, \\ \dfrac{d}{d\eta}\left(\left|\dfrac{d\phi^{m_2}}{d\eta}\right|^{p_2-2}\dfrac{d\phi^{m_2}}{d\eta}\right) + \beta_2\eta^{k+1}\dfrac{d\phi}{d\eta} + \alpha_2\eta^k\phi = 0, \end{cases} \quad (32)$$

$$-\left|\frac{d\varphi^{m_1}}{d\xi}\right|^{p_1-2}\frac{d\varphi^{m_1}}{d\xi}(1) = \phi^{q_1}(1),\ -\left|\frac{d\phi^{m_2}}{d\eta}\right|^{p_2-2}\frac{d\phi^{m_2}}{d\eta}(1) = \varphi^{q_2}(1). \quad (33)$$

Эталон тенгламалар методи ёрдамида олинган қуйидаги функцияларни қараймиз:

$$\tilde{\varphi}(\xi) = \left(a_1 - b_1\xi^{\frac{p_1+n}{p_1-1}}\right)^{\frac{p_1-1}{m_1(p_1-1)-1}},\ \tilde{\phi}(\eta) = \left(a_2 - b_2\eta^{\frac{p_2+k}{p_2-1}}\right)^{\frac{p_2-1}{m_2(p_2-1)-1}},$$

бу ерда $a_i > 0\ (i=1,2)$, $b_1 = \dfrac{m_1(p_1-1)-1}{m_1(p_1+n)}\beta_1^{\frac{1}{p_1-1}} > 0$, $b_2 = \dfrac{m_2(p_2-1)-1}{m_2(p_2+k)}\beta_2^{\frac{1}{p_2-1}} > 0$.

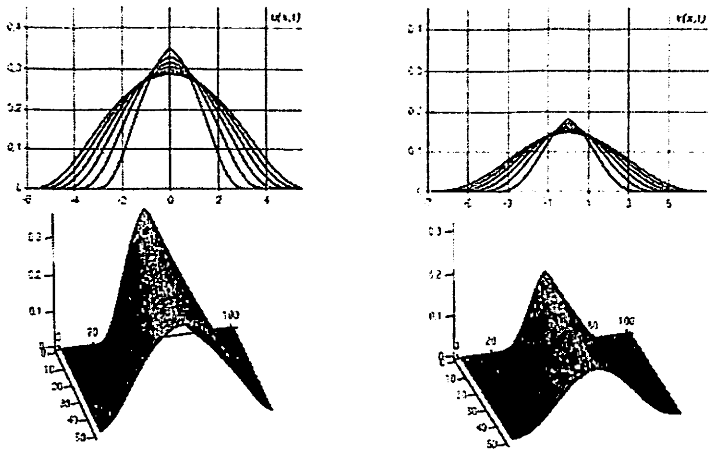
Теорема 24. Фараз қилайлик $\min\left\{\dfrac{p_1-1}{m_1(p_1-1)-1}, \dfrac{p_2-1}{m_2(p_2-1)-1}\right\} > 0$ бўлсин, у ҳолда (32) тенгламанинг компакт юритувчили ечими $\xi \to (a_1/b_1)^{\frac{p_1-1}{p_1+n}}$, $\eta \to (a_2/b_2)^{\frac{p_2-1}{p_2+k}}$ да қуйидаги асимптотикага эга бўлади:

$$\varphi(\xi) = \tilde{\varphi}(\xi)(1+o(1)),\quad \phi(\eta) = \tilde{\phi}(\eta)(1+o(1)),$$

бу ерда $\tilde{\varphi}(\xi)$, $\tilde{\phi}(\eta)$ юқорида аниқланган функциялар.

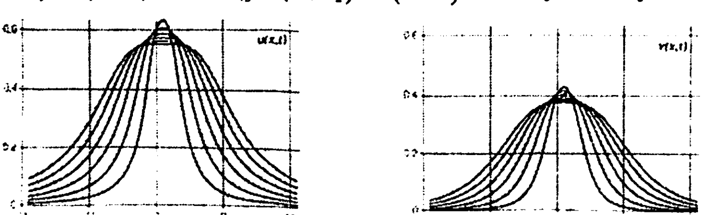
4-параграф (28)-(30) системани сонли моделлаштиришга бағишланган. (28)-(30) масала учун сонли схемалар, алгоритмлар тузилган ва дастурий воситалар мажмуи ишлаб чиқилган. Дастур қобиғи ва сонли ечиш дастур коди C# (Visual Studio) тилида яратилган. Олинган сонли натижаларни визуаллаштириш учун дастурий мажмуага Chart график кутубхонаси ва MathCad математик пакетининг 3-D Plot график модуллари бириктирилган.

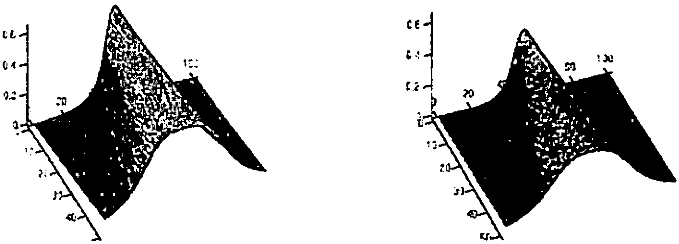
Қуйида сонли экспериментнинг айрим натижалари келтирилган. Тўр қадами етарлича кичик танланган h=0.05, тугунлар сони N=10000 ҳамда итерация аниқлиги сифатида $\varepsilon = 10^{-3}$ берилган. Ҳисоблаш t=2 гача $\tau = 0.02$ қадам билан амалга оширилган.



7-расм. (28)-(30) масаланинг сонли ечими. ***n1=0.7, m1=1.5, p1=1.85, q1=3, n2=0.5, m2=1.3, p2=1.9, q2=3.5.***

7-расмда (28)-(30) масаланинг $\min\{(n+1)\beta_1 - \alpha_1, (k+1)\beta_2 - \alpha_2\} > 0$ да секин диффузияли ҳоли $m_i(p_i - 1) - 1 > 0$ учун сонли ечимлари графиги келтирилган. 4.3 параграфдаги асимптотик формулалардан ва графиклардан кўриниб турибдики, иссиқлик тарқалиши чекли тезлик билан содир бўлади. Иссиқлик тўлқинининг тарқалиш узоқлиги вақтга боғлиқ ва ҳар бир муҳит учун тўлқин фронти $(u_+(x,t)$, $\upsilon_+(x,t)$ нолга айланувчи нуқта) чекли $x_{\phi_1} = (a_1/b_1)^{\frac{p_1-1}{p_1+n}}(T+t)^{\beta_1} < \infty$, $x_{\phi_2} = (a_2/b_2)^{\frac{p_2-1}{p_2+k}}(T+t)^{\beta_2} < \infty$ нуқтада бўлади.





8-расм. (28)-(30) масаланинг сонли ечими. ***n1=0.5, m1=1.5 p1=1.3 q1=3, n2=0.75, m2=1.6 p2=1.4 q2=3.5.***

8-расмда эса (28)-(30) масаланинг m_i, p_i сонли параметрларнинг тез кечувчи диффузия $m_i(p_i-1)-1<0$ ҳолига формал мос келувчи қийматларидаги сонли ҳисоблаш натижалари тасвирланган. Ушбу ҳолда иссиқлик тарқалиши чегараланмаган иссиқлик ўтказувчанлик коэффициенти ҳисобига чексиз тезлик билан содир бўлади. Иссиқлик оқими қиздирилган соҳадан совуқ соҳага секин диффузия ҳолга нисбатан жуда тез тарқалади.

ХУЛОСА

«Икки карра ночизиқли муҳитда иссиқлик тарқалиш жараёнини математик моделлаштириш» мавзусидаги докторлик диссертацияси бўйича олиб борилган тадқиқотлар натижалари қуйидагилардан иборат:

1. Нолокал чегаравий шартга ва ўзгарувчан зичликка эга ночизиқли параболик типдаги тенгламалар билан ифодаланувчи иссиқлик тарқалиши, ноньютон политропик фильтрация, диффузия жараёнларининг чизиқсиз математик моделлари ечимларининг вақт бўйича глобаллик ва глобал бўлмаслик шартлари топилганлигини келтириш мумкин.

2. Бир жинсли бўлмаган муҳитда иссиқлик тарқалиши жараёнининг нолокал масалалари учун Фуджита типидаги критик экспоненталар топилганлигини қайд этиш лозим.

3. Ўзгарувчан зичлик ва нолокал чегаравий шартга эга иссиқлик ўтказувчанликнинг чизиқсиз математик модели глобал ва чегараланмаган ечимларининг юқори ва қуйи баҳолари олинганлигини таъкидлаш лозим.

4. Икки карра чизиқсизлик ва ўзгарувчан зичликка эга секин диффузияли чизиқсиз политропик фильтрация жараёни математик модели учун кўчишнинг чекли тезликда содир бўлиш ва фазовий локаллашиш хоссалари ўрнатилганлигини келтириш мумкин.

5. Икки карра чизиқсизлик ва ўзгарувчан зичликка эга тез диффузияли чизиқсиз политропик фильтрация жараёни математик модели учун кўчишнинг чексиз тезликда содир бўлиш хоссаси исботлашга эришилганлигини таъкидлаш лозим.

6. Манба ва ўзгарувчан зичликка эга бир жинсли бўлмаган муҳитда иссиқлик ўтказувчанликнинг бузилувчи тенгламаси учун Коши масаласининг

компакт юритувчили умумлашган ечимлари асимптотикалари исботланганлигини қайд этиш мумкин .

7. Нолокал чегаравий шарт ва ўзгарувчан зичликка эга политропик фильтрация тенгламалари системаси ечимларининг вақт бўйича глобаллик ва глобал бўлмаслик шартлари ҳамда асимптотик ифодаларини исботлашга эришилганлигини айтиб ўтиш лозим.

8. Ўзгарувчан зичлик ва нолокал чегаравий шартга эга иссиқлик ўтказувчанлик жараёни математик моделининг чизиқсиз хоссаларини ўрганиш учун тежамкор сонли схемаларни қайд этиш лозим.

9. Чизиқсиз иссиқлик тарқалиш масаласини сонли ечиш учун ҳисоблаш схемалари, алгоритмлар ва Visual Studio 2012 (C#) муҳитида дастурий востилар комплекси ишлаб чиқилганлигини қайд этиш лозим.

НАУЧНЫЙ СОВЕТ 14.07.2016.Т.29.01 при ТАШКЕНТСКОМ УНИВЕРСИТЕТЕ ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ и НАЦИОНАЛЬНОМ УНИВЕРСИТЕТЕ УЗБЕКИСТАНА по ПРИСУЖДЕНИЮ УЧЕНОЙ СТЕПЕНИ ДОКТОРА НАУК

НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ УЗБЕКИСТАНА

РАХМОНОВ ЗАФАР РАВШАНОВИЧ

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ В СРЕДЕ С ДВОЙНОЙ НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ

05.01.07 – Математическое моделирование. Численные методы
и комплексы программ
(физико-математические науки)

АВТОРЕФЕРАТ ДОКТОРСКОЙ ДИССЕРТАЦИИ

Ташкент – 2016

Тема докторской диссертации зарегистрирована за №30.06.2015/B2015.2.FM226 в Высшей аттестационной комиссии при Кабинете Министров Республики Узбекистан.

Докторская диссертация выполнена в Национальном университете Узбекистана.
Автореферат диссертации на трех языках (узбекский, русский, английский) размещен на веб-странице научного совета www.tuit.uz и образовательной информационной сети "ZIYONET" (www.ziyonet.uz)

Научный консультант:	**Арипов Мерсаид** доктор физико-математических наук, профессор
Официальные оппоненты:	**Керимбеков Акылбек Керимбекович** (Киргизия) доктор физико-математических наук, профессор
	Музафаров Хафиз Азизович доктор физико-математических наук, профессор
	Хужаёров Бахтиёр Хужаёрович доктор физико-математических наук, профессор
Ведущая организация:	**Институт сейсмостойкости сооружений АН РУз**

Защита диссертации состоится «29» ноября 2016 г. в 14 часов на заседании научного совета 14.07.2016.Т.29.01 при Ташкентском университете информационных технологий и Национальном университете Узбекистана. (Адрес: 100202, Ташкент, ул.Амира Темура, 108. Тел.: (99871) 238-64-43; факс: (99871) 238-65-52; e-mail: tuit@tuit.uz).

С докторской диссертацией можно ознакомиться в Информационно-ресурсном центре Ташкентского университета информационных технологий (регистрационный номер 1518 Адрес: 100202, Ташкент, ул. Амира Темура, 108. Тел.: (99871) 238-65-44.

Автореферат диссертации разослан «14» ноября 2016 года.
(протокол рассылки № 1 от «14» ноября 2016 г.).

Р.Х.Хамдамов
Председатель научного совета по присуждению учёной степени доктора наук, д.т.н.

М.С.Якубов
Учёный секретарь научного совета по присуждению учёной степени доктора наук, д.т.н. профессор

Н.Равшанов
Председатель научного семинара при Научном совете по присуждению учёной степени доктора наук, д.т.н.

Введение (аннотация докторской диссертации)

Актуальность и востребованность темы диссертации. В мировых масштабах науки наблюдается большой интерес к изучению нелинейных моделей самых разнообразных явлений и процессов, встречающихся в механике, физике, технологии, биофизике, биологии, экологии, медицине и других областях, описывающимися нелинейными дифференциальными уравнениями. Основу таких моделей в частности составляют дифференциальные уравнения в частных производных параболического типа. При исследованиях свойств решений и численных решений, поставленных задач Каши и граничных задач, применяются приближенные методы. Здесь основное место занимают вырождающиеся уравнения и системы параболического типа, которые моделируют разные нелинейные процессы, встречающиеся в естествознании.

В годы независимости нашей республики исследованию и практическому применению нелинейных моделей различных физических, биологических, технологических и химических, которые являются актуальными направлениями прикладной математики. С этой точки зрения ведутся научно-исследовательские работы над рядом математических моделей, которые выражает процессы теплопроводности, фильтрации, биологической популяции, которые имеет практическое применение в сфере энергетики, медицины, нефти и газа.

В настоящее время широкое распространение в мире математических моделей процессов, получили описываемые вырождающимися квазилинейными параболическими уравнениями, это объясняется тем, что они выводятся из фундаментальных законов сохранения. Поэтому возможна ситуация, когда два физических процесса, не имеющих на первый взгляд ничего общего описываются одним и тем же нелинейным уравнением диффузии, только с различными числовыми параметрами. В настоящее время выполнение научных исследований по изучению и практическому применению таких уравнений являются одним из важных задач, которые ведутся в нижеследующих направлениях: разработка методов изучения качественных свойств нелинейных математических моделей; нахождение точных оценок решений в различных пространствах; определение нелинейных эффектов; разработка экономичных численных схем; создание комплекса программ для изучения математических моделей нелинейных процессов и контроль динамики процесса по времени. Научные исследования, которые ведутся во всех вышеперечисленных направлениях, объясняют актуальность темы данной диссертации.

Данное диссертационное исследование в определенной степени служит выполнению задач, предусмотренных Постановлениями Президента Республики Узбекистан №ПП-1730 от 21 марта 2012 года «О мерах по дальнейшему внедрению и развитию современных информационно-коммуникационных технологий», №ПП–1442 от 15 декабря 2010 года «О приоритетах развития промышленности Республики Узбекистан в 2011-2015 годах» и Постановлением Кабинета Министров Республики Узбекистан №24 от 1 февраля 2012 года «О мерах по созданию условий для дальнейшего развития компьтеризации и информационно коммуникационных технологий на местах», а также в других нормативно-правовых документах, принятых в данной сфере.

Связь исследования с приоритетными направлениями развития науки и технологий республики. Настоящая диссертационная работа выполнена в соответствии с приоритетными направлениями развития науки и технологий Республики Узбекистан IV. «Математика, механика и информатика».

Обзор зарубежных научных исследований по теме диссертации[2].

Научные исследования по изучению качественных свойств различных нелинейных математических моделей, проводятся в ведущих научных центрах и высших образовательных учреждениях мира, в том числе, North Carolina State University, Iowa State University of Science and Technology, University of Central Florida, Louisiana State University, California State University (США), Universidad de Buenos Aires (Аргентина), Chile University (Чили), Sapienza Università di Roma, Università degli Studi di Catania (Италия), Osaka, Nagoya, Hiroshima University (Япония), National University of Singapore (Сингапур), Universidad Autónoma de Madrid, Universidad Complutense de Madrid (Испания), Paderborn University, Aachen University (Германия), University of Nottingham, University of Sussex (Великобритания), в Коменском университете (Словакия), в университете Тель-Авива (Израиль), Jilin, Chongqing, Changchun University (Китай), Paris Mathematics Center, Université Paris-Dauphine (Франция), в институте математики АН России, в Московском государственном университете (Россия), в институте вычислительной техники и автоматики академии наук Венгрии (Венгрия), в институте математики и математического моделирование, в Казахском национальном университете (Казахстан), в Луганском национальном университете имени Т.Шевченко (Украина), в институте математики и информатики, в Софийском университете (Болгария), в национальном университете Узбекистана, в Самаркандском государственном университете, в Ургенчском государственном университете (Узбекистан).

Результатом мировых исследований по совершенствованию новых качественных свойств нелинейных моделей, отличающихся от свойств линейных моделей является разработка методов численного решения и визуализации, получены ряд научных результатов, в том числе, для модели теплопроводности описывающейся нелинейным уравнением параболического типа, было найдено условие глобального существования решения и неразрешимости решения по времени задачи Коши и Неймана (Universidad Autónoma de Madrid, Osaka, Nagoya University), найдены

[2] Обзор зарубежных научных исследований по теме диссертации составлен на основе следующих источников: Журнал вычислительной математики и математической физики, Математическое моделирование, Communications on Pure and Applied Analysis, Journal of the Korean Mathematical Society, http://www.springer.com/mathematics; http://www.sciencedirect.com/science/jmlallbooks /sub/mathematics.

значения критической экспоненты глобального существования решения типа Фуджита для нелинейных параболических уравнений (Universidad Complutense de Madrid, Paderborn, Jilin, Chongqing, Changchun University), разработаны методы определения критической экспоненты второго типа, определяющие границу для начальных данных задачи Коши для уравнения пористой среды и для уравнений с градиентной нелинейностью (Sapienza Università di Roma, Chongqing, Osaka University).

В мире, по разработке методов и средств по решению и практическому применению задачи Коши и граничных задач, для нелинейных уравнений уравнений параболического типа, которые создают основу разных математических моделей, ведутся научные исследования по приоритетным направлениям, в том числе: нахождение условий существования глобального решения по времени в нелинейных задачах; нахождение значений критической экспоненты существования глобального решения и типа Фуджита; определение условий локализации неограниченных решений; повышение эффективности численных методов; разработка комплекса программ, дающих возможность численному изучению нелинейных процессов базируясь на вышеперечисленные свойств нелинейных математических моделей.

Степень изученности проблемы. В теории математического моделирования процессов теплопроводности в нелинейной среде с источником или поглощением получены ряд важных результатов. В теории переноса энергии обнаружены, необычные качественные свойства, не имеющие аналогов в линейной теории теплопереноса. В том числе, в работах J.L.Vasquez, H.A.Levine, А.А.Самарского, А.С.Калашникова, В.А.Галактионова, А.Ф.Тедеева и др. обнаружены неограниченность решений, эффект конечной скорости распространения и пространственная локализация возмущений, изолированные тепловые структуры, о конечной времени существования возмущений в нелинейной среде при наличии источника и поглощения.

В работе Я.Б.Зельдовича, А.С.Компанейца, а затем в работах Г.И.Баренблатта, R. Pattle был впервые обнаружен нелинейный эффект конечной скорости распространения тепловых возмущений в нелинейной среде (КСРВ). По определению условия возникновения эффекта конечной скорости и оценки решений с компактным носителем задачи Коши для уравнения пористой среды и для уравнения теплопроводности с градиентной нелинейностью занимались J.L.Vazquez, M.A.Herrero, M.Fila, F.Quirós, R.Guillermo, Keng Deng, Julio D. Rossi, P.Groisman, D.Andreucci, A.Tesei, R.Ferreira, A.D.Pablo, H.Fujita; по определению асимптотической устойчивости по времени X.Y. Chen, H. Matano, M.Sugimoto, John King, А.П.Михайлов, В.А. Галактионов, Е.Куркина; по определению свойств математических моделей описиваемые краевой задачой Неймана для вырождающихся параболических квазилинейных уравнений политропической фильтрации H.A.Levine, M.Chunlai, W.Du, J.Yin, Y.Wang, M.X.Wang, Z.Xiang, M.Yongsheng, S.N.Zheng, X.F.Song, Z.X.Jiang, Michael

Winkler; по исследованию условий о глобальной разрешимости и не разрешимости решений по времени задачи Коши для нелинейных уравнений теплопроводности с переменной плотнотью, реакции-диффузии и фильтрации Z.Li, M.Chunlai, W.Du, Guirong Liu, Yuan-Wei Qi, А.Ф.Тедеев, А.В. Мартыненко, Н.В. Афанасьева, С.П. Дегтярев.

В Узбекистане нелинейными задачами фильтрации и их системами занимались Н.М.Мухитдинов, А.Б.Бегматов, Б.М.Хўжаяров, И.Хўжаев, Расулов А. С., Н.Равшанов и их ученики. Их основные работы посвящены численным изучениям свойств решений задач нелинейной фильтрации, которые можно применить к задачам моделирования процессов в нефтегазовой отрасли. В работах М.М.Арипова и его учеников (Т.Каюмов, Д.Эшматов, А.Хайдаров, Ж.Мухаммадиев, Ф.Кабилжанова, Ш.Сеттиев, Ш.Садуллаева, А.Матякубов, Д.Мухаммадиева и др.) на основе автомодельного анализа исследованы качественные свойства решений нелинейных задач, моделирующие процессы, встречающихся в различных разделах естествознания.

Связь темы диссертации с научно-исследовательскими работами высшего образовательного учреждения, где выполнена диссертация. Диссертационное исследование выполнено в рамках научно-исследовательских проектов Национального Университета Узбекистана по темы ЁФ-4-10 – «Численное моделирование систем биологической популяции типа Колмогорова-Фишера» (2012-2014 гг.), А-5-44 – «Численное моделирование нелинейных систем биологической популяции типа Колмогорова-Фишера» (2015-2017 гг.).

Целью исследования является численное и аналитическое исследование качественных свойств нелинейных математических моделей, описывающиеся квазилинейными параболическими уравнениями и систем, процессов распространения тепла в однородной и в среде с переменной плотностью с источником и нелокальным граничным условием, разработка комплекса программ для численного исследования нелинейных краевых задач.

Задачи исследования:

установить критические экспоненты типа Фуджита для математической модели распространения тепла в неоднородной среде, описываемой нелокальной задачей;

доказать глобальную разрешимость и неразрешимость по времени решений нелинейной модели распространения тепла в неоднородной среде с нелокальным граничным условием;

определить свойства конечной скорости распространения возмущения и пространственную локализацию для математической модели политропической фильтрации с двойной нелинейностью и с переменной плотностью в случае медленной диффузии;

исследовать асимптотику обобщенных решений с компактным носителем задачи Коши и краевой задачи для вырождающегося уравнения теплопроводности с двойной нелинейностью с источником и с переменной плотностью;

определить условие глобальной разрешимости и неразрешимости в целом по времени решений нелинейной математической модели для систем политропической фильтрации с нелокальным граничным условием и с переменной плотностью;

построить численные схемы для исследования качественных нелинейных свойств математических моделей теплопроводности с переменной плотностью и с нелокальным граничным условием и разработать вычислительные схемы, алгоритм и комплекс программ для численного решения нелинейных задач и визуализировать решения.

Объектом исследования являются нелинейные процессы распространения тепла (фильтрация, диффузия), описываемые вырождающимися параболическими уравнениями и системами с нелокальными граничными условиями.

Предмет исследования – построение теории и практики численно-аналитического исследования нелинейных задач с двойной и тройной нелинейностью с учетом однородности и неоднородности среды и их влияние на изучаемые нелинейные процессы.

Методы исследования. В работе использовались автомодельные и приближенно автомодельные методы, аппарат теоремы сравнения решений для построения и анализа различных типов решений, методы эталонных уравнений для решения нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений и систем, методы оценки решений, разностные методы для построения численных схем, методы итерации, прогонки, метод переменных направлений.

Научная новизна заключается в следующем:

определены условия глобальной разрешимости и неразрешимости по времени решений нелинейной модели теплопроводности в неоднородной среде без источника с нелокальным граничным условием;

определено влияние неоднородности среды при условиях глобальной разрешимости и неразрешимости в целом по времени решений нелинейных задач.

найдено значение критической экспоненты типа Фуджита для модели, описывающей задачу Неймана в случае медленной и быстрой диффузии;

найдено значение критической экспоненты глобального существования решения для модели, описывающейся вторым типом краевой задачи в случае медленной и быстрой диффузии;

построены верхние и нижние оценки обобщенных решений задачи медленно-диффузной теплопроводности в однородной и неоднородной среде;

получены главные члены асимптотики различных автомодельных решений задачи двойной и тройной нелинейной теплопроводности путем применения метода эталонных уравнений;

предложены вычислительные схемы для изучения качественных свойств нелинейных математических моделей теплопроводности с переменной плотностью, разработаны алгоритмы, комплексы программ в среде Visual Studio 2012 (C#) и визуализированы решения нелинейных задач.

Практические результаты исследования построены асимптотические формулы при решении нелинейных задач, возникающих в различных приложениях, построены консервативные разностные схемы, итерационные процессы и разработан программный комплекс.

Достоверность полученных результатов. Полученные результаты и утверждения строго доказаны и подтверждаются результатами численных расчетов. Используя полученные оценки решений, приведен численный анализ решений, результаты которого подтверждают правильность и эффективность предложенной в работе методики расчета с применением метода эталонных уравнений и автомодельного анализа с сохранением нелинейного эффекта.

Научная и практическая значимость результатов исследования. Научная значимость полученных результатов заключается в обосновании теории критической экспоненты типа Фуджита и критической экспоненты глобального существования решения при исследованиях математических моделей описывающихся задачей Коши для уравнений параболического типа и нелинейные краевые задачи.

Практическая значимость работы – конструирование итерационных процессов, разработка численных схем и программного обеспечения позволяет произвести разумные вычислительные эксперименты в нелинейных задачах фильтрации, реакции-диффузии, теплопроводности в различных нелинейных средах для случая медленной и быстрой диффузии, служить для выявления новых эффектов - явления конечной скорости и локализации решения для класса рассматриваемых задач.

Внедрение результатов исследования. Результаты диссертационной работы были применены в следующих направлениях:

полученные верхние и нижние оценки обобщенных решений задачи медленно-диффузной теплопроводности в однородной и неоднородной среде, были использованы для доказательства корректности внутренней и краевой задачи неклассических уравнений математической физики в рамках проекта гранта Ф-4-30 «Внутренние и краевые задачи для дифференциально-операторных уравнений с операторными типами коэффициентов» (Справка Государственного комитета по развитию науки и технологий №ФТК-03-13/743 от 3 ноября 2016 г.). Применение этих научных результатов дало возможность численно решить уравнения биологической популяции типа Колмогорова-Фишера и их систем с нелинейными краевыми условиями;

асимптотики решений нелокальной задачи для уравнений параболического типа с двойной нелинейностью, описывающие модели процессов распространения тепла в неоднородной среде, были использованы при установлении свойств решений внутренней и краевой задачи в рамках проекта гранта Ф-4-30 «Внутренние и краевые задачи для дифференциально-операторных уравнений с операторными типами коэффициентов» (Справка Государственного комитета по развитию науки и технологий №ФТК-03-13/743 от 3 ноября 2016 г.). Применение этих научных результатов позволило обосновать корректность внутренней и краевой задачи;

предложенные вычислительные схемы для численного изучения качественных свойств моделей, описывающих распространение тепла в среде с переменной плотностью, разработанные алгоритмы и комплекс программных средств, были использованы для численного моделирования внутренней и краевой задачи неклассических уравнений математической физики в рамках проекта гранта Ф-4-30 «Внутренние и краевые задачи для дифференциально-операторных уравнений с операторными типами коэффициентов» (Справка Государственного комитета по развитию науки и технологий №ФТК-03-13/743 от 3 ноября 2016 г.). Применение этих научных результатов послужили визуализировать численные решения нелинейных краевых задач.

Апробация результатов исследований. Результаты исследования апробировались на 14 международных научных конференциях: 3-ая международная научная конференция «Актуальные проблемы прикладной математики и информационных технологий – аль Хорезми 2012», «Вычислительные и информационные технологии в науке, технике и образовании – 2013» (Усть-Каменогорск, 2013), «Актуальные проблемы прикладной математики и информационных технологий – аль Хорезми 2014» (Ташкент, 2014), «Analysis and Applied Mathematics» (Чимкент, 2014), 5-ый конгрессе математиков тюркского мира (Иссык-Куль, 2014), «Mathematical Methods, Mathematical Models and Simulation in Science and Engineering (Швейцария, 2014), «Applied Mathematics and Computational Methods» (Афины, 2014), «Mathematical, Computational and Statistical Sciences» (Дубай, 2015), «Pure Mathematics, Applied Mathematics and Computational Methods» (Греция, 2015), «Heat Transfer, Thermal Engineering and Environment» (Италия, 2015), «Applied Mathematics and Informatics» (Испания, 2015), на международной научно-практической конференции «Computational and Informational Technologies in Science, Engineering and Education» (Алматы, 2015), «Дифференциальные уравнения и математическое моделирование» (Улан-Удэ, 2015), на 7 республиканских научных конференциях: «Актуальные вопросы математики, математического моделирования и информационных технологий» (Термез, 2012), «Новые теоремы молодых математиков» (Наманган, 2013), «Современные проблемы дифференциальных уравнений и их приложения» (Ташкент, 2013), «Прикладная математика и информационная безопасность» (Ташкент, 2014), «Математическая физика и родственные проблемы современного анализа» (Бухара, 2015), «Современные методы математической физики и их приложения» (Ташкент, 2015), «Проблемы современной топологии и её приложения» (Ташкент, 2016). Результаты исследования обсуждены на научных семинарах «Современные проблемы математической физики», (Ташкент, 2016), «Современные проблемы прикладной математики и информационной технологии» (Ташкент, 2012-2016), “Современные проблемы вычислительной математики и информационных технологий” института инженеров железнодорожного транспорта и «Моделирование сложные системы» центра разработки аппаратно-программные комплексы при Ташкентском университете информационных технологий (Ташкент, 2016).

Опубликованность результатов исследования. По теме диссертации опубликованы 37 научных работ, из них 13 научных статей в журналах рекомендованных Высшей аттестационной комиссией Республики Узбекистан для публикации основных научных результатов докторских диссертаций, в том числе 8 в республиканских и 5 в зарубежных журналах.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, четырех глав, заключения, списка литературы и приложений. Объем диссертации составляет 170 страниц.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Во введении обосновывается актуальность и востребованность темы диссертации, в соответствии исследованиям приоритетных направлений развития науки и технологий Республики Узбекистан, формулируются цель и задачи, а также объект и предмет исследования, изложена научная новизна и практические результаты исследования, обоснована достоверность полученных результатов, раскрыта теоритическая и практическая значимость полученных результатов, приведен перечень внедрений в практику результатов исследования, сведения об опубликованных работ и структура диссертации.

Первая глава диссертации **«Математическое моделирование процессов нелинейной теплопроводности с двойной нелинейностью»** посвящена исследованию асимптотики автомодельных решений задачи Коши и нелокальной задачи для уравнения теплопроводности в неоднородной среде с источником.

В первом параграфе излагается свойств математической модели нелинейной теплопроводности с источником и результаты международных обзоров.

Во вторых параграфе этой главы приводятся основные определения и вспомогательные утверждения.

Параграф 1.3 посвящен исследованию асимптотики автомодельных решений задачи Коши для уравнения параболического типа, моделирующего распространение тепла в неоднородной среде

$$\rho_1(x)\frac{\partial u}{\partial t} = div\left(\left|\nabla u^l\right|^{p-2}\nabla u^l\right) + \rho_2(x)u^q, \qquad (1)$$

$$u(x,0) = u_0(x),\ \ x \in R^N, \qquad (2)$$

где $\rho_1(x) = |x|^m$, $\rho_2(x) = |x|^n$, которая при $n = m = 0$ она рассматривается как модель горения нелинейной теплопроводной среды с мощностью энерговыделения $u^q \ge 0$, зависящей от температуры $u = u(t,x) \ge 0$, и коэффициента диффузии $u^{l-1}\left|\nabla u^l\right|^{p-2} \ge 0$.

Уравнения (1) при $p > 1+1/l$ является вырождающимся, и поэтому решение понимается в обобщенном смысле в области $Q = \left\{(x,t) : x \in R^N, 0 < t < T\right\}$ из класса $0 \le u(x,t)$, $u^{l-1}\left|\nabla u^l\right|^{p-2} \in C(Q)$, удовлетворяющим уравнению (1) в смысле распределения.

При условиях $p > 1+1/l$ уравнения (1) соответствует случае медленной диффузии, а при $1 < p < 1+1/l$ случае быстрой диффузии.

Рассмотрим следующее автомодельное решение

$$u = (T+t)^{-\alpha} f(\xi),\ \xi = |x|(T+t)^{-\beta},$$

где $\alpha = \dfrac{p+n}{(q-1)(p+m)-(m-n)(l(p-1)-1)}$, $\beta = \dfrac{q-l(p-1)}{p+n}\alpha$, а функция $f(\xi)$ является решением следующей автомодельной задачи

$$\xi^{1-N}\frac{d}{d\xi}\left(\xi^{N-1}\left|\frac{df^l}{d\xi}\right|^{p-2}\frac{df^l}{d\xi}\right) + \beta\xi^{m+1}\frac{df}{d\xi} + \alpha\xi^m f + \xi^n f^q = 0, \tag{3}$$

$$f(0) = C > 0,\ f(d) = 0,\ d < +\infty. \tag{4}$$

Случай медленной диффузии $(p > 1+1/l)$. Рассмотрим функцию:

$$\bar{f}(\xi) = \left(a - b|\xi|^{\frac{p+m}{p-1}}\right)_+^{\frac{p-1}{l(p-1)-1}},$$

где $a = C^{\frac{l(p-1)-1}{p-1}}$, $b = \dfrac{l(p-1)-1}{l(p+m)}\beta^{\frac{1}{p-1}}$, $(i)_+ = \max(0,i)$.

Справедливы теоремы.

Теорема 1. Решение задачи (3), (4) с компактным носителем при $\xi \to (a/b)^{(p-1)/(p+m)}$ имеет асимптотическое представление $f(\xi) = A\bar{f}(\xi)(1+o(1))$, где A находится из решения алгебраического уравнения

$$\left(\frac{1}{y}\right)^{p-1} w^{l(p-1)-1} + \frac{l(b/a)^{\frac{p(1-n)+m+n}{p+m}}}{(bl(p+m))^p} w^{q-1} - \frac{\beta}{(lb(p+m))^{p-1}} = 0,$$

если $q = \dfrac{(p-1)(1-l)+1}{p-1}$ и $A = 1$, если $q > \dfrac{(p-1)(1-l)+1}{p-1}$.

Случай быстрой диффузии $(1 < p < 1+1/l)$. Пусть

$$\tilde{f}(\xi) = \left(a + k|\xi|^{\frac{p+m}{p-1}}\right)^{\frac{p-1}{1-l(p-1)}},$$

где $k=\dfrac{1-l(p-1)}{l(p+m)}\beta^{\frac{1}{p-1}}$, $a=C^{\frac{l(p-1)-1}{p-1}}$.

Теорема 2. Пусть $-p<m<0$, $\dfrac{l(N+m)+N}{l(N+m)+1}<p<1+1/l$, тогда исчезающее на бесконечности решение уравнения (3) имеет асимптотику $f(\xi)=M\bar{f}(\xi)(1+o(1))$, где M находится из решения алгебраического уравнения

$$\left(1-l(p-1)\right)^{1-p}w^{l(p-1)-1}+\frac{lb^{1-n(p-1)/(p+m)}}{\left(bl(p+m)\right)^{p}}w^{q-1}-\frac{\beta}{\left(lb(p+m)\right)^{p-1}}=0,$$

если $n=\dfrac{(q-1)(p+m)}{1-l(p-1)}$ и $M=1$, если $n<\dfrac{(q-1)(p+m)}{1-l(p-1)}$.

Дальше в этой параграфе рассмотрены неограниченное автомодельное решение задачи (1), (2) следующего вида

$$u(t,x)=(T-t)^{-\alpha}g(\xi),\ \xi=|x|(T-t)^{-\beta},$$

где $g(\xi)$ является решением задачи

$$\xi^{1-N}\frac{d}{d\xi}\left(\xi^{1-N}\left|\frac{dg^{l}}{d\xi}\right|^{p-2}\frac{dg^{l}}{d\xi}\right)-\beta\xi^{m+1}\frac{dg}{d\xi}-\alpha\xi^{m}g-\xi^{n}g^{q}=0, \tag{5}$$

$$g(0)=C>0,\ g(d)=0,\ d<+\infty. \tag{6}$$

Теорема 3. Пусть $q>l(p-1)$. Тогда решение задачи (5), (6) с компактным носителем имеет асимптотическое представление

$$g(\xi)=C\bar{g}(\xi)(1+o(1)),$$

где $C=\left(\left(\dfrac{l(p-1)-1}{bl(p+m)}\right)^{p-1}\beta\right)^{\frac{1}{l(p-1)-1}}$, $\bar{g}(\xi)=\left(D-B|\xi|^{\frac{p+m}{p-1}}\right)^{\frac{p-1}{l(p-1)-1}}$, $D>0$, $B>0$.

Следствие 1. При $l(p-1)<q<l(p-1)+\dfrac{p+m}{N+m}$ неограниченное решение задачи Коши (1), (2) пространственно локализовано, причем для свободной границы $x_c(t)$ имеет место асимптотика

$$x_c(t)\sim(D/B)^{(p-1)/(p+m)}(T-t)^{\beta}\to 0$$

при $t\to T^{-}$, т.е. происходит прстранственная локализация решения.

Параграф 1.4 посвящен изучению асимптотики решений уравнение теплопроводности с нелокальным граничным условием при наличии источника

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial x}\right)+u^{\beta},\quad (x,t)\in R_{+}\times(0,+\infty), \tag{7}$$

$$-\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial x}(0,t)=u^q(0,t),\quad t>0, \tag{8}$$

$$u(x,0)=u_0(x)\geq 0,\quad x\in R_+. \tag{9}$$

Задача (7)-(9) возникает при математическом моделировании диффузии в нелинейных средах, при исследовании проблем течения жидкостей через пористые пласты, динамики биологических популяций, политропической фильтрации, образования структур в синергетике и в ряде других областях.

Известно, что решение задачи (7)-(9) при определенных условиях числовых параметров является глобально разрешимой или неограниченной. Этими вопросами для задачи (7)-(9) занимались Wanjuan Du и Zhongping Li. Они получили условие глобальной разрешимости и неразрешимости в целом по времени решение задачи (7)-(9). Условие глобальной разрешимости и неразрешимости нелокальной задачи для уравнения пористой среды установлено в работе Arturo de Pablo, Fernando Li Quiros и Julio D. Rossi.

Следуя работы, Wanjuan Du и Zhongping Li исследуется асимптотики глобальных и неограниченных автомодельных решений.

Случай $\beta\leq 1$, $q>2(p-1)$. Рассмотрим следующего глобального автомодельного решения задачи (7)-(9)

$$u_1(x,t)=t^{\alpha}\varphi(\xi),\ \xi=xt^{-\gamma}, \tag{10}$$

где $\alpha=\frac{1}{1-\beta}$, $\gamma=\frac{p-1-\beta}{p(1-\beta)}$, $\varphi(\xi)$ - решение задачи

$$\frac{d}{d\xi}\left(\left|\frac{d\varphi}{d\xi}\right|^{p-2}\frac{d\varphi}{d\xi}\right)+\gamma\xi\frac{d\varphi}{d\xi}-\alpha\varphi+\varphi^{\beta}=0, \tag{11}$$

$$-\left|\frac{d\varphi}{d\xi}\right|^{p-2}\frac{d\varphi}{d\xi}\bigg|_{\xi=0}=0. \tag{12}$$

Имеет места теорема.

Теорема 4. Решение задачи (11), (12) с компактным носителем при $\xi\to\left(ap/(p-2)\right)^{\frac{p-1}{p}}\gamma^{\frac{1}{p}}$ имеет асимптотическое представление

$$\varphi(\xi)=\left(a-\frac{p-2}{p}\gamma^{\frac{1}{p-1}}\xi^{\frac{p}{p-1}}\right)_+^{\frac{p-1}{p-2}},(1+o(1)),\ a>0.$$

Случай $\beta>2p-1$, $q<\frac{2(p-1)}{p}$. В этом случае неограниченное автомодельное решение задачи (7)-(9) ищется в виде

$$u_2(x,t)=t^{\alpha}\varphi(\xi),\ \xi=xt^{-\gamma},$$

где $\alpha=\frac{p-1}{2(p-1)-pq}$, $\gamma=\frac{p-1-q}{2(p-1)-pq}$, $\varphi(\xi)$ - решение задачи

$$\frac{d}{d\xi}\left(\left|\frac{d\varphi}{d\xi}\right|^{p-2}\frac{d\varphi}{d\xi}\right)+\gamma\xi\frac{d\varphi}{d\xi}-\alpha\varphi=0, \tag{13}$$

$$-\left|\frac{d\varphi}{d\xi}\right|^{p-2}\frac{d\varphi}{d\xi}\bigg|_{\xi=0}=\varphi^{q}(0). \tag{14}$$

Теорема 5. Решение задачи (13), (14) с компактным носителем при $\xi\to a$ имеет асимптотику

$$\varphi(\xi)=C(a-\xi)_{+}^{\frac{p-1}{p-2}}(1+o(1)),\quad a>0,$$

где $C=\left(\frac{p-2}{p-1}a\gamma\right)^{1/(p-2)}\frac{p-2}{p-1}$.

Критический случай $pq=2(p-1)$. Этот случай является логичном продолжение второго случая, когда $pq=2(p-1)$. В этом случае решение задачи (7)-(9) ищется в следующим экспоненциальном виде

$$u_4(x,t)=e^{\alpha(t-\tau)}\varphi(\xi),\ \xi=xe^{-\gamma(t-\tau)},$$

где $\alpha=\frac{p}{2p-1}$, $\gamma=\frac{p-2}{2p-1}$, τ - положительное число, функция $\varphi(\xi)$ является решением

$$\frac{d}{d\xi}\left(\left|\frac{d\varphi}{d\xi}\right|^{p-2}\frac{d\varphi}{d\xi}\right)+\gamma\xi\frac{d\varphi}{d\xi}-\alpha\varphi=0 \tag{15}$$

$$-\left|\frac{d\varphi}{d\xi}\right|^{p-2}\frac{d\varphi}{d\xi}\bigg|_{\xi=0}=\varphi^{q}(0). \tag{16}$$

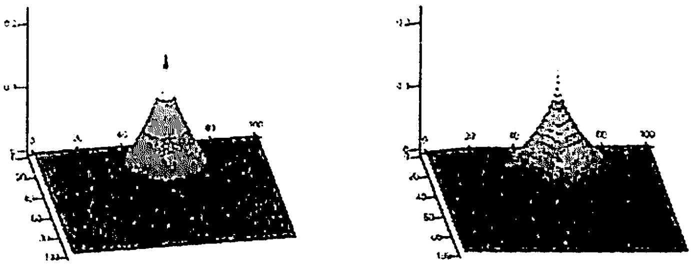
Теорема 6. Решение задачи (15), (16) с компактным носителем при $\xi\to D^{p-2}\left(\frac{p-1}{p-2}\right)^{p}$ имеет асимптотическое представление

$$\varphi(\xi)=C\left(D^{p-2}\left(\frac{p-1}{p-2}\right)^{p}-\xi\right)^{\frac{p-1}{p-2}}(1+o(1)),\quad D>0,$$

где $C=\left(\frac{p-1}{p-2}\gamma\right)^{1/(p-2)}D.$

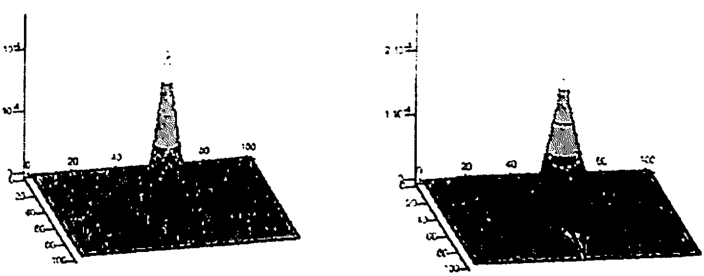
В параграфе 1.5 приведены численные схемы для численного решения задачи Коши (1), (2) и нелокальной задачи (7)-(9). Сконструирован итерационный процесс. Хорошо известно, что итерационные методы требует наличие подходящего начального приближения, приводящие быстрой сходимости к точному решению и сохраняющие качественные свойства изучаемых нелинейных процессов, это является основной трудностью для численного решения нелинейных задач. Эта трудность в зависимости от значения числовых параметров уравнения преодолевается путем удачного выбора начальных приближений, в качестве которых при вычислениях предложено брать установленные выше асимптотические формулы. Проведены вычислительные эксперименты и анализ численных результатов. Результаты численных экспериментов показали эффективность предложенного подхода, в которых численные решения отражают свойство нелинейности.

Ниже приведены график численных решений задачи (1), (2) для значения отдельных числовых параметров из которых виден характер распространение тепла (фильтрации, диффузии).



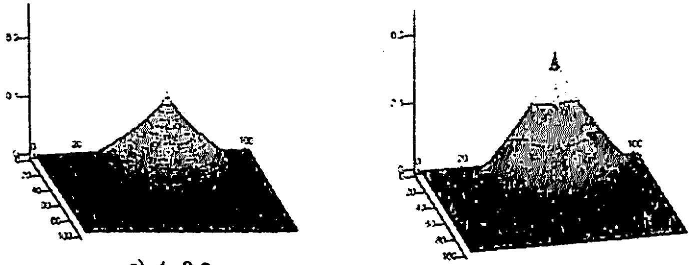
c) t=0.4 d) t=8.4

Рис. 1. Численное решение задачи (1), (2) при ***p=2.7, q=4.2, l=1,5, m=0.5, n=2.***



c) t=0.4 d) t=8.6

Рис. 2. Численное решение задачи (1), (2) при ***p=2.1, q=4, l=1, m=1.5, n=2.*** $\left(l\left(p-1\right)-1\rightarrow 0\right)$.



c) t=0.2 d) t=5

Рис. 3. Численное решение задачи (1), (2) при *p=3, q=3, l=1,5, m=0.5, n=2.* $\left(q=l(p-1)\right)$.

На рис. 1 представлен график глобального решения задачи (1), (2), имеющие свойств конечной скорости распространения возмущение, а на рис. 2 глобальное решение вблизи критической точки. Рисунок 3 представляет собой график локализованных неограниченных решений. В этом случае температура растет неограниченно за время $T<\infty$ в ограниченной области среды.

Вторая глава диссертации **«Математическое моделирование процессов теплопроводности с нелокальным граничным условием в одномерном случае»** посвящена изучению условие глобальной разрешимости и неразрешимости по времени решение нелинейной математической модели распространения тепла в неоднородной среде с нелокальным граничным условием, получению асимптотике автомодельных решений и численному моделированию процесса нелинейной теплопроводности.

В параграфе 2.1 рассмотрены следующее уравнение теплопроводности

$$\rho(x)\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\left|\frac{\partial u^m}{\partial x}\right|^{p-2}\frac{\partial u^m}{\partial x}\right),\ (x,t)\in R_+\times(0,+\infty), \quad (17)$$

с нелинейным граничным

$$-\left|\frac{\partial u^m}{\partial x}\right|^{p-2}\frac{\partial u^m}{\partial x}(0,t)=u^q(0,t),\ t>0, \quad (18)$$

и начальным условием

$$u(x,0)=u_0(x)\geq 0,\ x\in R_+, \quad (19)$$

где $\rho(x)=(1+x)^n$, $n>-p$ (случай медленной диффузии).

Уравнение (17) при $m>1$, $1<p\neq 2$ можно рассматривает как неньютоновской политропической фильтрации, а при $m>1$, $p=2$ Ньютоновской диффузии и т.д., при наличие переменной плотности $\rho(x)$.

Уравнение (17) при предположениях $p>1+1/m$ называется уравнением медленной диффузии, а при $1<p<1+1/m$ - быстрой диффузии. В случае медленной диффузии задача (17)-(19) не имеет классического решения. Поэтому изучается ее обобщенное решение из класса

$$0 \le u(x,t), \left|\frac{\partial u^m}{\partial x}\right|^{p-2} \frac{\partial u^m}{\partial x} \in C\left(R_+ \times (0,+\infty)\right).$$

В работе Z.Li, Ch.Mu, L.Xie изучены условия глобального существования и несуществования решения задачи (17)-(19) при $\rho(x)=1$ в случае быстрой диффузии. Они установили критические экспоненты глобального существования решения и критические экспоненты типа Фуджита. Аналогичные результаты для случая медленной диффузии были получены в работах Z.Wang, J.Yin, C.Wang, а при $\rho(x)=1$, $m=1$ в работе В.А.Галактионова и Х.А.Левина.

Доказаны следующие теоремы.

Теорема 7. Если $0 \le q \le \frac{(m(n+1)+1)(p-1)}{p+n}$, то всякое решение задачи (17)-(19) является глобальным.

Теорема 8. Если $q > m(p-1)+\frac{p-1}{p+n}$ и начальная функция $u_0(x)$ достаточно мала, то всякое решение задачи (17)-(19) является глобальным.

Теорема 9. Пусть $q > \frac{(m(n+1)+1)(p-1)}{p+n}$, тогда всякое решение задачи (17)-(19) является неограниченным при достаточно больших начальных данных.

Теорема 10. Если $\frac{(m(n+1)+1)(p-1)}{p+n} < q < m(p-1)+\frac{p-1}{p+n}$, то всякое нетривиальное решение задачи (17)-(19) является неограниченным.

Параграф 2.2 посвящен изучению разрешимости и неразрешимости задачи (17)-(19) в случае быстрой диффузии. Доказывается, что приведенные выше теоремы 1-4 имеет место и в этом случае.

В параграфе 2.3 изучены асимптотики автомодельных решений задачи (17)-(19). Пусть

$$u_+(t,x)=(T+t)^{-\gamma} f(\xi),\ \xi=(1+x)(T+t)^{-\sigma}, \tag{20}$$

где $\gamma=\frac{p-1}{q(p+n)-(p-1)(m(n+1)+1)}$, $\sigma=\frac{q-m(p-1)}{q(p+n)-(p-1)(m(n+1)+1)}$,

а функция $f(\xi)$ является решением задачи

$$\frac{d}{d\xi}\left(\left|\frac{df^m}{d\xi}\right|^{p-2}\frac{df^m}{d\xi}\right)+\sigma\xi^{n+1}\frac{df}{d\xi}+\gamma\xi^n f=0, \tag{21}$$

$$-\left|(f^m)'\right|^{p-2}(f^m)'(1)=f^q(1). \tag{22}$$

Случай медленной диффузии $p>1+1/m$.

Теорема 11. Финитное решение задачи (21), (22) при $\xi \to (a/b)_-^{(p-1)/(p+n)}$ имеет асимптотическое представление

$$f(\xi)=\left(a-b\xi^{\frac{p+n}{p-1}}\right)_+^{\frac{p-1}{m(p-1)-1}}(1+o(1)),\ a>0,\ \ b=\frac{m(p-1)-1}{m(p+n)}\sigma^{1/(p-1)}.$$

Случай быстрой диффузии $1<p<1+1/m$.

Теорема 12. При $\xi \to +\infty$ исчезающие на бесконечности решение задачи (21), (22) имеет асимптотику

$$f(\xi)=C\left(a+b\xi^{\frac{p+n}{p-1}}\right)^{\frac{p-1}{1-m(p-1)}}(1+o(1)),\ \ b=\frac{1-m(p-1)}{m(p+n)}\sigma^{1/(p-1)},$$

где $C=\left(\sigma\left((n+1)(m(p-1)-1)+p+n\right)\right)^{1/[1-m(p-1)]}$.

Критический случай $m(p-1)-1=0$.

Теорема 13. Пусть $\sigma>0$, $q>1$. Тогда решение задачи (21), (22) при $\xi \to +\infty$ имеет асимптотическое представление

$$f(\xi)=C_1e^{-d\xi^{\frac{p+n}{p-1}}}(1+o(1)),\ \ d=\frac{p-1}{m(p+n)}\sigma^{1/(p-1)},$$

где C_1 - произвольное положительное число.

В §2.4 на основе полученных в §2.3 результатов разработаны численные схемы. Для этого, уравнение (17) аппроксимировалось со вторым порядком точности по пространственным координатам и с первым порядком по времени. Для численного моделирования сконструирован итерационный процесс, во внутренних шагах итерации значения узлов вычисляются методом прогонки. Ниже приведем некоторые результаты численных экспериментов, которых в качестве начальных приближения брались асимптотической формулы полученных в теоремы 11-13.

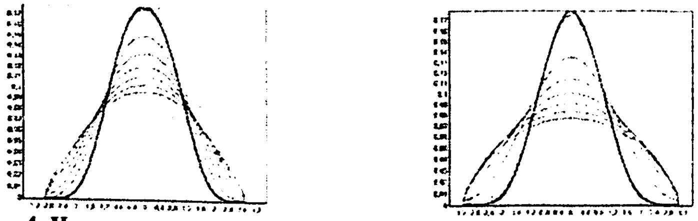


Рис 4. Численное решение задачи (17)-(19) при *m=1.5, p=1.75, q=2.85,* 1) *n=0,* 2) *n=-0.25.*

На рис. 4 показано график численного решения краевой задачи (17)-(19) в случае медленной диффузии, имеющей свойств конечной скорости распространения возмущений.

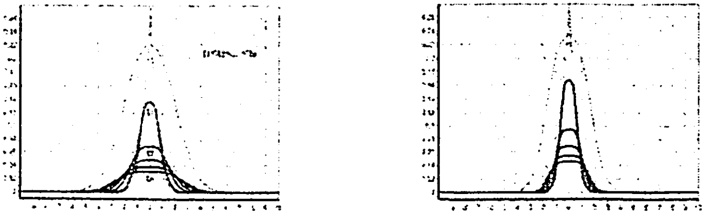


Рис 5. Численное решение задачи (17)-(19) при $m=1.5$, $p=1.55$, $q=2.85$, $a=1.5$, 1) $n=0.5$, 2) $n=1$.

Рис. 5 представляет в себе график численного решения задачи (17)-(19) для случая быстрой диффузии. За счет неограниченности коэффициента теплопроводности процесс имеет свойство бесконечной скорости распространения возмущений. Скорость распространения возмущений гораздо больше, чем в случае медленной диффузии, при которым имеет место конечная скорость распространения возмущений. Процесс диффузии тепла охватывает всю область и исчезает на бесконечности.

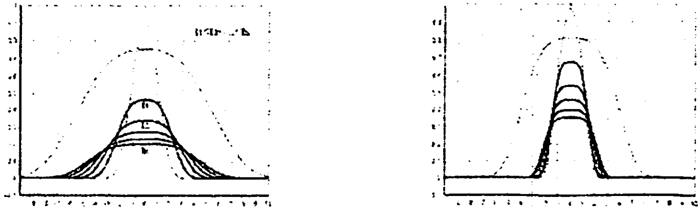


Рис 6. Численное решение задачи (17)-(19) при $m=2$, $p=1.5$, $q=3$, 1) $n=0.25$, 2) $n=0.85$.

Рис 6. соответствует численному решению задачи (17)-(19) для критического случая. Она является аналогичным продолжением случая быстрой диффузии, при котором имеет место свойство бесконечной скорости распространения возмущений.

Третья глава диссертации **«Математическое моделирование процессов теплопроводности с нелокальным граничным условием. Многомерный случай»** посвящена исследованию качественных свойств нелинейной модели многомерной теплопроводности в неоднородной среде с нелинейным граничным условием.

В §3.1 рассматривается следующая нелокальная задача

$$\rho(x)u_t = \nabla\left(\left|\nabla u^m\right|^{p-2}\nabla u^m\right), \quad (x,t)\in R_+^N\times(0,+\infty), \tag{23}$$

$$-\left|\nabla u^m\right|^{p-2}\frac{\partial u^m}{\partial x_1}(0,t)=u^q(0,t), \quad t>0, \tag{24}$$

$$u(x,0)=u_0(x), \quad x\in R_+^N, \tag{25}$$

где $R_+^N=\left\{(x_1,x')\,|\,x'\in R^{N-1}, x_1>0\right\}, \rho(x)=\left(1+|x|\right)^n$, $n>-p$.

Уравнение (23) описывает физические модели, динамики популяций, химические реакции, распространения тепла и т.д. В частности, уравнение (23) описывает нестационарный поток жидкостей в пористой среде со степенной зависимости от касательных напряжений, от скорости перемещения при политропных условиях. В этом случае уравнение (23) называется неньютоновским уравнением политропической фильтрации, которые интенсивно изучался с прошлого века. Нелинейное граничное условие (24) используется для описания притока подводимой энергии на границе $x=0$. Например, в процессе распространения тепла условие (24) представляет собой поток тепла, следовательно, она описывает нелинейный закон излучения на границе. Этот вид граничного условия появляется также в задачах горения, когда реакция происходит только на границе контейнера.

Уравнение (23) при условиях $p>1+1/m$ соответствует уравнением медленной диффузии, и она является вырождающимся. И поэтому решение его понимается в обобщенном смысле.

Условие глобальное разрешимости и неразрешимости решение задачи (23)-(25) при $p=2$, $n=0$ изучены авторами W.Huang, J.Yin, и Y.Wang, а при $m=1$, $n=0$ W.Du и Z.Li.

Введем следующее обозначений

$$q_0=\frac{(m(n+1)+1)(p-1)}{p+n},\ q_c=m(p-1)+\frac{p-1}{N+n}.$$

Для глобальной разрешимости решение задачи (23)-(25) справедливы следующее теоремы.

Теорема 14. Если $0\le q\le q_0$, то всякое решение задачи (23)-(25) является глобальным.

Теорема 15. Если $q>q_c$ и начальная функция $u_0(x)$ достаточно мала, то всякое решение задачи (23)-(25) является глобальным.

Теорема 16. Пусть $q>q_0$, тогда всякое решение задачи (23)-(25) является неограниченным при достаточно больших начальных данных.

Теорема 17. Если $q_0<q<q_c$, то всякое нетривиальное решение задачи (23)-(25) является неограниченным.

В §3.2 исследована задача (23)-(25) для случая быстрой диффузии. При этом изучается свойства классических решений. Получается условие существование глобального решения по времени и неограниченности решение (blow-up), для которых доказаны справедливость теорем 14-17.

§3.3 посвящены исследованию асимптотики автомодельных решений задачи (23)-(25) в случай медленной диффузии и в случай быстрой диффузии. Автомодельное решение ищется в виде

$$u_+(t,x)=(T+t)^{-\gamma}f(\xi),$$

где $\xi=|\zeta|$, $\zeta_i=(1+x_i)(T+t)^{-\sigma}$, $i=1,\dots,N$, $\gamma=\dfrac{p-1}{q(p+n)-(p-1)(m(n+1)+1)}$,

$\sigma=\dfrac{q-m(p-1)}{q(p+n)-(p-1)(m(n+1)+1)}$, функция $f(\xi)$ удовлетворяет задачу

$$\xi^{1-N}\frac{d}{d\xi}\left(\xi^{N-1}\left|\frac{df^m}{d\xi}\right|^{p-2}\frac{df^m}{d\xi}\right)+\sigma\xi^{n+1}\frac{df}{d\xi}+\gamma\xi^n f=0 \qquad (26)$$

$$-\left|(f^m)'\right|^{p-2}(f^m)'(1)=f^q(1). \qquad (27)$$

Случай медленной диффузии $p>1+1/m$.

Теорема 18. Решение задачи (26), (27) с компактным носителем при $\xi\to(a/b)_-^{(p+n)/(p-1)}$ имеет асимптотическое представление

$$f(\xi)=\left(a-b\xi^{\frac{p+n}{p-1}}\right)_+^{\frac{p-1}{m(p-1)-1}}(1+o(1)),\ \ b=\frac{m(p-1)-1}{m(p+n)}\sigma^{1/(p-1)},\ \ a>0.$$

Случай быстрой диффузии $1<p<1+1/m$.

Теорема 19. Пусть $\dfrac{(N+n)(m+1)-n}{(N+n)m+1}<p<1+\dfrac{1}{m}$. Тогда решение задачи (26), (27) при $\xi\to+\infty$ имеет асимптотическое представление

$$f(\xi)=C\left(a+b\xi^{\frac{p+n}{p-1}}\right)^{\frac{p-1}{1-m(p-1)}}(1+o(1)),\ \ b=-\frac{m(p-1)-1}{m(p+n)}\sigma^{1/(p-1)},$$

где $C=\left[\sigma\left((N+n)(m(p-1)-1)+p+n\right)\right]^{\frac{1}{1-m(p-1)}}$.

Четвертая глава диссертационной работы **«Свойства системы уравнений теплопроводности связанных с нелинейными граничными условиями»** посвящена на основе автомодельного анализа и метода эталонных уравнений изучению свойств нелинейной модели теплопроводности в двухкомпонентных средах и с использованием теоремы сравнения решений получению верхние оценки глобальных решений и нижние оценки неограниченных решений.

В первом параграфе этой главы рассмотрена параболическая система нелинейных уравнений теплопроводности в неоднородной среде, связанных с нелинейными граничными условиями

$$\rho_1(x)\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\left|\frac{\partial u^{m_1}}{\partial x}\right|^{p_1-2}\frac{\partial u^{m_1}}{\partial x}\right),\ \ \rho_2(x)\frac{\partial \upsilon}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\left|\frac{\partial \upsilon^{m_2}}{\partial x}\right|^{p_2-2}\frac{\partial \upsilon^{m_2}}{\partial x}\right),\ x>0,\ t>0, \qquad (28)$$

$$-\left|\frac{\partial u^{m_1}}{\partial x}\right|^{p_1-2}\frac{\partial u^{m_1}}{\partial x}\Bigg|_{x=0}=\upsilon^{q_1}(0,t),\ \ -\left|\frac{\partial \upsilon^{m_2}}{\partial x}\right|^{p_2-2}\frac{\partial \upsilon^{m_2}}{\partial x}\Bigg|_{x=0}=u^{q_2}(0,t) \qquad (29)$$

$$u(x,0)=u_0(x)\geq 0,\ \upsilon(x,0)=\upsilon_0(x)\geq 0,\ x>0, \tag{30}$$

где $m_i \geq 1$, $p_i > 1+1/m_i$, $q_i > 0$, $(i=1,2)$, $\rho_1(x)=(1+x)^n$, $\rho_2(x)=(1+x)^k$, $n>-p_1$, $k>-p_2$, $u_0(x)$ и $\upsilon_0(x)$ неотрицательные непрерывные функции с компактным носителем в R_+.

Система нелинейных параболических уравнений (28) встречается в различных приложениях как модель биологической популяций, химической реакции, распространение тепла, диффузия и т.д. Например, $u(x,t)$ и $\upsilon(x,t)$ представляют собой плотности двух биологических популяций в процессе миграции или температуры двух пористых материалов во время распространения тепла.

В случае с постоянной плотности, когда $\rho_1(x)=\rho_2(x)=1$ задача (28)-(30) изучена в работе Z.Xiang, Ch.Mu и Y.Wang. В работе F.Quiros и J. D.Rossi. изучен случай $p_1=p_2=2$, $\rho_1(x)=\rho_2(x)=1$.

Основные теоремы этого параграфа является следующие теоремы.

Теорема 20. Если $q_1q_2 \leq \dfrac{(p_1-1)(p_2-1)(m_1(n+1)+1)(m_2(k+1)+1)}{(p_1+n)(p_2+k)}$, то всякое решение задачи (28)-(30) является глобальным.

Теорема 21. Пусть $q_1q_2 > \dfrac{(p_1-1)(p_2-1)(m_1(n+1)+1)(m_2(k+1)+1)}{(p_1+n)(p_2+k)}$, тогда всякое решение задачи (28)-(30) является неограниченным при достаточно больших начальных данных.

Значения $q_1q_2 = \dfrac{(p_1-1)(p_2-1)(m_1(n+1)+1)(m_2(k+1)+1)}{(p_1+n)(p_2+k)}$ является критической экспонентой глобального существования решений.

Введем обозначений

$$\alpha_1 = \frac{q_1(p_1+n)(p_2-1)+(p_1-1)(p_2-1)(m_2(k+1)+1)}{q_1q_2(p_1+n)(p_2+k)-(p_1-1)(p_2-1)(m_1(n+1)+1)(m_2(k+1)+1)},$$

$$\alpha_2 = \frac{q_2(p_2+k)(p_1-1)+(p_1-1)(p_2-1)(m_1(n+1)+1)}{q_1q_2(p_1+n)(p_2+k)-(p_1-1)(p_2-1)(m_1(n+1)+1)(m_2(k+1)+1)}$$

$$\beta_1 = \frac{q_1\alpha_2 - m_1\alpha_1(p_1-1)}{p_1-1},\ \beta_2 = \frac{q_2\alpha_1 - m_2\alpha_1(p_2-1)}{p_2-1}.$$

Теорема 22. Пусть $q_1q_2 > \dfrac{(p_1-1)(p_2-1)(m_1(n+1)+1)(m_2(k+1)+1)}{(p_1+n)(p_2+k)}$, $\min\{(n+1)\beta_1-\alpha_1,(k+1)\beta_2-\alpha_2\}>0$ и начальные данные достаточно малы, тогда всякое решение задачи (28)-(30) является глобальным.

Теорема 23. Пусть $q_1 q_2 > \dfrac{(p_1-1)(p_2-1)(m_1(n+1)+1)(m_2(k+1)+1)}{(p_1+n)(p_2+k)}$, $\max\{(n+1)\beta_1-\alpha_1,(k+1)\beta_2-\alpha_2\}<0$, тогда всякое нетривиальное решение задачи (28)-(30) является неограниченным.

Значения $\min\{(n+1)\beta_1-\alpha_1,(k+1)\beta_2-\alpha_2\}=0$ называется критической экспонентой типа Фуджита.

В §4.2 изучена свойств решений система (28), (30) описывающее процесс распространение тепла в двухкомпонентной среде с нелокальными граничными условиями

$$-\left|\frac{\partial u^{m_1}}{\partial x}\right|^{p_1-2}\frac{\partial u^{m_1}}{\partial x}\Bigg|_{x=0}=u^{r_1}(0,t)\upsilon^{q_1}(0,t),\ -\left|\frac{\partial \upsilon^{m_2}}{\partial x}\right|^{p_2-2}\frac{\partial \upsilon^{m_2}}{\partial x}\Bigg|_{x=0}=u^{r_2}(0,t)\upsilon^{q_2}(0,t),\quad (31)$$

где $m_i\ge 1,\ p_i>1+1/m_i,\ q_i>0,\ \gamma_i>0,\ \rho_i(x)=(1+x)^{n_i},\ n_i>-p_i,\ (i=1,2)$.

Получены условий на числовые параметры, при которых решения задачи (28), (30), (31) будет глобально разрешимой или неразрешимой. Следовательно, установлены значений критической экспоненты типа Фуджита и критической экспоненты глобального существования решения.

В §4.3 изучается асимптотические поведение автомодельных решений задачи (28)-(30) и (28), (30), (31).

Построено следующее автомодельное решение задачи (28)-(30)

$$\begin{cases} u_+(x,t)=(T+t)^{-\alpha_1}\varphi(\xi),\ \xi=(1+x)(T+t)^{-\beta_1},\\ \upsilon_+(x,t)=(T+t)^{-\alpha_2}\phi(\eta),\ \eta=(1+x)(T+t)^{-\beta_2},\end{cases}$$

где $\alpha_i,\ \beta_i\ (i=1,2)$ - определенные в §4.1 константы, $T>0$, функции $(\varphi(\xi),\phi(\eta))$ решение следующей задачи

$$\begin{cases} \dfrac{d}{d\xi}\left(\left|\dfrac{d\varphi^{m_1}}{d\xi}\right|^{p_1-2}\dfrac{d\varphi^{m_1}}{d\xi}\right)+\beta_1\xi^{n+1}\dfrac{d\varphi}{d\xi}+\alpha_1\xi^n\varphi=0,\\ \dfrac{d}{d\eta}\left(\left|\dfrac{d\phi^{m_2}}{d\eta}\right|^{p_2-2}\dfrac{d\phi^{m_2}}{d\eta}\right)+\beta_2\eta^{k+1}\dfrac{d\phi}{d\eta}+\alpha_2\eta^k\phi=0,\end{cases}\quad (32)$$

$$-\left|\frac{d\varphi^{m_1}}{d\xi}\right|^{p_1-2}\frac{d\varphi^{m_1}}{d\xi}(1)=\phi^{q_1}(1),\ -\left|\frac{d\phi^{m_2}}{d\eta}\right|^{p_2-2}\frac{d\phi^{m_2}}{d\eta}(1)=\varphi^{q_2}(1).\quad (33)$$

Рассмотрим следующие функции, полученные с помощью метода эталонных уравнений

$$\tilde\varphi(\xi)=\left(a_1-b_1\xi^{\frac{p_1+n}{p_1-1}}\right)^{\frac{p_1-1}{m_1(p_1-1)-1}},\ \tilde\phi(\eta)=\left(a_2-b_2\eta^{\frac{p_2+k}{p_2-1}}\right)^{\frac{p_2-1}{m_2(p_2-1)-1}},$$

где $a_i > 0$ $(i=1,2)$, $b_1 = \dfrac{m_1(p_1-1)-1}{m_1(p_1+n)}\beta_1^{\frac{1}{p_1-1}} > 0$, $b_2 = \dfrac{m_2(p_2-1)-1}{m_2(p_2+k)}\beta_2^{\frac{1}{p_2-1}} > 0$.

Имеет место следующая

Теорема 24. Пусть $\min\left\{\dfrac{p_1-1}{m_1(p_1-1)-1}, \dfrac{p_2-1}{m_2(p_2-1)-1}\right\} > 0$, тогда решений с компактным носителем систем уравнений (32) при $\xi \to (a_1/b_1)^{\frac{p_1-1}{p_1+n}}$, $\eta \to (a_2/b_2)^{\frac{p_2-1}{p_2+k}}$ имеет асимптотику

$$\varphi(\xi) = \tilde{\varphi}(\xi)(1+o(1)), \quad \phi(\eta) = \tilde{\phi}(\eta)(1+o(1)),$$

где $\tilde{\varphi}(\xi)$, $\tilde{\phi}(\eta)$ определенные выше функции.

Параграф §4.4 посвящен численному моделированию системы (28)-(30). Построены численные схемы для задачи (28)-(30), разработаны алгоритм и комплекс программы. Оболочка и код программы для численного решения разработаны на языке C# (Visual Studio 2010). Для визуализации полученных численных решений включены в комплекс программы графическая библиотека Chart и графические модуль 3-D Plot математического пакета MathCad.

Приведем некоторые результаты численных экспериментов. Шаг сетки выбран достаточно мелким h=0.05, число узлов N=10000 и в качестве точности итерации задаются $\varepsilon = 10^{-3}$. Счет проводился до t=2 с шагом $\tau = 0.02$.

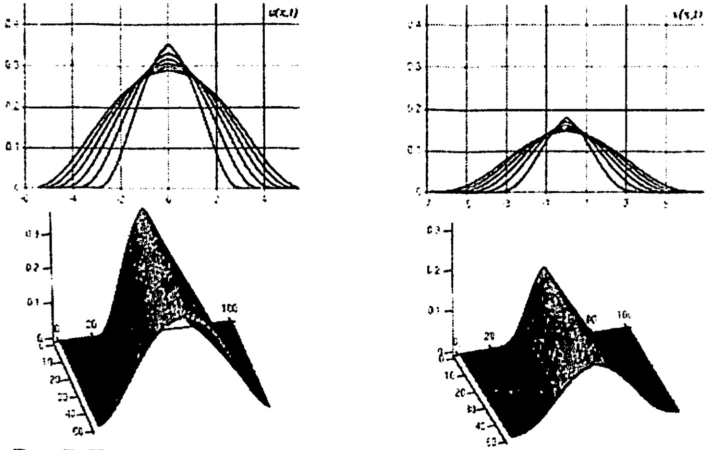


Рис 7. Численное решение задачи (28)-(30) при *n1=0.7, m1=1.5, p1=1.85, q1=3, n2=0.5, m2=1.3, p2=1.9, q2=3.5.*

На рис. 7 приведены результаты численного решения задачи (28)-(30) при $\min\{(n+1)\beta_1 - \alpha_1, (k+1)\beta_2 - \alpha_2\} > 0$, когда $m_i(p_i-1)-1 > 0$, соответствующей случаю медленной диффузии. При $m_i(p_i-1)-1>0$, как следует из асимптотической формулы приведенное в §4.3 и графиков, распространение тепла происходит с конечной скоростью. Глубина проникновения тепловых волн зависит от времени и фронт (точке, в которой $u_+(x,t)$, $\upsilon_+(x,t)$ обращаются в нуль) волны для каждой среды находится в конечной точке: $x_{\phi_1}=(a_1/b_1)^{\frac{p_1-1}{p_1+n}}(T+t)^{\beta_1}<\infty$, $x_{\phi_2}=(a_2/b_2)^{\frac{p_2-1}{p_2+k}}(T+t)^{\beta_2}<\infty$.

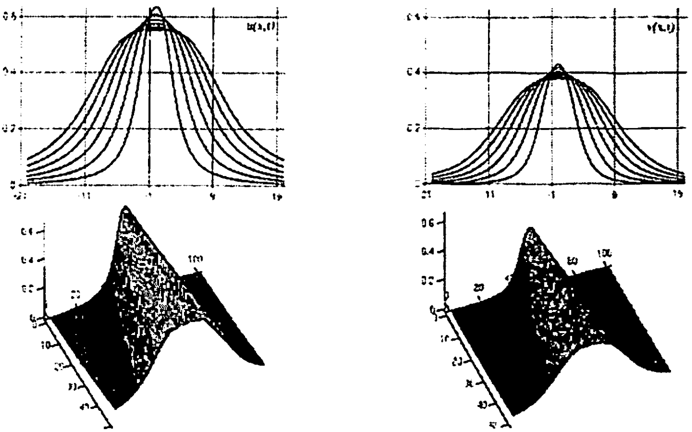


Рис 8. Численное решение задачи (28)-(30) при *n1=0.5, m1=1.5 p1=1.3 q1=3, n2=0.75, m2=1.6 p2=1.4 q2=3.5.*

На рис. 8 представлены результаты численных расчетов задачи (28)-(30) при значениях числовых параметров m_i, p_i, $(i=1,2)$, формально отвечающие случаю быстрой диффузии $m_i(p_i-1)-1<0$. В этом случая процесс распространения тепла происходит с бесконечной скоростью за счет неограниченности коэффициента теплопроводности. Тепловое возмущение распространяется из нагретой области в холодную гораздо быстрее, чем в случае медленной диффузии.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

На основе проведенных исследований по докторской диссертации «Математическое моделирование процессов теплопроводности в среде с двойной нелинейностью» представлены следующие выводы:

1. Необходимо подчеркнуть, что найдены условия глобальной разрешимости и неразрешимости в целом по времени решений нелинейной математической модели распространения тепла, неньютоновской политропической фильтрации, диффузии, описывающиеся нелинейными параболическими уравнениями с нелокальным граничным условием и с переменной плотностью.

2. Следует отметить, что найдены критические экспоненты типа Фуджита для нелокальной задачи распространения тепла в неоднородной среде.

3. Следует подчеркнуть, что получены верхние и нижние оценки глобальных и неограниченных обобщенных решений для нелинейной математической модели теплопроводности с переменной плотностью и с нелокальным граничным условием.

4. Можно установить свойства конечной скорости распространения возмущений и пространственной локализации решения для математической модели нелинейной политропической фильтрации с двойной нелинейностью и с переменной плотностью в случае медленной диффузии.

5. Следует подчеркнуть, что достигнуты доказанные свойства бесконечной скорости распространения возмущений для математической модели нелинейной политропической фильтрации с двойной нелинейностью и с переменной плотностью в случае быстрой диффузии.

6. Следует отметить, что доказано асимптотическое поведение обобщенных решений с компактным носителем задачи Коши для вырождающегося уравнения теплопроводности в неоднородной среде с источником и с переменной плотностью.

7. Следует отметить, что доказано условие глобальной разрешимости и неразрешимости в целом по времени решений и асимптотическое представление решений систем уравнений для задачи нелинейной политропической фильтрации с нелокальным граничным условием и с переменной плотностью.

8. Необходимо подчеркнуть, что предложены численные схемы для исследования качественных нелинейных свойств математических моделей теплопроводности с переменной плотностью и с нелокальным граничным условием.

9. Следует подчеркнуть, что разработаны вычислительные схемы, алгоритмы и программные комплексы в среде Visual Studio 2012 (C#) для численного решения нелинейных задач теплопроводности и визуализации.

SCIENTIFIC COUNCIL 14.07.2016.T.29.01 AT TASHKENT UNIVERSITY OF INFORMATION TECHNOLOGIES AND NATIONAL UNIVERSITY OF UZBEKISTAN ON AWARD OF SCIENTIFIC DEGREE OF DOCTOR OF SCIENCES

NATIONAL UNIVERSITY OF UZBEKISTAN

RAKHMONOV ZAFAR RAVSHANOVICH

MATHEMATICAL MODELING OF THE HEAT CONDUCTION PROCESSES IN A MEDIUM WITH DOUBLE NONLINEARITY

05.01.07– Mathematical modeling. Numerical methods
and complex of applications
(Physical-mathematical science)

ABSTRACT OF DOCTORAL DISSERTATION

Tashkent – 2016

The subject of doctoral dissertation is registered on №30.06.2015/B2015.2.FM226 at the Supreme Attestation Commission of the Cabinet of Ministers of the Republic of Uzbekistan.

Doctoral dissertation is carried out at the National University of Uzbekistan.

Abstract of dissertation in three languages (Uzbek, Russian, English) is placed on web page to address www.tuit.uz and Information-educational portal "ZIYONET" to address www.ziyonet.uz

Scientific consultant:	**Aripov Mersaid** doctor of physical - mathematics sciences, professor
Official opponents:	**Kerimbekov Akylbek Kerimbekovich** (Kyrgyzstan) doctor of physical - mathematics sciences, professor
	Muzafarov Xafiz Azizovich doctor of physical - mathematics sciences, professor
	Khuzhaerov Bakhtier Khuzhaerovich doctor of physical - mathematics sciences, professor
Leading organization:	**Institute seismic stability of structures of Academy of sciences of the Republic of Uzbekistan**

Defense will take place «29» November 2016 at 14 at the meeting of scientific council number 14.07.2016.T.29.01 at Tashkent University of Information Technologies and National University of Uzbekistan. (Address: 100202, Tashkent, 108, Amir Temur str. Ph.: (99871) 238-64-43; fax: (99871) 238-65-52; e-mail:tuit@tuit.uz).

Doctoral dissertation can be reviewed in Information-resource centre at Tashkent University of information technology (registration number 15/18). Address: 100202, Tashkent, Amir Temur str., 108. Ph.: (99871) 238-65-44.

Abstract of dissertation sent out on «14» November 2016 year
(mailing report № 1 on «14» November 2016)

R.Kh.Khamdamov
...scientific council on award of scientific degree of doctor of sciences D.T.S.

M.S.Yakubov
...f scientific council on award of ...r of sciences D.T.S., professor

N.Ravshanov
...seminar under scientific council ...ific degree of doctor of sciences, D.T.S.

Introduction (abstract of doctoral dissertation)

The urgency and relevance of the theme of dissertation. There is a great interest in the study of nonlinear models of a variety of phenomena and processes occurring in mechanics, physics, technology, biophysics, biology, ecology, medicine and other fields which are described by nonlinear differential equations widely in science. The basis of these models in particular constitute are parabolic type partial differential equations. In research of properties of studies and numerical solutions of the Cauchy problems and boundary value problems, approximation methods were applied. Here, the main place get degenerate equations and systems of parabolic type, which are simulate different nonlinear processes occurring in the natural sciences.

In the independence years of our Republic research and the practical application of nonlinear models of a variety of physical, biological, and chemical processing that are relevant areas of applied mathematics. From this point, scientific works carrying out on a number of mathematical models, which express the heat conductivity processes, filtration, biological population that have a practical application in the fields of energetic, medicine, oil and gas.

Is currently widely spread in the world of mathematical models of processes described received degenerate quasilinear parabolic equations, it is because they are derived from the fundamental conservation laws. Therefore, it is possible when two physical processes that in common do not have seemingly anything are described by the same nonlinear diffusion equation, only with different numerical parameters. Currently, the implementation of scientific research and practical application of these equations is one of the important problems that are carried out in the following areas: development of methods for the study of qualitative properties of nonlinear mathematical models; finding accurate estimates of solutions in different spaces; definition of nonlinear effects; development of efficient numerical schemes; creating a set of programs for the study of mathematical models of nonlinear processes and evolution dynamics of the process in time. Scientific studies, which are conducted in all of these areas, explain the relevance of the topic of this thesis.

This dissertation research in a certain extent is the implementation of the tasks provided in the Resolution of the President of the Republic of Uzbekistan PP-1730 «On measures for further implementation and development of modern information and communication technologies», dated March 21, 2012, PP-1442 «On the priorities of industrial development of Uzbekistan in 2011-2015» dated December 15, 2010 and the Cabinet of Ministers of the Republic of Uzbekistan №24 «On measures to create conditions for further development computerizing and information communication technologies in the field» of 1 February 2012, and also in other legal instruments adopted in this area.

Relevant research priority areas of science and developing technology of the republic. This work was performed in accordance with the priority areas of science and technology of the Republic of Uzbekistan IV. "Mathematics, Mechanics and Computer Science".

A review of international research on the topic of dissertation[3].

Scientific researches on studying of qualitative properties of various nonlinear mathematical models, conducted at leading research centers and higher educational institutions of the world, including, North Carolina State University, Iowa State University of Science and Technology, University of Central Florida, Louisiana State University, California State University (USA), Universidad de Buenos Aires (Argentina), Chile University (Chile), Sapienza Università di Roma, Università degli Studi di Catania (Italy), Osaka, Nagoya, Hiroshima University (Japan), National University of Singapore (Singapore), Universidad Autónoma de Madrid, Universidad Complutense de Madrid (Spain), Paderborn University, Aachen University (Germany), University of Nottingham, University of Sussex (UK), at Comenius University (Slovakia), at the University of Tel Aviv (Izrail), Jilin, Chongqing, Changchun University (China), Paris mathematics Center, Université Paris-Dauphine (France), the Institute of mathematics, Academy of Sciences of Russia, at Moscow state University (Russia), at the Institute of computer engineering and automation Academy of Sciences of Hungary (Hungary), the Institute of mathematics and mathematical modeling, Kazakh national University (Kazakhstan), in the Luhansk national University named after Taras Shevchenko (Ukraine), the Institute of mathematics and Informatics at Sofia University (Bulgaria), the National University of Uzbekistan, Samarkand state University, Urgench state University (Uzbekistan) .

The result of the world's research on the improvement of new qualitative properties of nonlinear models, which differ from the properties of linear models is the development of numerical methods and visualization solutions, were obtained a series of scientific results, including, for the heat conduction model is described by a nonlinear equation of parabolic type was found the condition of global existence of solutions and unboundedly solutions on time Cauchy and the Neumann problem (Universidad Autónoma de Madrid, Osaka, Nagoya University), the value of the critical exponent of the global existence of the Fujita type solutions are found for nonlinear parabolic equations (Universidad Complutense de Madrid, Paderborn, Jilin , Chongqing, Changchun University), developed methods for determination of the critical exponent of the second type, defines the boundaries for the initial data of the Cauchy problem for the equation of a porous medium, and for equations with gradient nonlinearity (Sapienza Università di Roma, Chongqing, Osaka University).

In a world on the development of methods and tools for solving and the practical application of the Cauchy problem and boundary value problems for non-linear equations of parabolic type equations, which form the basis of various mathematical models, conduct research in priority areas, including: finding the values of the critical exponent of the existence of a global solution and the critical exponent of Fujita type; to determine the conditions of localization of unbounded

---

[3] Review of foreign scientific research on the topic of the thesis is based on following sources: Journal of Computational Mathematics and Mathematical Physics, Mathematical modeling, Communications on Pure and Applied Analysis, Journal of the Korean Mathematical Society, http://www.springer.com/mathematics, http://www.sciencedirect.com/science/jrnlallbooks/sub/mathematics.

solutions; improving the efficiency of numerical methods; development complex of programs that enable numerical study of nonlinear processes based on the above mentioned properties of nonlinear mathematical models.

The degree of study of the problem. In recent years, the theory of mathematical modeling of the thermal conductivity processes in a nonlinear medium with the source or the absorption of a number of important results have been established. For example, in the theory of energy transfer the new qualitative properties of solutions were found, which have no analogues in the linear heat transfer theory. In the works J.L.Vasquez, H.A. Levine, A.A.Samarskii, A.S.Kalashnikov, V.A.Galaktionov, A.F.Tedeev et al. were found unbounded (blow up) solutions, finite speed of perturbation and the effect of spatial localization of the perturbation, isolated thermal structure of the finite lifetime of the perturbations in the nonlinear medium in the presence of the source and absorption.

In works of Ya.B.Zeldovich, A.S.Kompaneyts and G.I.Barenblatta, later in works of R.Pattle were first observed nonlinear effect of finite speed of propagation of thermal perturbations in the nonlinear medium. J.L.Vazquez, M.A.Herrero, M.Fila, F.Quirós, R.Guillermo, Keng Deng, Julio D. Rossi, P.Groisman, D.Andreucci, A.Tesei, R.Ferreira, A.D.Pablo and H.Fujita were engaged by the definition of the conditions of occurrence of the effect of finite speed and estimates of the solutions with compact support of the Cauchy problem for a porous medium equation and the heat equation with gradient nonlinearity; by determine the asymptotic stability with respect to time X.U.Chen, H.Matano, M.Sugimoto, John King, A.P.Mikhaylov, V.A.Galaktionov, E.Kurkina; H.A.Levine, M.Chunlai, W.Du, J.Yin, Y.Wang, M.X.Wang, Z.Xiang, M.Yongsheng, S.N.Zheng, X.F.Song, Z.X.Jiang, Michael Winkler by determine the properties of mathematical models described by Neumann boundary value problem for degenerate parabolic quasilinear equations of polytrophic filtration; Z.Li, M.Chunlai, W.Du, Guirong Liu, Yuan-Wei Qi, A.F.Tedeev, A.V.Martynenko, N.V.Afanasiev, S.P.Degtyarev. were engaged on the study the conditions of the global solvability and no solvability in finite time of the Cauchy problem for the nonlinear heat equations with variable density, reaction-diffusion and filtration.

In Uzbekistan, the nonlinear problems of filtration and their systems investigated by N.M.Muhitdinov, A.B.Begmatov, B.M.Huzhayarov, I.Huzhaev, A.S.Rasulov, N.Ravshanov and their students. In the works M.M.Aripov and his students (T.Kayumov, D.Eshmatov, A.Haydarov, Zh.Muhammadiev, F.Kabilzhanova, Sh.Settiev, Sh.Sadullaeva, A.Matyakubov, D.Muhammadieva et al.) on the basis of the self-analysis investigated the qualitative properties of the solutions of nonlinear modeling processes occurring in different brunches of natural sciences.

Communication of the theme of dissertation with the scientific- research works of higher educational institution, which is the dissertation conducted in: The dissertation work is done within scientific research projects of the National University of Uzbekistan named after Mirzo Ulugbek on YoF-4-10 - "Numerical modeling of biological systems, such as the population of the Kolmogorov-Fisher" (2012-2014 years), A-5-44 - "Numerical From Biological modeling of nonlinear systems of the population of the Kolmogorov-Fisher "(2015-2017 years).

The aim of research work are the numerical and analytical investigation of qualitative properties of nonlinear mathematical models describing degenerate quasilinear parabolic equations of heat conduction processes (filtration, diffusion) in homogenous and in a medium with variable density to the source and the nonlinear boundary condition, development complex programs for the numerical investigation of nonlinear boundary value problems.

The tasks of research work:

establish critical exponent of Fujita type of mathematical model of heat propagation in an inhomogeneous medium described by nonlocal problem;

to prove the global solvability and no solvability by time within making non-linear model of heat propagation in an inhomogeneous medium with nonlocal boundary condition;

to study the properties of finite speed of propagation of the disturbance and spatial localization of a mathematical model of polytrophic filtration with double non-linearity and with variable density in the case of slow diffusion;

to find the principal term of the asymptotic of solutions of the nonlinear mathematical model of the non-Newtonian polytrophic filtration with a nonlocal boundary condition and a source in the case of a single equation and systems;

investigate the condition of the global solvability and no solvability on time of the solutions of the nonlinear mathematical model of polytrophic filtration systems with nonlocal boundary condition and with variable density;

to build, numerical schemes for qualitative research of nonlinear thermal conductivity properties of mathematical models with variable density and nonlocal boundary condition and develop a computational scheme, algorithm and software package for the numerical solution of nonlinear problems and visualize solutions.

The object of the research work are nonlinear processes heat conduction (filtration, diffusion) described degenerate parabolic equations and systems with nonlocal boundary conditions, with double non-linearity and variable density.

The subject of the research work – the construction of the theory and practice of numerical and analytical study of nonlinear problems with a double and a triple nonlinearity in view of the homogeneity and heterogeneity of the environment and their impact on the studied nonlinear processes.

Research methods. We used self-similar and approximate self-similar methods, apparatus of theorem of solutions for the compare and analysis of various types of solutions, methods of standard equations for the solution of ordinary differential equations and systems, making assessment methods, finite difference methods for constructing numerical schemes, methods iteration sweep, variable method directions.

Scientific novelties of the dissertation research are as follows:

the conditions of global solvability and nosolvability of solutions for nonlinear heat conduction model in a inhomogeneous medium without power with nonlocal boundary condition are determined;

determined the effect of heterogeneity of the medium at the conditions of global solvability and nosolvability for the whole time of the solutions of nonlinear problems;

it is found the value of the type Fujita critical exponent for the model describing the Neumann problem in the case of slow and fast diffusion;

it was found the value of the critical exponent of the global existence of the solution for the model described by the second type of boundary value problem in the case of slow and fast diffusion;

the upper and lower bounds for the generalized solutions of the problem of slow-diffusion heat conduction in homogeneous and inhomogeneous medium are constructed;

were obtained the principal terms of the asymptotic behavior of various self-similar solutions of double and triple nonlinear heat conduction problem by the method of standard equations;

computational schemes have been proposed for the study of qualitative properties of nonlinear mathematical models of thermal conductivity with variable density, developed algorithms, complex programs in Visual Studio 2012 (C #) and visualized solutions of nonlinear problems.

Practical results of the research are as follows:

Established the conditions of solvability and no solvability of the problem of heat conduction with multiple nonlinearities in homogeneous and heterogeneous environment in the case of slow and fast diffusion; using the method of reference equations and the self-similar approach asymptotic formula, which is a good approximation for the initial iteration process in the numerical solution.

Obtained results having qualitative properties: finite and infinite velocity of the perturbation propagation, identification mode with an aggravation, localization of unbounded solutions and the application of these approaches can be used to solve other nonlinear problems arising in various applications

The reliability of obtained results is presented in the thesis in the form of theorems and approval are strictly proven and confirmed by the results of numerical calculations. Using these estimates of the solutions, a numerical analysis of the solutions, the results of which confirm the correctness and effectiveness of the proposed method of calculation using the method of reference equations and the self-similar analysis of retaining non-linear effect.

The scientific and practical significance of the study results. The theoretical significance of the results is the justification of the critical exponent of the theory of critical exponent of the Fujita type and the critical exponent of global existence of solutions by mathematical models described with the Cauchy problem for parabolic equations and nonlinear boundary value problems.

The practical significance of the thesis – the construction of iterative processes, the development of numerical schemes and software made it possible to make a reasonable computational experiments in nonlinear filtering problems, reaction-diffusion, thermal conductivity in various nonlinear media in the case of slow and fast diffusion, revealed new phenomena ultimate speed and localization the solutions the class of problems under consideration.

Implementation of the research results. The obtained scientific results of the dissertation work are applied in practice in the following directions:

obtained upper and lower bounds of weak solutions of slow-diffusion heat conduction in homogeneous and inhomogeneous medium, have been used to prove the correctness of internal and boundary value problem of non-classical equations of mathematical physics in the project F-4-30 «Internal and boundary value problems for operator-differential equations with operator coefficients types» (certificate №ФТК-03-13/743 of the State Committee for science and technologies dated 3 November, 2016). The application of these scientific results made it possible to numerically solve the equations biological population of the Kolmogorov-Fisher and their systems with nonlinear boundary conditions;

asymptotic of solutions of nonlocal problems for parabolic equations with double nonlinearity, describing models of heat propagation processes in a homogeneous medium, were used in establishing the properties of solutions of the inner and boundary value problem in the project F-4-30 «Internal and boundary value problems for operator-differential equations with operator coefficients types» (certificate №ФТК-03-13/743 of the State Committee for science and technologies dated 3 November, 2016). The application of these scientific results allowed to substantiate the correctness of internal and boundary value problem;

suggested computational schemes for the numerical study of qualitative properties of models describing the propagation of heat in a medium with variable density, developed algorithms and a complex of software tools were used for the numerical simulation of internal and boundary value problem of non-classical equations of mathematical physics in the project F-4-30 «Internal and boundary value problems for operator-differential equations with operator coefficients types» (certificate №ФТК-03-13/743 of the State Committee for science and technologies dated 3 November, 2016). The application of these research results have served to visualize the numerical solution of nonlinear boundary value problems.

Approbation of the research results. The research results tested in 14 international scientific conferences: 3rd International Scientific Conference "Actual Problems of Applied Mathematics and Information Technology - Al-Khorezmiy 2012", "Computational and Informational Technologies in Science, Engineering and Education - 2013" (Ust-Kamenogorsk, 2013), "Actual Problems of Applied Mathematics and Information Technologies - Al-Khorezmiy 2014 "(Tashkent, 2014), «Analysis and Applied Mathematics» (Chimkent, 2014), the 5th congress of mathematicians of Turkic world (Issyk-Kul 2014), «Mathematical Methods, Mathematical Models and Simulation in Science and Engineering» (Switzerland, 2014), «Applied Mathematics and Computational Methods» (Athens, 2014), «Mathematical, Computational and Statistical Sciences» (Dubai, 2015), «Pure Mathematics, Applied Mathematics and Computational Methods» (Greece, 2015) " Heat Transfer, Thermal Engineering and Environment »(Italy, 2015),« Applied Mathematics and Informatics» (Spain, 2015), at the international scientific-practical conference« Computational and Informational Technologies in science, Engineering and Education» (Almaty, 2015) «Differential equations and mathematical modeling» (Ulan-Ude, 2015), 7 national scientific conferences:

«Actual problems of mathematics, mathematical modeling and information technologies» (Termez, 2012), «New theorems young mathematicians» (Namangan, 2013) «Modern problems of differential equations and their applications» (Tashkent, 2013), «Applied mathematics and information security» (Tashkent, 2014), «Mathematical physics and related problems of modern analysis» (Bukhara 2015), «Modern methods of mathematical physics and their application» (Tashkent, 2015), «The problems of modern topology and its applications» (Tashkent, 2016). Results of the study were discussed at a scientific seminar "Modern problems of mathematical physics" (Tashkent, 2016), "Modern Problems of Applied Mathematics and Information Technologies" (Tashkent, 2012-2016), "Modern Problems of Computational Mathematics and Information Technologies" of the Institute of Railway Engineers (Tashkent, 2016), "Mathematical modeling of complex systems" software development center products and hardware-software complexes at Tashkent University of information technologies (Tashkent, 2016).

Publication of the research results. On theme of dissertation 37 scientific papers have been published, 13 of them are in the list of scientific publications proposed by the Higher Attestation Commission of the Republic of Uzbekistan for Protection of doctoral theses, including 5 papers in international scientific journals and 8 of them published in national scientific journals.

The structure and volume of the thesis. The dissertation consists of the introduction, four chapters, conclusion, bibliography and appendices. The total volume of the dissertation is 170 pages.

THE MAIN CONTENT OF THE DISSERTATION

The introduction explains the urgency and relevance of the theme of the dissertation, according to research priority areas of science and technology of the Republic of Uzbekistan, there are stated goal and objectives, as well as a subject of study, set out the scientific novelty and practical results of the study, proved the accuracy of the results, disclosed theoretical and practical significance of the results, lists of implementation of the research results in practice, provides information on publications and dissertation structure.

In the first chapter dissertation **«Mathematical modeling of nonlinear processes of heat conduction with double nonlinearity»** is devoted to the study the asymptotic behavior of self-similar solutions of the Cauchy problem and the nonlocal problem for the heat equation in an inhomogeneous medium with the source.

In the first section we describe the properties of the mathematical model with nonlinear heat source and the results of international surveys.

In the second section of this chapter provides basic definitions and auxiliary assertions.

Section 1.3 is devoted to the study of the asymptotic behavior of self-similar solutions of the Cauchy problem for parabolic equations that model the heat propagation in an inhomogeneous medium

$$\rho_1(x)\frac{\partial u}{\partial t}=div\left(\left|\nabla u^l\right|^{p-2}\nabla u^l\right)+\rho_2(x)u^q, \qquad (1)$$

$$u(x,0)=u_0(x),\ \ x\in R^N, \qquad (2)$$

where $\rho_1(x)=|x|^m$, $\rho_2(x)=|x|^n$, which at $n=m=0$. It is regarded as a model for combustion of nonlinear heat conducting medium with a capacity of energy $u^q\ge 0$, depending on the temperature $u=u(t,x)\ge 0$, and the diffusion coefficient $u^{l-1}\left|\nabla u^l\right|^{p-2}\ge 0$.

Equations (1) at $p>1+1/l$ is a degenerate, and therefore the solution is understood in the generalized sense in the field of $Q=\left\{(x,t):x\in R^N, 0<t<T\right\}$ from the class $0\le u(x,t)$, $u^{l-1}\left|\nabla u^l\right|^{p-2}\in C(Q)$, which satisfies the equation (1) in the sense of distributions.

Under the conditions $p>1+1/l$ the equation (1) corresponds to the case of slow diffusion, and at $1<p<1+1/l$ to the case of fast diffusion.

Consider the following self-similar solution

$$u=(T+t)^{-\alpha}f(\xi),\ \ \xi=|x|(T+t)^{-\beta}$$

where $\alpha=\dfrac{p+n}{(q-1)(p+m)-(m-n)(l(p-1)-1)}$, $\beta=\dfrac{q-l(p-1)}{p+n}\alpha$, and the function $f(\xi)$ is a solution of the self-similar problem

$$\xi^{1-N}\frac{d}{d\xi}\left(\xi^{N-1}\left|\frac{df^l}{d\xi}\right|^{p-2}\frac{df^l}{d\xi}\right)+\beta\xi^{m+1}\frac{df}{d\xi}+\alpha\xi^m f+\xi^n f^q=0, \qquad (3)$$

$$f(0)=C>0,\ f(d)=0,\ d<+\infty. \qquad (4)$$

The case of slow diffusion $(p>1+1/l)$. Consider the function:

$$\bar f(\xi)=\left(a-b|\xi|^{\frac{p+m}{p-1}}\right)_+^{\frac{p-1}{l(p-1)-1}},$$

where $a=C^{\frac{l(p-1)-1}{p-1}}$, $b=\dfrac{l(p-1)-1}{l(p+m)}\beta^{\frac{1}{p-1}}$, $(i)_+=\max(0,i)$.

We have the theorems.

Theorem 1. Solution (3), (4) with compact support for $\xi\to(a/b)^{(p-1)/(p+m)}$ has an asymptotic representation $f(\xi)=A\bar f(\xi)(1+o(1))$, where A is the solution of an algebraic equation

$$\left(\frac{1}{y}\right)^{p-1}w^{l(p-1)-1}+\frac{l(b/a)^{\frac{p(1-n)+m+n}{p+m}}}{(bl(p+m))^p}w^{q-1}-\frac{\beta}{(lb(p+m))^{p-1}}=0,$$

if $q=\dfrac{(p-1)(1-l)+1}{p-1}$ and $A=1$, if $q>\dfrac{(p-1)(1-l)+1}{p-1}$.

The case of fast diffusion $(1<p<1+1/l)$. Let

$$\tilde{f}(\xi)=\left(a+k|\xi|^{\frac{p+m}{p-1}}\right)^{-\frac{p-1}{1-l(p-1)}},$$

where $k=\dfrac{1-l(p-1)}{l(p+m)}\beta^{\frac{1}{p-1}}$, $a=C^{\frac{l(p-1)-1}{p-1}}$.

Theorem 2. Let $-p<m<0, \dfrac{l(N+m)+N}{l(N+m)+1}<p<1+1/l,$ then the solution of equation (3) which vanishes at infinity has the asymptotic behavior $f(\xi)=M\tilde{f}(\xi)(1+o(1))$, number M is found by solving an algebraic equation

$$(1-l(p-1))^{1-p}w^{l(p-1)-1}+\frac{lb^{1-n(p-1)/(p-m)}}{(bl(p+m))^{p}}w^{q-1}-\frac{\beta}{(lb(p+m))^{p-1}}=0,$$

if $n=\dfrac{(q-1)(p+m)}{1-l(p-1)}$ and $M=1$, if $n<\dfrac{(q-1)(p+m)}{1-l(p-1)}$.

Further in this section we consider an unbounded self-similar solution of the problem (1), (2) the following form

$$u(t,x)=(T-t)^{-\alpha}g(\xi),\ \xi=|x|(T-t)^{-\beta},$$

where $g(\xi)$ is the solution of the self-similar problem

$$\xi^{1-N}\frac{d}{d\xi}\left(\xi^{1-N}\left|\frac{dg^{l}}{d\xi}\right|^{p-2}\frac{dg^{l}}{d\xi}\right)-\beta\xi^{m+1}\frac{dg}{d\xi}-\alpha\xi^{m}g-\xi^{n}g^{q}=0, \quad (5)$$

$$g(0)=c>0,\ g(d)=0,\ \ d<+\infty. \quad (6)$$

Theorem 3. Let $q>l(p-1)$. Then the solution of problem (5), (6) with compact support has the asymptotic representation

$$g(\xi)=C\overline{g}(\xi)(1+o(1)),$$

where $C=\left(\left(\dfrac{l(p-1)-1}{bl(p+m)}\right)^{p-1}\beta\right)^{\frac{1}{l(p-1)-1}}$, $\overline{g}(\xi)=\left(D-B|\xi|^{\frac{p+m}{p-1}}\right)^{\frac{p-1}{l(p-1)-1}}$, $D>0,\ B>0$.

Corollary 1. At $l(p-1)<q<l(p-1)+\dfrac{p+m}{N+m}$ unbounded solution of the Cauchy problem (1), (2) spatially localized, and the free boundary $x_c(t)$ is asymptotically

$$x_c(t)\sim(D/B)^{(p-1)/(p+m)}(T-t)^{\beta}\to 0$$

at $t\to T^{-}$, those there is place spatial localization solutions.

Section 1.4 is devoted to the study of the asymptotic behavior of solutions of the heat equation with a nonlocal boundary condition in the presence of a source

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial x}\right)+u^{\beta},\quad (x,t)\in R_{+}\times(0,+\infty), \tag{7}$$

$$-\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial x}(0,t)=u^{q}(0,t),\quad t>0, \tag{8}$$

$$u(x,0)=u_0(x)\geq 0,\quad x\in R_{+}. \tag{9}$$

The problem (7)-(9) arises in mathematical modeling of diffusion in nonlinear media, in the study of problems of fluids through porous layers, the dynamics of biological populations, polytrophic filtration, and education structures in synergy and in a number of other areas. It is known that the solution of the problem (7)-(9), under certain conditions of the numerical parameters is globally solvable or unbounded. These questions for the problem (7)-(9) involved in the works Wanjuan Du and Zhongping Li. They got the condition of the global solvability and nosolvability of the solution of the problem (7)-(9) for the whole time the. Conditions of global solvability and nosolvability of a nonlocal problem for the equation of a porous medium is established by Arturo de Pablo, Fernando Li Quiros and Julio D. Rossi.

In the works of Wanjuan Du and Zhongping Li investigated the asymptotic behavior of global and unbounded self-similar solutions.

Case $\beta\leq 1,\ q>2(p-1)$.Consider the following global self-similar solution of problem (7)-(9)

$$u_1(x,t)=t^{\alpha}\varphi(\xi),\ \xi=xt^{-\gamma}, \tag{10}$$

where $\alpha=\dfrac{1}{1-\beta},\ \gamma=\dfrac{p-1-\beta}{p(1-\beta)},\ \varphi(\xi)$ is the solution of the problem

$$\frac{d}{d\xi}\left(\left|\frac{d\varphi}{d\xi}\right|^{p-2}\frac{d\varphi}{d\xi}\right)+\gamma\xi\frac{d\varphi}{d\xi}-\alpha\varphi+\varphi^{\beta}=0, \tag{11}$$

$$-\left|\frac{d\varphi}{d\xi}\right|^{p-2}\frac{d\varphi}{d\xi}\Bigg|_{\xi=0}=0. \tag{12}$$

We have the following

Theorem 4. The solution of (11), (12) with compact support at $\xi\to\left(ap/(p-2)\right)^{\frac{p-1}{p}}\gamma^{\frac{1}{p}}$ has an asymptotic representation

$$\varphi(\xi)=\left(a-\frac{p-2}{p}\gamma^{\frac{1}{p-1}}\xi^{\frac{p}{p-1}}\right)_{+}^{\frac{p-1}{p-2}},(1+o(1)),\ \ a>0.$$

Case $\beta>2p-1,\ q<\dfrac{2(p-1)}{p}$. In this case, the unbounded self-similar solution of the problem (7)-(9) is sought in the form

$$u_2(x,t)=t^{\alpha}\varphi(\xi),\ \xi=xt^{-\gamma},$$

where $\alpha=\dfrac{p-1}{2(p-1)-pq}$, $\gamma=\dfrac{p-1-q}{2(p-1)-pq}$, $\varphi(\xi)$ is the solution of the problem

$$\frac{d}{d\xi}\left(\left|\frac{d\varphi}{d\xi}\right|^{p-2}\frac{d\varphi}{d\xi}\right)+\gamma\xi\frac{d\varphi}{d\xi}-\alpha\varphi=0, \tag{13}$$

$$-\left|\frac{d\varphi}{d\xi}\right|^{p-2}\frac{d\varphi}{d\xi}\Bigg|_{\xi=0}=\varphi^{q}(0). \tag{14}$$

*Theorem 5.*The solution of (13), (14) with compact support for $\xi\to a$ has an asymptotic

$$\varphi(\xi)=C(a-\xi)^{\frac{p-1}{p-2}}(1+o(1)),\ \ a>0,$$

where $C=\left(\dfrac{p-2}{p-1}a\gamma\right)^{1/(p-2)}\dfrac{p-2}{p-1}$.

The critical case $pq=2(p-1)$. This case is a logical continuation of the second case, when $pq=2(p-1)$. In this case the solution of the problem (7)-(9) is sought in the following exponential form

$$u_4(x,t)=e^{\alpha(t-\tau)}\varphi(\xi),\ \xi=xe^{-\gamma(t-\tau)},$$

where $\alpha=\dfrac{p}{2p-1}$, $\gamma=\dfrac{p-2}{2p-1}$, τ is a positive number, the function $\varphi(\xi)$ is a solution of the problem

$$\frac{d}{d\xi}\left(\left|\frac{d\varphi}{d\xi}\right|^{p-2}\frac{d\varphi}{d\xi}\right)+\gamma\xi\frac{d\varphi}{d\xi}-\alpha\varphi=0 \tag{15}$$

$$-\left|\frac{d\varphi}{d\xi}\right|^{p-2}\frac{d\varphi}{d\xi}\Bigg|_{\xi=0}=\varphi^{q}(0). \tag{16}$$

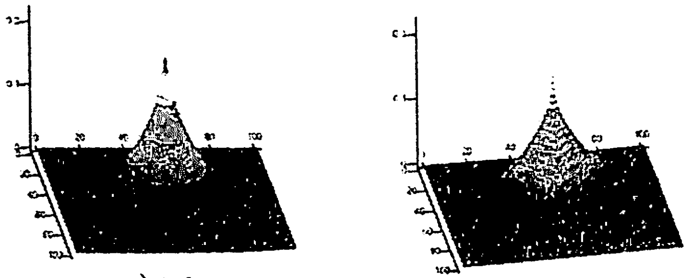
Theorem 6. The solution of (15), (16) with compact support when $\xi\to D^{p-2}\left(\dfrac{p-1}{p-2}\right)^{p}$ has an asymptotic representation

$$\varphi(\xi)=C\left(D^{p-2}\left(\frac{p-1}{p-2}\right)^{p}-\xi\right)^{\frac{p-1}{p-2}}(1+o(1)),\ \ D>0,$$

where $C=\left(\dfrac{p-1}{p-2}\gamma\right)^{1/(p-2)}D$.

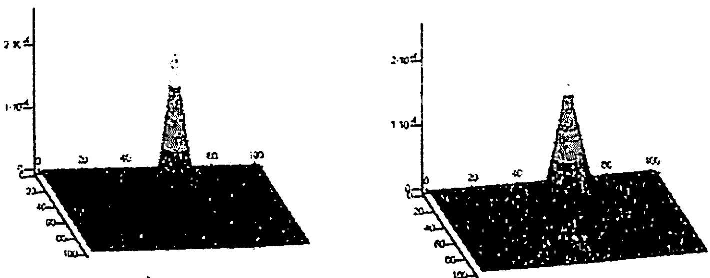
In paragraph 1.5 the numerical schemes for the numerical solution of the Cauchy problem (1), (2) and non-local problem (7)-(9) is considered. It is designed iterative process. It is well known that iterative methods require the presence of a suitable initial approximation, resulting in a rapid convergence to the exact solution and preserving qualitative properties of nonlinear processes under study, it is a major challenge for the numerical solution of nonlinear problems. This difficulty, depending on the value of the numerical parameters of the equation is overcome by a successful choice of initial approximations, which are mainly in the calculations suggested taking asymptotic formula as defined above. Computational experiments and analysis of the numerical results have shown the efficiency of this approach, which reflects the numerical solutions of the nonlinear properties.

Below is a graph of numerical solutions of the problem (1), (2) for the value of certain numerical parameters of which can be seen the nature of the propagation of heat (filtration, diffusion).



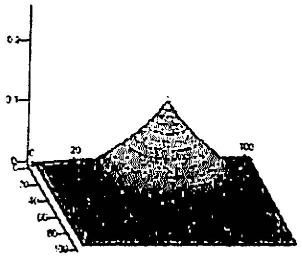
e) t=0.4 f) t=8.4

Fig 1. Numerical solution of the problem (17)-(19) ***p=2.7, q=4.2, l=1.5, m=0.5, n=2.***

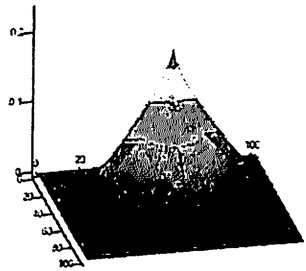


e) t=0.4 f) t=8.6

Fig 2. Numerical solution of the problem (17)-(19): ***p=2.1, q=4, l=1, m=1.5, n=2.*** $(l(p-1)-1 \to 0)$.



e) t=0.2



f) t=5

Fig 3. Numerical solution of the problem (17)-(19): ***p=3, q=3, l=1,5, m=0.5, n=2.*** $\left(q=l(p-1)\right)$.

Fig. 1 is a graph of a global solution to the problem (1), (2) having a finite velocity of propagation properties of indignation, and Fig. 2 global solution near the critical point. Figure 3 is a graph of localized unbounded solutions. In this case the temperature grows without limit over time in a bounded region of the medium.

The second chapter of the thesis «**Mathematical modeling of processes of heat conduction with a nonlocal boundary condition in the one-dimensional case**» is devoted to the study of the condition of the global solvability and no solvability time solution of the nonlinear mathematical model of heat propagation in an inhomogeneous medium with nonlocal boundary condition, obtain the asymptotic behavior of self-similar solutions and numerical simulation of nonlinear heat conduction process.

In Section 2.1, we consider the following heat equation

$$\rho(x)\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\left|\frac{\partial u^m}{\partial x}\right|^{p-2}\frac{\partial u^m}{\partial x}\right),\ (x,t)\in R_+\times(0,+\infty), \tag{17}$$

with nonlinear boundary

$$-\left|\frac{\partial u^m}{\partial x}\right|^{p-2}\frac{\partial u^m}{\partial x}(0,t)=u^q(0,t),\ t>0, \tag{18}$$

and an initial condition

$$u(x,0)=u_0(x)\geq 0,\ x\in R_+, \tag{19}$$

where $\rho(x)=(1+x)^n$, $n>-p$ (case of slow diffusion).

Equation (17) at $m>1$, $1<p\neq 2$, it can be regarded as a non-Newtonian polytrophic filtration, and if $m>1$, $p=2$ Newtonian diffusion, etc., the presence of variable density $\rho(x)$.

Equation (17) under the assumptions of $p>1+\frac{1}{m}$ is called the equation of slow diffusion, and at $1<p<1+\frac{1}{m}$ - fast diffusion. In the case of slow diffusion of the problem (17)-(19) may does not have the classic solutions. Therefore, it is studied the generalized solution from a class

$$0 \le u(x,t), \left|\frac{\partial u^m}{\partial x}\right|^{p-2} \frac{\partial u^m}{\partial x} \in C\left(R_+ \times (0,+\infty)\right).$$

In the works of Z.Li, Ch.Mu, L.Xie studied the conditions of global existence and nonexistence of solutions of the problem (17)-(19) at $\rho(x)=1$ for the case of fast diffusion. They have established the critical exponent of the global existence of solutions and the critical exponent of the Fujita type. Similar results in the case of slow diffusion were obtained in the works Z.Wang, J.Yin, C.Wang, and at $\rho(x)=1$ by the V.A.Galaktionov and H.A.Levin.

We prove the following theorem.

Theorem 7. If $0 \le q \le \dfrac{(m(n+1)+1)(p-1)}{p+n}$, then every solution of the problem (17)-(19) is global.

Theorem 8. If $0 \le q \le \dfrac{(m(n+1)+1)(p-1)}{p+n}$ and the initial function is small enough, then any solution of the problem (17)-(19) is global.

Theorem 9. Let $q > \dfrac{(m(n+1)+1)(p-1)}{p+n}$, then every solution of the problem (17)-(19) is unbounded for large initial data.

Theorem 10. If $\dfrac{(m(n+1)+1)(p-1)}{p+n} < q < m(p-1) + \dfrac{p-1}{p+n}$, then every non-trivial solution of the problem (17)-(19) is unbounded.

Section 2.2 is devoted to the study of solvability and no solvability of the problem (17)-(19) in the case of fast diffusion. It is proved that the above theorems 1-4 has place in this case too.

In Section 2.3 examined the asymptotic behavior of the self-similar solutions of the problem (17)-(19). Let

$$u_+(t,x) = (T+t)^{-\gamma} f(\xi), \ \xi = (1+x)(T+t)^{-\sigma}, \tag{20}$$

where $\gamma = \dfrac{p-1}{q(p+n)-(p-1)(m(n+1)+1)}$, $\sigma = \dfrac{q-m(p-1)}{q(p+n)-(p-1)(m(n+1)+1)}$,

and the function $f(\xi)$ is a solution of problem

$$\frac{d}{d\xi}\left(\left|\frac{df^m}{d\xi}\right|^{p-2} \frac{df^m}{d\xi}\right) + \sigma\xi^{n+1}\frac{df}{d\xi} + \gamma\xi^n f = 0, \tag{21}$$

$$-\left|(f^m)'\right|^{p-2} (f^m)'(1) = f^q(1). \tag{22}$$

The case of slowly diffusion $p > 1 + 1/m$.

Theorem 11. The compactly supported solution of the problem (21), (22) when $\xi \to (a/b)_-^{(p-1)/(p+n)}$ has an asymptotic representation

$$f(\xi)=\left(a-b\xi^{\frac{p+n}{p-1}}\right)_+^{\frac{p-1}{m(p-1)-1}}(1+o(1)),\ a>0,\ \ b=\frac{m(p-1)-1}{m(p+n)}\sigma^{1/(p-1)}.$$

The case of fast diffusion $1<p<1+1/m$.

Theorem 12. For $\xi \to +\infty$ vanishing at infinity the solution of problem (21), (22) has an asymptotic

$$f(\xi)=C\left(a+b\xi^{\frac{p+n}{p-1}}\right)^{\frac{p-1}{1-m(p-1)}}(1+o(1)),\ \ b=\frac{1-m(p-1)}{m(p+n)}\sigma^{1/(p-1)},$$

where $C=\left(\sigma\left((n+1)\left(m(p-1)-1\right)+p+n\right)\right)^{1/[1-m(p-1)]}$.

The critical case $m(p-1)-1=0$.

Theorem 13. Let $\sigma>0,\ q>1$. Then the solution of problem (21), (22) for $\xi \to +\infty$ is an asymptotic representation

$$f(\xi)=\left(a-b\xi^{\frac{p+n}{p-1}}\right)_+^{\frac{p-1}{m(p-1)-1}}(1+o(1)),\ a>0,\ \ \frac{m(p-1)-1}{m(p+n)}\sigma^{1/(p-1)}.$$

In §2.4 on the basis of the results in §2.3 suggested numerical schemes. For this purpose, the equation (17) was approximated with second-order accuracy in the spatial coordinates and the first order with respect to time. For the numerical simulation of the iterative process is designed, in the inner iteration steps node values are calculated by the sweep method. Below are some results of numerical experiments, which were taken as the initial approach the asymptotic formulas obtained in Theorem 11-13.

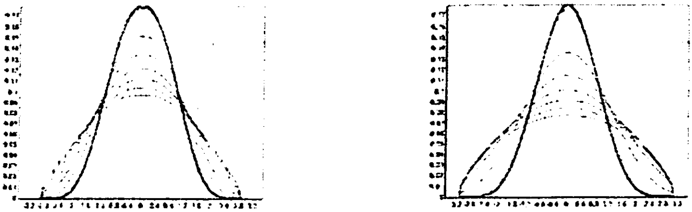


Fig 4. Numerical solution of the problem (17)-(19) when *m=1.5, p=1.75, q=2.85,* 1) *n=0,* 2) *n=-0.25.*

Fig. 4 shows a graph of numerical solution of the boundary problem (17)-(19) in the case of slow diffusion of finite speed of propagation of disturbances properties.

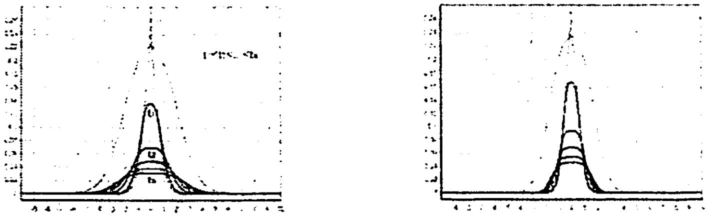


Fig 5. Numerical solution of the problem (17)-(19) when *m=1.5, p=1.55, q=2.85, a=1.5*, 1) *n=0.5*, 2) *n=1*.

Fig. 5 is a graph of numerical solution of the problem (17)-(19) in the case of fast diffusion. Due to the thermal conductivity is unbounded process tends to infinite velocity of disturbance propagation. The speed of propagation of disturbances is much higher than in the case of slow diffusion, in which there is a finite speed of propagation of disturbances. Heat diffusion process covers the whole region and vanishes at infinity.

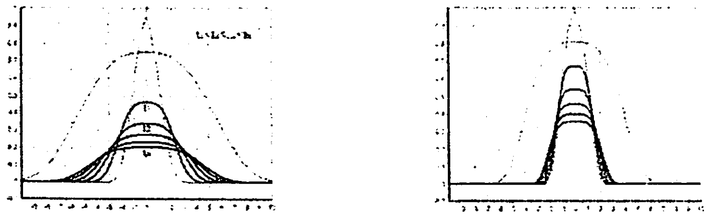


Fig 6. Numerical solution of the problem (17)-(19) when *m=2, p=1.5*, q=3, 1) n=0.25, 2) n=0.85.

Figure 6 corresponds to the numerical solution of the problem (17)-(19) for the critical case. It is a continuation of a similar case of fast diffusion, in which there is a property of infinite velocity of disturbance propagation.

The third chapter of the thesis «**Mathematical modeling of processes of heat conduction with a nonlocal boundary condition. The multidimensional case**» is devoted to the study of qualitative properties of nonlinear multidimensional model of thermal conductivity in a heterogeneous environment with nonlinear boundary conditions.

In §3.1 we consider the following non-local problem

$$\rho(x)u_t = \nabla\left(\left|\nabla u^m\right|^{p-2}\nabla u^m\right), \quad (x,t)\in R_+^N\times(0,+\infty), \tag{23}$$

$$-\left|\nabla u^m\right|^{p-2}\frac{\partial u^m}{\partial x_1}(0,t) = u^q(0,t), \quad t>0, \tag{24}$$

$$u(x,0) = u_0(x), \quad x\in R_+^N, \tag{25}$$

where $R_+^N = \{(x_1,x')\,|\,x'\in R^{N-1}, x_1>0\}, \rho(x) = (1+|x|)^n$, $n>-p$.

Equation (23) describes the mathematical model of different physical processes, the population dynamics, chemical reactions, heat distribution, etc. In particular, the equation (23) describes the unsteady flow of liquids in a porous medium with power dependence of the shear stresses on the moving speed of polytropic conditions. In this case, the equation (23) is called non-Newtonian polytropic filtration equation, which has been intensively studied since the last century. The non-linear boundary condition (24) is used to describe the energy supplied to the inflow boundary. For example, in the heat distribution condition (24) is a flow of heat, therefore, it describes the nonlinear radiation law at the border. This type of boundary condition also appears in combustion problems when the reaction takes place only at the boundary of the container.

Equation (23) under the conditions $p>1+1/m$ corresponds to a slow diffusion, and it is degenerate. And so the decision it is understood in the generalized sense.

Conditions of a global solvability and no solvability of the solution of the problem (23)-(25) in the case $p=2$, $n=0$ are studied by the W. Huang, J.Yin, and Y. Wang, and if $m=1$, $n=0$, W. Du and Z. Li.

Let us introduction notation

$$q_0=\frac{(m(n+1)+1)(p-1)}{p+n},\ q_c=m(p-1)+\frac{p-1}{N+n}.$$

Theorem 14. If there is $0\le q\le q_0$ then any solution of the consideredproblem (23)-(25) is global.

Theorem 15. If $q>q_c$ and the initial function $u_0(x)$ is small enough, then any solution of the problem (23)-(25) is global.

Theorem 16. Suppose $q>q_0$, then any solution of the problem (23)-(25) is blow up for sufficiently large initial data.

Theorem 17. If there is $q_0<q<q_c$ then any non-trivial solution of the problem (23)-(25) have blown up property.

In §3.2 is researched the problem (23)-(25) for the case of fast diffusion. In this case the properties of classical solutions are studied. And the condition of the existence of a global solution in time and blow-up solutions, which proved the validity of Theorems 14-17, turns out.

§3.3 are devoted to the study of the asymptotic behavior of the self-similar solutions of the problem (23)-(25) in the case of slow diffusion and fast diffusion. The self-similar solution is found in the form

$$u_+(t,x)=(T+t)^{-\gamma}f(\xi),$$

where $\xi=|\zeta|$, $\zeta_i=(1+x_i)(T+t)^{-\sigma}$, $i=1,\ldots,N$,

$$\gamma=\frac{p-1}{q(p+n)-(p-1)(m(n+1)+1)},\ \sigma=\frac{q-m(p-1)}{q(p+n)-(p-1)(m(n+1)+1)},$$ the

function $f(\xi)$ satisfied to the solution of the problem

$$\xi^{1-N}\frac{d}{d\xi}\left(\xi^{N-1}\left|\frac{df^m}{d\xi}\right|^{p-2}\frac{df^m}{d\xi}\right)+\sigma\xi^{n+1}\frac{df}{d\xi}+\gamma\xi^n f=0 \tag{26}$$

$$-\left|\left(f^m\right)'\right|^{p-2}\left(f^m\right)'(1)=f^q(1). \tag{27}$$

The case of slow diffusion.

Theorem 18. The solution of the problem (26), (27) with compact support when $\xi\to(a/b)_{-}^{(p+n)/(p-1)}$ has the asymptotic representation

$$f(\xi)=\left(a-b\xi^{\frac{p+n}{p-1}}\right)_{+}^{\frac{p-1}{m(p-1)-1}}(1+o(1)),\ b=\frac{m(p-1)-1}{m(p+n)}\sigma^{1/(p-1)},\ a>0.$$

The fast diffusion case.

Theorem 19. Let $\dfrac{(N+n)(m+1)-n}{(N+n)m+1}<p<1+\dfrac{1}{m}$. Then the solution of problem (26), (27) when $\xi\to+\infty$ takes the asymptotic representation

$$f(\xi)=C\left(a+b\xi^{\frac{p+n}{p-1}}\right)^{\frac{p-1}{1-m(p-1)}}(1+o(1)),\ b=-\frac{m(p-1)-1}{m(p+n)}\sigma^{1/(p-1)},$$

where $C=\left[\sigma\left((N+n)\left(m(p-1)-1\right)+p+n\right)\right]^{\frac{1}{1-m(p-1)}}$.

In the fourth chapter of the thesis «**The properties of the system of the thermal conductivity equations coupled via nonlinear boundary conditions**» is dedicated to studying on the basis of the self-analysis and the comparison solution method of the properties of nonlinear heat conduction and model in two componential media using comparison theorems of solutions getting a top score of global solutions and lower bounds of unbounded solutions.

In the first section of this chapter, the parabolic system of nonlinear heat equations in an inhomogeneous medium associated with a nonlinear boundary condition is examined.

$$\rho_1(x)\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\left|\frac{\partial u^{m_1}}{\partial x}\right|^{p_1-2}\frac{\partial u^{m_1}}{\partial x}\right),\ \rho_2(x)\frac{\partial \upsilon}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\left|\frac{\partial \upsilon^{m_2}}{\partial x}\right|^{p_2-2}\frac{\partial \upsilon^{m_2}}{\partial x}\right),\ x>0,\ t>0, \tag{28}$$

$$-\left|\frac{\partial u^{m_1}}{\partial x}\right|^{p_1-2}\frac{\partial u^{m_1}}{\partial x}\Bigg|_{x=0}=\upsilon^{q_1}(0,t),\ -\left|\frac{\partial \upsilon^{m_2}}{\partial x}\right|^{p_2-2}\frac{\partial \upsilon^{m_2}}{\partial x}\Bigg|_{x=0}=u^{q_2}(0,t) \tag{29}$$

$$u(x,0)=u_0(x)\ge 0,\ \upsilon(x,0)=\upsilon_0(x)\ge 0,\ x>0, \tag{30}$$

where $m_i\ge 1$, $p_i>1+1/m_i$, $q_i>0$, $(i=1,2)$, $\rho_1(x)=(1+x)^n$, $\rho_2(x)=(1+x)^k$, $n>-p_1$, $k>-p_2$, the functions $u_0(x)$ и $\upsilon_0(x)$ are nonnegative, continues with compactly support in R_+.

The system of non-linear parabolic equations (28) comes across in a variety of applications as a model of biological populations, chemical reactions, heat distribution, diffusion, etc. For example, $u(x,t)$ and $\upsilon(x,t)$ represent a density of two biological populations in the process of migration or the temperatures of two porous materials for the period of the heat distribution.

In the case of constant density, when $\rho_1(x)=\rho_2(x)=1$ the problem (28)-(30) studied by Z. Xiang, Ch. Mu and Y. Wang. The work of the F. Quiros and J. D. Rossi is devoted to the case $p_1=p_2=2$, $\rho_1(x)=\rho_2(x)=1$.

The main theorems of this section are the following theorems.

Theorem 20. Suppose $q_1q_2 \le \dfrac{(p_1-1)(p_2-1)(m_1(n+1)+1)(m_2(k+1)+1)}{(p_1+n)(p_2+k)}$,

then any solution of the problem (28)-(30) is global.

Theorem 21. Suppose, $q_1q_2 > \dfrac{(p_1-1)(p_2-1)(m_1(n+1)+1)(m_2(k+1)+1)}{(p_1+n)(p_2+k)}$

then any solution of the problem (28)-(30) is unbounded for sufficiently large initial data.

The value $q_1q_2 = \dfrac{(p_1-1)(p_2-1)(m_1(n+1)+1)(m_2(k+1)+1)}{(p_1+n)(p_2+k)}$ is the critical global existence exponent of solutions.

We introduce the notation

$$\alpha_1 = \frac{q_1(p_1+n)(p_2-1)+(p_1-1)(p_2-1)(m_2(k+1)+1)}{q_1q_2(p_1+n)(p_2+k)-(p_1-1)(p_2-1)(m_1(n+1)+1)(m_2(k+1)+1)},$$

$$\alpha_2 = \frac{q_2(p_2+k)(p_1-1)+(p_1-1)(p_2-1)(m_1(n+1)+1)}{q_1q_2(p_1+n)(p_2+k)-(p_1-1)(p_2-1)(m_1(n+1)+1)(m_2(k+1)+1)}$$

$$\beta_1 = \frac{q_1\alpha_2 - m_1\alpha_1(p_1-1)}{p_1-1}, \quad \beta_2 = \frac{q_2\alpha_1 - m_2\alpha_1(p_2-1)}{p_2-1}.$$

Theorem 22. Let, $q_1q_2 > \dfrac{(p_1-1)(p_2-1)(m_1(n+1)+1)(m_2(k+1)+1)}{(p_1+n)(p_2+k)}$,

$\min\{(n+1)\beta_1-\alpha_1,(k+1)\beta_2-\alpha_2\}>0$ and initial data are small enough, then any solution of the problem (28)-(30) is global.

Theorem 23. Suppose that

$$q_1q_2 > \frac{(p_1-1)(p_2-1)(m_1(n+1)+1)(m_2(k+1)+1)}{(p_1+n)(p_2+k)},$$

$\max\{(n+1)\beta_1-\alpha_1,(k+1)\beta_2-\alpha_2\}<0$, while every non-trivial solution of the problem considered problem (28)-(30) have blown up property.

The value $\min\{(n+1)\beta_1-\alpha_1,(k+1)\beta_2-\alpha_2\}=0$ is called the critical exponent of Fujita type.

In §4.2 studied the properties of solutions of the system (28), (30) describing the process of heat propagation in a two componential medium with the following nonlocal boundary condition

$$-\left|\frac{\partial u^{m_1}}{\partial x}\right|^{p_1-2}\frac{\partial u^{m_1}}{\partial x}\Bigg|_{x=0}=u^{\gamma_1}(0,t)\upsilon^{q_1}(0,t),-\left|\frac{\partial \upsilon^{m_2}}{\partial x}\right|^{p_2-2}\frac{\partial \upsilon^{m_2}}{\partial x}\Bigg|_{x=0}=u^{\gamma_2}(0,t)\upsilon^{q_2}(0,t),\ (31)$$

where $m_i\ge 1,\ p_i>1+1/m_i,\ q_i>0,\ \gamma_i>0,\ \rho_i(x)=(1+x)^{n_i},\ \ n_i>-p_i,(i=1,2)$. We obtain conditions on the numerical parameters under which the solution of the problem (28), (30), (31) is globally solvability or nosolvability. Consequently, the values of the critical exponent type Fujita critical exponent and the global existence of solutions are set.

In §4.3 the asymptotic behaviour of the self-similar solutions of the problem (28)-(30) and (28), (30), (31) is studied.

Consider the following self-similar solution of the problem (28)-(30)

$$\begin{cases} u_+(x,t)=(T+t)^{-\alpha_1}\varphi(\xi),\ \xi=(1+x)(T+t)^{-\beta_1}, \\ \upsilon_+(x,t)=(T+t)^{-\alpha_2}\phi(\eta),\ \eta=(1+x)(T+t)^{-\beta_2}, \end{cases}$$

where α_i, β_i $(i=1,2)$ - are defined above constants, $T>0$, functions$(\varphi(\xi),\phi(\eta))$, solution of the problem

$$\begin{cases} \dfrac{d}{d\xi}\left(\left|\dfrac{d\varphi^{m_1}}{d\xi}\right|^{p_1-2}\dfrac{d\varphi^{m_1}}{d\xi}\right)+\beta_1\xi^{n+1}\dfrac{d\varphi}{d\xi}+\alpha_1\xi^{n}\varphi=0, \\ \dfrac{d}{d\eta}\left(\left|\dfrac{d\phi^{m_2}}{d\eta}\right|^{p_2-2}\dfrac{d\phi^{m_2}}{d\eta}\right)+\beta_2\eta^{k+1}\dfrac{d\phi}{d\eta}+\alpha_2\eta^{k}\phi=0, \end{cases} \quad (32)$$

$$-\left|\frac{d\varphi^{m_1}}{d\xi}\right|^{p_1-2}\frac{d\varphi^{m_1}}{d\xi}(1)=\phi^{q_1}(1),\ -\left|\frac{d\phi^{m_2}}{d\eta}\right|^{p_2-2}\frac{d\phi^{m_2}}{d\eta}(1)=\varphi^{q_2}(1). \quad (33)$$

Consider the following functions obtained using the method of standard equations

$$\bar\varphi(\xi)=\left(a_1-b_1\xi^{\frac{p_1+n}{p_1-1}}\right)^{\frac{p_1-1}{m_1(p_1-1)-1}},\ \bar\phi(\eta)=\left(a_2-b_2\eta^{\frac{p_2+k}{p_2-1}}\right)^{\frac{p_2-1}{m_2(p_2-1)-1}},$$

where $a_i>0\ (i=1,2), b_1=\dfrac{m_1(p_1-1)-1}{m_1(p_1+n)}\beta_1^{\frac{1}{p_1-1}}>0, b_2=\dfrac{m_2(p_2-1)-1}{m_2(p_2+k)}\beta_2^{\frac{1}{p_2-1}}>0$.

We prove the following.

Theorem 24. Suppose that $\min\left\{\dfrac{p_1-1}{m_1(p_1-1)-1},\dfrac{p_2-1}{m_2(p_2-1)-1}\right\}>0$, while solutions with compact support systems of equations (32) with $\xi\to(a_1/b_1)^{\frac{p_1-1}{p_1+n}},\eta\to(a_2/b_2)^{\frac{p_2-1}{p_2+k}}$ possess an asymptotic

$$\varphi(\xi)=\tilde{\varphi}(\xi)(1+o(1)),\quad \phi(\eta)=\tilde{\phi}(\eta)(1+o(1)),$$

where $\tilde{\varphi}(\xi)$, $\tilde{\phi}(\eta)$ the functions defined above.

Paragraph §4.4 is devoted to the numerical modelling of the system (28)-(30). The numerical schemes for problem (28)-(30), the algorithm, complex the program are developed. The shell and the program code for the numerical solution developed in language C # (Visual Studio 2010). For visualization of the numerical solutions are incorporated into the program graphics library and graphics module Chart 3-D Plot mathematical package of the Mathcad.

Let's see results of numerical experiments. Grid spacing is chosen small enough h = 0.05, N = number of nodes as the 10000 and the accuracy specified iteration. The score held until t=2 increments.

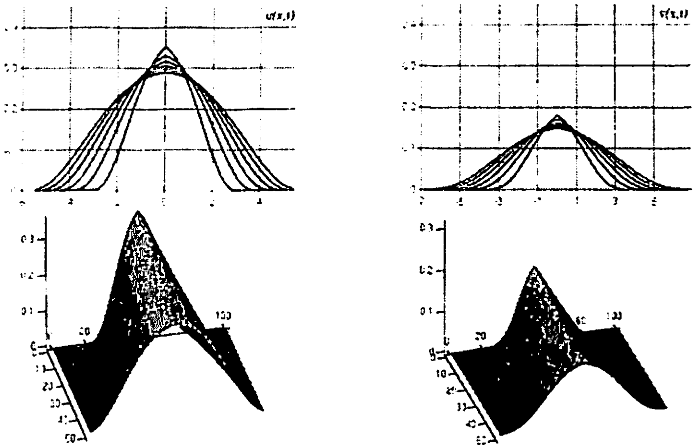


Fig 7. Numerical solution of the problem (17)-(19): ***n1=0.7, m1=1.5, p1=1.85, q1=3, n2=0.5, m2=1.3, p2=1.9, q2=3.5.***

Fig. 7 shows the results of numerical solution of the problem (28)-(30) when $\min\{(n+1)\beta_1-\alpha_1,(k+1)\beta_2-\alpha_2\}>0$ and $m_i(p_i-1)-1>0$ that corresponding to the case of slow diffusion. If $m_i(p_i-1)-1>0$ it follows from the asymptotic formula given in §4.3 and graphs that heat propagation occurs at a finite rate. The depth of perturbation of the thermal wave depends on the time and the front (the point at $u_+(x,t)$, $\upsilon_+(x,t)$ which vanish) waves for each environment is at the endpoint:. $x_{\beta_1}=(a_1/b_1)^{\frac{p_1-1}{p_1+n}}(T+t)^{\beta_1}<\infty$ $x_{\beta_2}=(a_2/b_2)^{\frac{p_2-1}{p_2+k}}(T+t)^{\beta_2}<\infty.$

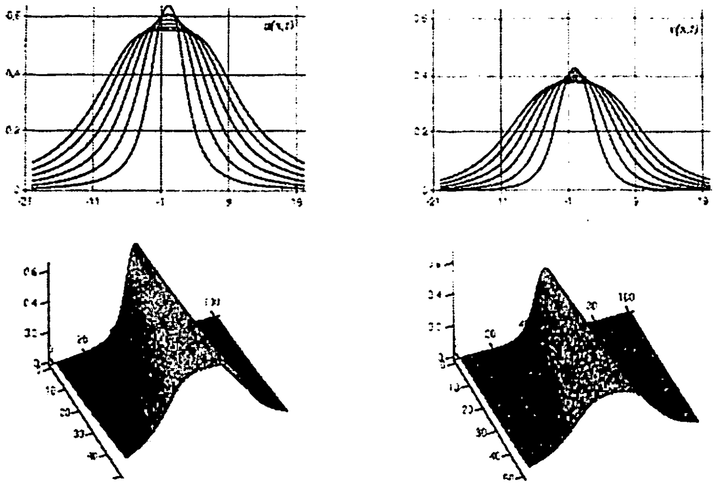


Fig 8. Numerical solution of the problem (17)-(19): ***n1=0.5, m1=1.5 p1=1.3 q1=3, n2=0.75, m2=1.6 p2=1.4 q2=3.5.***

Fig. 8 shows the results of numerical calculations of the problem (28)-(30) in the values of numerical parameters, m_i p_i $(i=1,2)$ formally corresponding to the case of fast diffusion $m_i(p_i-1)-1<0$. In this case heat distribution process occurs with infinite velocity due to thermal conductivity is unbounded. Thermal disturbance propagates from the heated area to could more quickly than in the case of slow diffusion.

CONCLUSION

On the basis of studies on the doctoral thesis "Mathematical modeling of the heat conduction processes in a medium with double nonlinearity" are presented the following conclusions:

1. For nonlinear mathematical model of heat propagation, non-Newtonian polytrophic filtration, diffusion, described by nonlinear parabolic equations with nonlocal boundary condition and with variable density studied conditions for global solvability and no solvability solutions in time is established.
2. The critical exponent type Fujita and a critical exponent of solvability for nonlocal problem of heat propagation in an inhomogeneous medium are found.
3. The upper and lower bounds of global and unbouded generalized solutions for nonlinear mathematical models of thermal conductivity with variable density and nonlocal boundary condition.
4. Established properties of finite speed of propagation of disturbances and spatial localization of solutions for nonlinear mathematical model of polytrophic filtration with double non-linearity and with variable density in the case of slow diffusion.

5. The properties of the infinite speed of propagation of disturbances of the nonlinear mathematical model for the polytrophic filtration with double non-linearity and with variable density in the case of fast diffusion.

6. We prove the asymptotic behavior of generalized solutions with compact support of the Cauchy problem for a degenerate heat equation in an inhomogeneous medium with the source and with variable density.

7. The condition of the global solvability and no solvability solutions in time and asymptotic representation of solutions of systems of nonlinear equations for the modeling of polytrophic filtration with a nonlocal boundary condition with variable density is proved.

8. Installed above the qualitative properties of solutions and estimates solution of nonlinear problems with nonlocal boundary conditions allowed to conduct numerical calculations, giving new nonlinear effects.

9. The computing schemes, algorithms and software systems in the environment of Visual Studio 2012 (C #) for the numerical simulation of nonlinear problems of filtration and visualization are developed.

ЭЪЛОН ҚИЛИНГАН ИШЛАР РЎЙХАТИ
СПИСОК ОПУБЛИКОВАННЫХ РАБОТ
LIST OF PUBLISHED WORKS

I бўлим (I часть; I part)

1. Арипов М.М., Рахмонов З.Р. К асимптотике автомодельных решений одной нелинейной задачи политропической фильтрации с нелинейным граничным условием // Журн. Вычислительные технологии, т. 18, №4. 2013. Часть I. 50-55. (01.00.00; СНГ №18)
2. Арипов М.М., Рахмонов З.Р. Об асимптотике автомодельных решений задачи одной нелинейной теплопроводности с переменной плотностью // ДАН РУз. №4. 2013. 3-5. (01.00.00; №7).
3. Арипов М.М., Рахмонов З.Р. К асимптотике решений одной нелинейной задачи теплопроводности с градиентной нелинейностью // Узб. Мат. Журн. 2013. №3. 19-27. (01.00.00; №6)
4. Арипов М.М., Рахмонов З.Р. К асимптотике автомодельных решений одной нелинейной задачи политропической фильтрации с двойной нелинейностью // ДАН РУз. №2. 2014. 12-14. (01.00.00; №7).
5. Рахмонов З.Р. Оценка и асимптотика решений одной нелинейной задачи фильтрации с нелокальным граничным условием // Вестник НУУз. 2014. № 2/1, 135-141. (01.00.00; №8).
6. Рахмонов З.Р. Оценка и асимптотика автомодельных решений одной нелинейной задачи фильтрации с переменной плотностью и с нелокальным граничным условием // ДАН Руз. №3, 2014. 7-10. (01.00.00; №7).
7. Рахмонов З.Р. О повеление решений одной задачи нелинейной фильтрации с переменной плотностью и с нелокальным граничным условием // Узб. Матем. Журнал, №1, 2015, 75-85. (01.00.00; №6)
8. Арипов М.М., Рахмонов З.Р. Об асимптотики решений задачи теплопроводности с источником и нелинейным граничным условием // Вычислительные технологии, Том 20, Часть 2, 2015, 216-223. (01.00.00; СНГ №18)
9. Рахмонов З.Р. К асимптотичсской поведение решений одной нелинейной задачи теплопроводности в неоднородной среде с источником // Вестник НУУз, №1(2), 2015, 76-81. (01.00.00; №8).
10. Aripov M., Rakhmonov Z. On the behavior of the solution of a nonlinear multidimensional polytropic filtration problem with a variable coefficient and nonlocal boundary condition // Contemporary Analysis and Applied Mathematics, Vol. 4, № 1, 2016, 23-32. (№5) Global IF=0.469
11. Aripov M., Rakhmonov Z. Estimates and Asymptotic of Self-similar Solutions to a Nonlinear Filtration Problem with Variable Density and Nonlocal Boundary Conditions // Universal Journal of Computational Mathematics, 4, 2016, 1-5. (01.00.00; США №20)
12. Rakhmonov Z. On the properties of solutions of multidimensional nonlinear filtration problem with variable density and nonlocal boundary condition

in the case of fast diffusion // Journal of Siberian Federal University. Mathematics & Physics 2016, 9(2), 236–245. (01.00.00; №59)

13. Рахмонов З. Оценки решений нелинейной системы уравнения теплопроводности с переменной плотностью и с нелокальным граничным условием // Вестник НУУз, №1(2), 2016, 145-154. (01.00.00; №8)

II бўлим (I часть; I part)

14. Рахмонов З.Р. Об одной нелинейной задачи неньютоновской фильтрации в неоднородной среде с нелокальным граничным условием // Вестник КазНУ. 2014, №3(82), 45-56.

15. Рахмонов З.Р. К численному решению одной нелинейной задачи теплопроводности. Материалы Межд. Конф. «Актуальные проблемы прикладной математики и информационных технологий – аль-Хорезми 2012». Тошкент. 19-22 декабрь 2012. 232-235.

16. Рахмонов З.Р. Асимптотика автомодельных решений уравнения теплопроводности с градиентной нелинейностью. Тезисы Межд. Конф. «Актуальные проблемы прикладной математики и информационных технологий – аль-Хорезми 2012». Тошкент. 19-22 декабря 2012 г. 57-58.

17. Арипов М., Рахмонов З., Абдуллаев Д. К асимптотике неограниченных решений одной нелинейной задачи теплопроводности. Материалы Респ. Научной конференции «Актуальные вопросы математики, математического моделирования и информационных технологий». Термиз. 21-22 ноября 2012 г. 16-19.

18. Арипов М.М., Рахмонов З.Р. Исследование свойств решений задачи теплопроводности с градиентной нелинейностью с поглощением или источником. Материалы Респ. Научной конференции «Ёш математикларнинг янги теоремалари-2013». Наманган, 2013, 28-31.

19. Рахмонов З. Об асимптотике автомодельных решений одной нелинейной задачи политропической фильтрации. Республиканской научной конф. «Современные проблемы дифференциальных уравнений и их приложения». Ташкент, 21-23 ноября 2013 года. ст. 174-175.

20. Zafar Rakhmonov. On the behavior of solutions of the Cauchy problem for a parabolic equation with inhomogeneous density and sources. The V Congress of Turkic World Mathematicians, Bulan-Sogottu, Kyrgyzstan, June 5-7, 2014. 195.

21. Рахмонов З.Р. Исследование свойств одной модели двойной нелинейной диффузии с переменной плотностью и источником. Материалы научно-технической конференции «Прикладная математика и информационная безопасность». Ташкент. 28-30 апрель, 2014 г, 181-184.

22. Рахмонов З. Об одной многомерной нелинейной задачи фильтрации в неоднородной среде с нелокальным граничным условием. Труды международной конференции "Актуальные проблемы прикладной математики и информационных технологий–Аль-Хорезми 2014" 15-17 сентября 2014года, 134-136.

23. Aripov M., Rakhmonov Z. The Cauchy problem for a doubly nonlinear parabolic equation with inhomogeneous density and sources. Second International conference on Analysis and Applied Mathematics, September 11-13, 2014, Shymkent, Kazakhistan.

24. Aripov M., Rakhmonov Z. Conditions for the solvability and nosolvability of multivariate nonlinear filtering problems in inhomogeneous media. International conference on Applied numerical mathematics and scientific computation. Athens, Greece, 2014, 52-55.

25. M. Aripov, Z. Rakhmonov. Numerical simulation of a nonlinear problem of a fast diffusive filtration with a variable density and nonlocal boundary conditions. Mathematical Methods, Mathematical Models and Simulation in Science and Engineering, Series 23, 2014, 72-77.

26. Aripov M., Rakhmonov Z. On estimates and asymptotic solutions of double nonlinear problems reaction - diffusion with sources and inhomogeneous density. Mathematics and Computers in Science and Engineering Series, 41, 2015, 126-130.

27. Aripov M., Rakhmonov Z. On the Critical Curves of a Degenerate Parabolic Equation with Multiple nonlinearities and Variable Density. Recent Advances in Mechanical Engineering Series 16, 2015, 160-164.

28. Aripov M., Rakhmonov Z. Critical Exponents for the Multidimensional Heat Conduction Equation with a Nonlinear Boundary Condition and Variable Density. Mathematics and Computers in Science and Engineering Series, 48, 2015, 121-125.

29. Aripov M., Rakhmonov Z. Numerical Modeling of Nonlinear Heat Transfer Problems with a Variable Density and Source. Mathematics and Computers in Science and Engineering Series, 40, 2015, 92-97.

30. Рахмонов З.Р. О критической экспоненты многомерной задачи нелинейной фильтрации с переменной плотностью и нелокальным граничным условием. Тезисы докладов респ. научной конф. «Современные методы математической физики и их приложения», Ташкент, 15-17 апреля 2015, 200-201.

31. Арипов М.М, Рахмонов З.Р. Критические экспоненты для вырождающегося уравнения параболического типа с двойной нелинейностью и нелокальным граничным условием. Тезисы докладов Международной конференции «Дифференциальные уравнения и математическое моделирование». 22-27 июня 2015 года, г. Улан-Удэ, оз. Байкал, 53-54.

32. Aripov M.M., Rakhmonov Z.R. On the asymptotics of solutions of heat transfer problems with sources and nonlinear boundary conditions. Abstracts International Conference "Computational and Informational Technologies in Science, Engineering and Education", 2015, Almaty, Kazakhstan, 110-111.

33. Арипов М.М., Рахмонов З.Р. Критические экспоненты для задачи теплопроводности с переменной плотностью и нелокальным граничным условием. Материалы Респ. Научной конференции «Математическая физика и родственные проблемы современного анализа», Бухара, 2015, 321-323.

34. Рахмонов З.Р. Об оценки решений нелинейной системы уравнения теплопроводности в неоднородной среде с нелокальным граничным условием. Тезисы докладов Респ. Научной конференции «Проблемы современной топологии и её приложения», Ташкент, 2016, 243-245.

35. Aripov M., Rakhmonov Z. Global Existence And Nonexistence For A Degenerate Parabolic System Coupled Via Nonlinear Boundary Flux. Int. Conf. "Nonlinear Analysis and applications", Samarkand, 2016, 74-75.

36. Рахмонов З. Программа для численного исследования моделей теплопроводности с двойной нелинейностью. № DGU 02957, 31.12.2014.

37. Рахмонов З. Программа для численного исследования нелинейных моделей политропической фильтрации с переменной плотностью. № DGU 03632, 28.03.2016.

Автореферат «ТАТУ хабарлари» журнали таҳририятида таҳрирдан ўтказилди. (26.10.2016 йил)

Босишга рухсат этилди: 14.11.2016 йил
Бичими 60х45 $^{1}/_{16}$, «Times New Roman»
гарнитурада рақамли босма усулида босилди.
Шартли босма табоғи 5. Адади: 100. Буюртма: № 338.

Ўзбекистон Республикаси ИИВ Академияси,
100197, Тошкент, Интизор кўчаси, 68

«АКАДЕМИЯ НОШИРЛИК МАРКАЗИ» ДУК